Astérisque

M. DERRIDJ
C. ZUILY

Régularité analytique et Gevrey, pour des classes d'opérateurs elliptiques paraboliques dégénérés du second ordre

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 371-381
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__371_0>

REGULARITE ANALYTIQUE ET GEVREY POUR DES CLASSES D'OPERATEURS ELLIPTIQUES PARABOLIQUES DEGENERES DU SECOND ORDRE.

par : M. DERRIDJ et C. ZUILY
Université de PARIS-XI

---§---

I. INTRODUCTION.

Le problème de la régularité analytique et Gevrey des opérateurs dégénérés a fait l'objet récemment de travaux consacrés à diverses classes de tels opérateurs, [1], [2],[3],[4],[6],[9], etc.. . Nous considérons ici, dans une première partie, le cas des opérateurs $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_o + c$ introduits par L. HÖRMANDER dans [5].

Nous montrons que, bien que n'étant pas en général hypoelliptiques analytiques (voir [1]), ces opérateurs sont, sous des hypothèses convenables, Gevrey hypoelliptiques d'ordre s pour $s \geqq s_o$, s_o dépendant de la structure de la famille de champs de vecteurs $(X_o,\dots,X_r)$.

Nous donnons aussi des résultats de non régularité dans les classes de Gevrey lorsque certaines des hypothèses ne sont pas vérifiées par l'opérateur P.

Dans une seconde partie, nous donnons des théorèmes de régularité analytique à l'intérieur et jusqu'au bord pour d'autres classes d'opérateurs elliptiques dégénérés du second ordre, ainsi que certains résultats de non hypoellipticité analytique analogues à ceux de [1] .

II. REGULARITE GEVREY DES OPERATEURS DE HÖRMANDER.

1. NOTATIONS et RAPPELS.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient $X_0, X_1, \ldots, X_r$, des champs de vecteurs réels dans Ω, de classe C^∞ et $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + c$ où $c \in C^\infty(\Omega)$.

DEFINITION 2.1. $\mathscr{L}(X_0,\ldots,X_r)$ désignera l'algèbre de Lie engendrée par $X_0,\ldots,X_r$, c'est-à-dire le plus petit C^∞ - module stable par l'opération crochet (*) et contenant les champs de vecteurs $X_0,\ldots,X_r$.

DEFINITION 2.2. On dira que la famille $(X_0,\ldots,X_r)$ vérifie la condition $(H_1.\Omega)$(resp.$(H_2.\Omega)$) si $\mathscr{L}(X_0,\ldots,X_2)$(resp. $\mathscr{L}(X_1,\ldots,X_r)$) est de rang maximum en tout point de Ω.

Pour $s \in [1, +\infty[$, nous noterons $G^s(\Omega)$ $(G^1(\Omega) = \mathcal{A}(\Omega))$ l'espace des fonctions u de classe $C^\infty(\Omega)$ telles que pour tout compact K de Ω il existe une constante $M_K > 0$ telle que pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ on ait :

$$\sup_K |D^\alpha u(x)| \leqq M_K^{|\alpha|+1} (\alpha!)^s$$

$G^s(K)$ désignera l'espace des restrictions à K des fonctions de classe G^s sur un voisinage de K.

THEOREME 2.3. (L.HÖRMANDER [5])

Soit $(X_0,\ldots,X_r)$ une famille de champs de vecteurs dans Ω, réels de classe C^∞, vérifiant la condition $(H_1.\Omega)$.
Soit $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + c$ où $c \in C^\infty(\Omega)$. Alors pour tout compact K de Ω, il

(*) Le crochet de deux opérateurs P,Q est défini par $[P,Q] = PQ - QP$.

existe $C_K > 0$ et $\delta_K > 0$ tels que

(2.1) $$\|u\|_{H^{\delta_K}} \leqslant C_K \left(\|Pu\|' + \|u\|_{L^2}\right) \qquad \forall\, u \in C_o^\infty(K)$$

où $$\|Pu\|' = \sup_{v \in C_o^\infty(\Omega)} \left| \int_\Omega Pu.v\, dx \right| \Big/ \|v\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{r} \|X_j v\|_{L^2} .$$

De plus, l'opérateur P est hypoelliptique dans Ω c'est-à-dire $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $Pu \in C^\infty(\omega)$ impliquent $u \in C^\infty(\omega)$, $\forall\, \omega$ ouvert de Ω.

Remarque 2.4.

Le nombre δ_K invoqué au théorème 2.3. est obtenu de la manière suivante :

Pour $I = (i_1, \dots, i_k)$, $i_j \in \{0, 1, \dots, r\}$, notons :

$$X_I = [X_{i_1}, [X_{i_2}, [\, , \dots [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}]\,] \dots]$$

et :

$$\frac{1}{\rho(I)} = \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{\rho_{i_j}} \quad \text{où} \quad \rho_{i_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_j = 1, 2, \dots, r \\ \frac{1}{2} & \text{si } i_j = 0 \end{cases}$$

Soit $(X_{I_1}, \dots, X_{I_n})$ une famille de champs de vecteurs engendrant l'algèbre de Lie dans K ; on pose alors :

$$\rho_K = \operatorname*{Inf}_{\ell = 1, \dots, N} \rho(I_\ell) .$$

Le nombre δ_K apparaissant dans l'inégalité (2.1) est tel que $\delta_K < \rho_K$.

2. RESULTATS.

THEOREME 2.5.

Soient $(X_0,\dots,X_r)$ une famille de champs de vecteurs réels de classe C^∞ dans Ω vérifiant la condition $(H_1.\Omega)$ et $P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + c.$.

Soit K un compact de Ω d'intérieur non vide. Alors pour tout $s > \frac{2}{\rho_K}$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $Pu \in G^s(K)$ impliquent $u \in G^s(K)$ lorsque les coefficients de P sont dans $G^s(\Omega)$.

THEOREME 2.6.

Nous gardons les notations du théorème précédent. Supposons la condition $(H_2.\Omega)$ satisfaite, alors le même résultat est vrai pour $s > \frac{1}{\rho_K}$.

THEOREME 2.7.

Supposons que l'espace vectoriel engendré par les champs de vecteurs $X_i(x)$, $[X_i, X_j](x)$ $i,j = 1,2,\dots,r$ soit de dimension n en tout point de Ω, alors le résultat du théorème 2.5. est vrai pour $s \geqslant 2$.

Remarque 2.8.

Le résultat du théorème 2.7 ne peut en général être amélioré comme le prouve le cas de l'opérateur $P = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, qui ne possède pas la régularité G^s pour $s < 2$.

Cet exemple est dû à M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC [1].

3. PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION.

Nous utilisons la méthode des ouverts emboîtés ([7]). Plus précisément, soit $\omega \subset K$ et $\varepsilon > 0$; posons :

$$\omega_\varepsilon = \{x \in \omega : d(x, \omega) > \varepsilon\}.$$

Le théorème 2.5 résulte alors de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.9.

Les hypothèses sont celles du théorème 2.5. Soit s un nombre réel tel que $s > \frac{2}{\rho_K}$. Il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, tout $u \in C^\infty(\Omega)$ et tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\varepsilon^{s|\alpha|} \|D^\alpha u\|_{L^2(\omega_{j\varepsilon})} \leq B^{|\alpha|+1} \quad ; \quad |\alpha| \leq j \tag{2.2}$$

Cette proposition se démontre par récurrence sur l'entier j en utilisant le Lemme suivant :

LEMME 2.10.

Sous les hypothèses du théorème 2.5, pour tous entiers $m, k \in \mathbb{N}^*$, tout rationnel $\theta = \frac{p}{q} < \rho_K$, il existe des constantes positives $C_1 = C_1(k, p, q)$, $C_2 = C_2(m, p, q)$, telles que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \varepsilon_1 > 0$, $\forall\, u \in C^\infty(\Omega)$:

$$\|(R\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1})u\|_{H^{k\theta}} \leq C_1 \left\{ \sum_{\ell=0}^{k-1} \|P\Psi T_{\ell\theta}(R\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1})u\|' + \|(R\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1})u\|_{L^2} \right\} \tag{2.3}$$

$$\|u\|_{H^{mp}(\omega_{\varepsilon+\varepsilon_1})} \leq \left\{ C_2 \sum_{\ell=0}^{q-1} \|P\Psi T_{\ell\theta}\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1}u\|' + \|\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1}u\|_{L^2} \right\} \tag{2.4}$$

où $\varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1}$ est une fonction de $C_0^\infty(\omega_{\varepsilon_1})$ valant 1 sur $\omega_{\varepsilon+\varepsilon_1}$ telle que :

$$\sup_{\omega_{\varepsilon_1}} |D^\alpha \varphi_{\varepsilon,\varepsilon_1}| \leq C_\alpha\, \varepsilon^{-|\alpha|}$$

R un opérateur différentiel à coefficients $C^\infty(\Omega)$, $\Psi \in C_0^\infty(K)$ égale à 1 sur ω et T_σ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole $(1 + |\xi|^2)^{\sigma/2}$.

Ce lemme se démontre par récurrence sur k à partir de l'inégalité (2.1).

III. RESULTATS DE NON REGULARITE .

Dans ce paragraphe, nous considérons une famille $X_o,\dots,X_r$ de champs de vecteurs dans Ω réels à coefficients analytiques ne vérifiant pas la condition $(H_1.\Omega)$ et tels que, de plus, on ait :

$$(\text{N.T.D.}) \qquad \forall\ x_o \in \Omega \qquad \exists\ i_{x_o} \in \{1,2,\dots,r\} \ :\ X_{i_{x_o}}(x_o) \neq 0 \ .$$

On a alors le :

THEOREME 3.1.

Soient $(X_o,\dots,X_r)$ une famille de champs de vecteurs dans Ω à coefficients analytiques réels ne vérifiant pas $(H_1.\Omega)$ mais satisfaisant à (N.T.D.).
Soit : $P=\sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_o + c \qquad c \in \mathcal{A}(\Omega)$,
alors pour tout $s \in [1, +\infty[$ il existe $u \in C^\infty(\Omega)$, $u \notin G^s(\Omega)$ telle que $Pu = 0$.

La démonstration de ce théorème est assez technique et repose essentiellement sur le résultat suivant :

Soient $A_1,\dots, A_k$ une famille de champs de vecteurs réels, analytiques dans Ω .
On pose, pour $s \in [1, +\infty[$ (voir [8] pour $s = 1$)

$$G^s(A_1,\dots,A_k) = \{ u \in C^\infty(\Omega) : \forall\ K \subset\subset \Omega \ \ \exists\ C_K > 0 \ :\ \forall\ n \in \mathbb{N}^* \ \|A_{i_1}\dots A_{i_n} u\|_{L^2(K)} \leqslant$$

$$\leqslant \quad C_K^{n+1} \ n\,!^s \quad \} \ .$$

PROPOSITION 3.2.

Supposons que la famille $(A_1,\dots,A_k)$ ne vérifie pas la condition $(H_1.\Omega)$, alors, pour tous $s \in [1,+\infty[$, $t \in [1, +\infty[$ $G^s(A_1,\dots,A_k) \not\subset G^t(\Omega)$.

Les détails des démonstrations se trouvent dans [3] · [4] .

IV. ANALYTICITE A L'INTERIEUR.

Nous considérons la classe d'opérateurs suivants :

$$A = P(x,t\ ;\ \frac{\partial}{\partial t}) + \sum_{i=1}^{n} t_i^{2k_i}\, Q_i(x,t\ ;\ \frac{\partial}{\partial x}) \qquad x \in \mathbb{R}^m,\quad t \in \mathbb{R}^n$$

sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$, contenant la variété $t = 0$; nous supposons que les opérateurs P et Q sont du second ordre et fortement elliptiques. Les k_i sont des entiers positifs. Considérons les espaces :

$$V(\Omega)=\{u\in L^2(\Omega)\ ;\ D_t^\beta\, u\in L^2(\Omega),\ |\beta| \leqq 1,\ t_i^{k_i}\, D_x^\alpha\, u\in L^2(\Omega)\ ;\ i=1,\dots,n\ |\alpha| \leqq 1\}$$

LEMME 4.1

Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $C(K)$ telle que :

$$\|u\|_V + \sum_{\substack{i,j=1\\|\alpha|\leqq 2}}^{n} \| t_i^{k_i}\, t_j^{k_j}\, D_x^\alpha\, u\|_{L^2} + \sum_{|\beta|\leqq 2} \| D_t^\beta\, u\|_{L^2} + \sum_{\substack{i=1\\|\alpha|=|\beta|=1}}^{n} \|t_i^{k_i}\, D_t^\beta\, D_x^\alpha\, u\|_{L^2} \leqq$$

$$\leqq C\ (\|Au\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}) \qquad \forall\, u\in C_0^\infty(K).$$

THEOREME 4.2

L'opérateur A est hypoelliptique dans Ω .

Le Lemme 4.1 est essentiel pour démontrer la régularité analytique de A . Donnons quelques définitions.

Soit $\omega \subset\subset \Omega$, posons pour $\varepsilon > 0$:

$$\omega_\varepsilon = \{x\in\omega\ ;\ d(x, \complement\, \omega) > \varepsilon\ \}\ .$$

Pour $u \in C^\infty(\Omega)$, notons :

$$N_\varepsilon(u) = \|u\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}$$

Nous avons alors le :

LEMME 4.3.

Il existe une constante C telle que, pour tous nombres ε et ε_1 avec $\varepsilon + \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$ et tout $u \in C^\infty(\Omega)$:

$$\sum_{|\beta| \leqq 2} \varepsilon^{|\beta|} N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(D_t^\beta u) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ |\alpha| \leqq 2}}^{n} \varepsilon^{|\alpha|} N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(t_i^{k_i} t_j^{k_j} D_x^\alpha u) + \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=1} N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(t_i^{k_i} D^\alpha u) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ |\alpha|=|\beta|=1}}^{n} \varepsilon^2 N_{\varepsilon+\varepsilon_1}(t_i^{k_i} D_t^\beta D_x^\alpha u) \leqq$$

$$\leqq C \Big\{ \varepsilon^2 N_{\varepsilon_1}(Au) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ |\alpha|=1}}^{n} N_{\varepsilon_1}(t_i^{k_i} t_j^{k_j} D_x^\alpha u) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ |\beta|=1}}^{n} N_{\varepsilon_1}(t_i^{k_i} D_t^\beta u) + \sum_{i=1}^{n} N_{\varepsilon_1}(t_i^{k_i} u) \Big\} .$$

LEMME 4.4

Supposons que les coefficients de l'opérateur A sont dans $G^s(\overline{\omega})$ et que $Pu \in G^s(\overline{\omega})$ pour un certain $s \geqq 1$.

Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier j et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon^{s(|\alpha|+|\beta|)} N_{j_\varepsilon}(D_t^\beta D_x^\alpha u) \leqq C^{|\alpha|+|\beta|+1}; \qquad |\alpha|+|\beta| \leqq j-1 .$$

THEOREME 4.5

L'opérateur A est Gevrey-hypoelliptique d'ordre $s \geqq 1$ dans Ω lorsque ses coefficients sont dans $G^s(\Omega)$.

Remarque 4.6

Les théorèmes 4.2 et 4.5 sont encore valables pour la classe d'opérateurs

$$A = P(x,t\ ;\ \frac{\partial}{\partial t}) + (\sum_{i=1}^{n} t_i^{2k_i})^{\ell}\ Q(x,\ \frac{\partial}{\partial x})$$

où P et Q sont d'ordre 2 et fortement elliptiques, k_i sont des entiers positifs et ℓ un entier positif.

V. ANALYTICITE AU BORD.

Considérons un ouvert Ω du demi espace $\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{(x,\sigma)\ ;\ x \in \mathbb{R}^{n-1}\ \sigma \geqq 0\}$ et un opérateur de la forme :

$$B = D_\sigma^2 + \sigma^k\ Q(x,D_x) \quad \text{avec} \quad D_\sigma \doteq \frac{\partial}{\partial \sigma}\ ,\quad D_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

où k est un entier positif. Nous supposons que $\Gamma = \partial\Omega$ est régulière.

Nous supposons que A est coercif sur l'espace $\mathcal{V}(\Omega)$, qui est la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $V(\Omega)$ avec :

$$V(\Omega) = \{\ u \in L^2(\Omega)\ ;\ D_\sigma u \in L^2(\Omega)\ ;\ \sigma^{k/2}\ D_x^\alpha\ u \in L^2(\Omega)\ ;\ |\alpha| \leqq 1\ \}.$$

Considérons le problème suivant :

(1) $$\begin{cases} Bu = f \\ u|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

THEOREME 5.1

Si $\Gamma = \partial\Omega$ est de classe C^{∞}, si les coefficients de B sont dans $C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $f \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ et $g \in C^{\infty}(\Gamma)$, alors la solution u du problème (1) existe et appartient à $C^{\infty}(\overline{\Omega})$.

THEOREME 5.2

Soit $s \geqq 1$. Supposons que Γ est de classe G^{s}, que les coefficients de B sont dans $G^{s}(\overline{\Omega})$, $f \in G^{s}(\overline{\Omega})$, $g \in G^{s}(\Gamma)$; alors $u \in G^{s}(\overline{\Omega})$.

Les démonstrations des théorèmes 5.1 et 5.2 sont voisines de celles des théorèmes 4.2. et 4.5.

VI. UNE CLASSE D'OPERATEURS NON-HYPOELLIPTIQUES ANALYTIQUES.

THEOREME 6.1

Soit I un sous-ensemble de $(1,\dots,n)$. Considérons l'opérateur :

$$A = \Delta_t + \left(\sum_{i \in I} t_i^2\right)^{\ell} Q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \; ; \; \Delta_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial t_i^2}, \; \ell \in \mathbb{N}^*$$

où $Q(x, \frac{\partial}{\partial x})$ est fortement elliptique d'ordre 2.

Supposons que les coefficients de Q soient analytiques. Alors A est hypoelliptique analytique si et seulement si $I = (1,\dots,n)$.

La condition suffisante résulte de la Remarque 4.6. Quant à la condition nécessaire, elle utilise le théorème 5.2 ainsi que des arguments de [1].

Les démonstrations détaillées se trouvent dans [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.S.BAOUENDI-C. GOULAOUIC : Non analytic hypoellipticity for some degenerate elliptic operator. Bull. Amer. Soc. Vol 78 N° 3 (1972), pp. 483-486.

[2] M.S.BAOUENDI-C. GOULAOUIC : Etude de l'analyticité et de la régularité Gevrey pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. Sc. ENS T.4, Fasc. 1 (1971), pp. 31-46.

[3] M.DERRIDJ-C.ZUILY : Régularité analytique et Gevrey d'opérateurs elliptiques dégénérés (à paraître dans J. Math. pures et appliq.) C.R.A.S. Paris, T. 27, (Octobre 1971) pp. 720-723.

[4] M.DERRIDJ-C.ZUILY : I. Sur la régularité Gevrey des opérateurs de Hörmander (à paraître dans J. Math.Pures et Appliq.) CRAS, Paris, T.274 (1972)pp.317-319.
II.Un résultat précis de régularité Gevrey pour une classe particulière d'opérateurs de Hörmander (à paraître).

[5] L. HÖRMANDER : Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. 119 (1967) pp. 147-171.

[6] T. MATSUZAWA : Sur les équations $u_{tt} + t^{\alpha} u_{xx}$. Nagoya Math. Journal 42 (1971) pp. 43-55.

[7] C.B. MORREY-L.NIRENBERG : On the analyticity ... Comm. pure and applied Math. T.10 (1957), pp. 272-290.

[8] E.NELSON : Analytic vectors. Annals of Math. 70 (1959) p. 572.

[9] F. TREVES : Hypoelliptic partial differential equations of principal type with analytic coefficients. Comm. Pure Appl. Math. 23 N° 4 (1970) pp.637-651).

-----§-----