LAURENT MORET-BAILLY

Compactifications, hauteurs et finitude

Astérisque, tome 127 (1985), p. 113-129
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__113_0>

Exposé IV

COMPACTIFICATIONS, HAUTEURS ET FINITUDE

Laurent MORET-BAILLY

Société Mathématique de France
Astérisque 127 (1985)

0.- INTRODUCTION

Soient K un corps de nombres, g un entier ≥ 1 , H un réel. L'objet du présent exposé est de prouver que l'ensemble des classes d'isomorphie de K-variétés abéliennes de dimension g et de hauteur différentielle $\leq H$ est fini, ainsi qu'une variante "polarisée" du même énoncé. Pour y parvenir on construit des compactifications des schémas de modules pertinents, permettant de comparer la hauteur stable d'une variété abélienne à la "hauteur projective" (à singularités logarithmiques) du point correspondant.
La présentation adoptée ici est plus "algébrique" que la démonstration originale de Faltings : on n'y fait pas usage des constructions de Baily-Borel, Mumford et al., et Namikawa.

Signalons que Faltings a annoncé récemment la construction d'un champ propre et lisse sur Spec $\mathbb{Z}$, compactifiant le champ des variétés abéliennes principalement polarisées, et portant un schéma semi-abélien prolongeant le schéma abélien universel. Ceci permettrait (cf [D] , commentaires suivant 1.12) de se passer du "lemme de Gabber" (exposé IV) et par suite du recours aux jacobiennes. Enfin le §4 suggère quelques simplifications à certaines démonstrations.

Notations :

$\mathcal{O}_K$ = anneau des entiers du corps de nombres K.

Si A est un schéma en groupes lisse commutatif sur une base S , on note $[n]_A$ la multiplication par n dans A ; ${}_nA = \mathrm{Ker}[n]_A$; $\omega_{A/S} = \det(\mathrm{Lie}\ A/S)^{\vee}$; si A est un schéma abélien, on note A^t son dual.

1.- COMPACTIFICATIONS ET THÉORÈMES DE FINITUDE

1.0.- Soient g,d deux entiers ≥ 1 , n un entier ≥ 3 . Désignons par $M = M_{g,d,n}$ le schéma de modules sur $\mathbb{Q}$ des variétés abéliennes de dimension g, munies d'une polarisation de degré d^2 et d'une structure de niveau n . Soit $\mathcal{A} \xrightarrow{F} M$ le schéma abélien universel (qui existe puisque $n \geq 3$) et désignons par ω le faisceau inversible $\omega_{\mathcal{A}/M}$ sur M . Le fibré en droites $\omega_{\mathbb{C}}$ sur $M_{\mathbb{C}}$ est muni de façon naturelle d'une métrique hermitienne ρ , de la façon suivante (cf. I, 3.3.) : si $x \in M(\mathbb{C})$, la fibre ω_x s'identifie à $H^0(\mathcal{A}_x, \Omega^g_{\mathcal{A}_x/\mathbb{C}})$, espace des g-formes (invariantes) sur la variété abélienne $\mathcal{A}_x$; si α est une telle forme, on a alors par définition

$$(1.0.1) \qquad \rho(\alpha)^2 = \gamma^g \int_{\mathcal{A}_x(\mathbb{C})} |\alpha \wedge \bar{\alpha}|$$

où γ est une constante dépendant des auteurs.

Si $x \in M(K)$, où K est un corps de nombres, on désignera par $hs(x)$ la hauteur stable (I, 3.3) de la variété abélienne $\mathcal{A}_x$ sur K correspondante (pour les métriques à l'infini compatibles avec la formule (1.0.1)). Le réel $hs(x)$ est invariant par extension du corps de base ; on obtient ainsi une application

$$(1.0.2) \qquad hs : M(\overline{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

où $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

THÉORÈME 1.1.- *On suppose que* n *est divisible par* $8d^2$. *Il existe une compactification* $\overline{M}$ *de* M , *un entier* $m \geq 1$, *et un faisceau inversible ample* $\mathcal{H}$ *sur* $\overline{M}$ *prolongeant* $\omega^{\otimes m}$, *tels que*

(i) *la métrique* $\rho^{\otimes m}$ *sur* $\mathcal{H}_{\mathbb{C}|M_{\mathbb{C}}} = \omega_{\mathbb{C}}^{\otimes m}$ *est à singularités logarithmiques le long de* $\overline{M}-M$ (I, 3.2) ;

(ii) *si* $\underline{h}$ *désigne la classe de hauteurs (modulo les fonctions bornées) sur* $M(\overline{\mathbb{Q}})$ *définie par* $\mathcal{H}$ *et la métrique* ρ^m, *alors la fonction* hs *de* (1.0.2) *est dans la classe* $\frac{1}{m}\underline{h}$.

Par "compactification" on entend une $\mathbb{Q}$-variété projective contenant M comme ouvert dense.
Ce théorème sera démontré aux § suivants. Auparavant nous allons en déduire des théorèmes de finitude pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres.

1.2.- Si K est un corps de nombres, on désigne par $M_g(K)$ (resp. $M_{g,d}(K)$, $M_{g,d,n}(K)$) l'ensemble des classes de K-isomorphie d'objets A_K(resp(A_K, ξ_K) , resp.(A_K, ξ_K, ν_K)) où A_K , ξ_K , ν_K désignent respectivement une K-variété abélienne de dimension g, une polarisation de degré d^2 sur A_K , et une structure de niveau n sur A_K (ainsi, $M_{g,d,n}(K)$ est bien l'ensemble des points à valeurs dans K du schéma $M_{g,d,n}$) . Pour tout réel H , on désigne respectivement par $M_g^H(K)$, $M_{g,d}^H(K)$, $M_{g,d,n}^H(K)$ les sous-ensembles des précédents obtenus en imposant la condition

$$\mathrm{hdif}(A_K) \leq H$$

où hdif désigne la hauteur différentielle (I, 3.3) ; cette condition, rappelons-le, implique $hs(A_K) \leq H$. Nous commettrons à l'occasion des abus d'écriture du genre "soit $(A_K, \xi_K) \in M_{g,d}(K)$" .

THÉORÈME 1.3.-
(i) *Pour tout corps de nombres* K *et tout réel* H *, les ensembles* $M_g^H(K)$, $M_{g,d}^H(K)$, $M_{g,d,n}^H(K)$ *sont finis.*

(ii) *Il existe une constante* C_g *telle que pour tout corps de nombres* K *et toute* $A_K \in M_g(K)$, *on ait*

$$hs(A_K) \geq C_g$$

(et a fortiori $hdif(A_K) \geq C_g$*)* .

1.4.- Le théorème 1.1 ci-dessus, joint aux propriétés de finitude des hauteurs à singularités logarithmiques (I,Th.3.1'), implique la finitude de $M_{g,d,n}^H(K)$ lorsque $8d^2|n$. De plus, comme toute variété abélienne admet une structure de niveau n après extension finie convenable du corps de base, on en déduit encore, compte tenu de la minoration des hauteurs (I,loc.cit.) :

(1.4.1.) Il existe $C_{g,d}$ telle que pour tout corps de nombres K et tout $(A_K, \xi_K) \in M_{g,d}(K)$, on ait

$$hs(A_K) \geq C_{g,d} \quad .$$

1.5.- Prouvons maintenant la finitude de $M_{g,d}^H(K)$ (nous suivons [D]).

LEMME 1.5.1.- *Soit* r *un entier divisible par deux entiers premiers entre eux et* ≥ 3 *(par exemple* $r = 12$*) . Soit* A_K *une variété abélienne de dimension* g *sur un corps de nombres* K *, et soit* $\mathfrak{p}$ *une place de* K *où* A_K *n'a pas réduction semi-stable,* $\mathbb{N}\mathfrak{p}$ *sa norme. Alors*

$$\log \mathbb{N}\mathfrak{p} \leq [K:\mathbb{Q}]\,\mathrm{Card}\,GL_{2g}(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})\ (hdif(A_K) - hs(A_K)) \quad .$$

Démonstration : Il existe une extension K' de K rendant rationnels les points d'ordre r de A_K , et de degré

$$[K':K] \leq \mathrm{Card}\,GL_{2g}(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \quad .$$

La variété abélienne $A_{K'}$ est à réduction semi-stable sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_{K'}$ de K' ([SPC],I,5.18). Par suite, si A et A' désignent les modèles de Néron respectifs de A_K et $A_{K'}$ sur $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_{K'}$, le morphisme naturel de $\mathcal{O}_{K'}$-schémas en groupes

$$A \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'} \longrightarrow A'$$

n'est pas étale aux places de $\mathcal{O}_{K'}$ divisant $\mathfrak{p}$. En conséquence le morphisme naturel de $\mathcal{O}_{K'}$-modules inversibles

$$\omega_{A'/\mathcal{O}_{K'}} \hookrightarrow \omega_{A/\mathcal{O}_K} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{K'}$$

admet un zéro en chacune de ces places (qui sont toutes de norme $\geq N\mathfrak{p}$) . On en tire

$$\mathrm{hdif}(A_K) = \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]} \deg_{\mathcal{O}_{K'}} (\omega_{A/\mathcal{O}_K} \otimes \mathcal{O}_{K'})$$

$$\geq \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]} (\deg_{\mathcal{O}_{K'}} \omega_{A'/\mathcal{O}_{K'}} + \log \mathbf{N}\mathfrak{p})$$

$$= \mathrm{hs}(A_K) + \frac{1}{[K':\mathbb{Q}]}\log \mathbf{N}\mathfrak{p}$$

$$\geq \mathrm{hs}(A_K) + \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]\mathrm{Card}\ GL_{2g}(\mathbb{Z}/r\,\mathbb{Z})} \log \mathbf{N}\mathfrak{p}\ . \qquad \blacksquare$$

1.5.2.- Pour $(A_K,\xi_K) \in M^H_{g,d}(K)$, le lemme 1.5.1 et l'assertion (1.4.1) impliquent (avec les notations du lemme)

$$\log \mathbf{N}\mathfrak{p} \leq [K:\mathbb{Q}]\mathrm{Card}\ Gl_{2g}(\mathbb{Z}/r\,\mathbb{Z})\ (H - C_{g,d})\ .$$

Si donc T_1 désigne l'ensemble (fini) des places $\mathfrak{p}$ de K vérifiant l'inégalité ci-dessus, alors pour tout $(A_K,\xi_K) \in M^H_{g,d}(K)$ la variété A_K a réduction semi-stable en dehors de T_1 .

1.5.3.- Soit n un entier ≥ 3 , divisible par $8d^2$. Toute $(A_K,\xi_K) \in M^H_{g,d}(K)$ acquiert une structure de niveau n sur une extension de degré borné par $\mathrm{Card}\ GL_{2g}(\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})$. Les points de $M_{g,d,n}(\overline{\mathbb{Q}})$ correspondant aux diverses structures de niveau n sur les $(A_K,\xi_K)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ sont donc de degré borné, et de hauteur bornée par H (th. 1.1). Ils sont donc en nombre fini (I,Th.3.1') et par suite les $(A_K,\xi_K)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ (pour $(A_K,\xi_K) \in M^H_{g,d}(K)$) ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie. Il existe donc un ensemble fini T_2 de places de K tel que toutes les A_K envisagées aient bonne réduction potentielle en-dehors de T_2 .

1.5.4.- Pour $(A_K,\xi_K) \in M^H_{g,d}(K)$ le lieu de mauvaise réduction de A_K est contenu dans $T_1 \cup T_2$. La variété A_K a donc une structure de niveau n sur une extension de degré borné, non ramifiée en-dehors de $T_1 \cup T_2 \cup \{$places divisant n$\}$. Ces extensions sont en nombre fini (Hermite) et il existe donc K' finie sur K telle que les $(A_K,\xi_K)_{K'}$ aient une structure de niveau n, donc ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie. On conclut par un argument galoisien standard: le groupe $\Gamma = \mathrm{Aut}_{K'}(A_{K'}, \xi_{K'})$ étant fini, il en est de même de l'ensemble $H^1(K'/K, \Gamma)$. ∎

1.6.- La finitude de $M^H_{g,d}(K)$ implique trivialement celle de $M^H_{g,d,n}(K)$ pour <u>tout</u> n . Il reste à établir celle de $M^H_g(K)$ et l'assertion (ii) de 1.3. On utilise pour cela les faits suivants (où A_K et B_K désignent des variétés abéliennes sur le corps de nombres K) :

a) $\mathrm{hdif}(A_K \times B_K) = \mathrm{hdif}(A_K) + \mathrm{hdif}(B_K)$ (immédiat)

b) $\mathrm{hdif}(A_K) = \mathrm{hdif}(A^t_K)$ (VII , §2)

c) $(A_K \times A^t_K)^4$ admet une polarisation principale (VIII,Prop. 1).

d) l'ensemble des classes d'isomorphie de K-variétés abéliennes facteurs directs de B_K est fini (VIII,Prop. 2).

Le lecteur pourra s'assurer que la démonstration des assertions ci-dessus n'utilise pas le présent exposé. Les assertions a), b), c) et (1.4.1) impliquent l'assertion (ii) du théorème (avec $C_g = \frac{1}{8} C_{8g,1}$) . Pour A_K parcourant $M^H_g(K)$, les variétés abéliennes $B_K = (A_K \times A^t_K)^4$ ne forment qu'un nombre fini de classes d'isomorphie (à cause de a), b), c) et de la finitude de $M^{8H}_{8g,1}(K)$) . On conclut grâce à d). ∎

2.- <u>LA PROPRIÉTÉ DE PROLONGEMENT</u>

<u>DÉFINITION 2.0.</u>- *Soit* S *un schéma. Un* S*-schéma en groupes* $A \longrightarrow S$ *est dit* <u>*semi-stable*</u> *si :*

(i) A *est commutatif, lisse et séparé sur* S .

(ii) *Pour tout* $s \in S$, *la composante neutre* A^o_s *de* $A_s := A \otimes_S \kappa(s)$ *est extension d'une variété abélienne par un tore.*

(iii) *Il existe un ouvert* U *de* S *tel que la restriction* A_U *soit un* U*-schéma abélien et que pour tout* $s \in S \setminus U$ *l'anneau local* $\mathcal{O}_{S,s}$ *soit normal excellent.*

Un S-<u>*schéma semi-abélien*</u> *est par définition un* S*-schéma en groupes semi-stable à fibres connexes.*

2.1.- Dans tout le §2 on fixe trois entiers $g \geq 1$, $d \geq 1$, $n \geq 3$. Tous les schémas en groupes semi-stables envisagés, sauf évidence du contraire, sont supposés de dimension relative g .

Soient S un schéma de caractéristique 0, $A \xrightarrow{f} S$ un S-schéma semi-abélien, et soit $U \subset S$ un ouvert <u>dense</u> comme en (iii) ci-dessus. Donnons-nous, sur le schéma abélien A_U , une polarisation ξ_U de degré d^2 et une structure de niveau n, notée ν_U . On obtient ainsi, avec les notations de 1.0, un morphisme

(2.1.1) $$j_U = j(A_U, \xi_U, \nu_U) : S \longrightarrow M = M_{g,d,n}$$

ainsi qu'un isomorphisme de U-schémas abéliens

$$A_U \xrightarrow{\sim} j_U^* \mathcal{A}$$

d'où un isomorphisme de $\mathcal{O}_U$-modules inversibles

(2.1.2) $$\alpha_U : j_U^* \omega \xrightarrow{\sim} \omega_{A_U/U} = (\omega_{A/S})_U \ .$$

Cela étant, soient $\overline{M}$ une compactification de M , m un entier ≥ 1 , $\mathcal{H}$ un faisceau inversible sur $\overline{M}$, prolongeant $\omega^{\otimes m}$ (c'est-à-dire que l'on se donne un isomorphisme $\mathcal{H}_{|M} \xrightarrow{\sim} \omega^{\otimes m}$) .

DÉFINITION 2.1.3.- *Avec les hypothèses et notations de* 2.1, *nous dirons que* $(\overline{M}, m, \mathcal{H})$ *a la propriété de prolongement pour* $(A \xrightarrow{f} S\ ,\ \xi_U\ ,\ \nu_U)$ *si*

(i) *le morphisme* $j_U : U \longrightarrow M$ *de* (2.1.1) *se prolonge en un morphisme* $j : S \longrightarrow \overline{M}$ *(unique puisque* U *est schématiquement dense dans* S *)* ;

(ii) *l'isomorphisme* $\alpha_U^{\otimes m}$ (2.1.2) *se prolonge en*

$$\beta : j^*\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \omega_{A/S}^{\otimes m}$$

(compte tenu de l'identification $\mathcal{H}_{|M} = \omega^{\otimes m}$) .

Nous dirons que $(\overline{M}, m, \mathcal{H})$ *a la propriété de prolongement s'il a ladite propriété pour tout* $(A \longrightarrow S,\ \xi_U,\ \nu_U)$ *comme ci-dessus.*

THÉORÈME 2.2.-

(i) *Il existe* $(\overline{M}, m, \mathcal{H})$ *commme en* 2.1, *ayant la propriété de prolongement et tel que* $\mathcal{H}$ *soit ample sur* $\overline{M}$.

(ii) *Tout* $(\overline{M}, m, \mathcal{H})$ *comme en* (i) *ci-dessus vérifie les conditions* (i) *et* (ii) *du théorème* 1.1.

2.3.- La partie (i) de 2.2 sera établie au §3. Soit $(\overline{M}, m, \mathcal{H})$ comme en (i) ci-dessus, et montrons que la métrique ρ^m sur $\mathcal{H}_{\mathbb{C}|M_{\mathbb{C}}} = \omega_{\mathbb{C}}^{\otimes m}$ est à singularités logarithmiques. Il suffit pour cela de trouver un morphisme $\pi : \overline{S} \longrightarrow \overline{M}$ propre et surjectif tel que $\pi^*\rho^m$ soit à singularités logarithmiques. Or le lemme de Gabber (Exposé IV) implique qu'il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \overline{S} \\ M & \end{tikzcd}$$

où π est propre surjectif, i une immersion ouverte, et $\overline{S}$ propre sur Spec $\mathbb{Q}$, tels que le S-schéma abélien $\mathcal{A}_S = \pi^*\mathcal{A}$ se prolonge en un $\overline{S}$-schéma semi-abélien $\mathcal{A}_{\overline{S}}$. On peut supposer (et l'on suppose) que $\overline{S}$ est normal : la propriété de prolongement implique alors l'existence d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \overline{S} \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ M \arrow[r, hook] & \overline{M} \end{tikzcd}$$

et d'un isomorphisme

$$\overline{\pi}^*\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \omega^{\otimes m}_{\mathcal{A}_{\overline{S}}/\overline{S}}$$

prolongeant l'isomorphisme initial sur S et par suite respectant les métriques sur S . Il suffit donc de montrer que la métrique habituelle sur $\omega_{\mathcal{A}_{\overline{S}}/\overline{S}}$ est à singularités logarithmiques le long de $\overline{S}$-S ; ceci a été vu en I, Th.3.2.

2.4.- Montrons maintenant que $(\overline{M},m,\mathcal{H})$ vérifie la partie (ii) de 1.1. Pour cela soit $(\overline{M}_{\mathbb{Z}},\mathcal{H}_{\mathbb{Z}})$ un modèle entier de $(\overline{M},\mathcal{H})$ et soit h la hauteur sur $M(\overline{\mathbb{Q}})$ associée (pour la métrique $\rho^{\otimes m}$ sur $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$) . Toujours d'après le lemme de Gabber, il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd} X_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{Q}}"'] & & \overline{X}_{\mathbb{Z}} \arrow[dd] \\ M \arrow[d] & & \\ \mathrm{Spec}\ \mathbb{Q} \arrow[rr, hook] & & \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

(où $\pi_{\mathbb{Q}}$ est propre et surjectif, et où i induit une immersion ouverte de $X_{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{X}_{\mathbb{Q}} := \overline{X}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$) , et un schéma semi-abélien $\mathcal{A}_{\overline{X}_{\mathbb{Z}}}$ sur $\overline{X}_{\mathbb{Z}}$ prolongeant $\pi^*_{\mathbb{Q}}\mathcal{A}$. De plus, quitte à modifier $\overline{X}_{\mathbb{Z}}$, on peut supposer qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X_{\mathbb{Q}} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{Q}}"'] & \overline{X}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\overline{\pi}_{\mathbb{Q}}"'] & \overline{X}_{\mathbb{Z}} \arrow[d, "\overline{\pi}_{\mathbb{Z}}"'] \\
M \arrow[r, hook] \arrow[dr] & \overline{M} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{M}_{\mathbb{Z}} \arrow[d] \\
 & \operatorname{Spec}\mathbb{Q} \arrow[r, hook] & \operatorname{Spec}\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

(il suffit de remplacer $\overline{X}_{\mathbb{Z}}$ par l'adhérence de $X_{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{X}_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \overline{M}_{\mathbb{Z}}$). On suppose de plus $\overline{X}_{\mathbb{Z}}$ normal. Si x est un point de $X_{\mathbb{Q}}$ à valeurs dans un corps de nombres K, il se prolonge en une section $\tilde{x} : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \longrightarrow \overline{X}_{\mathbb{Z}}$. L'image réciproque $\tilde{x}^*\mathcal{A}_{\overline{X}_{\mathbb{Z}}}$ est un modèle semi-abélien sur $\mathcal{O}_K$ de la variété abélienne $\mathcal{A}_x = x^*\mathcal{A}$ sur K ; c'est donc le "modèle de Néron connexe" de celle-ci, et par suite la hauteur stable de $\mathcal{A}_x$ (c'est-à-dire, avec la notation (1.0.2), le réel $hs(\pi_{\mathbb{Q}}(x))$) n'est autre que la hauteur de $x \in X_{\mathbb{Q}}(K)$, relativement au modèle entier $\overline{X}_{\mathbb{Z}}$ et au faisceau inversible $\omega_{\mathbb{Z}} := \omega_{\mathcal{A}_{\overline{X}_{\mathbb{Z}}}/\overline{X}_{\mathbb{Z}}}$.

D'après la propriété de prolongement, $\omega_{\mathbb{Z}}^{\otimes m}$ s'identifie au-dessus de $\operatorname{Spec}\mathbb{Q}$ avec $\overline{\pi}_{\mathbb{Q}}^*\mathcal{K}$. Par suite les hauteurs sur $X_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathbb{Q}})$ définies par $\overline{\pi}_{\mathbb{Z}}^*\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}$ et $\omega_{\mathbb{Z}}^{\otimes m}$ ont une différence bornée. Finalement la différence

$$|hs(\pi_{\mathbb{Q}}(x)) - \frac{1}{m}\, h(\pi_{\mathbb{Q}}(x))| \qquad (x \in X_{\mathbb{Q}}(\overline{\mathbb{Q}}))$$

est bornée, et il en est de même, puisque $\pi_{\mathbb{Q}}$ est surjectif, de la différence

$$|hs(y) - \frac{1}{m}\, h(y)| \qquad (y \in M(\overline{\mathbb{Q}})) \ . \qquad \blacksquare$$

Remarque 2.5.- On peut montrer une réciproque de la partie (ii) de 2.2 : si $(\overline{M}, m, \mathcal{K})$ est comme dans le théorème 1.1, alors $(\overline{M}, m, \mathcal{K})$ a la propriété de prolongement. En fait ceci n'utilise que la propriété (i) de 1.1 (singularités logarithmiques) et l'amplitude de $\mathcal{K}$, de sorte que la propriété (ii) de 1.1 est conséquence du reste.

3.- CONSTRUCTION DE LA COMPACTIFICATION

3.0.- On garde les notations de 1.0. On note $\xi_M : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^t$ la polarisation naturelle de degré d^2 sur le schéma abélien universel $\mathcal{A}$ sur M, et $\nu_M : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}_M \xrightarrow{\sim} {}_n\mathcal{A}$ la structure de niveau n naturelle.

3.1.- Construction d'un faisceau inversible sur $\mathcal{A}$

Soit (A,ξ) un schéma abélien polarisé sur un schéma S. On définit un faisceau inversible $L(\xi)$ sur A de la façon suivante : si P désigne le faisceau de Poincaré sur $A\times A^t$, on considère le morphisme

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ \xi \end{pmatrix} : A \longrightarrow A\times A^t$$

et l'on pose

$$(3.1.1) \qquad L(\xi) := \begin{pmatrix} \mathrm{id}_A \\ \xi \end{pmatrix}^* (P)^{\otimes 2} \quad .$$

Le faisceau $L(\xi)$ sur A est symétrique (et même "totalement symétrique"), rigidifié (c'est-à-dire muni d'une trivialisation le long de la section unité $e_A : S \longrightarrow A$), très ample relativement à S, et la polarisation $\varphi_{L(\xi)} : A \longrightarrow A^t$ associée n'est autre que 4ξ.

Appliquant cette construction au schéma abélien polarisé $(\mathcal{A},\xi_M)$ sur M, on obtient un faisceau inversible

$$(3.1.2) \qquad \mathcal{L} := L(\xi_M)$$

sur $\mathcal{A}$; le sous-schéma en groupes

$$(3.1.3) \qquad K(\mathcal{L}) := \mathrm{Ker}(\varphi_{\mathcal{L}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}^t) = \mathrm{Ker}(4\xi_M)$$

de $\mathcal{A}$ est fini étale sur S de rang $4^{2g}d^2$, et est contenu dans ${}_{4d^2}\mathcal{A}$. Notons que vu l'hypothèse $8d^2|n$, on a

$$(3.1.4) \qquad K(\mathcal{L}) \subset K(\mathcal{L}^{\otimes 2}) \subset {}_n\mathcal{A} \; .$$

3.2.- L'évaluation aux points d'ordre n

Considérons le morphisme naturel de restriction des sections

$$(3.2.1) \qquad F_*\mathcal{L} \longrightarrow F_*(\mathcal{L}|_{{}_n\mathcal{A}}) \quad :$$

c'est un morphisme de $\mathcal{O}_M$-module localement libres, respectivement de rang $4^g d$ et n^{2g}.

PROPOSITION 3.2.2.- *Le morphisme (3.2.1) est injectif et fait de* $F_*\mathcal{L}$ *un sous-faisceau localement facteur direct de* $F_*(\mathcal{L}|_{{}_n\mathcal{A}})$.

Démonstration : la formation de (3.2.1) commute à tout changement de base. Comme d'autre part $K(\mathcal{L}) \subset {}_n\mathcal{A}$, on est ramené au lemme suivant :

LEMME 3.2.3.- *Soient* A *une variété abélienne sur un corps* k, L *un faisceau inversible ample et engendré par ses sections sur* A. *Alors le morphisme* *naturel de restriction*

$$H^0(A,L) \longrightarrow H^0(K(L),L_{|K(L)})$$

est injectif.

Démonstration : Le groupe de Mumford $\mathcal{G}(L)$ ([M1], [M2]), extension centrale de $K(L)$ par $\mathbb{G}_m$, opère sur les deux membres du morphisme envisagé, qui est $\mathcal{G}(L)$-équivariant. On sait de plus que $H^0(A,L)$ est un $\mathcal{G}(L)$-module irréductible (voir [M2], §1 pour le cas "séparable", qui suffit à nos besoins ; pour le cas général voir [SPC], VII, 5.2.2). Par suite notre morphisme est injectif ou nul, or il n'est pas nul puisque L est engendré par ses sections. ∎

L'étape suivante va consister à trivialiser $F_*(\mathcal{L}_{|_n\mathcal{A}})$ (après un changement de base idoine), pour interpréter le morphisme (3.2.1) comme un "point" d'une grassmannienne.

3.3.- Construction d'un revêtement $\widetilde{M}$ de M

Comme $\mathcal{L}$ est symétrique et rigidifié, le théorème du cube fournit un isomorphisme canonique

$$[n]^*_{\mathcal{A}}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}^{\otimes n^2}$$

respectant les rigidifications. En particulier, pour tout $x \in (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^{2g}$ identifié à une section de ${}_n\mathcal{A}(M)$ grâce à la structure de niveau, on a une trivialisation canonique du $\mathcal{O}_M$-module $x^*\mathcal{L}^{\otimes n^2}$, d'où un revêtement "kummérien"

$$\widetilde{M}_x = \underline{\mathrm{Spec}}_{\mathcal{O}_M}(\mathcal{O}_M \oplus x^*\mathcal{L}^{-1} \oplus \ldots \oplus x^*\mathcal{L}^{-n^2+1})$$

qui est étale sur M de groupe μ_{n^2} . On pose alors

(3.3.1) $$\widetilde{M} := \prod_{\substack{M\\x\neq 0}} \widetilde{M}_x \quad ,$$

le produit étant étendu à $x \in (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^{2g} - \{0\}$.
C'est un revêtement principal de M , de groupe

(3.3.2) $$\Gamma := (\mu_{n^2})^{n^{2g}-1} \quad .$$

3.4.- Le plongement grassmannien de $\widetilde{M}$

Si l'on désigne par $\widetilde{\mathcal{A}}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$, etc. les données sur $\widetilde{M}$ déduites par changement de base de $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$, etc , la restriction à ${}_n\widetilde{\mathcal{A}}$ du faisceau $\widetilde{\mathcal{L}}$ est munie canoniquement d'une trivialisation que nous noterons σ (remarquons que $\mathcal{L}$ est déjà trivialisé sur la section unité de $\mathcal{A}$; c'est pourquoi nous avons omis $x=0$ dans la définition (3.3.1)) . Considérons la suite de morphismes de

$\mathcal{O}_{\widetilde{M}}$-modules

$$(3.4.1)\qquad \widetilde{F}_*\widetilde{\mathcal{L}} \longrightarrow \widetilde{F}_*(\widetilde{\mathcal{L}}_{|_n\widetilde{\mathcal{A}}}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{F}_*(\mathcal{O}_{{}_n\widetilde{\mathcal{A}}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}^{n^{2g}}_{\widetilde{M}}$$

où la première flèche est la restriction, la seconde est déduite de la trivialisation σ et la troisième de la structure de niveau $\nu_{\widetilde{M}}$. Comme la première flèche est déduite par changement de base de (3.2.1), le composé (3.3.1) fait de $\widetilde{F}_*\widetilde{\mathcal{L}}$, d'après 3.2.2, un sous-faisceau localement facteur direct de $\mathcal{O}^{n^{2g}}_{\widetilde{M}}$, et par suite définit un morphisme de $\mathbb{Q}$-schémas

$$(3.4.2)\qquad \widetilde{t}:\widetilde{M} \longrightarrow \mathbb{G}:=\mathbb{G}_{4^g d,n^{2g},\mathbb{Q}}$$

où $\mathbb{G}$ désigne la grassmannienne des sous-espaces de dimension $4^g d$ de $\mathbb{Q}^{n^{2g}}$.

THÉORÈME 3.4.3.- *Le morphisme* $\widetilde{t}$ *de* (3.4.2) *est un plongement.*

La démonstration est donnée dans [MB], chapitre VII, §2. Indiquons simplement comment l'on reconstitue le schéma abélien $\widetilde{\mathcal{A}}$ sur $\widetilde{M}$ à partir du sous-fibré $\mathcal{V}:=\widetilde{F}_*\widetilde{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{O}^{n^{2g}}_{\widetilde{M}}$. Comme $\widetilde{\mathcal{L}}$ est très ample relativement à $\widetilde{F}$, $\widetilde{\mathcal{A}}$ s'identifie à un sous-schéma de $\mathbb{P}(\mathcal{V})$. D'autre part les formes coordonnées sur $\mathcal{O}^{n^{2g}}_{\widetilde{M}}$ donnent par composition n^{2g} homomorphismes surjectifs $\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{O}_{\widetilde{M}}$, donc n^{2g} sections de $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ dont la réunion n'est autre que ${}_n\widetilde{\mathcal{A}}\subset\mathbb{P}(\mathcal{V})$. On montre alors que le sous-schéma $\widetilde{\mathcal{A}}$ de $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ est défini par l'idéal homogène engendré par

$$\operatorname{Ker}(p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})}(2) \longrightarrow p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{V})}(2)\,|\,{}_n\widetilde{\mathcal{A}}))$$

où $p:\mathbb{P}(\mathcal{V})\longrightarrow\widetilde{M}$ est le morphisme structural. En d'autres termes, $\widetilde{\mathcal{A}}$ est , localement sur $\widetilde{M}$, l'intersection des quadriques de $\mathbb{P}(\mathcal{V})$ contenant ${}_n\widetilde{\mathcal{A}}$. C'est ici que l'on utilise le fait que $K(\mathcal{L}^{\otimes 2})\subset{}_n\mathcal{A}$, conséquence de l'hypothèse $8d^2|n$.

3.5.- Construction de $\overline{M}$ et $\mathcal{H}$

La grassmannienne $\mathbb{G}$ est munie d'un faisceau inversible très ample $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$, définissant le plongement de Plücker de $\mathbb{G}$. Explicitement, $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1)$ est le déterminant du sous-fibré universel de $\mathcal{O}^{n^{2g}}_{\mathbb{G}}$: par suite, vu la définition du plongement $\widetilde{t}$, on a un isomorphisme canonique

$$(3.5.1)\qquad t^*\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1) \xrightarrow{\sim} (\det \widetilde{F}_*\widetilde{\mathcal{L}})^{-1}\ .$$

Le groupe Γ de (3.3.2) opère sur $\widetilde{M}$ (le quotient étant M), et aussi sur $\mathbb{G}$, de sorte que $\widetilde{t}$ est Γ-équivariant. En fait, $\Gamma=(\mu_{n^2})^{n^{2g}-1}$ opère sur l'espace vectoriel $\mathbb{Q}^{n^{2g}}$ par multiplication sur les coordonnées (sauf celle indexée par $0 \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$) de sorte que le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)$ est Γ-équivariant ; de plus l'isomorphisme (3.5.1) ci-dessus est compatible aux "actions" de Γ (l'action sur le second membre résultant du fait que celui-ci provient de M) . Il existe donc un entier $m_1 \geq 1$, un faisceau inversible ample Q sur le quotient $\mathbb{G}/\Gamma$, descendant $\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(m_1)$, et un isomorphisme

(3.5.2) $\qquad t^*Q \xrightarrow{\sim} (\det F_*\mathcal{L})^{\otimes -m_1}$

où t désigne le plongement

(3.5.3) $\qquad t : M = \tilde{M}/\Gamma \hookrightarrow \mathbb{G}/\Gamma$

déduit de $\tilde{t}$ par passage au quotient. On pose alors

(3.5.4) $\qquad \overline{M} = \text{adhérence de } t(M) \text{ dans } \mathbb{G}/\Gamma$

$$\mathcal{H}_1 = Q_{|\overline{M}}$$

de sorte que $\overline{M}$ est une compactification de M et que $\mathcal{H}_1$ est ample sur $\overline{M}$ et prolonge, grâce à (3.5.2) le faisceau $(\det F_*\mathcal{L})^{\otimes -m_1}$ sur M .

THÉORÈME 3.5.5.- *Le faisceau inversible*

$$(\det F_*\mathcal{L})^{\otimes 2} \otimes \omega^{\otimes 4^g d}$$

est d'ordre fini dans $\mathrm{Pic}(M)$. *En d'autres termes il existe un entier* $\delta \geq 1$ *et un isomorphisme de* $\mathcal{O}_M$*-modules inversibles*

$$\tau : \det(F_*\mathcal{L})^{\otimes -2\delta} \xrightarrow{\sim} \omega^{\otimes 4^g d\delta} .$$

Pour la démonstration, voir [MB] , chapitre VIII.

Posons

(3.5.6) $\qquad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1^{\otimes 2\delta}$

$$m = 4^g d\delta m_1 :$$

alors, une fois choisie la trivialisation τ de 3.5.5, le faisceau $\mathcal{H}$ (qui est ample sur $\overline{M}$) prolonge $\omega^{\otimes m}$. Pour établir l'assertion (i) de 2.2 il reste à voir que $(\overline{M},m,\mathcal{H})$ a la propriété de prolongement.

3.6.- Démonstration de la propriété de prolongement

Reprenons les hypothèses et notations de 2.1 : il s'agit de montrer que $(\overline{M},m,\mathcal{H})$ a la propriété de prolongement pour $(A \xrightarrow{f} S$, $\mathcal{E}_U$, $\nu_U)$. Nous pouvons pour cela supposer S normal, excellent et intègre.

LEMME 3.6.1.- *Soit* $\pi : S' \longrightarrow S$ *un morphisme fini surjectif. Si* $(\overline{M},m,\mathcal{H})$

a la propriété de prolongement pour les données sur S' *déduites par changement de base de* (A, ξ_U, ν_U), *alors il a la propriété de prolongement pour* (A, ξ_U, ν_U) .

Démonstration : Remplaçant S' par une composante de S' dominant S , on peut supposer S' intègre.

a) Posons $U' = \pi^{-1}(U)$. On a par hypothèse un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
U' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_U"'] & S' \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddr, "j'"] & \\
U \arrow[r, hook] \arrow[drr, "j_U"'] & S & \\
& & \overline{M}
\end{tikzcd}$$

Considérons dans $S \times \overline{M}$ l'adhérence Z du graphe de j_U . C'est un S-schéma propre et birationnel sur S et il est dominé par le graphe de j' dans $S' \times \overline{M}$, qui est isomorphe à S' donc fini sur S . Par suite Z est fini birationnel sur S normal, donc s'identifie à S et est le graphe d'un morphisme $j : S \longrightarrow \overline{M}$ prolongeant j_U ; de plus on a nécessairement $j' = j \circ \pi$ par densité.

b) On dispose maintenant sur S des faisceaux inversibles $\omega_{A/S}^{\otimes m}$ et $j^*\mathcal{L}$, ainsi que d'un isomorphisme entre leurs restrictions à U , résultant de (2.1.1). Comme S est normal et π surjectif, un tel isomorphisme se prolonge sur S si et seulement si il se prolonge "sur S'" , ce qui résulte de la propriété de prolongement sur S' . ∎

3.6.2.- Quitte à remplacer S par un S-schéma $S' \longrightarrow S$ fini surjectif, ce qui est loisible d'après ce qui précède, on peut supposer qu'il existe :

a) un S-schéma en groupes semi-stable (2.0) $A' \xrightarrow{f'} S$ tel que $A'^{o} = A$ et $A'_U = A_U$, et un isomorphisme

$$\nu : (\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z})^{2g}_S \xrightarrow{\sim} {}_nA'$$

prolongeant la structure de niveau ν_U sur A_U ;

b) un faisceau inversible L sur A', prolongeant $L(\xi_U)$ (cf. (3.1.1)), muni d'une rigidification prolongeant celle de $L(\xi_U)$ et vérifiant le théorème du cube sur A' .

L'assertion a) est démontrée dans [MB],IV, §8, et l'assertion b) dans [MB],II. Le faisceau L de b) est unique ; il est symétrique et ample relativement à S . On a comme en 3.3 un isomorphisme canonique

$$[n]^*L \simeq L^{\otimes n^2}$$

résultant du théorème du cube et de la symétrie, d'où comme dans loc. cit., une trivialisation de $L^{\otimes n^2}|_{{}_nA'}$, d'où un revêtement étale $\tilde{S}$ de S , de groupe $\Gamma = (\mu_{n^2})^{n^{2g}-1}$. De plus, si l'on pose $\tilde{U} = U \times_S \tilde{S}$, on a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \longrightarrow & \tilde{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{j_U} & M \end{array}$$

de sorte que, remplaçant S par $\tilde{S}$, on peut supposer que l'on a un relèvement $\tilde{j}_U : U \longrightarrow \tilde{M}$ de $j_U : U \longrightarrow M$. Le morphisme $\tilde{t} \circ \tilde{j}_U : U \longrightarrow \mathbb{G}$ correspond à un morphisme de $\mathcal{O}_U$-modules localement libres

$$(f_*^!L)_U \hookrightarrow f_*^!(L|_{{}_nA'})_U \xrightarrow{\sim} f_*^!(\mathcal{O}_{{}_nA'})_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U^{n^{2g}}$$

déduit de (3.4.1) par le changement de base $\tilde{j}_U$. Or on dispose maintenant sur S d'une trivialisation de $L|_{{}_nA'}$ (prolongeant $j_U^*\sigma$, où σ est définie dans 3.4) et de l'isomorphisme ν de a) ci-dessus, d'où une suite de morphismes

$$(3.6.2.1) \qquad f_*^!L \longrightarrow f_*^!(L|_{{}_nA'}) \xrightarrow{\sim} f_*^!(\mathcal{O}_{{}_nA'}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S^{n^{2g}}$$

prolongeant la précédente.

<u>THÉORÈME 3.6.3.</u>- ([MB],VI, théorème 3.5). *Le morphisme* (3.6.2.1) *fait de* $f_*^!L$ *un sous-faisceau localement facteur direct de* $\mathcal{O}_S^{n^{2g}}$ (*en particulier* $f_*^!L$ *est localement libre, automatiquement de rang* $4^g d$) . ∎

On obtient ainsi un morphisme $S \longrightarrow \mathbb{G}$, et par composition un morphisme $h : S \longrightarrow \mathbb{G}/\Gamma$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & S \\ {\scriptstyle j_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ M & \hookrightarrow & \mathbb{G}/\Gamma \end{array}$$

de sorte que (par densité) h se factorise par $j : S \longrightarrow \overline{M}$ prolongeant j_U . C'est la partie (i) de la propriété de prolongement 2.1.3.

Par construction, $j^*(\mathcal{L})$ n'est autre que $(\det f_*^!L)^{\otimes -2\delta m_1}$; la partie (ii) de 2.1.3 résulte donc du théorème ci-dessous :

<u>THÉORÈME 3.6.4.</u>- *On peut choisir l'entier* δ *et l'isomorphisme* τ *de* 3.5.5 *de telle sorte que pour tout* $(A' \longrightarrow S,\ L,\ \xi_U,\ \nu\ )$ *vérifiant les propriétés* a) *et* b) *de* 3.6.2, *l'isomorphisme*

$$j_U^*\tau \ : \ (\det f_*^!L)_U^{\otimes -2\delta} \xrightarrow{\sim} \omega_{A_U/U}^{\otimes 4^g d\delta}$$

se prolonge en un isomorphisme

$$(\det f'_*L)^{\otimes -2\delta} \xrightarrow{\sim} \omega_{A/S}^{\otimes\, 4g d\delta}$$

C'est la"formule clé canonique" notée FCC(Spec $\mathbb{Q}$, g, d) dans [MB] . ■

Remarque 3.7.- On peut montrer, par des méthodes analytiques, la partie (i) de 2.2 en prenant pour $\overline{M}$ la compactification de Satake de M . On aurait pu aussi, au lieu du revêtement $\widetilde{M}$, utiliser les schémas de modules avec "structures thêta" de Mumford [M2] , le plongement grassmannien étant remplacé par le plongement projectif de loc. cit.

4.- REMARQUES ET COMPLÉMENTS

L'auteur s'est rendu compte un peu tard qu'on pouvait simplifier les arguments qui précèdent. La propriété de prolongement de 2.1.3 peut être avantageusement remplacée par la version affaiblie suivante, que nous appellerons "propriété de prolongement faible" : avec les notations de 2.1, on *suppose* de plus l'existence de $j : S \longrightarrow \overline{M}$ prolongeant $j_U : U \longrightarrow M$, et on exige alors que la propriété 2.1.3 (ii) soit vérifiée, i.e que $j^*\mathcal{L}$ coïncide avec $\omega_{A/S}^{\otimes m}$.

Avec cette modification le théorème 2.2 reste valable :

- partie (i) : l'avantage est que l'on est ramené au cas où la base S est un trait. La démonstration est celle de 3.6, mais les résultats de [M.B] utilisés en 3.6.2 et 3.6.3 sont bien moins chers dans ce cas.

- partie (ii) : la partie "prolongement du morphisme" de la propriété de prolongement n'était utilisée qu'en 2.3, et de façon inessentielle puisqu'il suffit de remplacer $\overline{S}$ (notation de loc. cit.) par le normalisé de l'adhérence du graphe de π dans $\overline{S}\times\overline{M}$ (comme on le fait d'ailleurs en 2.4). Le reste de la preuve est inchangé.

Un autre bénéfice est que la propriété de prolongement faible s'étend immédiatement au cas où, avec les notations de 2.1, $A \longrightarrow S$ est seulement un "espace algébrique semi-abélien" sur le schéma S : en effet on se ramène au cas où S est un trait, auquel cas A est automatiquement un schéma. Le lemme de Gabber n'est donc utilisé que dans sa version "espaces algébriques", plus simple.

Bien entendu, la remarque 2.5 reste valable, de sorte que la propriété de prolongement faible et l'amplitude de $\mathcal{L}$ impliquent la propriété de prolongement de 2.1.3.

Enfin on peut montrer *l'unicité* (pour m fixé) de $(\overline{M},m,\mathcal{L})$ vérifiant la propriété de prolongement faible, lorsque l'on impose à $\mathcal{L}$ d'être ample et à $\overline{M}$

d'être *normal*. Plus précisément, on laisse en exercice au lecteur le résultat suivant :

PROPOSITION.- *Soient* $\overline{M}_1$ *et* $\overline{M}_2$ *deux compactifications normales de* M, *munies respectivement de faisceaux inversibles* $\mathcal{L}_1$ *et* $\mathcal{L}_2$ *prolongeant* $\omega^{\otimes m}$ $(m \geq 1)$. *On suppose que* $(\overline{M}_i, m, \mathcal{L}_i)$ *vérifie la propriété de prolongement faible* (pour $i = 1,2$), *et que* $\mathcal{L}_1$ *est ample sur* $\overline{M}_1$. *Alors il existe un unique morphisme* $\pi : \overline{M}_2 \longrightarrow \overline{M}_1$ *induisant l'identité sur* M, *et l'on a* $\pi^* \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ *(comme prolongements de* $\omega^{\otimes m}$*)*.

En conséquence, $\overline{M}_1$ est la compactification de Satake de M.

BIBLIOGRAPHIE

[D] P. DELIGNE.- *Preuve des conjectures de Tate et de Shafarevich*, Séminaire Bourbaki, n°616 (novembre 1983).

[M1] D. MUMFORD.- *Abelian Varieties* (Oxford University Press) (1974).

[M2] D. MUMFORD.- *On the Equations Defining Abelian varieties*, Invent. Math. 1 (1966), 287-354 ; 3(1967), 75-135 et 215-244.

[MB] L. MORET-BAILLY.- *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque (à paraître).

[SPC] L. SZPIRO et al., .- *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux*, Astérisque vol. 86. (1981).

LAURENT MORET-BAILLY
Université PARIS XI - Bat.425
Département de Mathématiques
91405 ORSAY CEDEX