Astérisque

SERGIO ALBEVERIO
PHILIPPE BLANCHARD
RAPHAEL HØEGH-KROHN

Diffusions sur une variété riemannienne barrières infranchissables et applications

Astérisque, tome 132 (1985), p. 181-201
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__132__181_0>

DIFFUSIONS SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE
BARRIÈRES INFRANCHISSABLES ET APPLICATIONS

S. Albeverio

Mathematisches Institut
Ruhr-Universität
D-BOCHUM 1

Ph. Blanchard

Theoretische Physik
Universität Bielefeld
D-4800 BIELEFELD 1

R. HØEGH-KROHN

Université de Provence
CPT - CNRS
F-13288 MARSEILLE

§ 1. Introduction

Le plus simple des processus de diffusion est le processus de Wiener, qui fournit un des modèles mathématiques du mouvement brownien physique et dont le rôle privilégié s'explique par le fait qu'il sert à la construction de tous les autres modèles. Il est donc en quelque sorte le prototype des processus de diffusion et c'est la raison pour laquelle, bien avant sa construction mathématique par Wiener en 1921, on le voit faire son apparition en 1900 dans la thèse de Bachelier consacrée à l'étude de la spéculation et des fluctuation boursières et en 1905 dans le travail d'Einstein sur le mouvement brownien.
A partir du processus de Wiener on peut obtenir facilement d'autres processus de diffusion soit à l'aide de changements de temps ou de transformations d'espaces, soit encore en résolvant une équation différentielle stochastique. On peut ainsi construire des processus de diffusion du type de ceux que Langevin a introduits en 1908 en physique pour décrire des systèmes dynamiques soumis à l'influence d'une force aléatoire. Depuis, la théorie des processus de diffusion a connu un développement considérable. Il s'agit pour l'essentiel d'une théorie simple et maniable qui a des applications aussi bien théoriques que pratiques dans de très nombreux domaines. Du point de vue mathématique, l'étude de ces processus est liée à celle des équations elliptiques du second ordre et donc à la théorie du potentiel. L'exploitation systématique des étroites relations entre la théorie des probabilités et la théorie du potentiel a permis à ces théories de s'enrichir mutuellement considérablement. Ces relations ont été utilisées avec grand profit en mathématique appliquée et tout particulièrement dans l'approche euclidienne à la théorie quantique. Dans cet exposé nous nous proposons d'exploiter une fois encore cette équivalence, en relation avec le problème de la formations de barrières infranchissables pour une classe de processus de diffusions à valeurs dans une variété riemanienne et de montrer que les résultats nouveaux obtenus sont susceptibles de trouver de nombreuses applications.
Kolmogorov a remarqué en 1936 que la symétrie d'un processus de diffusion par rapport au renversement du temps se traduit analytiquement par la symétrie du semigroupe associé ; d'autres part,

il a mis en évidence la relation existant entre cette symétrie et l'existence de densités de probabilités stationnaires pour le processus. Le problème du renversement du temps pour les processus de Markov a fait l'objet de nombreux travaux parmi lesquels nous mentionnons ceux de Nelson [21], Nagasawa [26], Chung et Walsh [22]. Pour plus de détails voir par exemple [11]et [23]. Les problèmes liés au renversement du temps jouent un rôle important dans la mécanique stochastique de Nelson, qui donne une approche probabiliste aux phénomènes quantiques [3] [4].

Dans la section 2 de cet exposé nous rappelons brièvement le formalisme mathématique de la mécanique stochastique, envisagée en tant que théorie générale des processus de diffusion dont le drift est donné par un gradient et dont l'accélération stochastique est liée à la force F dérivant du potentiel V par une loi de Newton stochastique soit $ma = -\nabla V$. Un tel processus de diffusion sera dit newtonien. Notre présentation s'inspire de toute une série de travaux et plus particulièrement de ceux de Nelson [3] [4], Dankel [1], Dohrn et Guerra [2] et Meyer [5]. Dans la section 3 nous présentons pour les processus newtoniens un mécanisme général de confinement dû à la présence de barrières infranchissables crées par les surfaces nodales (l'ensemble des zéros) des densités de probabilité associée au processus. Ce phénomène a été remarqué par Nelson [20] et discuté dans [13],[16],[7] et[4]. Nous nous plaçons dans cet exposé dans le cadre des processus newtoniens à valeurs dans une variété riemanienne et utilisons des méthodes de théorie du potentiel (formes de Dirichlet) pour donner entre autres une condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces nodales en question agissent comme barrières infranchissables pour le processus newtonien. Nous montrerons aussi que dans ce cas le processus se décompose en composantes ergodiques.

La section 4 est consacrée à quelques applications physiques de ce mécanisme de confinement. En particulier nous expliquerons comment les résultats des sections précédentes permettent de construire un modèle pour la formation de "jet-streams" dans la nébuleuse protosolaire. On entend par là des anneaux concentriques au centre desquels se trouve le soleil. A partir de la matière circulant dans ces jet-streams des phénomènes complexes d'agrégation conduisent à la formation d'abord des planétoides puis enfin à celle des planètes. Ce modèle permet de rendre compte de manière satisfaisante de la répartition des planètes du système solaire comme de celle des systèmes de satellites des planètes joviennes (Jupiter, Uranus et Saturne). Dans ce premier exemple nous utilisons une version stationnaire de la théorie. Par contre dans le deuxième exemple nous nous appuyons sur la théorie non stationnaire pour discuter les différents types morphologiques de galaxies (anneau, disque, spirale, spirale-barrée) ainsi que pour rendre compte du mouvement de rotation uniforme et rigide des galaxies. Le même type d'idées peut être utilisé pour fournir une explication à la présence, récemment observée, de "spokes" radiaux dans les anneaux de Saturne. Nous mentionnons enfin une application a l'étude du système de circulation générale des vents de l'atmosphère terrestre. Les exemples discutés sont loins d'être exhaustifs; les phénomènes de confinement et de formations de configurations stationnaires ou non, sont très généraux et peuvent être appliqués à tout système susceptible d'être décrit par une diffusion newtonienne. Pour des applications en biologie d'idées voisines, nous renvoyons à Nagasawa [16].

§ 2. Densités de probabilités et équation de Schrödinger

Soit M une variété riemanienne lisse de dimension d et soit $\eta(t)$ un processus de diffusion à valeurs dans M admettant un générateur infinitésimal G_t (dépendant éventuellement du temps) de la forme

$$G_t = \frac{1}{2}\Delta + \beta^i D_i \qquad (2.1)$$

où Δ est le laplacien de Laplace-Beltrami sur M, D la dérivée covariante et où $\beta(t,x)$ est un champ de vecteurs, que nous supposerons pour commencer C^∞. Par $\rho(t,x)$ nous désignons la densité de probabilité de la loi de $\eta(t)$ par rapport à la mesure riemanienne $\sigma(dx)$, que nous supposons dans cette section strictement positive.
Pour $f \in C_0^\infty(M)$ on a alors

$$E[f(\eta(t))] = \int_M f(x)\rho(x,t)\,\sigma(dx) \qquad (2.2)$$

et

$$\frac{d}{dt}E[f(\eta(t))] = \int_M (G_t f)(x)\rho(x,t)\sigma(dx) \tag{2.3}$$

De cette dernière égalité par passage à l'adjoint on déduit l'équation dite de Fokker-Planck

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta\rho - \mathrm{div}\,(\rho\beta) \tag{2.4}$$

où div est la divergence pour la structure riemanienne. D'autre part on sait que si l'on considère la diffusion en renversant le sens du temps on a encore une diffusion $\eta^*(t) \equiv \eta(-t)$ dont le générateur infinitésimal G_t^* est de la forme

$$G_t^* = \frac{1}{2}\Delta - \beta^{*i} D_i \tag{2.5}$$

et conduit à l'équation de Fokker-Planck

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta\rho + \mathrm{div}\,(\rho\beta^*) \tag{2.6}$$

En introduisant les vitesses osmotique u et de courant v

$$u = \frac{1}{2}(\beta-\beta^*) \tag{2.7}$$

$$v = \frac{1}{2}(\beta+\beta^*) \tag{2.8}$$

on obtient à partir de (2.4) et (2.6) les équations

$$\frac{1}{2}\Delta\rho = \mathrm{div}\,(\rho u) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\,(\rho v) \tag{2.10}$$

Il est bien connu que le drift $\beta(t,\eta(t))$ est la dérivée stochastique vers l'avant $D_+\eta(t)$ du processus, c'est à dire avec conditionnement par rapport au passé. De même $\beta^*(t,\eta(t))$ est la dérivée stochastique vers l'arrière $D_-\eta(t)$, avec conditionnement par rapport au futur (cf. [3]). Pour définir une accélération stochastique le problème se pose maintenant de définir une dérivée stochastique seconde, c'est à dire la dérivée stochastique d'un processus à valeurs dans le faisceau tangent T(M). Généralisant la notion de transport parallèle Dohrn et Guerra [2] ont introduit une notion de transport parallèle stochastique (nous renvoyons aussi à [4] et [5]) et construit pour ce faire une application linéaire τ_η (homomorphisme de $\mathbb{R}_+$ dans les endomorphismes de T(M))

$$\tau_\eta(s,t): T_{\eta(s)}M \to T_{\eta(t)}M$$

des espaces tangents en $\eta(s)$ et $\eta(t)$ qui permet de définir la dérivée stochastique vers l'avant D_+A d'un champ de vecteurs A en posant

$$D_+A(\eta(t)) = \lim_{\Delta t \to 0_+} E_t \left[\frac{\tau_\eta(t+\Delta t,t)\ A(\eta(t+\Delta t)) - A(\eta(t))}{\Delta t} \right] \tag{2.11}$$

On définit de façon analogue une dérivée stochastique vers l'arrière D_-. Tous calculs faits on obtient des expression qui ont la même apparence que celles obtenues pour des fonctions scalaires soit

$$D_+A = \left(\frac{1}{2} \Delta_{DR} + \beta^j \cdot \nabla_j + \frac{\partial}{\partial t} \right) A \tag{2.12}$$

$$D_-A = \left(-\frac{1}{2} \Delta_{DR} + \beta^{*j} \cdot \nabla_j + \frac{\partial}{\partial t} \right) A \tag{2.13}$$

à ceci près que cette fois-ci, Δ_{DR} est l'opérateur de Laplace-de Rham sur la variété M donné par

$$\Delta_{DR} = \nabla^j \nabla_j - R \tag{2.14}$$

où $R^i{}_j$ est le tenseur de Ricci de la variété M. L'opérateur de Laplace-Beltrami Δ et l'opérateur de Laplace-de Rham Δ_{DR} coincident sur les fonctions scalaires mais non pas sur les champs de vecteurs. Définissant maintenant l'accélération stochastique selon [3] par

$$a(\eta(t)) = \frac{1}{2}(D_+D_- + D_-D_+)\eta(t) \qquad (2.15)$$

$$= \frac{1}{2} D_+\beta^* + \frac{1}{2} D_-\beta$$

on obtient explicitement

$$a^i = \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i\right) - \frac{1}{2}\Delta_{DR}\, u^i - u^i \nabla_j u^i \qquad (2.16)$$

Remarque

Lors du transport parallèle un point infiniment voisin se déplaçant de la même façon que la particule soumise à la diffusion à valeurs dans M ressent l'effet de la courbure de Ricci. Par exemple sur une variété M à courbure positive il en résulte donc qu'il a tendance à se rapprocher de la particule. La construction de Dohrn et Guerra met en évidence une correction géodésique au transport parallèle. Si le processus était différentiable on retomberait sur le transport parallèle.

On peut montrer (cf. [3] et [1]) que la vitesse osmotique u est toujours liée à la densité de probabilité ρ par l'équation osmotique

$$u = \frac{1}{2}\nabla \log \rho \qquad (2.17)$$

Quant à la vitesse de courant v elle vérifie l'équation de continuité (2.10), qui en particulier entraine que si la vitesse de courant v est nulle la densité de probabilité ρ est alors stationnaire. Puisque dans les applications ρ est déterminé par les interactions physiques en présence dans le modèle considéré il est donc intéressant de se demander quelle équation dynamique est satisfaite par ρ.
On a obtenu pour l'accélération stochastique a l'expression

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla v . v - \nabla u . u - \frac{1}{2}\Delta_{DR}\, u \qquad (2.18)$$

Donnons nous maintenant un potentiel scalaire $V(t,x)$ c'est à dire une fonction $V: \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R}$ telle de plus que (2.19) et (2.22) soient bien définis. La force dérivant de ce potentiel est donnée par

$$F = - \nabla V \tag{2.19}$$

Si l'on pose maintenant

$$\psi(t,x) = e^{R(t,x) + i\, S(t,x)} = \sqrt{\rho(t,x)}\; e^{i\, S(t,x)} \tag{2.20}$$

R et S étant réelles on montre alors, sous l'hypothèse que la vitesse de courant v est aussi un gradient, (voir [1], [2], [4] [5]) que la loi de Newton stochastique

$$a = F = -\nabla V \tag{2.21}$$

est équivalente à l'équation de Schrödinger $i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ où l'hamiltonien H est donné par

$$H = -\frac{1}{2}\, \Delta + V \tag{2.22}$$

Si l'on s'intéresse aux densités de probabilité ρ qui sont stationnaires, on est ramené à l'étude de l'équation de Schrödinger indépendante du temps

$$H\psi = E\psi \tag{2.23}$$

Il résulte de (2.10) que ce sera en particulier le cas si $v = 0$, propriété équivalente au fait que le processus est symétrique ([12][11]).

§ 3. Singularités du drift, barrières infranchissables et capacités

Dans la section 2 nous avons supposé la densité de probabilité $\rho(t,x)$ strictement positive et nous avons vu sous quelles hypothèses l'équation de Newton stochastique $ma = -\nabla V$ était équivalente à l'équation de Schrödinger $i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$, la correspondance étant obtenue en posant $\rho = |\psi|^2$. Considérons maintenant une solution régulière ψ de l'équation de Schrödinger et désignons par U_ψ la surface nodale de ψ

$$U_\psi = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times M \mid \psi(t,x) = 0\} \qquad (3.1)$$

Les drifts β et β^* sont réguliers sur $U_\psi^C = \mathbb{R} \times M \setminus U_\psi$; par contre ils ne sont pas définis sur U_ψ. Nous allons voir que la singularité des drifts sur U_ψ a un effet répulsif qui est suffisament fort pour empêcher le processus d'atteindre et donc de traverser la surface nodale U_ψ; en d'autres termes la surface nodale est une barrière infranchissable pour le processus. Supposons que l'on ait la décomposition suivante

$$\mathbb{R} \times M = U_\psi \bigcup_{i \in I} B_i \qquad (3.2)$$

avec $B_i \cap B_j = \phi$ pour $i \neq j$. La surface nodale U_ψ va agir alors comme barrière infranchissable et si le processus $\eta(t)$ part à l'instant $t = 0$ de $x \in B_i$ on aura $\eta(t) \in B_i$ $\forall t$. Sous ces conditions on a donc confinement du processus dans B_i.

Nous allons nous intéresser maintenant à la situation où la densité de probabilité ρ est stationnaire (soit $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$) et considérer le problème des barrières infranchissables du point de vue de la théorie du potentiel (formes de Dirichlet, capacités).

Soit M une variété riemanienne lisse et désignons par μ une mesure de Radon sur M strictement positive sur tous les ouverts non vides de M. On considère ensuite la forme de Dirichlet

$$f \to E(f,f) = \int_M df(x) \,.\, df(x)\, \mu(dx) \qquad (3.4)$$

que l'on obtient en prenant la fermeture dans $L^2(M,\mu)$ de la forme quadratique E définie sur $C_0^1(M)$.

Nous renvoyons à [9] où l'on discute sous quelles hypothèses sur μ (positivité stricte ou conditions faibles de régularité) cette fermeture existe. E est donc une forme de Dirichlet régulière et locale au sens de Fukushima [10]. Il est bien connu que l'on peut associer à E un semigroupe P_t dans $L^2(M,\mu)$ qui est μ-symétrique, c'est à dire tel que $P_t = P_t^*$ (P_t^* étant l'adjoint de P_t). Ce semigroupe sous markovien est le semigroupe de transition d'un processus de diffusion $\eta(t)$ à valeurs dans M de loi de départ P^x en x. Un sous ensemble borélien B de M est dit invariant sous l'action de P_t si au sens des opérateurs dans $L^2(M,\mu)$ $P_t\chi_B = \chi_B P_t$ $\forall t > 0$. On dira que P_t et E sont irréductibles, si tout sous-ensemble borélien B invariant sous l'action de P_t est trivial. On entend par là que l'on a soit $\mu(B) = 0$ soit $\mu(M\setminus B) = 0$. Si P_t est markovien, c'est à dire si $P_t 1 = 1$, l'irréductibilité est équivalente à l'ergodicité de $\int_M P^x(.)\mu(dx)$ et à celle du processus $\eta(t)$. Un sous-ensemble borélien $B \subset M$ sera dit invariant par rapport au processus si $\forall x \in B$ on a P^x $(\sigma_{M\setminus B} < +\infty) = 0$, $\tau_A \equiv \inf \{t>0 | \eta(t) \in A\}$ désignant le temps d'entrée du processus $\eta(t)$ dans A.
On peut alors montrer que l'invariance de B sous l'action de P_t est équivalente à l'existence d'une suite d'ouverts $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $\mathrm{Cap}(U_n) \to 0$ et d'une modification borélienne $\tilde{B}$ de B telle que $\mu(B-\tilde{B}) = 0$ et que pour tout n, $\tilde{B} \cap (M\setminus U_n)$ soit à la fois ouvert et fermé dans $M\setminus U_n$. Par Cap (.) nous entendons la capacité associée à la forme de Dirichlet E (voir [8]). Ces conditions impliquent l'existence d'une décomposition de M, soit

$$M = B_1 + B_2 + N$$

où les B_i ($i=1,2$) sont des modifications invariantes par rapport à $\eta(t)$ de B (respectivement $M\setminus B$) et où N est tel que $\mu(N) = 0$. Il en résulte une décomposition de $L^2(M,\mu)$ en $L^2(B_1,\mu) \oplus L^2(B_2,\mu)$ et de P_t en $(P_t^{(1)} \otimes \mathbb{1}) \oplus (\mathbb{1} \otimes P_t^{(2)})$, $P_t^{(i)}$ désignant la restriction de P_t au sous-espace invariant $L^2(B_i,\mu)$. N agit donc comme barrière pour le processus $\eta(t)$. Dans le cas particulier où $\mu(dx) = \rho(x)\sigma(dx)$ le résultat précédent s'applique si l'ensembe $U_\rho = \{x \in M | \rho(x) = 0\}$ décompose M en deux sous-ensembles B_1' et B_2' tels que $L^2(M,\mu) = L^2(B_1',\mu) \oplus L^2(B_2',\mu)$ et

$\mu(M \setminus (B_1' \cup B_2')) = 0$. On peut alors montrer que l'existence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est liée au comportement de ρ au voisinage de l'ensemble nodal U_ρ. Nous renvoyons à [7] pour une discussion du cas où $M = \mathbb{R}^d$. Des résultats semblables peuvent être obtenus dans le cas envisagé dans la section 2 où $\rho = |\psi|^2$ et en remarquant que P_t est alors le semigroupe dans $L^2(M,\mu)$ associé à l'extension de Friedrichs de l'opérateur $-\frac{1}{2}\Delta + \beta^i D_i$ défini sur $C_0^2(M)$. On considère l'ensemble nodal U_ψ de ψ et le problème se ramène à la construction d'une famille U_n d'ouverts dont la capacité décroit et tend vers zéro quand $n \to +\infty$ et qui vérifient de plus les conditions topologiques mentionnées. La capacité des U_n peut se calculer de manière analytique. On a en effet pour un ouvert quelconque

$$\mathrm{Cap}\,(U) = \inf_{f \restriction U \geq 1} \left[E(f,f) + \| f \|^2_{L^2(M,\mu)} \right] \tag{3.5}$$

On peut aussi adopter un point de vue probabiliste identifiant le potentiel d'équilibre $e_U(x)$ associé à l'ouvert U avec $E^x\left(e^{-\tau_U}\right)$, où E^x est l'espérance par rapport à P^x. En particulier si $e_u \equiv 0$ il en résulte que τ_U est infini et U n'est jamais atteint par le processus. Considérons par exemple le cas où

$M = (-d,+d)$ et $U_\rho = \{o\}$. S'il existe b avec $0<b<d$ et tel que $\int_{-b}^{0} \frac{dx}{\rho(x)} = \infty$, $\int_{0}^{b} \frac{dx}{\rho(x)} < +\infty$ alors M n'est pas irréductible pour P_t. Inversement si $\int_{-b}^{+b} \frac{dx}{\rho(x)} < +\infty$ M est irréductible pour P_t. Il en résulte en particulier que si ρ est lisse M n'est jamais irréductible.

Revenons au cas général et supposons que l'on ait $M = B_1 + B_2 + N$, les B_i étant P_t-invariants et $\mu(N) = 0$. On a donc $L^2(M,\mu) = L^2(B_1,\mu) \oplus L^2(B_2,\mu)$ et une réduction correspondante de P_t. Nous allons montrer que le processus $\eta(t)$ se décompose alors en deux composantes ergodiques. Considérons en effet la sous-algèbre A de $L^\infty(M,\mu)$ constituée par les fonctions bornées mesurables f telles que $P_t f = f P_t$ (pour P_t markovien cela est équivalent à l'invariance de f sous l'action de P_t). A est une C*-algèbre commutative unitaire et est donc isomorphe à l'agèbre C(X) des fonctions continues sur l'espace compact X. Soit ν la mesure induite sur C(X) par la mesure μ; on a $A \simeq L^{\infty}(C(X),\nu)$. La décomposition spectrale de $L^2(M,\mu)$ par rapport à l'agèbre A est donnée par

$$L^2(M,\mu) = \int_A^{\oplus} L^2(M,\mu(.|A))(\alpha)\nu(dx) \tag{3.6}$$

où $\mu(.|A)(.)$ est la mesure de probabilité obtenue en prenant l'espérance conditionelle par rapport à la sous σ-algèbre engendrée par A. Tout élément de A commutant avec P_t, il résulte alors de (3.6) que $P_t = e^{-tH}$ (t>0) et son générateur infinitésimal H dans $L^2(M,\mu)$ admettent une décomposition spectrale par rapport à A. On a en particulier

$$P_t = \int_A^{\oplus} (P_t)^{(\alpha)}\nu(dx) \tag{3.7}$$

$P_t^{(\alpha)}$ agissant dans $L^2(M,\mu(.|A)(\alpha))$. A cette décomposition de P_t correspond une décomposition de la forme de Dirichlet

$E(f,f) = (H^{\frac{1}{2}}f,\ H^{\frac{1}{2}}f)$ associé à H. On a

$$E(f,f) = \int E_\alpha(f^\alpha,f^\alpha)\nu(dx)$$

avec

$$E_\alpha(f^\alpha,f^\alpha) = \int df^{(\alpha)}(x)\ .\ df^\alpha(x)\mu(.|A)(dx)$$

On peut montrer que O est une valeur propre simple de H^α, où H^α est tel que $P_t^\alpha = e^{-tH^\alpha}$, et que la fonction propre associée est strictement positive. H^α est l'opérateur auto-adjoint associé à la forme de Dirichlet E_α. Le sous-espace de H correspondant à la valeur propre O est l'adhérence de A dans $L^2(M,\mu)$. Pour une démonstration et plus de détails nous renvoyons à [6].Les propriétés suivantes sont alors équivalentes:

1) P_t est irréductible
2) 1 est une valeur propre simple de H
3) $(f,P_tg) = 0\ \forall t>0$ pour $f\geq 0$ $g\geq 0$ entraine $f\equiv 0$ ou $g\equiv 0$.

Si P_t est markovien alors 1), 2), 3) sont équivalentes à

4) $\eta(t)$ est ergodique.

La décomposition (3.7) est donc une décomposition du semigroupe P_t en composantes ergodiques et de manière analogue la décomposition $\int_A^{\oplus} \mu(.|A)(\alpha)\nu(d\alpha)$ de μ est la décomposition ergodique de μ sous l'action de $\eta(t)$ (voir [6]).

Si l'on applique ces résultats au cas où $E(f,f) = \int_M df(x).df(x)\mu(dx)$ avec $\mu(dx) = \rho(x)\sigma(dx) = |\psi(x)|^2\sigma(dx)$, on voit que la surface nodale U_ψ joue le rôle d'une barrière infranchissable divisant M en sous ensembles B_α invariants sous l'action de P_t et que le processus correspondant se décompose en composantes ergodiques associées aux semigroupes P_t^α. Si le processus à l'instant initial part de $x \in B_\alpha$ alors il restera confiné dans B_α. Sous des conditions très générales - et ce sera toujours le cas si ψ est lisse - on a confinement du processus dans les sous-ensembles invariants déterminés par l'ensemble nodal U_ψ. Si on considère l'état fondamental de l'opérateur de Schrödinger $-\frac{1}{2}\Delta + V$ c'est à dire la solution de $(-\frac{1}{2}\Delta + V)\psi_o = E_o\psi_o$ avec $E_o = \inf \sigma(H)$ il est bien connu que sous des conditions très générales $\psi_o > 0$ et le semigroupe P_t dans $L^2(M, \psi_o^2(x)\sigma(dx)$ est unitairement équivalent au semigroupe $e^{-t(-\frac{1}{2}\Delta + V - E_O)}$ dans $L^2(M,\sigma(dx))$ et P_t est dans ce cas irréductible. Par contre pour toute fonction propre ψ associée à une valeur propre $E \neq E_o$ le semigroupe P_t dans $L^2(M,|\psi(x)|^2\sigma(dx))$ n'est par irréductible. Si l'on fait l'hypothèse que U_ψ partage M en deux composantes connexes B_α à bords réguliers, les composantes irréductibles P_t^α de P_t sont unitairement équivalentes dans $L^2(M,\rho^\alpha(x)\sigma(dx))$ avec $\rho^\alpha = |\psi(x)|^2 \chi_{B_\alpha}$, à $e^{-t(-\frac{1}{2}\Delta_\psi^\alpha + V - E)}$, où Δ_ψ^α est le laplacien dans $L^2(B_\alpha, |\psi(x)|^2\sigma(dx))$ avec conditions de Dirichlet sur U_ψ (voir [13]).

<u>Remarque 1</u>: Dans le cas où P_t est markovien la mesure μ est une mesure invariante finie et il n'y a qu'une mesure de probabilité invariante si P_t est irréductible. Dans le cas réductible où U_ψ partage M en régions disjointes B_α les mesures $\chi_{B_\alpha}|\psi|^2\sigma(dx)$ sont invariantes. En particulier les mesures $\mu_\alpha(dx) = p_\alpha^{-1}\chi_{B_\alpha}|\psi|^2\sigma(dx)$ avec $p_\alpha = \int_{B_\alpha} |\psi(x)|^2\sigma(dx)$ sont des mesures de probabilité

invariantes associeés à chaque région invariante B_α. Toute combinaison convexe des mesures μ_α fournit évidemment aussi une mesure de probabilité invariante. Dans le cas où ψ est obtenue comme solution d'une équation de Schrödinger on peut utiliser un argument de stabilité de μ par rapport à de petites perturbations du potentiel pour privilégier le choix de μ (voir [4]).

Remarque 2 Nous renvoyons à [13],[4] et [16] pour une discussion probabiliste du mécanisme de confinement applicable aussi au cas non stationnaire et non symétrique.

4. Applications

On rencontre dans la nature beaucoup de phénomènes qu'un modèle probabiliste associé à une équation de diffusion de la forme

$$d\eta(t) = \beta(\eta(t),t)dt + D(\eta(t))dw(t) \qquad (4.1)$$

permet de décrire de manière très satisfaisante. Dans cette équation le vecteur $\beta \in \mathbb{R}^d$ porte le nom de drift, $D(\eta(t)) \in \mathbb{R}^{d^2}$ est une matrice appelée coefficent de diffusion et $w(t)$ est le processus de Wiener standard dans $\mathbb{R}^d$. Un tel modèle peut être utilisé par exemple comme une approximation rendant compte de situations, où un très grand nombre de particules interagissent de manière complexe et désordonnée et où donc pratiquement seule une approche statistique est possible. On peut aussi envisager une équation différentielle stochastique du type (4.1) comme une équation d'évolution classique non linéaire perturbée par un terme stochastique. Dans le cas où le coefficient de diffusion D ne dépend pas explicitement du temps t et est strictement positif on peut ramener l'étude de (4.1) à celle d'une équation différentielle stochastique sur une variété M dont le coefficient de diffusion peut être pris égal à 1. Introduisons dans $\mathbb{R}^d$ la metrique definie par $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{d} g_{ij}dx^i dx^j$

avec $g_{ij} \equiv (D^tD)^{-1}_{ij}$ où ${}^tD$ est la matrice transposée de D. Muni de cette métrique $\mathbb{R}^d$ devient une variété riemanienne M. On peut alors considérer le processus $\hat{\eta}$ à valeurs dans M, de coordonnées locales $\eta(t)$ dans $\mathbb{R}^d$ et definissant $\hat{\beta}$ par

$$\hat{\beta}^i = \beta^i - g^{kl}\,\Gamma^i_{kl} \qquad (\Gamma \text{ symbole de Christoffel})$$

on a

$$d\hat{\eta}(t) = \hat{\beta}(\hat{\eta}(t),t)dt + d\hat{w}(t) \qquad (4.2)$$

où $\hat{w}$ est le processus de Wiener sur M [2],[19]. Autrement dit il revient au même d'étudier le processus $\eta(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ régi par (4.1) ou d'étudier celui à valeurs dans M solution de (4.2). C'est la situation qui a été envisagée dans les sections précedenctes. Nous avons en particulier vu que le processus $\hat{\eta}(t)$ admettait une densité de probabilité $\rho(t,x)$ si $\beta^*(\eta(t))$ était le gradient d'une fonction S et si enfin l'accéleration stochastique associée au processus $\hat{\eta}(t)$ satisfait à la loi de Newton, à savoir $a = F = -\nabla V$, alors la fonction $\psi t,x) = \sqrt{\rho(t,x)}\, e^{iS(t,x)}$

est solution de l'équation de Schrödinger.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \quad \text{avec} \quad H = -\frac{1}{2}\Delta + V \qquad (4.3)$$

où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M. Nous avons vu dans la section 2 que toute solution de (4.3) telle que $|\psi| > 0$ permet d'obtenir en posant $\mu(dx) = |\psi|^2\sigma(dx)$, $\sigma(dx)$ étant la mesure riemanienne sur M, la distribution du processus $\hat{\eta}(t)$. On en déduit aisément la distribution $|\mathrm{Det}(D^tD)^{\frac{1}{2}}\ |\psi|^2$ du processus original $\eta(t)$. Rappelons que si ψ est suffisamment régulière la surface nodale $U_\psi = \{x\in M|\psi(x) = o\}$ crée des barrières infranchissables pour le processus $\hat{\eta}(t)$, conduisant à un mécanisme de confinement pour le processus $\hat{\eta}(t)$ et donc aussi pour le processus $\eta(t)$ dans $\mathbb{R}^d$, solution de(4.1). Nous allons dans ce qui suit considérer quelques exemples de systèmes complexes où l'on peut exploiter ce type d'idées pour rendre compte de phénomènes naturels de confinement et de formations de configuration stationnaires et non stationnaires.

Exemple 1: Formations de jet-streams dans la nébuleuse protosolaire et distribution des planètes

L'hypothèse selon laquelle le système solaire se serait formé à partir d'une nébuleuse primitive fut proposée par Descartes (1644) et dévéloppée par Kant (1755) et Laplace (1796). Elle est encore aujourd'hui le point de départ de toute une classe de théories cosmogoniques. Un grand nombre de modèles cosmogoniques reposent aussi sur l'hypothèse de non-cogènécité, qui affirme que la formation du soleil a précédé celle des planètes. Envisageons donc une nébuleuse protosolaire constituée d'un nuage (gaz, poussière,...) et entourant le soleil, qui exerce alors sur chaque particule constituant la nébuleuse une force d'attraction dûe à la gravitation. Chaque particule de la nébuleuse est animée d'une mouvement complexe et désordonné provoqué d'une part par la force centrale d'attraction gravitationelle du soleil et d'autre part par l'action des collisions avec les autres particules de la nébuleuse. Compte tenu de l'état chaotique de la nébuleuse protosolaire, ces collisions sont distribuées au hasard et il est alors tentant de décrire le mouvement irrégulier dans $\mathbb{R}^3$ d'une telle particule par une équation différentielle stochastique du type(4.1) (ou ce qui revient au même du type (4.2)).Même si cela n'était pas le cas dans la nébuleuse initiale, la fréquence des collisions et le caractère attractif du potentiel créé par le soleil amènent à penser que le régime susceptible d'être raisonablement bien dé-crit par une distribution stationnaire a été assez vite atteint et a pu se maintenir relativement longtemps jusqu'à ce que de nouveaux phénomènes - en particulier de nature nucléaire - se dé-clenchent. D'autre part,compte tenu de l'action de la force centrale due à la présence du soleil,il est naturel d'admettre qu'au moins en moyenne stochastique la loi de Newton peut s'appliquer à chaque particule test de la nébuleuse. On a donc $ma(\eta(t)) = -\nabla V$ ou m est la masse de la particule, a son accéleration stochastique définie par (2.15), V le potentiel dont dérive la force d'attraction crée par le soleil soit $V = \frac{-\gamma mM}{|x|}$ + correction, où γ est la constante de gravitation et M la masse du soleil. Les densités de probabilité stationnaires du processus sont de la forme $|\psi|^2\sigma(dx)$ où ψ est une solution de l'équation aux valeurs propres de Schrödinger $H\psi = E\psi$. Sous des hypothèses très générales sur V, verifiées en particulier quand V est le potentiel de Newton,

on sait qu'une telle équation possède des solutions dans $L^2(M,\sigma(dx))$ et lisses, le spectre de H étant constitué de valeurs discrètes négatives E_n associées aux états liés du système. La fonction propre associée à inf $\sigma(H)$ (état fondamental) est strictement positive tandis que celles associées aux autres valeurs propres possèdent toutes des surfaces nodales non vides. Nous avons remarqué dans la section 3 que ces surfaces nodales forment pour le processus $\hat{\eta}(t)$ des barrières infranchissables conduisant à l'apparition de régions de confinement. Dans [14] nous avons discuté en détail le cas où $\sigma = \mathbb{1}$ et $V(x) = \frac{-\gamma mM}{|x|}$.
L'hypothèse σ = constante est une hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de la nébuleuse. On voit alors qu'il existe des fonctions propres ψ et donc des mesures invariantes $\rho(x) = |\psi(x)|^2 dx$ qui conduisent à la formation de zones de confinement dans la nébuleuse en forme d'anneaux "circulaires" (correspondant aux anneaux de Laplace) presque coplanaires et concentriques dans le plan équatorial du soleil. Dans de nombreuses théories décrivant la formation du système soleil la formation de ces "jet-streams" est une étape intermédiaire à partir de laquelle on explique la formation des planétoides puis enfin des planètes grace à des phénomènes complexes d'agrégation de la matière circulant dans ces jet-streams [25]. De la position des jet-streams on peut déduire une loi sur les distances successives $r_n = 0.9(1.75)^n$ des planètes au soleil, en bon accord avec la loi classique de Titius-Bode [14]. Signalons pour terminer que des considérations analogues sont bien évidemment applicables à l'étude des systèmes de satellites des planètes joviennes [14].

Exemple 2: Morphologie et rotation rigide des galaxies

Il est bien évident que de nombreux phénomènes considérés en astrophysique, en hydrodynamique, en physique de l'atmosphère... sont susceptibles d'un traitement analogue, pour autant que l'hypothèse de diffusion soit justifiable à l'échelle où le phénomène doit être considéré. Par exemple les étoiles d'une galaxie peuvent être assimilées aux particules d'un gaz et donc susceptibles d'être décrites approximativement à l'aide d'un processus de diffusion. Pour rendre compte de la rotation des galaxies, il est alors naturel de considérer des densités de probabilité non invariantes $\rho(t,x)\sigma(dx)$ avec $\rho(t,x) = |\psi(t,x)|^2$ où ψ est une solution de (4.3), le potentiel étant en première approximation le potentiel de gravitation crée par le disque central de la galaxie. On peut considérer en particulier des mesures $\rho = |\psi|^2$ obtenues à partir de fonctions ψ de la forme

$\Sigma c_n e^{-itE_n}\psi_n$ avec $H\psi_n = E_n\psi_n$ et $c_n \in \mathbb{C}$. Des mesures de ce type permettent d'expliquer d'une part la rotation rigide des galaxies et d'autre par pour des choix convenables de ψ_n, E_n, c_n les différents types morphologiques de galaxies (structure spirale, annulaire et discoïdale, structure barrée et spirale-barrée). Nous renvoyons à [18] pour plus de détails.

Exemple 3: Circulation générale planétaire

On peut appliquer ce type de modèles à l'étude de l'atmosphère d'une planète et plus particulièrement à celle de la structure générale des vents dominants. Par exemple dans le cas de l'atmosphère terrestre les surfaces nodales pouvant intervenir en tant que régions possibles de confinement, à l'origine de l'existence d'un système de vents dominants, sont donnée par les zéros des harmoniques sphériques $Y_l^m(\Theta,\phi)$. Les lignes nodales de la fonction de Legendre associée $P_6^1(\cos\Theta)$, qui s'annule pour 5 valeurs différentes de l'angle Θ, sont des cercles sur la sphère unité des parallèles sur la terre. On aboutit ainsi à une représentation d'une circulation générale avec une répartition des vents en six systèmes: les alizés du nord-est et du sud-est les vents de secteur ouest des latitudes moyennes et les vents de secteur est des régions polaires. Ces systèmes sont séparés par le creux équatorial par les deux zones de convergence extra-topicales correspondant aux basses pressions voisines de la latitude 60^o dans chaque hémisphère. P_6^1 fournit avec très bonne approximation les 6 cellules de confinement observées (2cellules de Hadley à l'équateur, 2 cellules de Ferrel et 2 cellules polaires) Pour plus de détail nous renvoyons à [24].

Exemple 4: "Spokes" dans les anneaux de Saturne

La présence de "spokes" radiaux en rotation uniforme dans les anneaux de Saturne a été mise en évidence récemment. La formation de ces "spokes" peut être aussi expliquée à l'aide d'un mécanisme de confinement dans les anneaux de Saturne, les régions de confinement étant comprises entre des rayons faisant entre eux un angle constant et en rotation uniforme. De telles régions de confinement s'obtiennent en considérant des densités de probabilité $\rho(t,x) = |\psi(t,x)|^2$ du même type que celles utilisées dans l'exemple 2.

En conclusion on peut donc dire que pour les processus de diffusion à valeurs dans une variété la formation de barrières infranchissables conduisant à un phénomène de confinement dans des domaines disjoints, séparés par les surfaces nodales des densités de probabilité, et un mécanisme très général susceptible de trouver des applications dans de nombreux domaines.

Remerciements

Nous remercions Roland Sénéor pour nous avoir permis d'exposer nos résultats au Colloque Schwartz. Nous sommes redevables pour leurs critiques et remarques à de nombreux collègues et amis et plus particulièrement à Res Jost, Jürgen Potthoff, Hermann Rost, Walter Schneider, Othmar Steinmann et Ludwig Streit.

RÉFÉRENCES

[1] Dankel Th.G.: Mechanics on manifolds and the incorporation of spin into Nelson's stochastic mechanics. Arch.Rat.Mech. Anal. 37, 1971, 192-221

[2] Dohrn D., Guerra F.: Nelson's stochastic mechanics on Riemannian manifolds.Lett. al Nuovo Cimento 22, 1978, 121-127

[3] Nelson E.: Dynamical Theories of Brownian Motion Princeton University Press, 1967

[4] Nelson E.: a) Quantum Fluctuations, Cours de Troisième Cycle Ecole Polytechnique de Lausanne et livre en préparation b) "Quantum Fluctuations - An Introduction" Proceedings Boulder IAMP Conference Boulder Plenum Press 1983

[5] Meyer P.A.: Géometrie différentielle stochastique (bis) Seminaire de Probabilité XVI, 1980/81 Supplément: Géometrie Différentielle Stochastique.Lecture Notes in Mathematics 921, Springer 1982

[6] Albeverio S., Høegh-Krohn R.: Dirichlet Forms and Diffusion Processes on Rigged Hilbert Spaces. Z. Wahrscheinlichkeits-theorie verw. Gebiete 40, 1-57 (1977)

[7] Albeverio S., Fukushima M., Karwowski W., Streit L.: Capacity and Quantum Mechanical Tunneling Commun. Math. Phys. 81, 501-513 (1981)

[8] Fukushima M.: Dirichlet Forms and Markov Process North Holland Kodansha 1980

[9] Röckner M., Wielens N.: Dirichlet Forms - Closability and Change of Speed Measure. Preprint Bielefeld 1983

[10] Fukushima M.: A Note on Irreductibility and Ergodicity of Symmetric Markov Processes in "Stochastic Processes in Quantum Theory and Statistical Physics" Lecture Notes in Physics 173 Springer 1982

[11] Kent J.: Time reversible Diffusions.Adv.Appl.Prob. 10 819-835, 1978; 11, 888 1979

[12] Kolmogoroff A.: Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze .Math. Ann. 112, 155-160, 1936

[13] Albeverio S., Høegh-Krohn R.: A remark on the connection between stochastic mechanics and the heat equation. Journal of Math. Phys. 15, 1745-1748, 1974

[14] Albeverio S., Blanchard Ph., Høegh-Krohn R.:
A stochastic model for the orbits of Planets and Satellites: an Interpretation of the Titius-Bode law. Expositiones Mathematicae (1983)

[15] Albeverio S., Blanchard Ph., Høegh-Krohn R.: Processus de diffusion, confinement et formation de "jet-streams" dans la nébuleuse protosolaire. CERN Preprint TH 3536 Février 1983

[16] Nagasawa M.: Segregation of a population in an environment. J.Math.Biology 9, 213-235 1980

[17] Albeverio S., Blanchard Ph., Høegh-Krohn R., Schneider W.: en préparation

[18] Albeverio S., Blanchard Ph., Høegh-Krohn R., Ferreira L., Streit L.: en préparation

[19] Morato L.M. On the dynamics of diffusions and the related general electromagnetic potentials. J.Math.Phys. 23 1020-1024,1966

[20] Nelson E.: Derivations of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics. Phys.Rev. 150, 1079-1085, 1966

[21] Nelson E.: The adjoint Markoff process. Duke Math.J. 25, 671-690, 1958

[22] Chung K.L., Walsh J.B.: To reverse a Markov process Acta Mathematical 123, 225-251 (1969)

[23] Meyer P.A.:Le retournement du temps d'après Chung et Walsh. Seminaire de Probabilité. Univ. de Strasbourg 213-236, 1969-1970

[24] Albeverio S., Blanchard Ph., Høegh-Krohn R., Combe Ph., Rodriguez R., Sirugue M.,Sirugue-Collin M., en préparation

[25] Alfven H., Arrhenius G.: Structure and Evolutionary History of the Solar System. D. Reidel 1975

[26] Nagasawa M: Time reversions of Markov processes Nagoya Math. Journal 24, 177-204, 1964