JACQUES CHAZARAIN

Une classe d'opérateurs à caractéristiques de multiplicité constante

Astérisque, tome 2-3 (1973), p. 135-142

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__135_0>

UNE CLASSE D'OPERATEURS A CARACTERISTIQUES

DE

MULTIPLICITE CONSTANTE

(Jacques CHAZARAIN)

Université de NICE.

INTRODUCTION

On étend à une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples des résultats déjà connus pour les opérateurs reels de type principal.

Dans la premiére partie, on considére les opérateurs à multiplicité constante et ayant une partie principale hyperbolique. Pour que le problème de Cauchy soit bien posé on est conduit à introduire une hypothèse sur les termes d'ordre inférieur, alors avec cette condition, dite de Lévi, on démontre que les noyaux qui résolvent le problème de Cauchy se construisent à partir d'opérateurs intégraux de Fourier.

Dans la deuxième partie, on considére plus généralement des opérateurs reels à multiplicité constante et vérifiant la condition de Lévi. Dans ces conditions on montre que le spectre singulier des distributions u solutions de $Pu = o$ est constitué de bandes bicaractéristiques, résultat déjà démontré par Duistermaat et Hörmander [6] pour les opérateurs à caractéristiques simples.

I. OPERATEURS HYPERBOLIQUES A MULTIPLICITE CONSTANTE.

a) Enoncé du théorème 1.

Soit X' une variété C^∞ connexe de dimension $n-1$ et $X = \mathbb{R} \times X'$ la variété produit, $x=(x_o, x')$ le point générique de X et $\xi = (\xi_o, \xi')$ un vecteur cotangent en x. On utilise sans les rappeler les notations de Hörmander [8] pour les opérateurs intégraux de Fourier.

On dit qu'un opérateur différentiel $P(x,D)$ à coefficients $C^\infty(X)$ et à partie principale reelle p vérifie l'hypothèse (H) si on a

(H)
- les hypersurfaces $X_{t_o} = \{x \,;\, x_o = t_o\}$ ne sont pas caractéristiques
- les racines en ξ_o de l'équation $p(x, \xi_o, \xi') = o$ sont reelles et de multiplicité constante pour $(x, \xi') \in \mathbb{R} \times T^*(X')\setminus 0$.

Notons $\lambda_\alpha(x, \xi')$ $\alpha = 1, \dots, \bar\alpha$ les racines distinctes deux à deux et r_α les multiplicités, de sorte que $r_1 + \dots + r_{\bar\alpha} = m$ = degré de p (on suppose que le terme D_o^m a pour coefficient 1 dans P).

On considére le problème de Cauchy sous la forme suivante :

(*) étand données des fonctions $f \in C^\infty(X)$ et $g_j \in C^\infty(X')$ $j=o,\dots,m-1$ trouver $u \in C^\infty(X)$ solution de $Pu = f$ et $D_o^j u\big|_{x_o=t_o} = g_j$.

En général ce problème n'admet pas une solution et une seule à moins que les termes d'ordre inférieur de P vérifient une condition (Lévi [10] , A. Lax [9] , Yamaguti [16] , Mizohata-Ohya [11] [12] , Flaschka-Strang [7] , Ohya [13]) que l'on appelera condition de Lévi (L)). Notons que dans les fonctions analytiques et pour des coefficients analytiques le problème ($*$) est bien posé sans hypothéses supplémentaires (cf. Bony-Shapira [1]) , mais de même que le théorème de Cauchy-Kowaleski est malheureusement faux dans les fonctions C^{∞} il en de même du problème ($*$). Introduisons maintenant le condition de Lévi sous une forme voisine de celle utilisée par Flaschka-Strang [7] .

Définition 1. L'opérateur P satisfait à la condition de Lévi $(L_{y,\eta})$ en $(y,\eta) \in p^{-1}(o) \subset T^*(X)\setminus 0$ si : étant donnée une phase $\varphi(x)$ solution de $\partial/\partial x_0 \varphi - \lambda_\alpha(x, \partial_{x'}\varphi) = o$ au voisinage de y avec $d\varphi(y) = \eta$ on a

(1) $$e^{-it\varphi} P(a\, e^{it\varphi}) = 0(t^{m-r_\alpha}) \qquad t \longrightarrow +\infty$$

où $a \in C_0^{\infty}$ et a son support dans unvoisinage de y où φ est solution avec $d\varphi \neq o$. L'opérateur P vérifie la condition de Lévi (L) si $(L_{y,\eta})$ est satisfaite en tout point de $p^{-1}(o)$.

On peut alors énoncer le principal résultat de cette partie

Théorème1. Soit P un opérateur de degré m qui vérifie les conditions (H) et (L) alors il existe des opérateurs intégraux de Fourier

$$E_\mu \in I^{\overline{m}_\mu - 1/4}(X, X' ; C) \qquad \mu = o,\dots,m-1$$

tels que

(2) $$P.E_\mu \equiv 0 \quad \text{et} \quad \gamma_j.E_\mu \equiv \delta_{j,\mu}.I \qquad \mu, j = o,\dots,m-1$$

pour une relation canonique convenable C et où $\overline{m}_\mu = r - 1 - \mu$ avec $r = \max_\alpha r_\alpha$ et γ_j désigne l'opérateur de trace sur X' de la dérivée D_0^j (t_0 est fixé aussi on identifie X_{t_0} avec X').

b) Idée de la démonstration du théorème 1.

L'indice μ étant fixé on l'omet dans ce paragraphe, ainsi $E_\mu = E$. Précisons tout d'abord la relation canonique C . Pour t_0 fixé et $\alpha = 1,\dots,\overline{\alpha}$ on définit la relation

$$C_\alpha(t_0) = \{ (x, \xi, y', \eta') \ ; \ (x,\xi) \text{ et } (t_0, y', \lambda_\alpha(t_0,y',\eta'), \eta') \text{ sont sur une même bande bicaractéristique de } q_\alpha = \xi_0 - \lambda_\alpha(x,\xi') \}$$

et l'on pose $$C = \bigcup_\alpha C_\alpha(t_0) \ .$$

On construit E sous la forme $F_1 + \ldots + F_{\bar{\alpha}}$ avec $F_\alpha \in I^{m_\alpha - 1/4}(X, X' ; C_\alpha(t_o))$ $m_\alpha = r_\alpha - 1 - \mu$ et l'on détermine $F_\alpha \sim \sum_{k \geqslant o} F_\alpha^{(k)}$ par un développement asymptotique avec des opérateurs $F_\alpha^{(k)}$ tels que $\sum_{k \leqslant h} P.F_\alpha^{(k)} \in I^{m + m_\alpha - \frac{1}{4} - r_\alpha - h - 1}$. En conséquence le point essentiel réside dans l'étude de produit de la forme $P.F_\alpha$ et en particulier dans le calcul du symbole principal du composé, car cela donnera les équations de transport. D'après la définition des opérateurs intégraux de Fourier on se ramène à l'étude de la structure du développement asymptotique en t de (1). Pour cela on écrit ce développement sous la forme suivante

$$(3) \qquad e^{-it\varphi} P(a e^{it\varphi}) \sim t^m T_o(P,\varphi)a + \ldots + t^{m-j} T_j(P,\varphi)a + \ldots .$$

où l'on vérifie que $T_j(P, \varphi)$ désigne un opérateur différentiel de degré j qui dépend de P et φ et dont la partie principale T_j^o est donnée par

$$T_j^o(P, \varphi)(x, \eta) = \sum_{|\alpha| = j} p^{(\alpha)}(x, d\varphi) \frac{\eta^\alpha}{\alpha !} .$$

Cela étant remarqué, on démontre ensuite que la condition de Lévi est équivalente à la notion d'opérateur bien décomposable introduite et étudiée par De Paris [5]. On en déduit que si φ est une phase pour le symbole q_α alors les opérateurs $T_j(P, \varphi)$ sont nuls pour $j < r_\alpha$ et l'opérateur $T_{r_\alpha}(P, \varphi)$ est un opérateur de dérivation (de degré exactement égal à r_α) dans la direction sur X du champ bicaractéristique H_{q_α} associé à q_α, de façon précise on a

$$(4) \qquad T_{r_\alpha} = \sum_{j=o}^{r_\alpha} \ell_j . (L_{q_\alpha})^j \qquad \text{où} \quad L_q = \sum_k \frac{\partial q}{\partial \xi_k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}$$

avec $\ell_j \in C^\infty$ et $\ell_{r_\alpha} \neq o$. Ceci permet de démontrer que le composé de P et d'un opérateur $F \in I^d(X, X' ; C_\alpha(t_o))$ est un opérateur $P.F \in I^{m + d - r_\alpha}$ dont le symbole principal est donné par l'expression

$$(5) \qquad \left(c_o (H_{\tilde{q}_\alpha})^{r_\alpha} + c_1 (H_{\tilde{q}_\alpha})^{r_\alpha - 1} + \ldots + c_{r_\alpha} \right) \tilde{a}$$

où $\tilde{a}$ désigne le symbole principal de F et $H_{\tilde{q}_\alpha}$ l'opérateur de dérivation dans la direction du champ hamiltonien associé au symbole $\tilde{q}_\alpha(x, \xi, y', \eta') = q_\alpha(x, \xi)$ sur $T^*(X) \times T^*(X')$, ce résultat est à rapprocher du théorème 5.3.1 de Duistermaat & Hörmander [6].

Finalement la construction des opérateurs $F_\alpha^{(k)}$ se ramène à la résolution d'une succession d'équations différentielles de degré r_α dont les données initiales sont déterminées successivement par les conditions de Cauchy sur X_{t_o} .

c) Corollaires .

Du théorème 1 on déduit que :

1) le problème de Cauchy (*) admet une solution unique

2) pour $f \in H^s(X)$ et $g_j \in H^{s+m-j-1}(X')$ il y a une solution unique $u \in H^{s+m-r}(X)$ (où s est un entier $\geqslant$ r et X' supposée compacte)

3) si u est une distribution solution de $Pu = o$ on a, en posant $g = (\gamma_j u)_{j=o,..,m-1}$; $WF(u) \subset \bigcup_\alpha C_\alpha(t_o) o WF(g)$

($\gamma_j u$ existe car X_{t_o} n'est pas caractéristique pour P, voir Hörmander [8] au sujet du wave front = spectre singulier = WF).

Terminons par des remarques :

Remarque1. Le théorème 1 reste valable quand P est pseudo-différentiel en les variables spatiales x' .

Remarque 2. Sous l'hypothése (H) la nécessité de la condition de Lévisemble trés probable pour que le probléme de Cauchy soit bien posé. Cependant à notre connaissance cette nécessité n'a été démontré que dans divers cas particuliers :

- n = 2 (A. Lax [9])
- coefficients constants (se déduit du travail de Svansson [15])
- multiplicité au plus double (Mizohata-Ohya [12]), notons que dans ce cas la condition de Lévi se formule bien au moyen du symbole sous-caractéristique

$$c_P(x, \xi) = p_{m-1}(x, \xi) - \frac{1}{2i} \sum_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}(x, \xi)$$

par l'équivalence

(L) $\Longleftrightarrow$ ($c_P = o$ sur les variétés $q_\alpha^{-1}(o)$ pour toute racine double λ_α)

- on trouvera également des résultats dans Flaschka-Strang [7] et De Paris [5].

II. SPECTRE SINGULIER DES SOLUTIONS DES EQUATIONS SATISFAISANT LA CONDITION DE LEVI.

a) Enoncé du théorème 2.

Soit une variété C^{∞} , $P \in L^m_1(X)$ un opérateur propre dont le symbole admet un développement en composantes homogènes. Soit u une distribution on pose $Pu = f$ et l'on sait que $WF(u) \subset p^{-1}(o) \cup WF(f)$, on se propose de préciser la structure de l'ensemble $WF(u) \setminus WF(f)$.

On dit que l'opérateur P est à multiplicité constante s'il vérifie la condition

(M) | le symbole principal p se factorise sous la forme $p = q_1^{r_1} \dots q_{\overline{\alpha}}^{r_{\overline{\alpha}}}$ où les q_{α} sont des symboles reels de type principal et les variétés $q_{\alpha}^{-1}(o)$ sont disjointes dans $T^*(X) \setminus 0$.

La définition de la condition de Lévi se généralise de façon évidente aux opérateurs vérifiant (M) en disant de façon rapide que l'on a

$$(L) \qquad e^{-it\varphi} P(a\, e^{it\varphi}) = O(t^{m-r_{\alpha}}) \qquad t \to +\infty$$

quand φ est une phase relative au facteur q_{α} .

On peut alors énoncer le

Théorème 2. Soit $P \in L^m_1(X)$ un opérateur propre vérifiant les conditions (M) et (L). Alors pour $u \in \mathcal{D}'(X)$ et $Pu = f$ l'ensemble $WF(u) \setminus WF(f)$ est inclus dans $p^{-1}(o)$ et est invariant par le flot bicaractéristique (étant entendu que sur $q_j^{-1}(o)$ on prend le flot associé au champ H_{q_j}).

b) Idée de la démonstration.

Soit $(x^o, \xi^o) \in WF(u) \setminus WF(f)$, il suffit de montrer que sur la bicaractéristique qui le contient il y a un voisinage de ce point inclus dans $WF(u) \setminus WF(f)$. La méthode consiste à se ramener au cas de l'opérateur D_n pour lequel le résultat est simple à démontrer. Comme on ne change pas le problème en composant P avec un opérateur elliptique on peut supposer que p est de la forme $q(x, \xi)^r$ au voisinage de (x^o, ξ^o) où q est un symbole reel de type principal vérifiant $o = q(x^o, \xi^o)$ et de degré 1. D'aprés Duistermaat-Hörmander [6] il existe une transformation canonique T d'un voisinage conique de (x^o, ξ^o) sur un voisinage conique de $(z^o, \zeta^o) \in T^*(\mathbb{R}^n)\setminus 0$ telle que $(z_n \circ T)(x, \xi) = q(x, \xi)$ et l'application de la proposition 6.1.4 de [6] montre l'existence d'opérateurs intégraux de Fourier

$$A \in I^{o}(X, \mathbb{R}^{n} ; \Gamma') \quad \text{et} \quad B \in I^{o}(\mathbb{R}^{n}, X ; (\Gamma^{-1})')$$

tels que

$$(x^{o}, \xi^{o}) \notin WF(AB-I) \quad \text{et} \quad (z^{o}, \zeta^{o}) \notin WF(BA-I)$$

où Γ est une partie conique fermée du graphe de T.

Soit $\tilde{P}$ l'opérateur transmué $\tilde{P} = BPA \in L^{r}(\mathbb{R}^{n})$, son symbole principal est par construction égal à ζ_{n}^{r} , et l'on vérifie que la distribution $v = Bu$ est telle que $(z^{o}, \zeta^{o}) \in WF(v)$ et $(z^{o}, \zeta^{o}) \notin WF(\tilde{P}v)$. Précisons la structure de l'opérateur $\tilde{P}$; pour cela, on montre qu'il vérifie la condition de Lévi au voisinage de (z^{o},ζ^{o}). Cette démonstration se fait en utilisant la forme ci-après de la condition de Lévi. D'après le caractère local de la condition de Lévi, on montre que l'opérateur P vérifie la condition $(L_{z^{o},\zeta^{o}})$ si et seulement si

$$P.A \in I^{m-r_{\alpha}}(X, X ; K_{\alpha}) \quad \text{pour tout} \quad A \in I^{o}(X,X ; K_{\alpha})$$
$$\text{et tout} \quad \alpha = 1,\dots, \overline{\alpha} ,$$

où K_{α} désigne une partie conique fermée incluse dans la relation bicaractéristique associée à q_{α} au voisinage de (z^{o},ζ^{o}).

La condition de Lévi implique que P peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{P} = D_{n}^{r} + \sum_{j=0}^{r-1} B_{j}(z,D)D_{n}^{j} \qquad \text{avec} \quad B_{j} \in L^{o}.$$

Pour se débarrasser de D_{n} dans les opérateurs $B_{j}(z,D)$, on étend au cadre C^{∞} une forme du théorème de préparation de Weierstrass démontré par Sato-Kawaï-Kashiwara [14] pour les opérateurs pseudo-différentiels analytiques ; de façon précise, on montre que $\tilde{P}$ peut s'écrire

$$\tilde{P} \equiv Q(x,D) \, (D_{n}^{r} + \sum_{j=0}^{r-1} B'_{j}(z,D')D_{n}^{j})$$

où S est elliptique de degré zéro et $B'_{j}(z,D') \in L^{o}(R^{n-1})$ et dépend du paramètre x_{n}.

Reste enfin à se ramener à une équation du type $D_{n}u = f$; pour cela, il est commode, selon une suggestion de T. Kawaï , de se ramener à un système du premier ordre, ce qui permet ensuite d'adapter la technique de Sato-Kawaï-Kashiwara ([14] § 5.2), en posant :

$$U = (u, D_{n}u, \dots , D_{n}^{r-1} u) \qquad F = (0, \dots, f)$$

$$A(x, D') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \bigcirc \\ & 0 & 1 & \\ \bigcirc & & \ddots & 1 \\ -B'_0, & \dots, & & -B'_{r-1} \end{pmatrix}$$

il vient l'équation

$$(D_n + A(x, D'))\, U = F .$$

Comme $A(x, D')$ est de degré zéro on peut construire des opérateurs pseudo-différentiels de degré zéro $R(x, D')$ et $S(x, D')$ tels que

$$(D_n - A).R \equiv R.D_n \quad \text{et} \quad S.(D_n - A) \equiv D_n.S \quad \text{et } RS \equiv SR \equiv I$$

Par conséquent l'équation $\tilde{P}u = f$ se ramène à la forme $D_n U = F$,ce qui termine cette esquisse de démonstration.

NOTA. Les résultats indiqués dans la partie I sont annoncés sous une forme primitive dans [2] et démontrés en détail dans [3]. Les résultats de la partie II seront publiés dans [4] où l'on étudiera également les questions de résolubilité pour ce type d'opérateur à multiplicité constante.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. M. Bony - P. Shapira, Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy, ce colloque.

[2] J. Chazarain, Le problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques non stricts qui satisfont à la condition de Lévi, CRAS p. 1218 (décembre 71).

[3] J. Chazarain, Opérateurs hyperboliques à caractéristiques de multiplicité constante, à paraître.

[4] J. Chazarain ,Sur une classe d'opérateurs à multiplicité constante, en préparation.

[5] J.C. De Paris, Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples ; lien avec l'hyperbolicité, J. Math. Pures et Appl. 50 (1971).

[6] J.J. Duistermaat - L. Hörmander, Fourier Integral Operators II, Acta Math. 128 (1972).

[7] H. Flaschka - G. Strang, The correctness of the Cauchy problem, Adv. in Math. 6 (1971).

[8] L. Hörmander, Fourier Integral Operators I, Acta Math. 127 (1971).

[9] A. Lax, On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956).

[10] E.E. Lévi, Caratteristiche multiple e problema di Cauchy, Ann. di Mat. 16 (1909).

[11] S. Mizohata - Y. Ohya, Sur la condition de E.E. Lévi concernant des équations hyperboliques, RIMS vol 4 n°2 (1968) Kyoto Univ.

[12] S. Mizohata - Y. Ohya, Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples, II Jap. J. of Math. vol n°40 (1971).

[13] Y. Ohya, On E.E. Lévi's Functions for Hyperbolic Equations with Triple Characteristics, Comm. Pure Appl. Math. 25(1972).

[14] M. Sato - T. Kawai -M. Kashiwara, Foundation of the theory of pseudo-differential equations, Proc. Katata Conf. part II (1971) to appear in Lecture Notes.

[15] S.L. Svansson, Necessary and sufficient conditions for the hyperbolicity of polynomials with hyperbolic principal parts, Ark. Math. 8 (1970).

[16] M. Yamaguti, Le problème de Cauchy et les opérateurs d'intégrales singulières, Mem. Coll. Sci. Kyoto 32 (1959).