J. M. BONY

P. SCHAPIRA

# Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielle

*Astérisque*, tome 2-3 (1973), p. 117-127

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__2-3__117_0>

EXISTENCE ET PROLONGEMENT DES SOLUTIONS HOLOMORPHES

DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

J.M. BONY et P. SCHAPIRA

Dans cet exposé,[1], nous nous intéressons aux conditions de validité des deux énoncés suivants, où $P$ désigne un opérateur différentiel à coefficients holomorphes dans $C^n$ :

- Si $f$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega$ , et si $Pf$ se prolonge holomorphiquement au voisinage d'un point frontière, la fonction $f$ se prolonge au voisinage de ce point.

- Si $g$ est holomorphe dans $\Omega$ au voisinage d'un point frontière, il existe $f$ holomorphe dans $\Omega$ au voisinage de ce point, solution de $Pf = g$ .

Nous montrerons (§.4) que ces énoncés sont vrais lorsque la frontière est non caractéristique au point considéré, l'ouvert $\Omega$ devant satisfaire une condition de cône (invariante par $C^1$ - difféomorphismes) réalisée en particulier par les

(1) Cet exposé résume un article à paraître aux Inventiones Mathematicas. A quelques modifications près, il reprend notre exposé au Séminaire GOULAOUIC-SCHWARTZ (janvier 1972)

ouverts convexes ou de classe $C^1$.

Ces théorèmes nous permettent (§.5) de résoudre un problème posé par B. MALGRANGE. Si $\Omega$ est un ouvert relativement compact à frontière partout non-caractéristique , vérifiant $H^1(\overline{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$ , l'opérateur $P$ considéré comme application de $\mathcal{O}(\Omega)$ (l'espace des fonctions holomorphes dans $\Omega$ ) dans lui-même est d'indice fini.

Ces résultats permettent également (voir [1], [2] et notre exposé dans ce colloque) de résoudre les équations hyperboliques non strictes dans le cadre des fonctions analytiques et des hyperfonctions.

## 1.- NOTATIONS.-

Nous identifierons $\mathbb{C}^n$ , muni du produit hermitien $\langle z,\zeta\rangle = \Sigma z_i\bar{\zeta}_i$ à l'espace euclidien $R^{2n}$ muni du produit scalaire $\mathrm{Re}\,\langle z,\zeta\rangle$ . Sauf mention explicite du contraire, le mot hyperplan signifiera hyperplan réel de $R^{2n}$ .

Nous noterons $S^{2n-1}$ la sphère unité. Nous dirons qu'une partie $I$ de $S^{2n-1}$ est convexe (resp. propre) si le cône engendré par $I$ est convexe (resp. ne contient aucune droite). Le polaire de $I$ est le cône convexe défini par $\mathrm{Re}\,\langle z,\zeta\rangle \leqslant 0$ pour $\zeta$ appartenant à $I$ . Lorsque $I, I', \ldots$ désigneront des parties convexes propres de $S^{2n-1}$ , nous noterons $\Gamma, \Gamma', \ldots$, l'intérieur de leurs polaires respectifs.

Nous considérons des opérateurs différentiels $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ de la forme suivante :

$$P(z,\frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha(z)(\frac{\partial}{\partial z})^\alpha$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = ( \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial}{\partial z_n})$ , où les coefficients $a_\alpha(z)$ sont holomorphes dans un ouvert $U$ de $C^n$. Nous désignerons par

$$p(z,\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z) \zeta^\alpha$$

Le symbole principal de l'opérateur $P$.

Un hyperplan d'équation $\mathrm{Re} \langle z-z_o, \zeta\rangle = 0$ est caractéristique en $z_o$ si $p(z_o,\zeta) = 0$. De même nous dirons que cet hyperplan est caractéristique en $z_o$ relativement à une famille $(P_i)$ d'opérateurs de ce type et on a $p_i(z_o,\zeta) = 0$ quel que soit $i$. Nous dirons également que le vecteur $\zeta$ est caractéristique en $z_o$.

DEFINITION 1.1.

Si $\Omega$ est un ouvert de $U$, nous noterons $\mathrm{Car}(\Omega)$ l'adhérence de l'ensemble des directions qui sont caractéristiques (relativement au systeme $(P_i)$) en au moins un point de $\Omega$.

Un vecteur non nul $\zeta$ appartient à $\mathrm{Car}(\Omega)$ s'il existe une suite $(z_n,\zeta_n)$ avec $z_n \in \Omega$ ; $\zeta_n \to \zeta$ ; $p_i(z_n,\zeta_n) = 0$ .

## 2.- Théorème de prolongement.-

Le résultat suivant est un cas particulier d'un thèorème de M. ZERNER [9].

LEMME 2.1.

Soit $\Omega$ un ouvert convexe dont la frontière est de classe $C^1$. Supposons que la normale $\zeta$ à $\partial\Omega$ en un des points $z_o$ soit non caractéristique pour l'opérateur $P$. Alors, si $f$ est holomorphe dans $\Omega$ et si $Pf$ se prolonge en fonction holomorphe au voisinage de $z_o$, la fonction $f$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de $z_o$.

On peut se ramener, grâce au théorème de CAUCHY-KOWALEWSKI au cas où $Pf=0$

Nous prendrons d'autre part le vecteur $\zeta$ unitaire et dirigé vers l'extérieur de $\Omega$.

Soit alors $\tilde{H}_\varepsilon$ l'hyperplan complexe d'équation $\langle z-z_o, \zeta\rangle = -\varepsilon$. La frontière étant de classe $C^1$, la plus grande boule de $\tilde{H}_\varepsilon$ centrée en $z_o - \varepsilon\zeta$ et contenue dans $\Omega \cap \tilde{H}_\varepsilon$ a un rayon $a$ qui est infiniment grand par rapport à $\varepsilon$ lorsque $\varepsilon$ tend vers $0$.

D'après le théorème de CAUCHY-KOWALEWSKI précisé [7] il existe un nombre $\delta > 0$, indépendant de $a$ et de $\varepsilon$, tel que tout germe de solution holomorphe de $Pf = 0$ au voisinage de $B'_a$ se prolonge en fonction holomorphe dans la boule (de $C^n$) $B_{\delta a}$ de même centre et de rayon $\delta a$. Cette boule contiendra $z_o$ pour $\varepsilon$ assez petit et $f$ se prolonge holomorphiquement dans $\Omega \cup B_{\delta a}$.

THEOREME 2.1.
Soit $(P_i)$ une famille d'opérateurs différentiels dans $U$ et soient $\omega$ et $\Omega$ deux convexes de $U$, où $\omega$ est localement compact, $\Omega$ est ouvert et $\omega \subset \Omega$. Supposons que tout hyperplan de normale appartenant à $\mathrm{Car}(\Omega)$ qui coupe $\Omega$ coupe également $\omega$. Alors, si $f$ est holomorphe au voisinage de $\omega$, et si $P_i f$ se prolonge holomorphiquement dans $\Omega$, la fonction $f$ se prolonge holomorphiquement dans $\Omega$.

Ce résultat s'obtient à partir du lemme précédent en adaptant un argument géométrique dû à HORMANDER ([4] th.5.3.3). Dans le cas d'un opérateur à coefficients constants, ce théorème a été démontré par C.O. KISELMAN [6].

## 3.- Cas d'un cône convexe.-

Dans ce paragraphe, $\Gamma$ désignera un cône ouvert convexe non vide dont le sommet appartient à $U$. Nous supposerons que ce sommet est l'origine, et nous désignerons par $I$ l'intersection de $S^{2n-1}$ avec le polaire de $\Gamma$.

Si $\zeta$ appartient à $I$, si $I_1$ et $I_2$ sont deux parties convexes fermées propres de $S^{2n-1}$ , où $I_1$ est un voisinage de $I$ et $I_2$ un voisinage de $I_1$ , et si $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ désignent les intérieurs de leurs polaires respectifs, les deux propriétés suivantes sont immédiates :

- pour $\varepsilon > 0$ , l'intersection $K$ de $\bar{\Gamma}_1$ avec l'hyperplan d'équation $\mathrm{Re}\langle z,\zeta\rangle = -\varepsilon$ est une base compacte de $\bar{\Gamma}_1$ .
- L'intersection des demi-espaces contenant $K$ et dont la normale n'appartient pas à $I_2$ est un voisinage de $0$ .

LEMME 3.1. -
Soit $(P_i)$ une famille finie d'opérateurs différentiels dans $U$. Supposons que les directions de $I$ soient non caractéristiques en $0$ . Alors, si $f$ est holomorphe dans $\Gamma$ au voisinage de $0$ , et si les $P_i f$ se prolongent holomorphiquement au voisinage de $0$, la fonction $f$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de $0$ .

Soit $W$ un voisinage convexe de $0$ dans lequel les $P_i f$ sont holomorphes et tel que $\mathrm{Car}(W)$ ne rencontre pas $I$. Choisissons enfin $\varepsilon$ tel que $K$ soit contenu dans $W$ . D'après le théorème 2.1. si $V$ est un voisinage ouvert convexe de $0$ contenu dans l'intersection des demi-espaces contenant $K$ et dont la normale n'appartient pas à $I_2$ , la fonction $f$ se prolonge dans $V$ .

LEMME 3.2.-
Soit $(P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ un opérateur différentiel dans $U$ et supposons que les directions de $I$ soient non caractéristiques en $0$ . Pour tout voisinage de $0$, il existe un voisinage de $V'$ de $0$ tel que , si $g$ est holomorphe dans $\Gamma \cap V$ , il existe une solution $f$ de $Pf = g$ holomorphe dans $\Gamma \cap V'$ .

La démonstration se fait en deux étapes .

a) - On démontre d'abord le lemme dans le cas où il existe $\zeta_0$ appartenant à $I$ et

$\alpha > 0$ tels que :

- pour tout vecteur $\zeta$ de $I$, on a $|\zeta - \zeta_0| \leqslant \alpha$
- tout vecteur $\zeta$ vérifiant $|\zeta - \zeta_0| \leqslant \alpha$ est non caractérisitque en $0$.

On résout alors le problème de CAUCHY $Pf = g$ ; traces $(f) = 0$ au voisinage de l'hyperplan complexe $\langle z,\zeta_0\rangle = -\varepsilon$ et le théorème 2.1. permet de prolonger $f$ à un voisinage de $0$ dans $\Gamma$.

b)- Dans le cas général, on montre d'abord, en utilisant la résolution du premier problème de COUSIN (voir par exemple [5]) que la fonction $g$ peut se décomposer en une somme finie de fonctions $g_p$, chacune d'elles étant définie dans un cône $\Gamma_p$ contenant $\Gamma$ et ayant suffisamment peu de normales pour que l'on puisse appliquer quer la première partie de la démonstration. On résout alors $Pf_p = g_p$ et on pose $f = \Sigma f_p$.

## 4.- Théorèmes d'existence et de prolongement.-

Nous allons généraliser les résultats du paragraphe précédent à une classe d'ouverts invariante par $C^1$-difféomorphisme, contenant comme cas particuliers les ouverts convexes et les ouverts de classe $C^1$.

Si $\Gamma$ est un cône ouvert convexe de sommet $0$, nous noterons $\Gamma_\varepsilon$ l'intersection de $\Gamma$ et de la boule de rayon $\varepsilon$ centrée en $0$.

DEFINITION 4.1.

Soit $I$ une partie convexe fermée propre de $S^{2n-1}$. Nous dirons que l'ouvert $\Omega$ vérifie la condition du cône $C(z_0,I)$ en un de ses points frontière $z_0$, si pour tout voisinage $I'$ de $I$ il existe un voisinage $V$ de $z_0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $z$ appartenant à $V \cap \Omega$, on ait $z + \Gamma'_\varepsilon \subset \Omega$, où $\Gamma'$ désigne l'intérieur du polaire de $I'$.

Remarques :

1°) La propriété précédente est invariante par $C^1$-difféomorphismes, et s'étend naturellement aux variétés, $I$ étant alors une partie de la sphère cotangente en $z_o$.

2°) Si $\Omega$ est un ouvert convexe, il verifie la condition $C(z_o, I)$ en désignant par $I$ l'ensemble des normales extérieures à $\bar{\Omega}$ en $z_o$.

3°) Si $\Omega$ a une frontière de classe $C^1$ et est situé localement du même côté de $\partial\Omega$, il vérifie $C(z_o, \{\eta\})$ où $\eta$ est la normale extérieure à $\partial\Omega$ en $z_o$.

4°) si $\Omega$ vérifie la condition de cône $C(z_o, I)$, il existe un systeme fondamental de voisinages $V$ de $z_o$ tels que $V \cap \Omega$ soit connexe.

THEOREME 4.1. -
Soit $P_i(z, \frac{\partial}{\partial z})$ une famille finie d'opérateurs différentiels dans $U$ Supposons que $\Omega$ vérifie la condition $C(z_o, I)$ en un point frontière $z_o$ appartenant à $U$ et que les directions de $I$ soient non caractéristiques en $z_o$. Alors, si $f$ est holomorphe dans $\Omega$, et si les $P_i f$ se prolongent holomorphiquement au voisinage de $z_o$, la fonction $f$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de $z_o$.

Soit en effet $\Gamma'$ l'intérieur du polaire d'un voisinage $I'$ suffisamment petit de $I$. D'après le lemme 3.1., la restriction de $f$ à $z_o + \Gamma'_\varepsilon$ se prolonge à un voisinage $V$ de $z_o$. Le prolongement obtenu n'est pas ramifié grâce à la remarque (4) ci-dessus.

THEOREME 4.2. -
Soit $P(z, \frac{\partial}{\partial z})$ un opérateur différentiel dans $U$. Supposons que $\Omega$ vérifie la condition $C(z_o, I)$ en un point frontière $z_o$ appartenant à $U$, et que les directions de $I$ soient non caractéristiques en $z_o$. Pour tout voisinage $V$ de $z_o$, il existe un voisinage $V'$ de $z_o$ tel que, si $g$ est holomorphe dans $\Omega \cap V$, il

existe une solution $f$ de $Pf = g$ holomorphe dans $\Omega \cap V'$ .

Le lemme 3.2. permet de résoudre $Pf = g$ dans le cône $z_0 + \Gamma'$ , au voisinage de $z_0$ . Le théorème 2.1. permet ensuite de démontrer que $f$ se prolonge jusqu'à un voisinage de $z_0$ dans $\Omega$ .

COROLLAIRE :

Soit $\Omega$ un ouvert de classe $C^1$ dont la frontière est non caractéristique en $z_0$ pour l'opérateur $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ . Alors

- si $f$ est holomorphe dans $\Omega$ et si $Pf$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de $z_0$ , la fonction $f$ se prolonge de même au voisinage de $z_0$ .
- Si $g$ est holomorphe dans $\Omega$ au voisinage de $z_0$ , il existe une solution $f$ de $Pf = g$ , holomrphe au voisinage de $z_0$ dans $\Omega$ .

La partie "prolongement" de ce théorème est dûe à M.ZERNER [9] . On peut énoncer un corollaire analogue pour un ouvert convexe dont tous les hyperplans d'appui en $z_0$ sont non caractéristiques en ce point .

5.- Indice des opérateurs differentiels.-

Nous supposerons dans ce paragraphe que $U$ est une variété analytique complexe dénombrable à l'infini, et que $P(z,\frac{\partial}{\partial z})$ est un opérateur défini dans $U$ .

Nous désignerons par $\mathcal{O}$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur $U$ . si $\omega$ est un ouvert, nous désignerons par $\mathcal{O}(\omega)$ ou par $H^0(\omega,\mathcal{O})$ l'espace des fonctions holomorphes dans $\omega$ . De même, si $K$ est compact, nous noterons $\mathcal{O}(K)$ ou $H^0(K,\mathcal{O})$ l'espace des germes de fonctions holomorphes au voisinage de $K$.

THEOREME 5.1. -

Soit $\Omega$ un ouvert relativement compact de $U$ . Supposons qu'en chaque point $z_0$ de sa frontière, $\Omega$ vérifie une condition de cône $C(z_0,I)$ où les directions de $I$ sont non caractéristiques pour $P$ en $z_0$ .
Supposons d'autre part que $H^1(\bar{\Omega},\mathcal{O}) = 0$ .
Alors l'opérateur $P$, de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ est d'indice fini.

COROLLAIRE 5.1. -

Soit $\Omega$ un ouvert borné convexe de $C^n$ tel que tout hyperplan d'appui de $\bar{\Omega}$ soit non caractéristique en ses points d'appui. Alors l'opérateur $P$ de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ est d'indice fini.

COROLLAIRE 5.2.

Soit $\Omega$ un ouvert de $C^n$, de classe $C^1$ et dont la frontière est non caractéristique. Si de plus $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$ l'opérateur $P$ est d'indice fini de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ .

Démonstration du théorème 5.1.

Considérons le préfaisceau défini par : $\omega \to \mathcal{O}(\Omega \cap \omega)$. C'est evidemment un faisceau que nous noterons $\mathcal{O}^+$ . Nous désignerons d'autre part par $\mathcal{O}_P$ le faisceau des germes de solutions holomorphes de l'équation $Pf = 0$ .

Il résulte du théorème de CAUCHY-KOWALEWSKY que la suite

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O} \overset{P}{\to} \mathcal{O} \to 0 \quad .$$

est exacte en chaque point de $\partial\Omega$ .

D'autre part, les théorèmes 4.1. et 4.2. expriment que la suite

$$0 \to \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}^+ \overset{P}{\to} \mathcal{O}^+ \to 0 \, .$$

est aussi exacte en chaque point de $\partial\Omega$ .

On en conclut que la suite

$$0 \to \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \overset{P}{\to} \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \to 0 \quad .$$

est exacte en tout point de $U$ , le faisceau $\mathcal{O}^+/\mathcal{O}$ étant porté par $\partial\Omega$ .

De la suite exacte $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^+ \to \mathcal{O}^+/\mathcal{O} \to 0$ , on déduit :

$$0 \to H^o(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) \to H^o(\bar{\Omega}, \mathcal{O}^+) \to H^o(\bar{\Omega}, \mathcal{O}^+/\mathcal{O}) \to H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{O}) = 0$$

d'où

$$H^o(\bar{\Omega}, \mathcal{O}^+/\mathcal{O}) = \mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{O}(\bar{\Omega}) \quad .$$

L'opérateur $P$ définit donc un isomorphisme de $\mathcal{O}(\Omega)/\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ sur lui-même.

Rappelons que les espaces $\mathcal{O}(\Omega)$ et $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ sont respectivement munis de topologies naturelles du type FRECHET-SCHWARTZ et dual de FRECHET-SCHWARTZ. Sur l'espace $\mathcal{O}_P(\Omega) = \mathcal{O}_P(\bar{\Omega})$ , ces deux topologies coïncident d'après le théorème du graphe fermé et cet espace est donc de dimension finie.

Considérons d'autre part l'application de $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\bar{\Omega})$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ définie par $(f,g) \to Pf + g$ . Elle est surjective . L'espace $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ étant limite inductive dénombrable des espaces de FRECHET $\mathcal{O}(\Omega')$ pour $\Omega'$ voisinage de $\bar{\Omega}$ , il existe un de ces voisinages $\Omega'$ tel que la restriction de l'application à $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega')$ soit surjective [3] . Soit maintenant l'application de $\mathcal{O}(\Omega) \times \mathcal{O}(\Omega')$ dans $\mathcal{O}(\Omega)$ définie par $(f,g) \to -g$ . C'est une application compacte et un théorème classique de L. SCHWARTZ [8] assure que la somme des deux applications précédentes a une image fermée de codimension finie, ce qui achève la démonstration.

REMARQUE : On a en fait démontré que $P$ considéré comme opérateur de $\mathcal{O}(\Omega)$ dans lui-même ou considéré comme opérateur de $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ dans lui même, avait mêmes noyaux et co-noyaux et que ces espaces étaient de dimension finie.

Exemple 1 :

Dans $C^2$ , l'opérateur $z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$ vérifie les hypothèses du théorème en prenant pour $\Omega$ une boule centrée à l'origine.

Exemple 2 :

Soit $V$ une variété analytique réelle compacte, et $P$ un opérateur différentiel à coefficients analytiques sur $V$ . Soient $\tilde{V}$ le complexifié de $V$ et $\tilde{P}$ l'opérateur à coefficients holomorphes correspondant. On peut alors construire, en utilisant la démonstration du théorème de GRAUERT une famille $\Omega_t$ ($t>0$) de voisinage de $V$ dans $\tilde{V}$ satisfaisant aux hypothèses du théorème 5.1. et pour lesquels l'indice de $\tilde{P}$ ( dans $\mathcal{O}(\Omega_t)$) ne dépend pas de $t$ . Cet indice coïncide donc avec l'indice de $P$ opérant sur les fonctions analytiques dans $V$ .

## BIBLIOGRAPHIE


[1] J.M. BONY et P. SCHAPIRA .- Existence et prolongement des solutions analytiques des systèmes hyperboliques non stricts; C.R. Aca. Sc. Paris, Janvier 1972.-

[2] J.M. BONY et P. SCHAPIRA .- Problème de CAUCHY, Existence et prolongement pour les hyperfonctions solutions des équations hyperboliques non strictes ; C.R. Acad. Paris, Janvier 1972.

[3[ A. GROTHENDIECK : Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires; Mémoirs of Amer. Math.Soc., Providence, 1955 .

[4] L. HORMANDER .- Linear partial differential operators, Springer-Verlag BERLIN, 1963.-

[5] L. HORMANDER.- An introduction to complex analysis in several variables, Van Nostrand, Princeton, 1966.-

[6] C.O.KISELMAN .- Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. Bull. Soc. Math. France, 97 (1969) 329-356.-

[7] J. LERAY.- Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de CAUCHY près de la variété qui porte les données de CAUCHY, Bull. Soc. Math. Fr., 85, p.389-429, 1957

[8] L.SCHWARTZ .- Holomorphismes et applications complètement continues C.R. Acad. Sc. PARIS, 236, p.2472, 1953.-

[9] M. ZERNER.- Domaine dholomorphie des fonctions vérifiant une équation aux dérivées partielles ; C.R. Acad. Sc. Paris, 272, p.1646. 1971.-