

Astérisque

LAURENT MORET-BAILLY

Métriques permises

Astérisque, tome 127 (1985), p. 29-87

http://www.numdam.org/item?id=AST_1985__127__29_0

© Société mathématique de France, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Exposé II

M É T R I Q U E S P E R M I S E S

Laurent MORET-BAILLY

- 0.- Introduction.
 - 1.- Déterminants.
 - 2.- Autodualité de la jacobienne.
 - 3.- Faisceaux inversibles hermitiens sur les variétés abéliennes.
 - 4.- Faisceaux inversibles hermitiens sur les courbes.
 - 5.- L'accouplement de Néron-Tate.
 - 6.- Applications aux surfaces arithmétiques.
- Bibliographie.

0.- INTRODUCTION

L'objet de cet exposé est (du moins à l'origine) la démonstration des résultats d'Arakelov [A] et Faltings [F] présentés dans l'exposé I, à l'exception notable du théorème de "comparaison des volumes" (loc. cit., th.2) et de ses corollaires, ce théorème faisant l'objet de l'exposé III.

La présentation adoptée ici diffère de [A] et [F] par l'usage systématique de la théorie des déterminants d'images directes dérivées, résumée sans démonstrations au §1. L'importance de ces déterminants apparaît déjà clairement dans [F] via l'existence des "normes de Faltings" (théorème 4.13 ci-dessous) ; ils jouent ici un rôle multiple, "expliquant" à la fois l'autodualité de la jacobienne (§2) et la théorie des intersections elle-même (définition 6.6), au moyen d'un accouplement introduit par Deligne (SGA 4, exposé XVIII). Cette unification culmine avec la formule de Faltings-Hriljac (6.15), rendue à peu près triviale par la présentation adoptée ici (§5) des hauteurs de Néron-Tate.

D'une manière générale le §6, consacré à la théorie des intersections proprement dite, consiste essentiellement à "recoller les morceaux" des § précédents plus généraux, et, nous l'espérons, susceptibles (en particulier le §2) d'intéresser une classe plus large de géomètres.

La définition des "métriques permises", donnée au §3 pour les variétés abéliennes et au §4 pour les courbes, constitue encore une différence notable avec [A] et [F] puisque la courbure n'y est mentionnée que pour faire le lien avec la définition habituelle.

Enfin le lecteur prendra garde que la théorie des intersections adoptée ici repose sur le choix arbitraire de certaines "métriques bipermises" (définition 6.0); cependant le théorème de comparaison des volumes, déjà mentionné, est valable pour un choix particulier de ces métriques (obtenu en imposant la condition 4) de 4.11.4).

Notations et conventions

Les expressions "faisceau inversible" et "fibré en droites" sont considérées comme synonymes, un fibré en droites étant identifié à son faisceau de sections.

Soient S un schéma et $x : T \rightarrow S$ un S -schéma. Pour tout S -schéma X (resp. tout \mathcal{O}_S -module M) on note X_T (resp. M_T ou M_X) le T -schéma $X \times_S T$ (resp. le \mathcal{O}_T -module x^*M).

Si G est un S -schéma en groupes on désigne $e_G : S \rightarrow G$ sa section unité. Si G et H sont deux S -schémas en groupes commutatifs on appellera, pour abrégé, biextension sur $G \times H$ un faisceau inversible sur $G \times H$ dont le \mathbb{G}_m -torseur sous-jacent est muni d'une structure de biextension de (G, H) par $\mathbb{G}_{m, S}$ au sens de SGA 7, VII.

1.- DÉTERMINANTS

Nous rassemblons ici les résultats de [K-M] dont nous aurons besoin. Pour plus de sûreté, tous les schémas considérés sont supposés noethériens.

1.1.- Soit $f : X \rightarrow S$ un morphisme propre de schémas. A tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur X , plat sur S , on associe dans [K-M] un \mathcal{O}_S -module inversible noté

$$\det Rf_* \mathcal{F}$$

(ou encore $\det R\Gamma(\mathcal{F})$ si S est affine) avec les propriétés suivantes :

1.1.1.- $\det Rf_* \mathcal{F}$ est fonctoriel pour les isomorphismes $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}'$ de \mathcal{O}_X -modules cohérents.

1.1.2.- $\det Rf_* \mathcal{F}$ "commute à tout changement de base", i.e à tout diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{u'} & X \\ \downarrow f' & & \downarrow f \\ S' & \xrightarrow{u} & S \end{array}$$

on associe un isomorphisme canonique

$$u^*(\det Rf_* \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \det Rf'_*(u'^* \mathcal{F})$$

avec une relation de compatibilité évidente pour les changements de base composés $S'' \rightarrow S' \rightarrow S$.

1.1.3.- A toute suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

de \mathcal{O}_X -modules cohérents plats sur S est associé un isomorphisme de \mathcal{O}_S -modules

$$\det Rf_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \det Rf_* \mathcal{F}' \otimes \det Rf_* \mathcal{F}''$$

compatible au changement de base et aux isomorphismes de suites exactes ; on a plus généralement une relation de compatibilité pour les "suites exactes de suites exactes", que nous n'explicitons pas (cf. remarque 1.2.2 ci-dessous).

1.1.4.- Soit $E' = (0 \rightarrow E^0 \rightarrow E^1 \rightarrow \dots \rightarrow E^n \rightarrow 0)$ un complexe fini de \mathcal{O}_S -modules localement libres de rang fini, muni d'un quasi-isomorphisme $E' \rightarrow Rf_* \mathcal{F}$ (en d'autres termes, E' calcule "universellement" les \mathcal{O}_S -modules $R^i f_* \mathcal{F}$, au sens de [AV], §5 ; par ailleurs, d'après loc. cit., un tel complexe

existe toujours localement sur S). On a alors un isomorphisme canonique, commutant au changement de base :

$$\det Rf_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=0}^n (\det E^i)^{\otimes (-1)^i} .$$

(Ici et dans toute la suite, si E est un \mathcal{O}_S -module localement libre de rang fini, on note $\det E$ sa puissance extérieure maximale).

1.1.5.- Dans le cas particulier où les \mathcal{O}_S -modules $R^i f_* \mathcal{F}$ ($i \geq 0$) sont localement libres (ce qui implique qu'ils commutent au changement de base) on déduit de

1.1.4 un isomorphisme canonique

$$\det Rf_* \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=0}^n (\det R^i f_* \mathcal{F})^{\otimes (-1)^i}$$

(où $n \geq \dim X$), en "convenant" bien entendu que le déterminant du faisceau nul s'identifie canoniquement à \mathcal{O}_S .

1.1.6.- Notons $\chi_{X/S}(\mathcal{F})$ la fonction localement constante $x \mapsto \chi(\mathcal{F}_x)$ sur S . Si $\varphi \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S^*)$ alors la multiplication par φ dans \mathcal{F} induit d'après 1.1.1 un automorphisme de $\det Rf_* \mathcal{F}$; celui-ci n'est autre que la multiplication par $\varphi^{\chi_{X/S}(\mathcal{F})}$.

1.1.7.- De même si M est un \mathcal{O}_S -module inversible on a un isomorphisme canonique

$$\det Rf_*(\mathcal{F} \otimes f^*M) \xrightarrow{\sim} (\det Rf_* \mathcal{F}) \otimes M^{\otimes \chi_{X/S}(\mathcal{F})}$$

Remarques 1.2.-

1.2.1.- Le foncteur $\det Rf_*$ s'étend à la catégorie dérivée des complexes "parfaits relativement à f " de \mathcal{O}_X -modules (SGA 6, III); en particulier on peut définir $\det Rf_* \mathcal{F}$ dès que \mathcal{F} est un \mathcal{O}_X -module cohérent, de tor-dimension finie sur S .

1.2.2.- Une présentation rigoureuse de la théorie et en particulier de la compatibilité mentionnée à la fin de (1.1.3), exigerait que l'on définisse $\det Rf_* \mathcal{F}$ comme un "faisceau inversible gradué, placé en degré $\chi_{X/S}(\mathcal{F})$ ", ceci en raison de signes intervenant dans la compatibilité en question. Cela a pour effet, par exemple, que l'ordre des facteurs dans le second membre de l'isomorphisme 1.1.4 (ou 1.1.5) a son importance si l'on veut décrire ces isomorphismes sans ambiguïté de signe. Toutefois, nous taisons dans la suite ces subtilités, les applications que nous avons en vue étant insensibles aux questions de signes.

Exemple 1.3.- Supposons (comme ce sera généralement le cas dans les applications) que X soit une *courbe* sur S , c'est-à-dire un S -schéma projectif et plat sur S à fibres purement de dimension 1. Soit $D \subset X$ un diviseur relatif effectif (c'est-à-dire un sous-schéma fermé de X , fini et plat sur S et qui est un diviseur de Cartier sur X). Si L est un \mathcal{O}_X -module *invertible*, on a une suite exacte naturelle (avec $L(D) = L \otimes \mathcal{O}_X(D)$)

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L(D) \longrightarrow L(D)|_D \longrightarrow 0$$

d'où par 1.1.3 un isomorphisme canonique

$$(1.3.1) \quad \det Rf_*(L(D)) \xrightarrow{\sim} \det Rf_*L \otimes \det f_*(L(D)|_D)$$

puisque, en vertu de 1.1.5 (et D étant fini sur S)

$$\det Rf_*(L(D)|_D) = \det f_*(L(D)|_D) \quad .$$

Remarquons d'ailleurs que si M est un faisceau invertible sur D , la norme $N_{D/S}(M)$ peut se calculer par la formule

$$N_{D/S}(M) = \det f_*M \otimes (\det f_*\mathcal{O}_D)^{-1}$$

de sorte que (1.3.1) peut se reformuler comme suit :

$$(1.3.2) \quad \det Rf_*(L(D)) = \det Rf_*L \otimes N_{D/S}(L(D)) \otimes \det f_*\mathcal{O}_D$$

où $N_{D/S}(L(D))$ désigne abusivement le faisceau $N_{D/S}(L(D)|_D)$.

Enfin, dans le cas particulier où D est l'image d'une *section* $Q : S \rightarrow X$ contenue dans l'ouvert de lissité de X/S , la formule (1.3.1) devient simplement (en identifiant Q au diviseur $D=Q(S)$)

$$(1.3.3) \quad \det Rf_*(L(Q)) = \det Rf_*L \otimes Q^*L(Q) \quad .$$

De telles formules permettent de "calculer" $\det Rf_*L$ pour L quelconque puisque si D est suffisamment ample, alors $R^1f_*(L(D)) = 0$ et $f_*(L(D))$ est localement libre de sorte que l'on peut appliquer 1.1.5.

2.- AUTODUALITÉ DE LA JACOBIENNE

2.0.- Dans tout ce § on désigne par S un schéma localement noethérien, et par $f: X \longrightarrow S$ une *courbe* sur S , c'est-à-dire par définition un morphisme projectif et plat à fibres géométriques connexes, non vides et de dimension 1. Nous supposons de plus, sauf mention expresse du contraire, que f est *lisse* à fibres de genre $g \geq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ nous désignerons par J_n la composante du schéma de Picard $\text{Pic}_{X/S}$ paramétrant les faisceaux inversibles sur X de degré n dans les fibres, de sorte que J_n est un torseur sous J_0 et que cette dernière (souvent notée J) est un S -schéma abélien de dimension relative g . Si l'on désigne, pour tout S -schéma T , par $\text{Pic}^{(n)}(X_T/T)$ le quotient

$$\frac{\{\text{faisceaux inversibles sur } X_T := X \times_S T, \text{ de degré } n \text{ dans les fibres}\}}{\text{isomorphismes + action naturelle de } \text{Pic } T}$$

alors on a un morphisme naturel injectif et fonctoriel en T

$$\text{Pic}^{(n)}(X_T/T) \longrightarrow J_n(T) = \text{Hom}_S(T, J_n)$$

$$L \longmapsto \text{cl}(L) : T \longrightarrow J_n$$

qui est surjectif pour tout T si et seulement si il existe sur $X \times J_n$ un *faisceau universel*, c'est-à-dire un faisceau inversible \mathcal{U}_n tel que

$$\text{cl}(\mathcal{U}_n) = \text{id}_{J_n} \in \text{Hom}(J_n, J_n) \text{ .}$$

Lorsque S est le spectre d'un corps k algébriquement clos, cette condition ésotérique signifie que pour tout point $\xi \in J_n(k)$, le faisceau inversible induit par \mathcal{U}_n sur $\{\xi\} \times X \simeq X$ est dans la classe ξ .

Un tel faisceau universel, s'il existe, est unique à tensorisation près par un faisceau provenant de J_n .

2.0.1.- Supposons de plus que $f: X \longrightarrow S$ ait une *section* $a \in X(S)$. Alors il existe pour tout n un faisceau universel sur $X \times J_n$, noté $\mathcal{U}_n^{(a)}$ et caractérisé de manière unique par la condition supplémentaire d'être trivial sur $a(S) \times J_n \subset X \times J_n$ (pour f quelconque, les faisceaux universels existent donc localement pour la topologie étale sur S).

Le mode d'emploi de $\mathcal{U}_n^{(a)}$ est le suivant : si T est un S -schéma, et L un faisceau inversible sur $X \times T$, de degré n dans les fibres, considérons le diagramme (ici comme dans la suite, tous les produits, sauf mention expresse du contraire, sont fibrés sur S)

$$\begin{array}{ccc}
 X \times T & \xrightarrow{\text{id}_X \times \xi} & X \times J_n \\
 \downarrow f_T & & \downarrow p_2 \\
 T & \xrightarrow{\xi} & J_n
 \end{array}$$

où f_T et p_2 sont les secondes projections, a_T la section déduite de a , et $\xi = \text{cl}(L) \in J_n(T)$. Alors on a un isomorphisme

$$(2.0.1.1) \quad (\text{id}_X \times \xi)^* \mathcal{U}_n^{(a)} \simeq L \otimes f_T^* a_T^* L^{-1}$$

et même un isomorphisme canonique si l'on a choisi une trivialisaton de $\mathcal{U}_n^{(a)}$ sur $a(S) \times J_n$, ce que nous supposerons toujours.

2.1.- Désignons par

$$(2.1.1) \quad w_{g-1} : X^{g-1} \longrightarrow J_{g-1}$$

le morphisme suivant : si (x_1, \dots, x_{g-1}) est un point de X^{g-1} à valeurs dans un S-schéma T , ce point définit un diviseur (relatif à T) $x_1 + \dots + x_{g-1} \subset X_T$, de degré $g-1$ dans les fibres ; on pose alors

$$(2.1.2) \quad w_{g-1}(x_1, \dots, x_{g-1}) = \text{cl}(\mathcal{O}_{X_T}(x_1 + \dots + x_{g-1})) \in J_{g-1}(T) .$$

Conformément à l'usage, nous noterons

$$(2.1.3) \quad \Theta \subset J_{g-1}$$

l'image de w_{g-1} (qui pour l'instant est seulement un fermé de l'espace sous-jacent à J_{g-1}).

2.2.- Soit $\xi : \text{Spec } k \longrightarrow J_{g-1}$ un point géométrique de J_{g-1} (i.e à valeurs dans un corps k algébriquement clos) et soit L^ξ un faisceau inversible sur X_k tel que $\text{cl}(L^\xi) = \xi$. Pour que ξ (ou plutôt son image dans J_{g-1}) appartienne à Θ , il faut et il suffit qu'il existe un diviseur effectif D (de degré $g-1$) sur X_k tel que $L^\xi \simeq \mathcal{O}_{X_k}(D)$. En d'autres termes, ceci équivaut à $H^0(X_k, L^\xi) \neq 0$, ou encore puisque $\chi(L^\xi) = 0$, à $H^1(X_k, L^\xi) \neq 0$.

2.3.- Soit alors \mathcal{U}_{g-1} un faisceau universel sur $X \times J_{g-1}$ et désignons par $p_2 : X \times J_{g-1} \longrightarrow J_{g-1}$ la seconde projection. Comme X est une courbe, on a $R^i p_{2*} \mathcal{U}_{g-1} = 0$ pour $i \geq 2$, et la formation de $R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$ commute à tout changement de base. De plus :

LEMME 2.3.1.-

(i) $p_{2*} \mathcal{U}_{g-1} = 0$

(ii) $\text{Supp}(R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}) = \textcircled{+}$.

Démonstration : La seconde assertion résulte de la caractérisation de $\textcircled{+}$ donnée en 2.2 : avec les notations de loc. cit. on peut prendre pour L^ξ le faisceau $(\mathcal{U}_{g-1})|_{X \times \{\xi\}}$ et l'on a alors $(R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1})_\xi = H^1(X_k, L^\xi)$.

Pour la première assertion on remarque que le faisceau $p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$ sur J_{g-1} est sans torsion, et que si ξ est un point géométrique de $J_{g-1} - \textcircled{+}$ on a (avec L^ξ comme ci-dessus) $H^0(X_k, L^\xi) = 0$ et a fortiori $(p_{2*} \mathcal{U}_{g-1})_\xi = 0$. Or l'ouvert $J_{g-1} - \textcircled{+}$ est dense dans J_{g-1} puisque les fibres de $\textcircled{+}$ sur S sont de dimension $\leq g-1$. Le faisceau $p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$ est donc nul puisqu'il est sans torsion et nul sur un ouvert dense. ■

2.4.- Notons U l'ouvert $J_{g-1} - \textcircled{+}$ de J_{g-1} : alors les faisceaux $R^i p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$ ($i \geq 0$) sont nuls sur U . Il résulte donc de 1.1.5 que l'on a un isomorphisme canonique

(2.4.1) $\tau_U : (\det \text{Rp}_{2*} \mathcal{U}_{g-1})_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$.

PROPOSITION 2.4.2.- L'isomorphisme τ_U de (2.4.1) se prolonge en un unique homomorphisme injectif de $\mathcal{O}_{J_{g-1}}$ -modules

$$\tau : \det \text{Rp}_{2*} \mathcal{U}_{g-1} \longrightarrow \mathcal{O}_{J_{g-1}}$$

dont le conoyau est plat sur S et de support égal à $\textcircled{+}$.

2.4.3.- Il résulte de 2.4.2 que $\textcircled{+}$ se trouve muni d'une structure naturelle de sous-schéma fermé de J_{g-1} , qui est même un *diviseur relatif* au-dessus de S . C'est ce diviseur que nous désignerons désormais par $\textcircled{+}$, et la proposition 2.4.2 se réécrit sous la forme d'un isomorphisme canonique

(2.4.3.1) $\det \text{Rp}_{2*} \mathcal{U}_{g-1} \simeq \mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\textcircled{+})$.

Cet énoncé semble dû à Mumford. Notons que la formation de τ (et donc du diviseur $\textcircled{+}$) commute à tout changement de base $S' \rightarrow S$ puisqu'il en est ainsi de τ_U .

Pour faire le lien avec la théorie classique il reste à voir que lorsque S est le spectre d'un corps algébriquement clos, le diviseur $\textcircled{+}$ ainsi défini est

réduit ; ceci résultera d'un calcul ultérieur (2.7.10) mais pourrait aussi se voir directement. En tout cas il est déjà clair que les fibres géométriques de

(H) sont irréductibles puisque (H) est ensemblistement l'image de

$$w_{g-1} : X^{g-1} \longrightarrow J_{g-1} .$$

Enfin, il n'est pas surprenant que 2.4.2 ne dépende pas du faisceau universel \mathcal{U}_{g-1} choisi : si M est un faisceau inversible sur J_{g-1} , on a un isomorphisme canonique

$$\det \text{Rp}_{2*} (\mathcal{U}_{g-1} \otimes p_2^* M) \simeq \det \text{Rp}_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$$

résultant de 1.1.7 et du fait que $\chi_{X \times J_{g-1}/J_{g-1}} (\mathcal{U}_{g-1}) = 0$.

2.4.4.- Démonstration de 2.4.2 : L'unicité de τ résulte du fait que U est schématiquement dense dans J_{g-1} . Pour voir que τ (supposé exister) est injectif à conoyau plat sur S on se ramène, en vertu de EGA 0_I , 6.6.18, au cas où S est le spectre d'un corps, où l'assertion résulte du fait que τ_U est un isomorphisme.

Il suffit de prouver l'existence de τ après un changement de base fidèlement plat $S' \rightarrow S$, et nous pouvons donc supposer qu'il existe un sous-schéma fermé

$$D \subset X$$

qui est un *diviseur relatif* de degré g . Nous noterons alors $\mathcal{U}_{g-1}(D)$ le faisceau $\mathcal{U}_{g-1} \otimes p_1^* \mathcal{O}_X(D)$ sur $X \times J_{g-1}$. La restriction de $\mathcal{U}_{g-1}(D)$ aux fibres de $p_2 : X \times J_{g-1} \rightarrow J_{g-1}$ est de degré $2g-1$ donc on a

$$(2.4.4.1) \quad R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}(D) = 0$$

et $p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}(D)$ est localement libre de rang g sur J_{g-1} . On a d'autre part sur $X \times J_{g-1}$ une suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}_{g-1} \longrightarrow \mathcal{U}_{g-1}(D) \longrightarrow \mathcal{U}_{g-1}(D)|_{D \times J_{g-1}} \longrightarrow 0$$

d'où compte tenu de (2.4.4.1) et de 2.3.1 (i), une suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}(D) & \xrightarrow{u} & p_{2*} (\mathcal{U}_{g-1}(D)|_{D \times J_{g-1}}) & \longrightarrow & R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & L^0 & & L^1 & & \end{array}$$

et le complexe $0 \rightarrow L^0 \xrightarrow{u} L^1 \rightarrow 0$ est une "résolution de $\text{Rp}_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$ " au sens de 1.1.4, d'où d'après loc. cit. un isomorphisme canonique

$$(2.4.4.2) \quad \det \operatorname{Rp}_{2*} \mathcal{U}_{g-1} \xrightarrow{\sim} (\det L^0) \otimes (\det L^1)^{-1} .$$

De plus la trivialisation τ_U de (2.4.1) correspond via (2.4.4.2) à un isomorphisme

$$\det L^0|_U \xrightarrow{\sim} \det L^1|_U$$

qui n'est autre que $\det u|_U$ (qui est bien un isomorphisme puisque $R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1}$ est nul sur U). Celui-ci se prolonge par construction en le morphisme $\det u : L^0 \rightarrow L^1$, d'où le morphisme

$$\tau : \det \operatorname{Rp}_{2*} \mathcal{U}_{g-1} \xrightarrow{(2.4.4.2)} (\det L^0) \otimes (\det L^1)^{-1} \xrightarrow{(\det u) \otimes \operatorname{id}} (\det L^1)^{-1} \rightarrow \mathcal{O}_{J_{g-1}}$$

annoncé en 2.4.2. Enfin on a

$$\operatorname{Supp} \operatorname{Coker} \tau = \operatorname{Supp} \operatorname{Coker}(\det u) = \operatorname{Supp} \operatorname{Coker} u = \operatorname{Supp} R^1 p_{2*} \mathcal{U}_{g-1} = \textcircled{H}$$

d'après 2.3.1 (ii), ce qui achève la démonstration. ■

COROLLAIRE 2.5.- Soient n un entier, $a \in X(S)$ une section (identifiée à son image dans X), $\mathcal{U}_n^{(a)}$ le faisceau universel sur $X \times J_n$ trivial sur $a \times J_n$ (cf. 2.0), D le diviseur $(g-n-1)a$ sur X , $T_D : J_n \xrightarrow{\sim} J_{g-1}$ le morphisme "translation par $\operatorname{cl} \mathcal{O}_X(D)$ ". Désignant par $q_2 : X \times J_n \rightarrow J_n$ la seconde projection, on a un isomorphisme

$$\det \operatorname{Rq}_{2*} \mathcal{U}_n^{(a)} \xrightarrow{\sim} T_D^* \mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\textcircled{H}) \otimes M$$

où \textcircled{H} est le diviseur sur J_{g-1} défini en 2.4.3 et où M est un faisceau inversible provenant de S , le faisceau sur S correspondant étant

$$(a^* \omega_{X/S})^{\otimes (g-n)(g-n-1)/2} \quad \text{où } \omega_{X/S} = \Omega_{X/S}^1 \text{ désigne le faisceau dualisant de } X/S .$$

Démonstration : Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \text{id}_X \times T_D \\ & & \sim \\ X \times J_n & \xrightarrow{\quad} & X \times J_{g-1} \\ \swarrow q_1 & \nearrow a_n & \searrow p_1 \\ X & & X \\ \uparrow a_n & & \uparrow a_{g-1} \\ J_n & \xrightarrow{T_D} & J_{g-1} \\ \downarrow q_2 & & \downarrow p_2 \end{array}$$

où a_n et a_{g-1} sont les sections déduites de a . Le morphisme $T_D \in J_{g-1}(J_n)$ est par définition la classe du faisceau inversible $\mathcal{U}_n^{(a)} \otimes q_1^* \mathcal{O}_X(D)$ sur $X \times J_n$. Comme ce dernier est trivial sur $a_n(J_n)$, on déduit de (2.0.1.1) un isomorphisme

$$(2.5.1) \quad (\operatorname{id}_X \times T_D)^* \mathcal{U}_{g-1}^{(a)} \simeq \mathcal{U}_n^{(a)} \otimes q_1^* \mathcal{O}_X(D) .$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ posons pour abrégé $\mathcal{U}_n^{(a)}(ma) = \mathcal{U}_n^{(a)} \otimes q_1^* \mathcal{O}_X(ma)$,
 et considérons la suite exacte naturelle

$$0 \longrightarrow \mathcal{U}_n^{(a)}((m-1)a) \longrightarrow \mathcal{U}_n^{(a)}(ma) \longrightarrow \mathcal{U}_n^{(a)}(ma)|_{a_n(J_n)} \longrightarrow 0$$

Comme $\mathcal{U}_n^{(a)}|_{a_n(J_n)}$ est trivial on en déduit un isomorphisme canonique

$$\det \text{Rq}_{2*}(\mathcal{U}_n^{(a)}(ma)) = \det \text{Rq}_{2*}(\mathcal{U}_n^{(a)}((m-1)a)) \otimes (a^* \omega_{X/S}^{\otimes -m})_{J_n}$$

grâce à l'isomorphisme d'adjonction $a^* \mathcal{O}_X(a) \simeq a^*(\omega_{X/S}^{-1})$, d'où par récurrence

$$(2.5.2) \quad \det \text{Rq}_{2*}(\mathcal{U}_n^{(a)}(ma)) = \det \text{Rq}_{2*} \mathcal{U}_n^{(a)} \otimes (a^* \omega_{X/S}^{\otimes -m(m+1)/2})_{J_n}.$$

Appliquant cette formule avec $m = g - n - 1$, il vient

$$\begin{aligned} \det \text{Rq}_{2*} \mathcal{U}_n^{(a)} &= \det \text{Rq}_{2*}(\mathcal{U}_n^{(a)}(D)) \otimes (a^* \omega_{X/S}^{\otimes (g-n)(g-n-1)/2})_{J_n} \\ &= \det \text{Rq}_{2*}((\text{id}_X \times T_D)^* \mathcal{U}_{g-1}^{(a)}) \otimes M \\ &= T_D^* \text{Rp}_{2*} \mathcal{U}_{g-1}^{(a)} \otimes M \text{ (changement de base)} \\ &= T_D^* \mathcal{O}_J \otimes M \text{ (2.4.3.1). } \blacksquare \end{aligned}$$

2.6.- Lorsque $n=0$, la théorie classique polarise $J = J_0$ à l'aide du diviseur $T_D^* \mathcal{O}(-1)$; ceci justifie, compte tenu du corollaire ci-dessus, les constructions qui suivent.

Pour tout $a \in X(S)$ nous poserons

$$(2.6.1) \quad \theta^{(a)} = (\det \text{Rq}_{2*} \mathcal{U}_0^{(a)})^{-1}$$

(cf. 2.5) : c'est un faisceau inversible sur J . Si L est un faisceau inversible sur X , de degré 0 dans les fibres, alors la "valeur" de $\theta^{(a)}$ au point $c1 \in J(S)$ est donnée par la formule

$$(2.6.1.1) \quad \theta_{c1}^{(a)} = (\det \text{Rf}_{*} L)^{-1} \otimes (a^* L)^{\otimes 1-g};$$

Ceci résulte de (2.0.1.1) et 1.1.7.

Pour tout S -schéma abélien A , notons $A^t = \text{Pic}_{A/S}^0 = \text{Ext}^1(A, \mathbb{G}_{m,S})$ le dual de A (qui est un schéma, au moins si A est localement projectif sur S). Le faisceau inversible $\theta^{(a)}$ sur J définit un morphisme ([AV], §6)

$$(2.6.2.) \quad \phi^{(a)} := \varphi_{\theta^{(a)}} : J \longrightarrow J^t$$

qui à $x \in J$ associe la classe de $T_x^* \theta^{(a)} \otimes (\theta^{(a)})^{-1}$, où T_x désigne la translation par x .

LEMME 2.6.3.- Il existe un unique morphisme de schémas abéliens

$$\phi : J \longrightarrow J^t$$

qui, pour tout S -schéma T et tout point $a \in X(T)$, induit par changement de base le morphisme $\phi^{(a)} : J_T \longrightarrow J_T^t$ de (2.6.2).

Démonstration : Appliquons la construction de $\phi^{(a)}$ au point $a = \text{id}_X : X \longrightarrow X$ à valeurs dans le S -schéma X . Nous obtenons un morphisme

$$\phi^{(\text{id}_X)} : J_X \longrightarrow J_X^t$$

et il est immédiat que pour tout S -schéma T et tout $a \in X(T)$, le morphisme $\phi^{(a)} : J \longrightarrow J^t$ est induit par $\phi^{(\text{id}_X)}$ via le changement de base $a : T \longrightarrow X$. Il suffit donc de voir que $\phi^{(\text{id}_X)}$ provient d'un S -morphisme (évidemment unique) de J vers J^t , ou encore, par descente, que

$$\text{pr}_1^* \phi^{(\text{id}_X)} = \text{pr}_2^* \phi^{(\text{id}_X)} : J_{X \times X} \longrightarrow J_{X \times X}^t,$$

or ces deux morphismes coïncident sur la diagonale de $X \times X$ et notre assertion résulte donc du lemme de rigidité [GIT], Proposition 6.1, et du fait que les fibres de X sont géométriquement connexes. ■

DÉFINITION 2.6.4.- Le morphisme $\phi : J \longrightarrow J^t$ de 2.6.3 est par définition la *polarisation canonique* de J .

Remarque 2.6.4.1.- Nous n'avons pas encore montré que ϕ est une polarisation, au sens de [GIT], 6.3 : il reste pour cela à voir que le faisceau $\theta^{(a)}$ de 2.6.1 est *ample* relativement à S . Notons toutefois que 2.5 implique que $\theta^{(a)}$ a des sections puisque Θ est un diviseur effectif : par suite, en vertu de [AV], p.60, il suffit de voir que ϕ est une *isogénie*. Bien entendu, nous constaterons plus loin que ϕ est un isomorphisme, c'est-à-dire une polarisation *principale* : ceci montrera au passage que le diviseur Θ n'est pas multiple non trivial d'un diviseur sur J_{g-1} et que ses fibres sont donc réduites (puisqu'irréductibles).

2.7.- Comme $J^t = \text{Pic}_{J/S}^0$ par définition, et que J a une section (la section unité $e_J : S \longrightarrow J$), le produit $J \times J^t$ est muni d'un faisceau universel, le *faisceau de Poincaré* que nous noterons \mathcal{P} , soumis à la condition d'être trivial sur $e_J(S) \times J^t$. La polarisation canonique ϕ détermine, et est déterminée par, le faisceau inversible

$$(2.7.1) \quad \mathcal{B} := (\text{id}_J \times \phi)^*(\mathcal{P})$$

sur $J \times J$; si $\xi: T \rightarrow J$ est un point à valeurs dans un S -schéma T , alors $\phi(\xi)$ se déduit de \mathcal{B} par la formule

$$(2.7.2) \quad \phi(\xi) = \text{classe dans } J^t(T) \text{ du faisceau inversible} \\ (\text{id}_J \times \xi)^*(\mathcal{B}) \text{ sur } J_T = J \times_S T .$$

On se propose maintenant de "calculer" \mathcal{B} (en termes de la définition de J comme jacobienne de X). D'abord, tout comme \mathcal{P} , \mathcal{B} est muni d'une structure naturelle de biextension (SGA 7 VII), c'est-à-dire que si x_1, x_2, y_1, y_2 sont des points de J , on a des isomorphismes canoniques

$$(2.7.3) \quad \mathcal{B}_{(x_1+x_2, y_1)} = \mathcal{B}_{(x_1, y_1)} \otimes \mathcal{B}_{(x_2, y_1)}$$

$$\mathcal{B}_{(x_1, y_1+y_2)} = \mathcal{B}_{(x_1, y_1)} \otimes \mathcal{B}_{(x_1, y_2)}$$

assortis de propriétés d'associativité, de commutativité et de compatibilité que le lecteur devinera ou trouvera dans loc. cit.

Lorsque X admet une section $a \in X(S)$ on a par définition $\phi = \phi_{\theta(a)}$ (2.6.2) et l'on déduit de la propriété universelle de \mathcal{P} un isomorphisme canonique

$$(2.7.4) \quad \mathcal{B} = m^*\theta^{(a)} \otimes \text{pr}_1^*\theta^{(a)^{-1}} \otimes \text{pr}_2^*\theta^{(a)^{-1}} \otimes (e_{J \times J}^* \theta^{(a)})_{J \times J}$$

où m est l'addition de J et $e_{J \times J}$ la section unité de $J \times J$, de sorte que $(e_{J \times J}^* \theta^{(a)})_{J \times J}$ est l'image réciproque sur $J \times J$ du \mathcal{O}_S -module $(\det \text{Rf}_* \mathcal{O}_X)^{-1}$, comme il résulte de la définition (2.6.1) de $\theta^{(a)}$.

Soient L et M deux faisceaux inversibles sur X (ou plus généralement sur $X \times T$, où T est un S -schéma), de degré 0 dans les fibres, et calculons le \mathcal{O}_S -module inversible $\mathcal{B}_{(c1 L, c1 M)}$, "fibre" de \mathcal{B} au-dessus du point de $(J \times J)(S)$ défini par L et M :

LEMME 2.7.5.- On a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{B}_{(c1 L, c1 M)} = (\det \text{Rf}_*(L \otimes M))^{-1} \otimes \det \text{Rf}_* L \otimes \det \text{Rf}_* M \otimes (\det \text{Rf}_* \mathcal{O}_X)^{-1} .$$

Démonstration : a) Supposons d'abord donnée une section $a \in X(S)$: on a donc en vertu de (2.7.4) :

$$(2.7.5.1) \quad \mathcal{B}_{(c1 L, c1 M)} = \theta_{c1(L \otimes M)}^{(a)} \otimes \theta_{c1 L}^{(a)^{-1}} \otimes \theta_{c1 M}^{(a)^{-1}} \otimes (\det \text{Rf}_* \mathcal{O}_X)^{-1}$$

Mais, par définition de $\theta^{(a)}$ et compte tenu de (2.0.1.1), on a

$$\begin{aligned} \theta_{c1L}^{(a)} &= (\det \text{Rf}_*(L \otimes f^* a^* L^{-1}))^{-1} \\ &= (\det \text{Rf}_* L)^{-1} \otimes a^* L^{\otimes 1-g} \quad (1.1.7). \end{aligned}$$

Reportant dans (2.7.5.1) et simplifiant, on obtient la formule annoncée.

b) Ne supposant plus l'existence d'un point a , désignons par λ et μ les deux membres de l'égalité 2.7.5. Le calcul ci-dessus appliqué, après le changement de base $f: X \rightarrow S$, à la section $a = \Delta_X \rightarrow X \times X$, fournit un isomorphisme canonique de \mathcal{O}_X -modules

$$f^* \lambda = f^* \mu$$

d'où un isomorphisme canonique

$$f_* f^* \lambda = f_* f^* \mu$$

d'où le lemme puisque $f_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ donc $f_* f^* \xi = \xi$ pour tout \mathcal{O}_S -module localement libre ξ . ■

COROLLAIRE 2.7.6. - Soient x et $y \in X(S)$ (considérés à la fois comme sections et comme diviseurs sur X) et soit L un faisceau inversible sur X , de degré 0 dans les fibres. Alors on a un isomorphisme canonique de \mathcal{O}_S -modules inversibles

$$\mathcal{B}_{(c1L, c1\mathcal{O}_X(x-y))} = y^* L \otimes x^* L^{-1} .$$

Démonstration : On applique 2.7.5 à $M = \mathcal{O}(x-y)$, en utilisant les formules (N désignant un faisceau inversible quelconque sur X)

$$\det \text{Rf}_* N(x) = \det \text{Rf}_* N \otimes x^* N(x) \quad (1.3.3)$$

$$\det \text{Rf}_* N(-y) = \det \text{Rf}_* N \otimes y^* N^{-1}$$

Le détail du calcul est laissé au lecteur. ■

2.7.7.- Notons que la formule 2.7.5 met en évidence la *symétrie* de la biextension \mathcal{B} ; cette propriété est d'ailleurs satisfaite par toute biextension sur $J \times J$ qui est localement de la forme $(\text{id}_J \times \varphi_M)^*(\mathcal{P})$, où M est un faisceau inversible sur J .

D'autre part le second membre de 2.7.6 est "linéaire" par rapport à L : ceci reflète l'une des deux lois de composition (2.7.3).

2.7.8.- Soit $a \in X(S)$ et soit L comme dans 2.7.6. Considérons, au-dessus du

S-schéma $T := X \xrightarrow{f} S$, le faisceau inversible L_T sur X_T déduit de L , et les points

$$x = \text{id}_X : T = X \longrightarrow X$$

$$y = \text{le point "constant"} \quad X \xrightarrow{f} S \xrightarrow{a} X .$$

Alors le morphisme $\text{cl}_{X_T}^{\mathcal{O}}(x - y) : T \longrightarrow J$ n'est autre que le plongement traditionnel

$$(2.7.8.1) \quad \begin{aligned} j_a : X &\longleftarrow J \\ z &\longmapsto \text{cl}_X^{\mathcal{O}}(z - a) . \end{aligned}$$

Si nous appliquons 2.7.6 à cette situation (après le changement de base $T \longrightarrow S$) les deux membres de loc. cit. sont des faisceaux inversibles sur $T = X$. Le second membre a même classe dans $J = \underline{\text{Pic}}_{X/S}^{\mathcal{O}}$ que L^{-1} ; le premier s'obtient en restreignant \mathcal{B} à $\{\text{cl } L\} \times J$ (d'où un faisceau inversible sur J), puis en prenant l'image réciproque de celui-ci par $j_a : X \longleftarrow J$. Or par symétrie, $\mathcal{B}|_{\{\text{cl } L\} \times J} \simeq \mathcal{B}|_{J \times \{\text{cl } L\}}$ et il résulte de (2.7.2) que la classe de ce faisceau dans $J^t = \underline{\text{Pic}}_{J/S}^{\mathcal{O}}$ n'est autre que $\phi(\text{cl } L)$. En d'autres termes, la classe dans J du premier membre de 2.7.6 est l'image de $\text{cl } L$ par le morphisme composé

$$(2.7.8.2) \quad J \xrightarrow{\phi} J^t = \underline{\text{Pic}}_{J/S}^{\mathcal{O}} \xrightarrow{j_a^*} \underline{\text{Pic}}_{X/S}^{\mathcal{O}} = J$$

Le corollaire 2.7.6 affirme donc dans ce cas que $j_a^* \phi(\text{cl } L) = \text{cl } L^{-1}$. Bien entendu ce calcul est valable également si L est un faisceau inversible sur X_T , où T' est un S-schéma quelconque. En résumé

PROPOSITION 2.7.9.- Soit $a \in X(S)$. Alors le composé $j_a^* \circ \phi$ de (2.7.8.2) n'est autre que $-\text{id}_J$. ■

COROLLAIRE 2.7.10.- (i) Le morphisme $\phi : J \longrightarrow J^t$ de 2.6.3 est une polarisation principale.

(ii) Le diviseur $\oplus \subset J_{g-1}$ de 2.4.3 est à fibres géométriquement intègres.

Démonstration : (i) On se ramène par changement de base fidèlement plat (par exemple $f : X \longrightarrow S$) au cas où $X(S) \neq \emptyset$, et l'on applique 2.7.9 (qui montre que ϕ est un isomorphisme) et la remarque 2.6.4.1. L'assertion (ii) résulte également de 2.6.4.1. ■

2.7.11.- Nous allons maintenant généraliser 2.7.6 à des diviseurs de la forme

$\sum_{i=1}^r (x_i - y_i)$ où $x_i, y_i \in X(S)$. Pour cela remarquons que, grâce à la structure de biextension de \mathcal{B} , on a des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{B}_{(c1 L, c1(M_1 \otimes M_2))} = \mathcal{B}_{(c1 L, c1 M_1)} \otimes \mathcal{B}_{(c1 L, c1 M_2)} .$$

Si T est un S -schéma et $x_i, y_i (1 \leq i \leq r)$ des points de X à valeurs dans T , considérons le diviseur $D = \sum_{i=1}^r (x_i - y_i)$ sur X_T : alors on déduit de 2.7.6, par linéarité, un isomorphisme (pour tout faisceau inversible L sur X_T , de degré 0 dans les fibres)

$$(2.7.11.1) \quad \mathcal{B}_{(c1 L, c1 \mathcal{O}_{X_T}(D))} \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{i=1}^r (y_i^* L \otimes x_i^* L^{-1}) .$$

LEMME 2.7.11.2.- L'isomorphisme (2.7.11.1) ne dépend pas de l'ordre des x_i et des y_i .

Démonstration: Prouvons par exemple l'invariance par permutation des x_i . Les y_i étant considérés comme fixés, notons $\alpha(x_1, \dots, x_r)$ l'isomorphisme (2.7.11.1). L'assertion du lemme signifie que pour toute permutation σ de $\{1, \dots, r\}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \bigotimes_{i=1}^r (y_i^* L \otimes x_i^* L^{-1}) \\ & \nearrow \alpha(x_1, \dots, x_r) & \downarrow \\ \mathcal{B}_{(c1 L, c1 \mathcal{O}_{X_T}(D))} & & \bigotimes_{i=1}^r (y_i^* L \otimes x_{\sigma(i)}^* L^{-1}) \\ & \searrow \alpha(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) & \end{array}$$

est commutatif, la flèche verticale résultant de la commutativité du produit tensoriel. Nous pouvons nous placer dans la situation "universelle" où T est le S -schéma X^r et où $x_i: X^r \rightarrow X$ est la i -ième projection. Le diagramme ci-dessus est alors un diagramme d'isomorphismes de faisceaux inversibles sur X^r . Comme $(f^r)_*(\mathcal{O}_{X^r}) = \mathcal{O}_S$ (où $f^r: X^r \rightarrow S$ est le morphisme structural), il suffit de voir que ce diagramme commute au-dessus de la "diagonale" $X \leftarrow X^r$ définie par $x_1 = \dots = x_r$. Nous pouvons, en d'autres termes, supposer que les x_i sont égaux, auquel cas l'assertion est triviale. ■

2.8.- Extension à certaines courbes singulières

2.8.0.- Nous supposerons maintenant que le schéma de base S est localement noethérien, régulier, de dimension 1 et (pour simplifier) connexe. On conserve les hypothèses de 2.0 sur la courbe $f: X \rightarrow S$ *sauß* la lissité : on suppose seulement que la fibre générique de f est lisse, que ses fibres géométriques sont réduites et que leurs seules singularités sont des points doubles ordinaires. On sait alors (Raynaud) que la "composante neutre" du foncteur de Picard de X/S est représentable par un S -schéma en groupes lisse, séparé et de type fini $J \rightarrow S$. Si l'on désigne par $U \subset S$ le plus grand ouvert de S au-dessus duquel X est lisse, alors la restriction J_U de J à U est évidemment la jacobienne de X_U/U , et en fait J s'identifie à la composante neutre du modèle de Néron de J_U sur S .

Le schéma en groupes J paramètre, en un sens analogue à 2.0, les faisceaux inversibles sur X qui sont de *degré 0 sur chaque composante* de chaque fibre. En particulier si T est un S -schéma et L_T un tel faisceau sur X_T on a un S -morphisme $clL: T \rightarrow J$, qui détermine L à tensorisation près par un faisceau provenant de T .

Si f a une *section* $a \in X(S)$, alors il existe sur $X \times J$ un faisceau universel $\mathcal{U}^{(a)}$, trivial sur $a(S) \times J$ dont le mode d'emploi est le même qu'en 2.0 (formule (2.0.1.1)).

2.8.1.- Comme X_U est lisse sur U , la jacobienne J_U est munie d'une polarisation canonique $\phi_U: J_U \xrightarrow{\sim} J_U^t$ (2.6.3); de façon équivalente on a sur $J_U \times J_U$ un faisceau inversible \mathcal{B}_U (2.7.1) muni d'une structure naturelle de *biextension*.

Si T est un schéma et G et H deux T -schémas en groupes commutatifs, notons $\text{BIEXT}(G,H)$ la catégorie des biextensions sur $G \times H$ (cette catégorie est notée, à équivalence près, $\text{BIEXT}(G,H; G_m, T)$ dans SGA 7). On a le résultat élémentaire suivant, qui est un cas particulier de SGA 7, VIII. 7.1.b) :

PROPOSITION 2.8.2.- *Soient G et H deux S -schémas en groupes lisses commutatifs à fibres connexes. Alors le foncteur de restriction à U*

$$R_U: \text{BIEXT}(G,H) \longrightarrow \text{BIEXT}(G_U, H_U)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration : Pour tout schéma Y et tout sous-schéma Z de Y , désignons par $\text{PICRIG}(Y,Z)$ la catégorie des \mathcal{O}_Y -modules inversibles munis d'une trivialis-

tion au-dessus de Z , les morphismes étant les *isomorphismes* respectant les trivialisations.

LEMME 2.8.2.1.- Soient $p:Y \rightarrow S$ un S -schéma lisse à fibres connexes, $e:S \rightarrow Y$ une section de p . Alors le foncteur naturel de restriction

$$\text{PICRIG}(Y,e(S)) \longrightarrow \text{PICRIG}(Y_U,e(U))$$

est une équivalence de catégories.

La preuve du lemme est laissée en exercice ; on utilisera les faits suivants (où "diviseur" signifie diviseur de Cartier) :

- a) Comme Y est un schéma régulier, tout faisceau inversible (resp. tout diviseur) sur Y_U se prolonge à Y .
- b) Comme p est à fibres connexes, tout faisceau inversible (resp. tout diviseur) sur Y trivial (resp. nul) sur Y_U provient de S ; un tel objet est trivial (resp. nul) si et seulement si sa restriction à $e(S)$ est itou. ■

2.8.2.2.- Revenons à la proposition. Notons d'abord qu'une biextension est trivialisée le long de la section unité $e:S \rightarrow G \times H$, d'où un foncteur "oubli des lois de composition"

$$\text{BIEXT}(G,H) \longrightarrow \text{PICRIG}(G \times H, e(S)).$$

- a) Le foncteur R_U est *pleinement fidèle*. Soient E et F deux objets de $\text{BIEXT}(G,H)$. L'application naturelle

$$\text{Hom}(E,F) \longrightarrow \text{Hom}(E_U,F_U)$$

est évidemment injective puisque $G_U \times H_U$ est dense dans $G \times H$. Un morphisme de E_U dans F_U se prolonge, d'après 2.8.2.1, en un morphisme des faisceaux rigidifiés sous-jacents à E et F , qui est automatiquement compatible (toujours par densité) aux lois de composition de E et F , C.Q.F.D.

- b) R_U est *essentiellement surjectif*. En effet soit E_U une biextension sur $G_U \times H_U$. Le faisceau rigidifié sous-jacent se prolonge, d'après 2.8.2.1, en un faisceau rigidifié E sur $G \times H$. Les deux lois de composition partielles de E_U s'interprètent comme des isomorphismes de faisceaux rigidifiés convenables sur $G_U \times G_U \times H_U$ et $G_U \times H_U \times H_U$, par exemple

$$m^*E_U \xrightarrow{\sim} \text{pr}_{13}^*E_U \otimes \text{pr}_{23}^*E_U \text{ sur } G_U \times G_U \times H_U$$

où m est l'addition de G_U . Appliquant de nouveau 2.8.2.1, on en déduit deux lois de composition sur E , pour lesquelles les axiomes de biextension sont automatiquement vérifiés par densité. ■

Remarque 2.8.2.3.- Dans l'énoncé de la proposition 2.8.2, il suffirait en fait que l'un des deux groupes G et H soit à fibres connexes ; cela résulte du fait qu'une biextension est trivialisée non seulement sur la section unité $e_{G \times H}$, mais même sur $e_G \times H$ et $G \times e_H$.

2.8.3.- Revenant à la situation de 2.8.1, nous déduisons de 2.8.2 l'existence d'une unique biextension \mathcal{B} sur $J \times J$, prolongeant \mathcal{B}_J , et qui est aussi l'unique prolongement rigidifié de \mathcal{B}_J , au sens du lemme 2.8.2.1.

Supposons que f ait une section $a \in X(S)$. A partir du faisceau universel $\mathcal{U}^{(a)}$ sur $X \times J$, on peut définir, comme en (2.6.1), le faisceau

$$(2.8.3.1) \quad \theta^{(a)} = (\det Rq_{2*} \mathcal{U}^{(a)})^{-1}$$

sur J , où $q_2 : X \times J \rightarrow J$ est la seconde projection.

LEMME 2.8.4.- Avec les hypothèses et notations ci-dessus, on a un isomorphisme canonique (où $m : J \times J \rightarrow J$ est l'addition de J)

$$\mathcal{B} = m^* \theta^{(a)} \otimes \text{pr}_1^* \theta^{(a)-1} \otimes \text{pr}_2^* \theta^{(a)-1} \otimes (e_{J \times J}^* \theta^{(a)})_{J \times J}$$

prolongeant l'isomorphisme (2.7.4) défini au-dessus de U .

Démonstration : Il suffit de remarquer que le membre de droite est un faisceau inversible rigidifié sur $J \times J$, qui prolonge \mathcal{B}_J grâce à (2.7.4). ■

COROLLAIRE 2.8.5.- Soient L et M deux faisceaux inversibles sur X , de degré 0 dans chaque composante de chaque fibre. Alors on a un isomorphisme canonique de \mathcal{O}_S -modules inversibles

$$\mathcal{B}_{(c1 L, c1 M)} \simeq (\det Rf_*(L \otimes M))^{-1} \otimes \det Rf_* L \otimes \det Rf_* M \otimes (\det Rf_* \mathcal{O}_X)^{-1},$$

prolongeant l'isomorphisme 2.7.5 défini sur U .

Démonstration : La question étant locale sur S pour la topologie étale (puisqu'il s'agit de prolonger un isomorphisme déjà défini sur U) nous pouvons supposer que f a une section $a \in X(S)$. On peut alors utiliser le lemme 2.8.4, et il suffit de répéter la partie a) de la démonstration de 2.7.5. ■

COROLLAIRE 2.8.6.- Soit r un entier ≥ 1 et soient x_i, y_i ($1 \leq i \leq r$) des sections de $f : X \rightarrow S$ contenues dans l'ouvert de lissité de f , et telles que

$D = \sum_{i=1}^r (x_i - y_i)$ soit de degré 0 dans chaque composante de chaque fibre. Alors, pour tout L comme dans 2.8.5, on a un isomorphisme canonique

$$\mathcal{B}_{(c1 L, c1 \mathcal{O}_X(D))} = \bigotimes_{i=1}^r (y_i^* L \otimes x_i^* L^{-1})$$

prolongeant l'isomorphisme (2.7.11.1) sur U (et par suite, comme ce dernier, indépendant de l'ordre des x_i et des y_i (2.7.11.2)).

Démonstration : Ici encore la question est locale sur S , et nous pouvons donc supposer que S est local de point fermé s . Nous pouvons de plus supposer, en vertu de (2.7.11.2), que les x_i sont ordonnés de telle sorte que pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, x_i et y_i rencontrent la même composante de la fibre X_S , de sorte que nous pouvons parler du point $c1 \mathcal{O}_X(x_i - y_i) \in J(S)$.

Rappelons que l'isomorphisme (2.7.11.1) était défini par linéarité, à partir du cas $r=1$ et de la structure de biextension de \mathcal{B}_U . Comme \mathcal{B} est la bi-extension prolongeant \mathcal{B}_U , nous sommes ramenés au cas où $r=1$. Le calcul est alors le même que dans 2.7.6, compte tenu de 2.8.5 ci-dessus. ■

2.9.- Perspectives

Soit $X \xrightarrow{f} S$ comme en 2.0, où f est supposé lisse. Alors Deligne (SGA 4 XVIII.1) associe à deux \mathcal{O}_X -modules inversibles L et M quelconques un \mathcal{O}_S -module inversible noté $\langle L, M \rangle$, dont la formation commute à tout changement de base et qui est "bilinéaire" en ce sens que l'on a des isomorphismes fonctoriels

$$(2.9.1) \quad \begin{aligned} \langle L, M_1 \otimes M_2 \rangle &\simeq \langle L, M_1 \rangle \otimes \langle L, M_2 \rangle \\ \langle L_1 \otimes L_2, M \rangle &\simeq \langle L_1, M \rangle \otimes \langle L_2, M \rangle \end{aligned}$$

De plus si $D \subset X$ est un diviseur relatif effectif, on peut lui associer pour tout M un isomorphisme canonique

$$(2.9.2) \quad \langle \mathcal{O}_X(D), M \rangle \simeq N_{D/S}(M|_D)$$

où $N_{D/S}$ désigne la norme.

La méthode de loc. cit. consiste essentiellement à partir de la formule (2.9.2) pour D "suffisamment ample", et à prolonger l'accouplement "par linéarité". On constate en fait que l'on a, pour L et M quelconques

$$(2.9.3.) \quad \langle L, M \rangle \simeq \det \text{Rf}_*(L \otimes M) \otimes (\det \text{Rf}_* L)^{-1} \otimes (\det \text{Rf}_* M)^{-1} \otimes \det \text{Rf}_* \mathcal{O}_X$$

ce qui fournit une définition a priori de $\langle L, M \rangle$; toutefois la bilinéarité n'est pas immédiate sur cette définition et il faut, pour l'établir, faire le lien avec (2.9.2).

Dans le §2, nous avons essentiellement défini l'accouplement $\langle L, M, \rangle$ lorsque L et M sont de degré 0 dans les fibres, par la formule

$$(2.9.4) \quad \langle L, M \rangle = \mathcal{B}_{(c_1 L, c_1 M)}^{-1}$$

(cf. 2.7.5). La bilinéarité résulte dans ce cas de la structure de biextension de \mathcal{B} , c'est-à-dire, essentiellement, du "théorème du carré" sur J : cet argument ne s'applique plus lorsque L et M sont de degré quelconque.

Bien entendu la formule (2.9.2) permet d'étendre la définition de $\langle L, M \rangle$ au cas où $f: X \rightarrow S$ est seulement supposé propre et plat. Il y aurait donc lieu d'établir la bilinéarité de $\langle L, M \rangle$, ainsi défini, sous des hypothèses "minimales" : il semble que ce soit possible en tout cas lorsque les fibres de f sont des courbes localement de Cohen-Macaulay, la démonstration suivant de près celle de SGA 4 moyennant quelques précautions dans le maniement des diviseurs relatifs et des "systèmes linéaires". L'auteur remercie vivement L. Breen d'avoir attiré son attention sur SGA 4, loc. cit ; nous espérons revenir sur ces questions.

3.- FAISCEAUX INVERSIBLES HERMITIENS SUR LES VARIÉTÉS ABÉLIENNES

Dans ce numéro on se place sur le corps \mathbb{C} des nombres complexes.

THÉOREME 3.1. - On peut, d'une manière, et d'une seule, associer à tout couple (A, L) où A est une variété abélienne sur \mathbb{C} et L un fibré en droites sur A , un ensemble non vide $\pi(A, L)$ de métriques hermitiennes C^∞ positives sur L , de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) si $u : L \xrightarrow{\sim} M$ est un isomorphisme de fibrés sur A , alors $\pi(A, M) = u(\pi(A, L))$.
- (ii) $\pi(A, A \times \mathbb{C})$ est l'ensemble des métriques constantes sur le fibré trivial $A \times \mathbb{C}$.
- (iii) $\pi(A, L_1) \otimes \pi(A, L_2) \subset \pi(A, L_1 \otimes L_2)$.
- (iv) si $f : B \rightarrow A$ est un morphisme de variétés abéliennes et si L est un fibré en droites sur A , alors $f^*\pi(A, L) \subset \pi(B, f^*L)$.

3.2.- Notons tout de suite que (i), (ii) et (iii) impliquent (en faisant $L_2 = L_1^{-1}$ dans (iii)) la propriété suivante :

- (v) si $\rho_0 \in \pi(A, L)$, alors $\pi(A, L)$ est l'ensemble des métriques $\lambda \rho_0$, où λ parcourt $\mathbb{R}_{>0}$.

En conséquence, les inclusions dans (iii) et (iv) sont des égalités.

Soient A une variété abélienne et L un fibré en droites sur A . Notons $\mathcal{D}_3(L)$ le fibré sur A^3 défini par

$$\mathcal{D}_3(L) := p_{123}^* L \otimes p_{12}^* L^{-1} \otimes p_{13}^* L^{-1} \otimes p_{23}^* L^{-1} \otimes p_1^* L \otimes p_2^* L \otimes p_3^* L$$

où $p_I : A^3 \rightarrow A$ est défini pour $I \subset \{1, 2, 3\}$ par $p_I(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i \in I} x_i$.

Le théorème du cube ([AV], §6) implique alors que $\mathcal{D}_3(L)$ est *trivial*. On peut donc parler de métriques hermitiennes *constantes* sur $\mathcal{D}_3(L)$ (rappelons qu'une trivialisations de $\mathcal{D}_3(L)$ est unique à multiplication près par une constante) ; d'autre part à toute métrique ρ sur L est associée de façon naturelle une métrique $\mathcal{D}_3(\rho)$ sur $\mathcal{D}_3(L)$, et les conditions (i) à (iv) de 3.1. montrent que si $\rho \in \pi(A, L)$ alors $\mathcal{D}_3(\rho)$ est dans $\pi(A^3, \mathcal{D}_3(L))$ donc est constante.

D'autre part, si $\mathcal{D}_3(\rho)$ est constante et si $\rho' = \lambda \rho$ est telle que $\mathcal{D}_3(\rho')$ soit constante, $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ étant une fonction C^∞ (ou simplement continue) alors λ vérifie

$$\frac{\lambda(x+y+z)\lambda(x)\lambda(y)\lambda(z)}{\lambda(x+y)\lambda(x+z)\lambda(y+z)} = \lambda(0)$$

donc l'application $(x,y) \mapsto \frac{\lambda(x+y)\lambda(0)}{\lambda(x)\lambda(y)}$ de A^2 dans $\mathbb{R}_{>0}$ est \mathbb{Z} -bilinéaire

donc égale à 1 et par suite $\lambda/\lambda(0)$ est \mathbb{Z} -linéaire, donc égale à 1. Nous sommes donc acculés à la définition suivante :

DÉFINITION 3.3.- $\pi(A,L)$ est l'ensemble des métriques ρ sur L telles que la métrique $\mathcal{D}_3(\rho)$ sur $\mathcal{D}_3(L)$ soit constante.

Ceci établit l'assertion d'unicité de 3.1. Il est d'autre part immédiat que $\pi(A,L)$ ainsi défini vérifie les conditions (i) à (iv), et il reste à voir que $\pi(A,L)$ est *non vide*. On en trouvera une démonstration directe dans [MB], II, §2; ici l'on va plutôt faire le lien avec un autre point de vue :

3.5.- A une variété analytique complexe X , un fibré en droites L sur X et une métrique hermitienne $C^\infty \rho$ sur L , on associe ([G-H]) la *forme de courbure* K de la métrique ρ : c'est une forme C^∞ fermée de type (1,1) sur X , et l'on a les propriétés suivantes :

3.5.1.- (i) Si (L_1, ρ_1) et (L_2, ρ_2) sont isométriques alors $K_{\rho_1} = K_{\rho_2}$.

(ii) Sur le *fibré trivial* $X \times \mathbb{C}$, les métriques constantes sont à courbure nulle; la réciproque est vraie si X est compacte connexe.

(iii) $K_{\rho_1 \otimes \rho_2} = K_{\rho_1} + K_{\rho_2}$.

(iv) Si $f: Y \rightarrow X$ est holomorphe alors $K_{f^* \rho} = f^* K_\rho$.

La courbure K_ρ se calcule localement de la façon suivante : soit U un ouvert de X et soit s une section holomorphe partout non nulle de L sur U . Désignons par $\|s\|_\rho$ la norme de s (de sorte que $\|\lambda s\|_\rho = |\lambda| \|s\|_\rho$): alors $\|s\|_\rho$ est une fonction C^∞ sur U , et l'on a, sur U ([G-H], p.142) :

$$(3.5.2) \quad K_\rho = \bar{\partial} \partial \log \|s\|_\rho^2$$

Enfin la classe de cohomologie $[K_\rho] \in H_{DR}^2(X)$ ne dépend que de L et non de ρ ; plus précisément ([G-H] p.141) :

$$(3.5.3) \quad c_1(L) = \left[\frac{i}{2\pi} K_\rho \right] \in H_{DR}^2(X).$$

Dans le cas particulier où $X=A$ est une variété abélienne, il en résulte

qu'une métrique ρ sur le fibré trivial $A \times \mathbb{C}$ est constante si et seulement si la forme K_ρ est invariante par translations (exercice : une forme exacte invariante par translations est nulle). Ceci suggère :

PROPOSITION 3.6 .- $\pi(A,L)$ est l'ensemble des métriques ρ sur L telles que la $(1,1)$ -forme K_ρ soit invariante par translations ; de plus $\pi(A,L)$ est non vide.

Désignons par $\pi'(A,L)$ l'ensemble des métriques à courbure invariante sur L . Il est immédiat que les propriétés (i) à (iv) de 1.1 sont vérifiées pour $\pi'(A,L)$. Il en résulte que $\pi'(A,L) \subset \pi(A,L)$; d'autre part, $\pi'(A,L)$ est non vide en vertu de théorèmes généraux ([G-H], p.148). ■

(Le lecteur sachant montrer directement que $\pi(A,L)$ est non vide fera l'économie de loc. cit. en montrant de façon élémentaire que $\pi(A,L) \subset \pi'(A,L)$: il suffit pour cela de calculer $K_{\mathcal{D}_3(\rho)}$ en fonction de K_ρ et d'exprimer que $K_{\mathcal{D}_3(\rho)} = 0$).

DÉFINITION 3.7.- On appelle *métriques permises* sur L les éléments de $\pi(A,L)$.

Remarque 3.8 : Si L est un fibré en droites sur A , le fibré

$$(3.8.1) \quad \tilde{\mathcal{D}}_2(L) := p_1^* L \otimes p_1^* L^{-1} \otimes p_2^* L^{-1} \otimes_{\mathbb{C}} e_{A \times A}^* L$$

sur $A \times A$ admet une structure naturelle de *biextension*. On vérifie alors qu'une métrique ρ sur L est permise si et seulement si la métrique $\tilde{\mathcal{D}}_2(\rho)$ sur $\tilde{\mathcal{D}}_2(L)$ déduite de ρ est compatible à cette structure, c'est-à-dire si les deux lois de composition

$$\tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(x,y)} \otimes \tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(x,z)} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(x,y+z)}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(x,z)} \otimes \tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(y,z)} \xrightarrow{\sim} \tilde{\mathcal{D}}_2(L)_{(x+y,z)}$$

sont compatibles à la métrique $\tilde{\mathcal{D}}_2(\rho)$.

Remarque 3.9.- De même soit L un fibré en droites sur A , algébriquement équivalent à 0, et posons $\tilde{L} = L \otimes_{\mathbb{C}} L_A^{-1}$. Alors \tilde{L} (ou plus exactement le fibré époincé $\tilde{L}^* = \tilde{L}$ - (section nulle)) admet une structure naturelle d'*extension* de A par \mathbb{C}^\times . Une métrique ρ sur L est alors permise si et seulement si la métrique $\tilde{\rho}$ sur \tilde{L} déduite de ρ est compatible à la structure d'extension, ou en d'autres termes si le fibré en cercles unités de \tilde{L}^* associé à $\tilde{\rho}$ est un sous-groupe de \tilde{L}^* .

Remarque 3.10.- Le théorème 3.1 reste vrai si l'on remplace les variétés abéliennes par les toseurs (espaces homogènes principaux) sous les variétés abéliennes, i.e si dans la condition (iv) de 3.1, on n'impose plus à f d'être un morphisme de groupes. Cela revient en effet à vérifier que si $T_x : A \longrightarrow A$ désigne la translation par $x \in A$, alors

$$T_x^* \pi(A, L) = \pi(A, T_x^* L) .$$

C'est immédiat en termes de courbure. On peut aussi raisonner de la façon suivante : si $\rho \in \pi(A, L)$, considérons la métrique $\tilde{\mathcal{D}}_2(\rho)$ de 3.8. On peut la restreindre à $\{x\} \times A \subset A \times A$: on obtient ainsi la métrique déduite naturellement de ρ sur le fibré $T_x^* L \otimes L^{-1} \otimes_{\mathbb{C}} L_x^{-1} \otimes_{\mathbb{C}} L_{e_A}$. Ce dernier s'identifie à $\tilde{M} = M \otimes_{\mathbb{C}} M_{e_A}^{-1}$ où $M = T_x^* L \otimes L^{-1}$. D'après 3.8, $\tilde{\mathcal{D}}_2(\rho)$ est compatible à la structure de biextension de $\tilde{\mathcal{D}}_2(L)$; par suite la métrique sur \tilde{M} déduite de ρ est compatible à la structure d'extension de \tilde{M} . En d'autres termes (d'après 3.9) la métrique $T_x^* \rho \otimes \rho^{-1}$ sur M est permise, donc $T_x^* \rho$ est permise puisque ρ l'est.

4.- FAISCEAUX INVERSIBLES HERMITIENS SUR LES COURBES

4.0.- Soit X une courbe propre, lisse et connexe de genre $g \geq 1$ sur \mathbb{C} , et soit $J = \underline{\text{Pic}}^0_X/\mathbb{C}$ sa jacobienne. Alors (§2) J est munie canoniquement d'une polarisation principale que l'on peut voir, au choix, comme :

(a) une classe ample $\xi_X \in \text{NS}(J) = \underline{\text{Pic}}(J)/\underline{\text{Pic}}^0(J)$ (groupe de Néron-Severi de J) : si $a \in X(\mathbb{C})$, c'est la classe du faisceau $\theta^{(a)}$ de 2.6.1.

(b) un isomorphisme $\phi_X : J \xrightarrow{\sim} J^t$ (noté ϕ en 2.6.3) : si M est un faisceau inversible sur J appartenant à la classe ξ_X (par exemple $M = \theta^{(a)}$), alors $\phi_X = \varphi_M$ (2.6.2).

(c) une forme positive η_X de type (1,1) sur J , invariante par translations, liée à ξ_X par

$$\eta_X := c_1(\xi_X) \in H^{1,1}(J) = \{(1,1)\text{-formes invariantes sur } J\} .$$

Pour tout point a de X (cette expression désigne dans ce n°, sauf mention expresse du contraire, un point de $X(\mathbb{C})$), on a un plongement (déjà rencontré en (2.7.8.1))

$$(4.0.1) \quad \begin{aligned} j_a : X &\hookrightarrow J \\ x &\longmapsto c_1 \mathcal{O}_X(x-a) . \end{aligned}$$

Comme ξ_X est ample sur J , on a

$$(4.0.2) \quad \deg_X j_a^*(\xi_X) > 0$$

(en fait, ce degré est égal à g) et en conséquence on peut considérer la 2-forme sur X

$$(4.0.3) \quad \mu_X := \frac{1}{\deg j_a^*(\xi_X)} j_a^* \eta_X$$

qui est une (1,1)-forme positive, indépendante du choix de a puisque η_X est invariante par translations ; on l'appelle *forme canonique* sur X et elle définit une métrique hermitienne sur X , dite *métrique canonique* (nous n'utiliserons pas cette dernière, ce qui nous dispense de préciser les conventions).

Par construction, μ_X vérifie

$$(4.0.4) \quad \int_X \mu_X = 1 ;$$

elle est définie "classiquement" par la formule suivante : si (w_1, \dots, w_g) est une base de $H^0(X, \Omega_X^1)$, orthonormale pour le produit hermitien

$$(4.0.5) \quad (\alpha, \beta) \longmapsto \frac{i}{2} \int_X \alpha \wedge \bar{\beta}$$

alors on a

$$(4.0.6) \quad \mu_X = \frac{i}{2g} \sum_{j=1}^g w_j \wedge \bar{w}_j$$

(nous n'avons pas à utiliser cette formule).

4.1.- Si M est un faisceau inversible sur J , nous dirons que M est *polarisant* si sa classe dans $NS(J)$ est multiple (rationnel ou entier, cela revient au même puisque ξ_X est principale) de la classe ξ_X . De façon équivalente : $c_1(M) = \lambda \eta_X$ ($\lambda \in \mathbb{R}$; en fait $\lambda \in \mathbb{Z}$), ou encore : si ρ est une *métrique permise* (3.7) sur M , alors sa courbure K_ρ est multiple de $-2\pi i \eta_X$ (à cause de (3.5.3)).

THÉORÈME 4.2.- Avec les notations de 4.0 et 4.1, on peut, d'une manière et d'une seule, associer à tout fibré en droites L sur X un ensemble non vide $\pi(X, L)$ de métriques hermitiennes C^∞ positives sur L , de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées :

- (i) Si $u : L \xrightarrow{\sim} M$ est un isomorphisme alors $u(\pi(X, L)) = \pi(X, M)$.
- (ii) $\pi(X, X \times \mathbb{C})$ est l'ensemble des métriques constantes sur $X \times \mathbb{C}$.
- (iii) $\pi(X, L_1) \otimes \pi(X, L_2) \subset \pi(X, L_1 \otimes L_2)$.
- (iv) Si $a \in X$ et si M est un fibré polarisant (4.1) sur J , alors

$$j_a^* \pi(J, M) \subset \pi(X, j_a^* M)$$

où $j_a : X \hookrightarrow J$ est le plongement (4.0.1) et où $\pi(J, M)$ est défini en 3.1.

Ici comme au §3 on remarque que (i), (ii) et (iii) impliquent :

- (v) si $\rho_0 \in \pi(X, L)$ alors $\pi(X, L)$ est l'ensemble des $\lambda \rho_0$ où $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ et par suite les inclusions (iii) et (iv) sont des égalités.

Démonstration de 4.2 : Fixons d'abord $a \in X$. Si L est un fibré en droites sur X , il existe un entier n (par exemple $n = g$, cf. (4.0.2)) et un fibré polarisant M_n sur J , tel que $\deg j_a^* M_n = \deg(L^{\otimes n})$. Remarquons alors que

$$j_a^* : \text{Pic}^0 J \longrightarrow \text{Pic}^0 X$$

est un isomorphisme (2.7.9) on voit que l'on peut même imposer $\phi_a^* M_n \simeq L^{\otimes n}$, et M_n ainsi défini est unique (pour n donné). Il suffit alors de poser

$$(4.2.1) \quad \pi(X, L) = (j_a^* \pi(J, M_n))^{\otimes 1/n}.$$

Il est immédiat que $\pi(X,L)$ ainsi défini ne dépend pas de n (car on a $M_{kn} = M_n^{\otimes k}$) ni de a (en vertu de la remarque 3.10 et du fait que $j_b = T_{c1} \theta_X^{(a-b)} \circ j_a$). La vérification des propriétés (i)-(iv) est dès lors triviale. ■

Remarque 4.2.2.- Lorsque $g=1$, on obtient deux ensembles $\pi(X,L)$ de métriques sur L , en considérant X soit comme courbe (4.2), soit comme torseur sous une variété abélienne (3.10). En fait ces deux ensembles coïncident (ce qui justifie la notation) puisque dans ce cas le plongement j_a de (4.0.1) est un isomorphisme.

4.3.- Lien avec la courbure.- Gardons les notations de la démonstration ci-dessus. Si ρ est une métrique permise sur M_n , alors la courbure K_ρ est multiple de $-2\pi i \eta_X$ (4.1), et par suite il résulte de (4.2.1) que si $\sigma \in \pi(X,L)$, la courbure K_σ est multiple de la (1,1)-forme μ_X de (4.0.3). Comme d'autre part on a

$$\frac{-1}{2i\pi} \int_X K_\sigma = \text{deg } L \quad (3.5.3)$$

$$= \int_X (\text{deg } L) \mu_X \quad (4.0.4)$$

on en déduit plus précisément que

$$(4.3.1) \quad K_\sigma = -2i\pi(\text{deg } L)\mu_X .$$

Inversement si σ' est une métrique sur L dont la courbure est de la forme $\alpha\mu_X$ ($\alpha \in \mathbb{C}$), alors $\alpha = -2i\pi \text{deg } L$ par le calcul ci-dessus, et $\sigma' \otimes \sigma^{-1}$ est une métrique à courbure nulle sur le fibré trivial, donc est constante, et par suite $\sigma' \in \pi(X,L)$. En résumé

PROPOSITION 4.4.- Soit ρ une métrique sur le fibré L sur X . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\rho \in \pi(X,L)$.
- (ii) La courbure K_ρ est proportionnelle à la (1,1)-forme μ_X de (4.0.3).
- (iii) $K_\rho = -2i\pi(\text{deg } L)\mu_X$. ■

DÉFINITION 4.5.- On appelle *métriques permises* sur le fibré L sur X les éléments de $\pi(X,L)$.

Remarque 4.6 : Arakelov [A] (suivant une idée de Parshin) part d'une (1,1)-forme ν quelconque sur X vérifiant $\int_X \nu = 1$, et considère ensuite comme permises les métriques ρ sur L vérifiant $K_\rho = -2i\pi(\deg L)\nu$. On obtient ainsi, pour tout fibré L , un ensemble de métriques $\pi_\nu(X, L)$ vérifiant trivialement les propriétés (i), (ii) et (iii) de 4.2 et Arakelov montre encore que $\pi_\nu(X, L)$ est *non vide*. Bien entendu la propriété (iv) de 4.2 n'est vérifiée que si $\nu = \mu_X$.

DÉFINITION 4.7.- Soit L un fibré en droites sur X^r ($r \geq 0$). Une métrique sur L est dite *r-permise* si pour tout plongement $j : X \rightarrow X^r$ tel que l'un des composés $pr_i \circ j$ ($1 \leq i \leq r$) soit l'identité de X et que les autres soient constants, la métrique $j^*\rho$ sur j^*L est permise.

Remarques 4.8.- Il est immédiat que si ρ' et ρ'' sont deux métriques r -permises sur L , le rapport ρ'/ρ'' est constant.

Si ρ_1 (resp. ρ_2) est r -permise sur L_1 (resp. L_2) alors $\rho_1 \otimes \rho_2$ est r -permise sur $L_1 \otimes L_2$.

Si L est un fibré en droites sur X et $\rho \in \pi(X, L)$, alors pour $i \in \{1, \dots, r\}$ la métrique $pr_i^*\rho$ sur pr_i^*L est r -permise.

Nous dirons *bipermise* pour "2-permise".

4.9.- Considérons sur $X \times X$ la diagonale $\Delta : X \hookrightarrow X \times X$, considérée à la fois comme plongement de X et comme diviseur sur $X \times X$. Le faisceau inversible $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ est muni d'un isomorphisme de symétrie

$$(4.9.1) \quad \sigma : \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) \xrightarrow{\sim} s^* \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$$

induisant l'identité le long de Δ , où $s : X \times X \rightarrow X \times X$ désigne l'échange des facteurs.

THÉORÈME 4.10.-

(i) Le faisceau $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ admet une métrique bipermise.

(ii) Toute métrique bipermise sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ est compatible à l'isomorphisme de symétrie (4.9.1).

(iii) Pour toute métrique bipermise ρ sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$, la métrique $\Delta^*\rho$ sur $\Delta^* \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) = \omega_X^{-1}$ est permise.

Démonstration : L'assertion (ii) résulte de l'unicité à constante près des métriques bipermises. Pour la même raison il suffit d'établir (iii) pour une métrique

bipermise particulière.

4.10.1.- Fixons un point $a \in X$ et considérons sur $X \times J$ le faisceau universel $\mathcal{U}^{(a)} = \mathcal{U}_0^{(a)}$ (2.0.1) trivial sur $\{a\} \times J$. Par définition de la polarisation canonique, le \mathcal{O}_J -module inversible

$$\theta^{(a)} = (\det Rq_{2*} \mathcal{U}^{(a)})^{-1}$$

où $q_2 : X \times J \rightarrow J$ est la seconde projection, est polarisant (2.6) : munissons-le d'une métrique permise ρ .

Considérons alors le morphisme

$$(4.10.1.1) \quad \begin{aligned} \psi : X \times X &\longrightarrow J \\ (x,y) &\longrightarrow \text{cl } \mathcal{O}_X(x-y) \end{aligned}$$

Je dis qu'alors la métrique $\psi^* \rho$ sur $\psi^* \theta^{(a)}$ est *bipermise*. Pour y fixé, en effet, la restriction de ψ à $X \times \{y\} = X$ n'est autre que le morphisme $j_y : X \rightarrow J$ de (4.0.1), et l'on applique la caractérisation 4.2 (iv) des métriques permises. Pour x fixé, la restriction de ψ à $\{x\} \times X$ est le morphisme $-j_x$, et l'on a

$$(-j_x)^* \theta^{(a)} = j_x^* [-1]_J^* \theta^{(a)},$$

or le fibré $[-1]_J^* \theta^{(a)}$ est algébriquement équivalent à $\theta^{(a)}$ donc polarisant, et la métrique $[-1]_J^* \rho$ sur ce fibré est évidemment permise, d'où notre assertion.

LEMME 4.10.2.- Avec les notations ci-dessus, on a

$$\psi^* \theta^{(a)} \simeq \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) \otimes \text{pr}_1^* \mathcal{O}_X(a)^{\otimes(1-g)} \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_X(a)^{\otimes(g-1)} \otimes \text{pr}_1^* \omega_X.$$

Démonstration : Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X^3 = X \times X \times X & \xrightarrow{\text{id}_X \times \psi} & X \times J \\ \sigma_a \left(\begin{array}{c} \Delta_1 \uparrow \Delta_2 \uparrow \\ \downarrow \text{pr}_{23} \end{array} \right) & & \downarrow q_2 \\ X \times X & \xrightarrow{\psi} & J \end{array}$$

où, par définition,

$$\begin{aligned} \Delta_1(x,y) &= (x,x,y) \\ \Delta_2(x,y) &= (y,x,y) \\ \sigma_a(x,y) &= (a,x,y). \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \psi^* \mathcal{U}^{(a)} &= \psi^*(\det \text{Rq}_{2*} \mathcal{U}^{(a)})^{-1} \text{ (définition de } \theta^{(a)}) \\ &= (\det \text{R pr}_{23*} (\text{id}_X \times \psi)^* \mathcal{U}^{(a)})^{-1} \text{ (changement de base).} \end{aligned}$$

Or, le morphisme ψ est caractérisé (2.0.1.1) par la propriété que

$$\begin{aligned} (\text{id}_X \times \psi)^* \mathcal{U}^{(a)} &\simeq \mathcal{O}_{X^3}(\Delta_1 - \Delta_2) \otimes \text{pr}_{23}^* \sigma_a^* \mathcal{O}_{X^3}(\Delta_2 - \Delta_1) \\ &= \mathcal{O}_{X^3}(\Delta_1 - \Delta_2) \otimes \text{pr}_{23}^* (\text{pr}_2^* \mathcal{O}_X(a) \otimes \text{pr}_1^* \mathcal{O}_X(a)^{-1}) . \end{aligned}$$

Il suffit dès lors de calculer $\det \text{Rpr}_{23*} (\text{id}_X \times \psi)^* \mathcal{U}^{(a)}$ en appliquant les règles du §1, en remarquant que $\Delta_2^* \mathcal{O}(\Delta_1) = \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ et que $\Delta_1^* \mathcal{O}(\Delta_1) = \text{pr}_1^* \omega_X^{-1}$. ■

4.10.3.- Il résulte en particulier de 4.10.2 que :

$$\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) \simeq \psi^* \theta^{(a)} \otimes \text{pr}_1^* L_1 \otimes \text{pr}_2^* L_2$$

où L_1 et L_2 sont deux fibrés sur X . Si l'on munit ces deux derniers de métriques permises, et $\psi^* \theta^{(a)}$ de la métrique bipermise $\psi^* \rho$, on obtient bien une métrique bipermise sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ grâce à l'isomorphisme ci-dessus. De plus les métriques bipermises obtenues sur les trois faisceaux du second membre ont toutes la propriété que leur restriction à la diagonale est permise : c'est clair pour les deux derniers, et pour $\psi^* \theta^{(a)}$ cela résulte de la remarque que la restriction de ψ à Δ est le morphisme nul : la métrique $\psi^* \rho$ induit donc une métrique constante (et par suite permise) sur le fibré trivial $\Delta^* \psi^* \theta^{(a)}$.

Nous avons donc fabriqué, sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$, une métrique bipermise dont la restriction à la diagonale est permise, ce qui prouve (i) et (iii). ■

4.11.- Supposons désormais fixée une métrique bipermise ρ_Δ sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ (en ce qui concerne le choix de cette métrique, voir 4.11.4 ci-dessous). Si a est un point de X , alors la restriction de $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ à $\{a\} \times X$ s'identifie canoniquement au fibré $\mathcal{O}_X(a)$ sur X , de sorte que ce dernier se trouve gratifié canoniquement d'une métrique permise, que nous noterons $\rho_{(a)}$. Par additivité, on en déduit sans peine la proposition suivante :

PROPOSITION 4.11.1.- Une fois fixée une métrique bipermise ρ_Δ sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$, on peut, d'une manière et d'une seule, associer à tout diviseur D sur X une métrique permise ρ_D sur $\mathcal{O}_X(D)$, de sorte que les conditions suivantes soient réalisées :

(i) la métrique ρ_0 associée au diviseur nul est la métrique évidente sur le fibré trivial .

(ii) Si D_1 et D_2 sont deux diviseurs sur X , les métriques $\rho_{D_1} \otimes \rho_{D_2}$ et $\rho_{D_1+D_2}$ se correspondent par l'isomorphisme naturel $\mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2) \rightarrow \mathcal{O}_X(D_1+D_2)$.

(ii) Si D est réduit à un point $a \in X$, alors ρ_D est la métrique $\rho_{(a)}$ définie ci-dessus.

Remarque 4.11.2 : Si l'on multiplie ρ_Δ par une constante $\lambda > 0$, alors ρ_D est multipliée par $\lambda^{\deg D}$: en particulier, si $\deg D = 0$, alors ρ_D est indépendante du choix de ρ_Δ .

4.11.3.- La métrique choisie ρ_Δ sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ permet de définir une métrique privilégiée ρ_ω sur le fibré cotangent ω_X de X , grâce à l'isomorphisme naturel $\omega_X^{-1} \xrightarrow{\sim} \Delta^* \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$. Cette métrique est permise en vertu de 4.10 (iii). De plus, pour tout point $a \in X$, on a un isomorphisme naturel de \mathbb{C} -espaces vectoriels

$$(4.11.3.1) \quad (\omega_X)_a \simeq (\mathcal{O}_X(-a))_a$$

hérité du précédent, et il résulte des définitions que cet isomorphisme est une isométrie lorsque l'on munit ω_X (resp. $\mathcal{O}_X(-a)$) de la métrique ρ_ω (resp. de la métrique $\rho_{-(a)}$ associée au diviseur $-(a)$ sur X). En d'autres termes le morphisme "résidu" :

$$(4.11.3.2) \quad \text{Res}_a : \omega_X(a)_a \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

est une isométrie. Ceci aura pour conséquence immédiate la formule d'adjonction sur les surfaces arithmétiques (6.11 ci-dessous).

4.11.4.- Le fibré $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$ est muni d'une section canonique, que nous noterons s_Δ , et dont le diviseur est Δ . La norme de cette section (pour la métrique fixée ρ_Δ) est donc une application continue

$$(4.11.4.1) \quad G : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

définie par $G = \rho_\Delta(s_\Delta)$, et possédant les propriétés suivantes :

(4.11.4.2) 1) G est C^∞ et > 0 en dehors de Δ , et est nulle à l'ordre 1 le long de Δ , au sens suivant : si z est une équation locale de Δ au voisinage de $x_0 \in \Delta$, alors $G = |z|u$ où u est C^∞ et > 0 au voisinage de x_0 ;

2) $G(x,y) = G(y,x)$ pour $(x,y) \in X \times X$;

3) la $(1,1)$ -forme $(\bar{\partial}\partial)_X \log G(x,y)$ coïncide avec $-\pi \text{pr}_1^* \mu_X$ où μ_X est la $(1,1)$ -forme sur X définie en (4.0.3).

L'assertion 1) est immédiate ; 2) résulte de 4.10 (ii), et 3) de la caractérisation des métriques permises en termes de courbure donnée en (4.3.1), et de la formule (3.5.2) pour la courbure.

Réciproquement, une fonction $G: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ possédant ces propriétés définit une métrique bipermise ρ_Δ sur $\mathcal{O}(\Delta)$, par la condition $G = \rho_\Delta(s_\Delta)$. Bien entendu, changer ρ_Δ en $\lambda\rho_\Delta$ ($\lambda > 0$) conduit à remplacer G par λG .

Toujours est-il que le choix de la métrique ρ_Δ équivaut au choix d'une fonction G vérifiant les conditions 1) à 3) ci-dessus. Or Arakelov [A] montre (ou plutôt affirme) que l'on peut imposer à G la condition supplémentaire

$$4) \text{ Pour tout } x \in X, \text{ on a } \int_X \log G(x, y) (\mu_X)_y = 0$$

qui, bien entendu, la détermine cette fois de façon unique. La fonction G ainsi obtenue est appelée *fonction de Green* sur $X \times X$ (voir plus loin, exposé III). Notons que l'assertion d'Arakelov entraîne que quel que soit le choix de G vérifiant 1)-3), l'intégrale $\int_X \log G(x, y) (\mu_X)_y$ est indépendante de $x \in X$.

On pourrait encore imposer, au lieu de 4), la condition

$$4') \sup_{(x, y) \in X \times X} G(x, y) = 1.$$

Cette convention aurait pour effet (anticipant sur la suite) que si D_1 et D_2 sont deux diviseurs effectifs sans composante commune sur une surface arithmétique, les termes locaux de l'intersection d'Arakelov $D_1 \cdot D_2$ sont tous ≥ 0 .

Enfin, si a et b sont deux points de X (et ρ_Δ étant fixée), munissons $\mathcal{O}_X(a)$ de la métrique $\rho_{(a)}$ définie en 4.11, et désignons par s_a la section canonique de $\mathcal{O}_X(a)$ (dont le diviseur est a). Alors il résulte des définitions que

$$(4.11.4.3) \quad G(a, b) = \rho_{(a)}(s_a(b)).$$

4.12.- Normes de Faltings sur $\det R\Gamma(L)$.

On suppose fixée une fois pour toutes une métrique bipermise ρ_Δ sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$, et l'on choisit de plus une norme hermitienne sur

$$\begin{aligned} \det R\Gamma(\mathcal{O}_X) &= (\Lambda^g H^1(X, \mathcal{O}_X))^V \\ &= \Lambda^g H^0(X, \omega_X) \end{aligned}$$

(un choix naturel est la norme déduite du produit hermitien (4.0.5) sur $H^0(X, \omega_X)$).

On se propose, à partir de ces données, d'associer canoniquement à tout faisceau inversible L sur X muni d'une métrique permise ρ , une norme hermitienne sur $\det R\Gamma(L)$. Plus précisément

THÉORÈME 4.13.- (Faltings) Sous les hypothèses de 4.12 , on peut, d'une manière et d'une seule, associer à tout couple (L, ρ) où L est un fibré en droites sur X et ρ une métrique permise sur L , une norme hermitienne $\lambda(L, \rho)$ sur $\det R\Gamma(L)$ (la norme de Faltings), de manière que :

(i) si (L, ρ) est le fibré trivial muni de sa métrique naturelle, alors $\lambda(L, \rho)$ est la norme choisie sur $\det R\Gamma(\mathcal{O}_X)$.

(ii) Si $u : (L_1, \rho_1) \xrightarrow{\sim} (L_2, \rho_2)$ est une isométrie, alors $\det R\Gamma(u) : (\det R\Gamma(L_1), \lambda(L_1, \rho_1)) \longrightarrow (\det R\Gamma(L_2), \lambda(L_2, \rho_2))$ est une isométrie.

(iii) Si a est un point de X , l'isomorphisme naturel (1.3.3)

$$\det R\Gamma(L(a)) \xrightarrow{\sim} \det R\Gamma(L) \otimes_{\mathbb{C}} L(a)_a$$

est une isométrie lorsque l'on munit $\det R\Gamma(L)$ (resp. $\det R\Gamma(L(a))$) de la norme $\lambda(L, \rho)$ (resp. $\lambda(L(a), \rho \otimes \rho_{(a)})$) et la droite $L(a)_a$ de la norme induite par $\rho \otimes \rho_{(a)}$; ici $\rho_{(a)}$ désigne la métrique sur $\mathcal{O}_X(a)$ définie en 4.11 à l'aide de ρ_Δ .

Remarques 4.13.1 :

a) Si $u : (L_1, \rho_1) \longrightarrow (L_2, \rho_2)$ multiplie les normes par $\alpha > 0$, alors $\lambda R\Gamma(u)$ multiplie les normes par $\alpha^{\chi(L_1)}$: ceci résulte de (i) et du fait que $\frac{1}{\alpha} u$ est une isométrie. De même on a, pour $\alpha > 0$:

$$\lambda(L, \alpha\rho) = \alpha^{\chi(L)} \lambda(L, \rho) .$$

b) Si l'on multiplie par $\alpha > 0$ la norme choisie sur $\det R\Gamma(\mathcal{O}_X)$, alors toutes les normes $\lambda(L, \rho)$ sont multipliées par α ; on pourrait donc se dispenser du choix d'une norme sur $\det R\Gamma(\mathcal{O}_X)$, en affirmant seulement l'existence d'une norme canonique sur $\det R\Gamma(L) \otimes (\det R\Gamma(\mathcal{O}_X))^{-1}$.

c) Si l'on multiplie par $\alpha > 0$ la métrique ρ_Δ sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta)$, alors $\lambda(L, \rho)$ est multipliée par α^{-m} où m est l'étrange entier

$$m = \frac{\chi(L)(\chi(L) - 1) - g(g - 1)}{2}$$

$$= \frac{\deg L (\deg L + 1 - 2g)}{2} .$$

On laisse la vérification au lecteur, qui prendra garde que, dans (iii), le choix de ρ_Δ intervient (par l'intermédiaire de $\rho_{(a)}$) des deux côtés de l'isomorphisme utilisé.

Démonstration de 4.13 :

4.13.2.- Si E est un ensemble et r un entier ≥ 0 , appelons *mot de longueur* r sur E un élément de l'ensemble $(E \times \{+1, -1\})^r$. Un tel mot sera noté

$Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_r^{\varepsilon_r}$ ($Q_i \in E, \varepsilon_i \in \{+1, -1\}$). On définit la composition des mots par juxtaposition.

Soit T un \mathbb{C} -schéma réduit de type fini. Si $w = Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_r^{\varepsilon_r}$ est un mot sur $X(T)$, on note D_w le diviseur $\sum \varepsilon_i Q_i$ sur X_T . On définit alors par récurrence sur r une métrique $\lambda(w)$ sur le fibré $\det \text{Rp}_* \mathcal{O}_{X_T}(D_w)$ de la manière suivante ($p : X_T \rightarrow T$ étant la projection naturelle) :

- si $r=0$, alors w est le mot vide, $\mathcal{O}_{X_T}(D_w) = \mathcal{O}_{X_T}$ et $\lambda(w)$ est déduite de la métrique fixée sur $\det \text{R}\Gamma(\mathcal{O}_X)$.

- si $r > 0$ et $\varepsilon_r = +1$, alors $w = w' Q_r$ où w' est de longueur $r-1$. On a un isomorphisme naturel

$$(4.13.2.1) \quad \det \text{Rp}_* \mathcal{O}_{X_T}(D_w) \xrightarrow{\sim} \det \text{Rp}_* \mathcal{O}_{X_T}(D_{w'}) \otimes Q_r^* \mathcal{O}_{X_T}(D_w)$$

et l'on impose à celui-ci d'être une isométrie pour les métriques respectives $\lambda(w)$ et $\lambda(w') \otimes Q_r^* \rho_{D_w}$: ceci définit $\lambda(w)$ sans ambiguïté.

- si $r > 0$ et $\varepsilon_r = -1$, alors $w = w' Q_r^{-1}$ d'où $D_w = D_{w'} + Q_r$, et l'on a

$$(4.13.2.2) \quad \det \text{Rp}_* \mathcal{O}_{X_T}(D_w) = \det \text{Rp}_* \mathcal{O}_{X_T}(D_{w'}) \otimes Q_r^* \mathcal{O}_{X_T}(D_w) ;$$

on impose alors à cet isomorphisme de respecter les métriques $\lambda(w')$ et $\lambda(w) \otimes Q_r^* \rho_{D_w}$.

4.13.3.- Il est immédiat que lorsque $T = \text{Spec } \mathbb{C}$, alors notre norme $\lambda(w)$ doit coïncider avec la norme $\lambda(\mathcal{O}_X(D_w), \rho_{D_w})$ si celle-ci existe. Ceci établit l'assertion d'unicité de 4.13, car tout fibré hermitien (L, ρ) , où ρ est permise, est isomorphe (avec sa métrique) à un certain $(\mathcal{O}_X(D), \rho_D)$.

L'existence résultera des deux lemmes suivants :

LEMME 4.13.4.- La métrique $\lambda(w)$ sur $\det \text{Rp}_* \mathcal{O}_X(D_w)$ ne dépend que du diviseur D_w .

On obtient donc, pour tout diviseur D sur X_T qui est combinaison linéaire de sections, une métrique sur $\det \text{Rp}_* \mathcal{O}_X(D)$, que nous noterons $\lambda(D)$.

LEMME 4.13.5.- Soient D_1 et D_2 deux diviseurs sur X .

Si $u : (\mathcal{O}_X(D_1), \rho_{D_1}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X(D_2), \rho_{D_2})$ est une isométrie, alors $\det R\Gamma(u)$ est une isométrie pour les normes $\lambda(D_1)$ et $\lambda(D_2)$ ci-dessus.

Bien entendu, on définit ensuite $\lambda(L, \rho)$ du théorème par la condition que $\lambda(\mathcal{O}_X(D), \rho_D) = \lambda(D)$ pour tout diviseur D .

4.13.6.- Démonstration de 4.13.4 : invariance par contraction : Soit $r \geq 2$ et soit $w = Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_r^{\varepsilon_r}$ tel qu'il existe $i \leq r-1$ avec $Q_i = Q_{i+1}$ et $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$. Désignons par \bar{w} le mot de longueur $r-2$ obtenu en supprimant Q_i et Q_{i+1} dans w , de sorte que $D_{\bar{w}} = D_w$. Alors il résulte immédiatement de la définition de $\lambda(w)$ que les métriques $\lambda(w)$ et $\lambda(\bar{w})$ sur $\det \text{Rp}_* \mathcal{O}_X(D_w)$ coïncident.

4.13.7.- Démonstration de 4.13.4 : invariance par permutation : Le groupe symétrique \mathfrak{S}_r opère sur les mots de longueur r en envoyant $w = Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_r^{\varepsilon_r}$ sur $\sigma w = Q_{\sigma(1)}^{\varepsilon_{\sigma(1)}} \dots Q_{\sigma(r)}^{\varepsilon_{\sigma(r)}}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_r$. On a évidemment $D_{\sigma w} = D_w$ et, pour achever de prouver 4.13.4, il suffit de voir que $\lambda(\sigma w) = \lambda(w)$.

Bien entendu on peut se limiter à la situation "universelle" suivante : le schéma de base T est X^r , et Q_i est la i -ième projection $\text{pr}_i : X^r \rightarrow X$.

Il résulte alors du lemme 4.13.8 ci-dessous que dans ce cas les métriques $\lambda(\sigma w)$ et $\lambda(w)$ sont r -permises (4.7). Elles coïncident donc à une constante multiplicative près, et par suite il suffit de voir qu'elles coïncident en un point de X^r . Ceci nous ramène au cas où les Q_i sont égaux, qui résulte à son tour de l'invariance par contraction. ■

LEMME 4.13.8.- Posons $T = X^n$ ($n \geq 0$) et soit $w = Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_r^{\varepsilon_r}$, où $\varepsilon_i = \pm 1$ et où chacun des $Q_i : X^n \rightarrow X$ est soit constant, soit l'une des projections naturelles. Alors la métrique $\lambda(w)$ sur $\det \text{Rp}_* \mathcal{O}_{X_T}(D_w)$ est n -permise au sens de 4.7.

Démonstration : (par récurrence sur r). L'assertion est triviale si $r=0$. Si $r > 0$, traitons le cas $\varepsilon_r = +1$ (l'autre étant entièrement analogue). On a, par définition de $\lambda(w)$, un isomorphisme de fibrés hermitiens

$$\det \text{Rp}_* \mathcal{O}_{X_T}(D_w) = \det \text{Rp}_* \mathcal{O}_{X_T}(D_{w'}) \otimes Q_r^* \mathcal{O}_{X_T}(D_w)$$

où $w' = Q_1^{\varepsilon_1} \dots Q_{r-1}^{\varepsilon_{r-1}}$. Il suffit donc de montrer que la métrique $Q_r^* \rho_{D_w}$ est n -permise.

Le diviseur D_w est combinaison linéaire de sections constantes $\{a\} \times X^n \subset X \times X^n$ ($a \in X(\mathbb{C})$) et de sections $\Delta_i : X^n \rightarrow X \times X^n$ ($i = 1, \dots, n$) définies

par $\Delta_i(x_1, \dots, x_n) = (x_i, x_1, \dots, x_n)$. Par suite la métrique ρ_{D_w} est $(n+1)$ -permise, ceci parce que ρ_Δ est bipermise. Lorsque $Q_r : X^n \rightarrow X$ est constant, il en résulte bien que $Q_r^* \rho_{D_w}$ est n -permise. Lorsque Q_r est la projection $\text{pr}_i : X^n \rightarrow X$, correspondant à la section $\Delta_i : X^n \rightarrow X \times X^n$, nous sommes ramenés à l'étude des fibrés hermitiens suivants :

$$\Delta_i^* \mathcal{O}_{X \times X^n}(a \times X^n) = \text{pr}_i^* \mathcal{O}_X(a) \quad + \text{métrique } \rho(a)$$

$$j \neq i : \Delta_i^* \mathcal{O}_{X \times X^n}(\Delta_j) = \text{pr}_{ij}^* \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) \quad + \text{métrique } \rho_\Delta$$

$$\Delta_i^* \mathcal{O}_{X \times X^n}(\Delta_i) = \text{pr}_i^* \Delta^* \mathcal{O}_{X \times X}(\Delta) \quad + \text{métrique } \Delta^* \rho_\Delta$$

et chacune de ces métriques est n -permise (4.10). ■

4.13.9.- Démonstration de 4.13.5 : Nous pouvons, dans l'énoncé de 4.13.5, ajouter un même diviseur à D_1 et D_2 (ceci se vérifie encore sur la définition de $\lambda(w)$), et ainsi nous ramener au cas où $\text{deg } D_1 = \text{deg } D_2 = g-1$. Notons que dans ce cas on a $\det R\Gamma(\alpha u) = \det R\Gamma(u)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$ puisque $\chi(\mathcal{O}_X(D_1)) = 0$; nous allons donc montrer en fait que *tout isomorphisme* (non nécessairement hermitien) $u : \mathcal{O}(D_1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(D_2)$ induit une isométrie sur les $\det R\Gamma$.

Fixons un diviseur E de degré assez grand, de telle sorte que D_1 et D_2 soient tous deux de la forme $E - (Q_1 + \dots + Q_n)$ ($Q_i \in X$). Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \times X^n & \xrightarrow{\text{id}_X \times \psi} & X \times J_{g-1} \\ \Delta_i \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow p \\ \downarrow \end{array} \right) & & \downarrow q_2 = \text{seconde projection} \\ X^n & \xrightarrow{\psi} & J_{g-1} \end{array}$$

où :

$$\begin{aligned} p(Q, Q_1, \dots, Q_n) &= (Q_1, \dots, Q_n) \\ \psi(Q_1, \dots, Q_n) &= \text{cl } \mathcal{O}_X(E - Q_1 - \dots - Q_n) \\ \Delta_i(Q_1, \dots, Q_n) &= (Q_i, Q_1, \dots, Q_n) \end{aligned}$$

Soit D le diviseur $E \times X^n - \Delta_1 - \dots - \Delta_n$ sur $X \times X^n$ et soit \mathcal{U}_{g-1} un faisceau universel quelconque sur $X \times J_{g-1}$. Par définition du morphisme ψ , on a

$$\mathcal{O}_{X \times X^n}(D) \simeq (\text{id}_X \times \psi)^* \mathcal{U}_{g-1} \otimes p^*M$$

où M est un faisceau inversible sur X^n . On en déduit un isomorphisme (rapelons que " χ est nul dans les fibres")

$$\det \text{Rp}_* \mathcal{O}_{X \times X^n}(D) \simeq \psi^* \det \text{Rq}_{2*} \mathcal{U}_{g-1} \simeq \psi^* \mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\Theta) \quad (2.4.3.1)$$

et il suffit de voir que la métrique $\lambda(D)$ sur le membre de gauche provient par ψ^* d'une métrique sur $\mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\Theta)$.

Lorsque l'on identifie J_{g-1} à J_0 par une translation convenable, le faisceau $\mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\Theta)$ est *polarisant* (c'est la définition classique de la polarisation canonique ; cf. aussi 2.5). D'autre part, le composé de ψ avec tout plongement $X \rightarrow X^n$ du type utilisé en 4.7 est de la forme $-j_a$ (4.0.1) pour a convenable. En conséquence, si l'on munit $\mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\Theta)$ d'une métrique *permise* ρ (au sens des variétés abéliennes), alors la métrique $\psi^*\rho$ est *n-permise* (cf. 4.10.1 à propos de $-j_a$).

D'autre part il résulte de 4.13.8 que $\lambda(D)$ est également *n-permise*. Quitte à modifier ρ par une constante on peut donc supposer que $\lambda(D) = \psi^*\rho$, ce qui achève la démonstration. ■

La démonstration qui précède a un sous-produit utile :

PROPOSITION 4.14. - Soient n un entier, a un point de X . Considérons sur $X \times J_n$ le faisceau universel $\mathcal{U}_n^{(a)}$ trivialisé sur $\{a\} \times J_n$, et munissons-le de l'unique métrique hermitienne ρ compatible à la trivialisatation et permise sur $X \times \{\xi\}$ pour tout $\xi \in J_n$. Soit $q_2 : X \times J_n \rightarrow J_n$ la seconde projection. Alors la métrique $\lambda(\rho)$ sur $\det \text{Rq}_{2*} \mathcal{U}_n^{(a)}$ est permise.

Démonstration : Lorsque $n = g-1$ cela a été vu à la fin de 4.13.9. Pour n quelconque, posons $D = (g-n-1)a$ sur X : alors on a construit en 2.5 un isomorphisme canonique

$$\det \text{Rq}_{2*} \mathcal{U}_n^{(a)} = T_D^* \mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\Theta) \otimes (\omega_X)_a^{\otimes k}$$

pour k convenable ; le lecteur est alors invité à suivre la démonstration de loc. cit. pour se convaincre que l'isomorphisme ci-dessus est compatible aux métriques, la métrique sur $\mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\Theta)$ étant celle déduite du cas $n = g-1$, et par suite permise. ■

COROLLAIRE 4.14.1. - Soit \mathcal{B} la biextension sur $J \times J$ définie en (2.7.1) Munissons-la de son unique métrique permise compatible à sa trivialisatation à l'origine

de $J \times J$ (ou ce qui revient au même, compatible à sa structure de biextension). Alors si L et M sont deux faisceaux inversibles de degré 0 sur X munis de métriques permises, l'isomorphisme

$$\mathcal{B}_{(c1 L, c1 M)} = \det R\Gamma(L \otimes M)^{-1} \otimes \det R\Gamma(L) \otimes \det R\Gamma(M) \otimes \det R\Gamma(\mathcal{O}_X)^{-1}$$

du lemme 2.7.5 est une isométrie.

Démonstration. Soit a un point de X , et soit $\mathcal{U}^{(a)}$ le faisceau universel sur $X \times J$ trivial sur $\{a\} \times J$. Munissons-le de la métrique "normalisée" définie en 4.14 : on obtient une métrique sur

$$\theta^{(a)} = (\det Rq_{2*} \mathcal{U}^{(a)})^{-1} \quad (2.6.1)$$

qui en vertu de 4.14 est permise. D'autre part, on a un isomorphisme canonique (d'où l'on tire celui de 2.7.5) sur $J \times J$:

$$\mathcal{B} = m^* \theta^{(a)} \otimes \text{pr}_1^* \theta^{(a)-1} \otimes \text{pr}_2^* \theta^{(a)-1} \otimes (\det R\Gamma(\mathcal{O}_X))_{J \times J}^{-1} \quad (2.7.4)$$

et il s'agit donc simplement de comparer la métrique de \mathcal{B} à la métrique sur le second membre déduite de celle de $\theta^{(a)}$. Or ces deux métriques sont permises et il suffit donc de les comparer à l'origine de $J \times J$. Le second membre de l'isomorphisme ci-dessus est canoniquement trivialisé à l'origine et l'isomorphisme est compatible aux trivialisations : il suffit donc de voir qu'il en est de même des métriques, ce qui est clair pour le membre de droite et est vrai aussi pour \mathcal{B} par hypothèse. ■

4.15.- Normes de Faltings et dualité

Soit L un fibré en droites sur X muni d'une métrique permise ρ : on a par dualité de Serre un isomorphisme canonique

$$(4.15.1) \quad \delta_L : \det R\Gamma(L) \xrightarrow{\sim} \det R\Gamma(L^{-1} \otimes \omega_X)$$

Une fois faits les choix de 4.12, les deux membres sont munis canoniquement (grâce à 4.13) de leurs normes de Faltings. On a alors la compatibilité attendue :

PROPOSITION 4.15.2.- L'isomorphisme δ_L de (4.15.1) est une isométrie.

Démonstration

4.15.3 : Cas où $\deg L = g - 1$. Soit \mathcal{U}_{g-1} un faisceau universel sur $X \times J_{g-1}$ et soit $q_2 : X \times J_{g-1} \rightarrow J_{g-1}$ la seconde projection. Considérons l'involution

$$\begin{aligned} \sigma : J_{g-1} &\longrightarrow J_{g-1} \\ \sigma(\xi) &= c1(\omega_X) - \xi \end{aligned}$$

et posons $\Lambda = \det Rq_{2*} \mathcal{U}_{g-1} = \mathcal{O}_{J_{g-1}}(-\Theta)$. On a par dualité de Serre un isomorphisme

$$\delta_{\mathcal{U}_{g-1}} : \Lambda \xrightarrow{\sim} \sigma^* \Lambda$$

de faisceaux inversibles sur J_{g-1} . De plus Λ est muni canoniquement d'une métrique de Faltings (on rappelle que si $\deg L = g-1$, alors $\lambda(L, \rho)$ ne dépend pas de ρ) dont nous avons vu (4.14) qu'elle est *permise*. Par suite $\delta_{\mathcal{U}_{g-1}}$ respecte les métriques à une constante multiplicative près, mais comme pour tout L le composé

$$\det R\Gamma(L) \xrightarrow{\delta_L} \det R\Gamma(L^{-1} \otimes \omega) \xrightarrow{\delta_{L^{-1}} \otimes \omega} \det R\Gamma(L)$$

est l'identité, cette constante vaut 1, C.Q.F.D.

4.15.4.- Pour déduire le cas général du cas de degré $g-1$ il suffit de voir que si Q est un point de X , alors 4.15.2 est vraie pour L si et seulement si elle est vraie pour $L(Q)$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \det R\Gamma(L(Q)) & \xrightarrow{\delta_{L(Q)}} & \det R\Gamma(L^{-1}(-Q) \otimes \omega_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \det R\Gamma(L) \otimes L(Q)_Q & \xrightarrow{\delta_L \otimes r} & \det R\Gamma(L^{-1} \otimes \omega_X) \otimes (L \otimes \omega_X^{-1})_Q \end{array}$$

où les flèches verticales sont déduites de 1.3.3 et où r résulte de l'isomorphisme canonique $\mathcal{O}_X(Q)_Q \xrightarrow{\sim} (\omega_X^{-1})_Q$. Ce dernier est une isométrie par définition de la métrique sur ω_X ; il en est de même des flèches verticales par 4.13 (iii). Il suffit donc de prouver que le diagramme ci-dessus est commutatif, ou même simplement *commutatif au signe près*.

4.15.5.- Le lecteur infatigable ne manquera pas d'établir directement cette dernière assertion et d'identifier le signe. On peut aussi procéder comme suit : le diagramme de 4.15.4 se généralise de façon évidente au cas où :

- . $X \xrightarrow{f} S$ est une courbe semi-stable de genre g sur un schéma S quelconque ;
- . $Q : S \rightarrow X$ est une section contenue dans l'ouvert de lissité de f ;
- . L est un faisceau inversible sur X , de degré total (dans les fibres) d fixé.

Nous pouvons même, en tensorisant L par un faisceau provenant de X , supposer que Q^*L est trivialisé sur S . Les objets $(X \rightarrow S, Q, L)$ (resp. $(X \rightarrow S, Q)$, resp. $X \rightarrow S$) comme ci-dessus forment un champ M''

(resp. M' , resp. M) au-dessus de la catégorie des schémas, et le défaut de commutativité du diagramme de 4.15.4 définit une section globale de $\mathcal{O}_{M'}^{\times}$. Il suffit donc de montrer que $H^0(M', \mathcal{O}_{M'}) = \mathbb{Z}$. Or on a une suite de morphismes naturels

$$M'' \xrightarrow{p''} M' \xrightarrow{p'} M \xrightarrow{p} \text{Spec } \mathbb{Z}$$

qui sont *lisses et surjectifs* : pour p cela résulte de ([D-M], 5.2) ; c'est clair pour p' puisque M' n'est autre que l'ouvert de lissité de la "courbe universelle" sur M ; enfin pour M'' cela résulte de la lissité du foncteur de Picard d'une courbe. De plus chacun de ces morphismes est "génériquement" (i.e au-dessus d'un ouvert schématiquement dense) propre à fibres géométriquement connexes : c'est vrai partout pour p [D-M], et pour p' et p'' c'est vrai au-dessus de l'ouvert de M paramétrant les courbes lisses. Tout ceci entraîne

$$p''^* \mathcal{O}_{M''} = \mathcal{O}_{M'} ; p'^* \mathcal{O}_{M'} = \mathcal{O}_M ; p_* \mathcal{O}_M = \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}$$

d'où finalement $H^0(M', \mathcal{O}_{M'}) = \mathbb{Z}$, C.Q.F.D. ■

5.- L'ACCOUPLLEMENT DE NÉRON-TATE

5.0.- Dans tous les §5 et 6, K désigne un corps de nombres, \mathcal{O} son anneau d'entiers. On note $S_f = \text{Spec } \mathcal{O}$ et l'on désigne par S_∞ l'ensemble des places archimédiennes de K . On pose "formellement" $S = S_f \amalg S_\infty$, et l'on désigne par $\text{PIC}_C(S)$ la catégorie des "faisceaux inversibles compactifiés" (I, 1,2) sur \mathcal{O} , les morphismes étant les isomorphismes de \mathcal{O} -modules respectant les normes aux places à l'infini. On note $\text{Pic}_C(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\text{PIC}_C(S)$.

Pour appliquer les résultats des §3 et 4, on fixe de plus, pour chaque $\sigma \in S_\infty$, un plongement continu $\sim_\sigma: K_\sigma \hookrightarrow \mathbb{C}$. Le choix des \sim_σ n'a d'ailleurs pas d'incidence sur la suite, car on aurait pu, dans les §3 et 4, se placer sur "un corps local isomorphe à \mathbb{C} ". Pour tout schéma X au-dessus de $\text{Spec } \mathcal{O}$, on pose $X_\sigma = X_{K_\sigma} \otimes_{\sim_\sigma} \mathbb{C}$.

5.1.- Soit A_K une variété abélienne sur K et soit $A \xrightarrow{f} S_f$ le modèle de Néron de A_K sur S_f , qui est un S_f -schéma en groupes lisse, séparé et de type fini sur S_f . De même soit $A^t \xrightarrow{f^t} S_f$ le modèle de Néron de la variété duale A_K^t de A_K et désignons par A^0 et $A^{t,0}$ les composantes neutres respectives de A et A^t (de sorte que A^0 , par exemple, a pour fibres les composantes neutres des fibres de A sur S_f , et est un sous-schéma en groupes ouvert de A).

Notons $U \subset S_f$ le plus grand ouvert de S_f au-dessus duquel A et A^t ont "bonne réduction" (i.e sont des schémas abéliens). Alors A_U^t est le schéma abélien dual de A_U , et l'on dispose du faisceau de Poincaré \mathcal{P}_U sur $A_U \times A_U^t$ et de sa structure naturelle de biextension. Il résulte alors de 2.8.2 que \mathcal{P}_U se prolonge en une unique biextension sur $A^0 \times A^{t,0}$, que nous noterons \mathcal{P}^0 .

Enfin on fixe un entier $N \geq 1$ tel que la multiplication par N dans A (resp. A^t) se factorise par A^0 (resp. $A^{t,0}$). Un tel entier existe car pour tout point fermé $s \in S_f$, le groupe des composantes connexes de A_s (resp. A_s^t) est fini, et il est trivial pour presque tout s .

Pour tout $\sigma \in S_\infty$, le faisceau \mathcal{P}_σ sur $A_\sigma \times A_\sigma^t$ déduit de \mathcal{P}_U (ou de \mathcal{P}^0) est muni d'une métrique permise canonique (§3) : on rappelle en effet que \mathcal{P}_σ est canoniquement trivialisé à l'origine de $A_\sigma \times A_\sigma^t$, et il existe donc une unique métrique permise sur \mathcal{P}_σ compatible à cette trivialisation ; c'est aussi, comme il résulte des propriétés générales des métriques permises, l'unique métrique (permise ou non) compatible à la structure de biextension de \mathcal{P}_σ .

5.2.- Avec les notations de 5.0 et 5.1, soient d'abord $x \in A^0(S_f)$ et $y \in A^{t,0}(S_f)$.

Considérons le \mathcal{O} -module inversible $(x,y)^*(\mathcal{P}^0)$: grâce aux métriques permises canoniques sur les \mathcal{P}_σ ($\sigma \in S_\infty$), il est canoniquement muni de normes hermitiennes aux places à l'infini. Il définit donc un objet de $\text{PIC}_C(S)$, que nous appellerons *hauteur géométrique* de (x,y) , et qui sera noté

$$(5.2.1) \quad \text{HG}(x,y) = (x,y)^*(\mathcal{P}^0) + \text{normes canoniques}.$$

Nous noterons de plus

$$(5.2.2) \quad \text{hg}(x,y) = \text{classe dans Pic}_C(S) \text{ de } \text{HG}(x,y).$$

La structure de biextension de \mathcal{P}^0 , et sa compatibilité aux métriques à l'infini fournit pour $x,y \in A^0(S_f)$ et $z,t \in A^{t,0}(S_f)$ des isomorphismes canoniques dans $\text{PIC}_C(S)$

$$(5.2.3) \quad \begin{aligned} \text{HG}(x,z+t) &= \text{HG}(x,z) \otimes \text{HG}(x,t) \\ \text{HG}(x,+y,z) &= \text{HG}(x,z) \otimes \text{HG}(y,z) \end{aligned}$$

5.3.- Soient maintenant $x \in A_K(K) = A(S_f)$, $y \in A_K^t(K) = A^t(S_f)$

Comme \mathcal{P}_U ne se prolonge pas en général à $A \times A^t$, on ne peut définir $\text{HG}(x,y)$ comme objet de $\text{PIC}_C(S)$ (on peut toutefois le faire lorsque $x \in A^0(S_f)$ ou $y \in A^{t,0}(S_f)$, cf. remarque 2.8.2.3).

Cependant, l'entier N étant choisi comme en 5.1, on a $Nx \in A^0(S_f)$ et $Ny \in A^{t,0}(S_f)$ de sorte que l'on peut définir $\text{HG}(Nx,Ny)$ (objet de $\text{PIC}_C(S)$) et $\text{hg}(Nx,Ny)$ (élément de $\text{Pic}_C(S)$). On pose alors (un peu abusivement)

$$(5.3.1) \quad \text{hg}(x,y) = \frac{1}{N^2} \text{hg}(Nx,Ny) \in \text{Pic}_C(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

La bilinéarité de HG entraîne que l'application

$$(5.3.2) \quad \begin{aligned} A(K) \times A^t(K) &\longrightarrow \text{Pic}_C(S) \otimes \mathbb{Q} \\ (x,y) &\longmapsto \text{hg}(x,y) \end{aligned}$$

est \mathbb{Z} -bilinéaire et ne dépend pas de l'entier N choisi en 5.1.

Remarque 5.3.3 : L'entier N étant fixé (par exemple minimum), notons $\Sigma = S_f - U$ l'ensemble des places de mauvaise réduction de A . Alors on peut définir $\text{HG}(x,y)$ comme objet de la catégorie $\text{PIC}_C(S,\Sigma,N^2)$ qui suit : un objet de $\text{PIC}_C(S,\Sigma,N^2)$ est la donnée

- (i) d'un objet L de $\text{PIC}_C(U)$ (faisceau inversible sur U + normes aux places à l'infini);
- (ii) d'un objet M de $\text{PIC}_C(S)$;

(iii) d'un isomorphisme $M_U \xrightarrow{\sim} L^{\otimes N^2}$ d'objets de $\text{PIC}_c(U)$.

L'objet $\text{HG}(x,y)$ annoncé s'obtient en prenant $L = (x_U, y_U)^*(\mathcal{P}_U)$,
 $M = (N_x, N_y)^*(\mathcal{P}^{\otimes 0})$, l'isomorphisme (iii) résultant de la structure de biextension
de \mathcal{P}_U . L'intérêt de ce genre de constructions est qu'il permet de raisonner
localement sur la base.

THÉORÈME 5.4. - *L'application*

$$\begin{array}{ccc} A_K(K) \times A_K^t(K) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \text{deg}_S \text{hg}(x,y) \end{array}$$

est l'accouplement de Néron-Tate de A .

(Bien entendu, deg_S désigne le prolongement naturel à $\text{Pic}_c(S) \otimes \mathbb{Q}$ du degré défini en I, Cor. Prop. 1.1).

La démonstration est donnée dans [MB], chapitre III ; on y trouvera plus généralement une construction géométrique de la hauteur de Néron-Tate associée à un faisceau inversible L_K sur une K -variété abélienne B_K , le cas particulier envisagé ici étant celui où $B_K = A_K \times A_K^t$ et $L_K = \mathcal{P}_K$.

6.- APPLICATIONS AUX SURFACES ARITHMÉTIQUES

On garde les notations de 5.0.

DÉFINITION 6.0.- Une *surface arithmétique* sur S est la donnée

(i) d'un S_f -schéma $X \xrightarrow{f} S_f$, projectif et plat sur S_f , dont les fibres sont des courbes semi-stables de genre $g \geq 1$ et dont la fibre générique est lisse ;

(ii) pour chaque $\sigma \in S_\infty$, d'une *métrique bipermissible* $\rho_{\Delta, \sigma}$ (4.7) sur

$\mathcal{O}_{X_\sigma \times X_\sigma}(\Delta_\sigma)$ où $\Delta \subset X \times_{S_f} X$ est la diagonale.

Remarques 6.0.1 : a) on ne suppose pas ici que X est un schéma régulier; nos hypothèses impliquent toutefois qu'il est normal.

b) Arakelov et Faltings fixent les $\rho_{\Delta, \sigma}$ en imposant la condition 4) de 4.11.4. Le choix particulier des $\rho_{\Delta, \sigma}$ n'a pas d'importance dans ce § ; il en aura, par contre, dans l'exposé III.

Dans tout ce qui suit, on fixe une surface arithmétique $(X, (\rho_{\Delta, \sigma}))$ sur S . On désigne par $\text{PIC}_C(X)$ la catégorie des \mathcal{O}_X -modules inversibles compactifiés $(I, 1, 2)$, c'est-à-dire des \mathcal{O}_X -modules inversibles L sur X munis, pour chaque $\sigma \in S_\infty$, d'une *métrique permise* (4.5) sur le faisceau inversible L_σ sur X_σ . Notons que cette catégorie ne dépend pas du choix des $\rho_{\Delta, \sigma}$. On note $\text{Pic}_C(X)$ le groupe des classes d'isomorphie de ses objets.

Pour tout $L \in \text{ob PIC}_C(X)$ nous noterons L_f le \mathcal{O}_X -module inversible sous-jacent ("partie finie" de L) ; enfin le *degré* de L , noté $\text{deg } L$, est par définition le degré de L_f sur la fibre générique X_K .

6.1.- Un *diviseur compactifié* sur X (I, 1.1) est par définition de la forme $D = D_f + D_\infty$ où D_f est un diviseur de Cartier sur le schéma X , et D_∞ une combinaison linéaire formelle $\sum_{\sigma \in S_\infty} \lambda_\sigma [X_\sigma]$, où $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$. On note $\text{Div}_C(X)$

le groupe de ces diviseurs. Pour $D \in \text{Div}_C(X)$ comme ci-dessus, on définit un objet $\mathcal{O}_X^C(D)$ de $\text{PIC}_C(X)$ de la façon suivante : on a par définition

$$\mathcal{O}_X^C(D) = \mathcal{O}_X^C(D_f) \otimes \mathcal{O}_X^C(D_\infty) \quad , \text{ et } :$$

$\mathcal{O}_X^C(D_f)$ est le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D_f)$ sur X muni, pour chaque $\sigma \in S_\infty$, de la métrique $\rho_{D_f, \sigma}$ sur $\mathcal{O}_{X_\sigma}(D_{f, \sigma})$: ici $D_{f, \sigma}$ est le diviseur induit sur X_σ par D_f , et $\rho_{D_f, \sigma}$ est déduite de $\rho_{\Delta, \sigma}$ selon le procédé de 4.11.1 ;

. Par définition $\mathcal{O}_X^C(D_\infty) = f^* \mathcal{O}_S^C(\sum_{\sigma} \lambda_\sigma [\sigma])$: ici $\mathcal{O}_S^C(\sum_{\sigma} \lambda_\sigma [\sigma])$ est l'objet de $\text{PIC}_C(S)$ associé au diviseur compactifié $\sum_{\sigma} \lambda_\sigma [\sigma]$ sur S . Explicitement,

$\mathcal{O}_X^C(D_\infty)$ est le fibré trivial sur X , muni, à la place σ , de la métrique naturelle multipliée par $e^{-\lambda\sigma}$.

On voit donc que le faisceau inversible sur X sous-jacent à $\mathcal{O}_X^C(D)$ n'est autre que $\mathcal{O}_X^C(D_f)$. De plus, il est immédiat que $\mathcal{O}_X^C(D_1 + D_2)$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_X^C(D_1) \otimes \mathcal{O}_X^C(D_2)$ (cf. 4.11.1(ii)).

6.2.- Inversement soit $L = (L_f, (\rho_\sigma)_{\sigma \in S_\infty})$ un objet de $\text{PIC}_C(X)$, et soit s une section rationnelle non identiquement nulle de L_f sur X . On définit alors le diviseur compactifié de s comme

$$\text{div}^C(s) = \text{div}_f^C(s) + \text{div}_\infty^C(s)$$

de la façon suivante : la "partie finie" $\text{div}_f^C(s)$ est le diviseur $\text{div}(s)$ de s sur X au sens habituel, de sorte que s induit un isomorphisme

$$\mathcal{O}_X^C(\text{div}(s)) \xrightarrow{\sim} L_f.$$

On choisit alors la partie à l'infini $\text{div}_\infty^C(s)$ de manière que l'isomorphisme ci-dessus donne une *isométrie*

$$\mathcal{O}_X^C(\text{div}_f^C(s) + \text{div}_\infty^C(s)) \xrightarrow{\sim} L.$$

On rappelle que le faisceau inversible sous-jacent au premier membre s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_X^C(\text{div}(s))$; le fait qu'il existe un unique $\text{div}_\infty^C(s)$ ayant la propriété cherchée résulte du fait que le rapport de deux métriques permises est constant, et que tensoriser par $\mathcal{O}_X^C(\lambda[X_\sigma])$ équivaut à multiplier par $e^{-\lambda}$ la métrique à la place σ .

Remarque 6.3.- La correspondance que nous venons d'établir entre objets de $\text{PIC}_C(X)$ et diviseurs compactifiés dépend des métriques bipermises $\rho_{\Delta, \sigma}$ choisies. Toutefois il résulte de 4.11.2 que si le diviseur compactifié D est de degré 0 alors $\mathcal{O}_X^C(D)$ ne dépend pas des $\rho_{\Delta, \sigma}$. Pour D quelconque, la variation est la suivante : posons $\rho'_{\Delta, \sigma} = \alpha_\sigma \rho_{\Delta, \sigma}$ pour tout $\sigma \in S_\infty$, avec $\alpha_\sigma > 0$. Notons $\mathcal{O}_X^C(D)'$ le faisceau associé à D au moyen des $\rho'_{\Delta, \sigma}$, et posons

$$D_0 = \sum_{\sigma \in S_\infty} (\log \alpha_\sigma) [X_\sigma].$$

Alors on vérifie (en utilisant 4.11.2) que

$$\mathcal{O}_X^C(D)' = \mathcal{O}_X^C(D - (\text{deg } D) D_0).$$

6.4.- Si aucune confusion n'en résulte, nous noterons désormais $\mathcal{O}_X^C(D)$ au lieu de $\mathcal{O}_X^C(D)$, pour $D \in \text{Div}_C(X)$.

De même, le faisceau dualisant relatif ω_{X/S_f} est muni de façon naturelle,

pour chaque $\sigma \in S_\infty$, d'une métrique permise $\rho_{\omega, \sigma}$ (4.11.3). Nous noterons encore $\omega_{X/S}$ (plutôt que $\omega_{X/S}^c$) l'objet de $\text{PIC}_c(X)$ ainsi obtenu, et nous poserons

$$(6.4.1) \quad \omega_X = \omega_{X/S} \otimes f^* \omega_S$$

où $\omega_S \in \text{ob PIC}_c(S)$ désigne le \mathcal{O}_S -module dualisant $\omega_{\mathcal{O}_S}$ muni des normes définies en I,

6.5.- Pour chaque $\sigma \in S_\infty$, choisissons une norme hermitienne sur $\det \text{Rf}(\mathcal{O}_{X_\sigma}) = \Lambda^g H^1(X_\sigma, \mathcal{O}_{X_\sigma})$. Pour tout $L = (L_f, (\rho_\sigma)) \in \text{ob PIC}_c(X)$, le \mathcal{O} -module inversible $\det \text{Rf}_* L_f$ peut être muni, pour chaque $\sigma \in S_\infty$, de sa "norme de Faltings" (4.13). L'objet de $\text{PIC}_c(X)$ ainsi obtenu sera noté $\det \text{Rf}_* L$. Pour L et $M \in \text{ob PIC}_c(X)$, nous poserons dans ces conditions

$$(6.5.1) \quad \langle L, M \rangle = \det \text{Rf}_*(L \otimes M) \otimes (\det \text{Rf}_* L)^{-1} \otimes (\det \text{Rf}_* M)^{-1} \otimes \det \text{Rf}_* \mathcal{O}_X.$$

(cf. (2.9.3))- On obtient ainsi un objet de $\text{PIC}_c(S)$, et la remarque 4.13.1.b) implique qu'il ne dépend pas du choix des normes sur les $\det \text{Rf}(\mathcal{O}_{X_\sigma})$. Bien entendu, lorsque nous aurons à développer $\langle L, M \rangle$ suivant la formule (6.5.1) nous supposons implicitement que de telles normes ont été choisies.

DÉFINITION 6.6.- Pour L et $M \in \text{ob PIC}_c(X)$, on appelle *intersection d'Arakelov* de L et M le réel

$$(L.M) = \text{deg}_S \langle L, M \rangle \quad (\text{cf. (6.5.1)})$$

le degré étant celui de I, .

6.7.- Il s'agit maintenant de vérifier que (L.M) ainsi défini coïncide avec la notion introduite par Arakelov (I,). Il est d'abord clair sur la définition que (L.M) = (M.L) et que (L, \mathcal{O}_X) = 0. D'autre part si K' est une extension finie de K d'anneau d'entiers \mathcal{O}' , on dispose de la surface arithmétique $X' \xrightarrow{f'} S'$ obtenue par changement de base (bien entendu, les métriques $\rho_{\Delta, \sigma'}$ (pour $\sigma' \in S'_\infty$, Δ = diagonale de $X' \times_S X'$) sont celles déduites des $\rho_{\Delta, \sigma}$). Si $\pi : S' \rightarrow S$ et $\pi' : X' \rightarrow X$ désignent les projections naturelles alors on a un isomorphisme canonique

$$(6.7.1) \quad \langle \pi'^* L, \pi'^* M \rangle \xrightarrow{\sim} \pi^* \langle L, M \rangle$$

d'où

$$(6.7.2) \quad (\pi'^* L, \pi'^* M) = [K' : K] (L.M).$$

Pour faire le lien avec Arakelov, on se propose de calculer $(L, \mathcal{O}_X(D))$ pour

$D \in \text{Div}_C(X)$.

DÉFINITION 6.7.3.- Notons $\text{CH}_1^C(X)$ le groupe des "1-cycles compactifiés" de X , formé des combinaisons linéaires formelles $Z = Z_f + Z_\infty$ où Z_f est un cycle de dimension 1 sur X et Z_∞ une combinaison linéaire formelle $\sum_{\sigma \in S_\infty} \lambda_\sigma [X_\sigma]$ (où $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}$) .

Pour $L \in \text{ob PIC}_C(X)$ et $Z \in \text{CH}_1^C(X)$ on définit un réel $L \wedge Z$ par les conditions suivantes :

(i) $L \wedge Z$ est additif en Z .

(ii) Si $Z = \lambda Z_\sigma$ où Z_σ est un cycle intègre contenu dans la fibre X_v ($v \in S$) avec $\lambda \in \mathbb{Z}$ (si $v \in S_f$) ou $\lambda \in \mathbb{R}$ (si $v \in S_\infty$) , alors

$$L \wedge Z = \lambda \varepsilon_v \deg_{\kappa(v)} (L|_{Z_\sigma})$$

où $\kappa(v)$ désigne le corps résiduel de v , et où

$$\varepsilon_v = \log \# \kappa(v) \quad (v \in S_f)$$

$$\varepsilon_v = 1 \quad (v \text{ réelle})$$

$$\varepsilon_v = 2 \quad (v \text{ complexe}).$$

(iii) Si Z est un cycle intègre fini sur S_f , alors

$$L \wedge Z = \deg_Z (L|_Z) .$$

(Ceci a un sens car Z est le spectre d'un ordre d'un corps de nombres, et $L|_Z$ est de façon naturelle un objet de $\text{PIC}_C(Z)$) .

On vérifie immédiatement que si D_σ est un diviseur compactifié sur S et si $Z = f \cdot D_\sigma$ (définition évidente) alors

$$(6.7.3.1) \quad L \wedge Z = (\deg L) (\deg_S D_\sigma) .$$

Il est d'autre part immédiat que $L \wedge Z$ est linéaire en L , et que dans une situation de "changement de base" (notation de 6.7) on a

$$(6.7.3.2) \quad \pi^* L \wedge \pi^* Z = [K' : K] (L \wedge Z) .$$

Bien entendu, le groupe $\text{Div}_C(X)$ s'identifie à un sous-groupe de $\text{CH}_1^C(X)$, de sorte que l'on peut définir $L \wedge D$ pour $D \in \text{Div}_C(X)$.

6.7.4.- Calculs locaux.- Soit $Z = Z_f + Z_\infty \in \text{CH}_1^C(X)$ et soit $D \in \text{Div}_C(X)$ tel que $\Sigma := \text{Supp } D_f \cap \text{Supp } Z_f$ soit fini et contenu dans l'ouvert de régularité X_{reg} de X . Appliquant la définition 6.7.3, on obtient une décomposition

$$(6.7.4.1) \quad \mathcal{O}_X(D) \wedge Z = \sum_{x \in \Sigma} [D.Z]_x + \sum_{\sigma \in S_\infty} [D.Z]_\sigma$$

où les différents termes sont donnés par les formules suivantes :

- pour $x \in \Sigma$, soit $\prod_i \varphi_i^{m_i}$ (resp. $\prod_j \psi_j^{n_j}$) une équation locale de D (resp. Z) au point x , avec φ_i et $\psi_j \in \mathcal{O}_{X,x}$, m_i et $n_j \in \mathbb{Z}$. Alors

$$(6.7.4.2) \quad [D.Z]_x = \sum_{i,j} m_i n_j \log \# (\mathcal{O}_{X,x} / (\varphi_i, \psi_j))$$

- pour $\sigma \in S_\infty$ on a , en posant $D_\sigma = \sum \lambda_\sigma [X_\sigma]$ et $Z_\sigma = \sum \mu_\sigma [X_\sigma]$:

$$(6.7.4.3) \quad [D.Z]_\sigma = (\deg D) \varepsilon_\sigma \mu_\sigma + (\deg Z) \varepsilon_\sigma \lambda_\sigma + [D_f \cdot Z_f]_\sigma$$

et le terme $[D_f \cdot Z_f]_\sigma$ se calcule comme suit : D_f et Z_f induisent respectivement sur X_σ des diviseurs $\sum_i m_i P_i$, $\sum_j n_j Q_j$ à supports disjoints ; soit d'autre part $G_\sigma = \rho_{\Delta, \sigma}(s_{\Delta_\sigma})$ la fonction sur $X_\sigma \times X_\sigma - \Delta_\sigma$ définie en (4.11.4.1). Alors

$$(6.7.4.4) \quad [D_f \cdot Z_f]_\sigma = \varepsilon_\sigma \sum_{i,j} - \log G_\sigma(P_i, Q_j) .$$

On vérifie ces formules en se ramenant au cas où Z est intègre et en utilisant la section rationnelle canonique s_D de $\mathcal{O}_X(D)$ et le "diviseur" qu'elle induit sur Z , en un sens à préciser dans chaque cas.

Les formules ci-dessus montrent en tout cas que, si Z est aussi un diviseur de Cartier, on a

$$(6.7.4.5) \quad \mathcal{O}_X(D) \wedge Z = \mathcal{O}_X(Z) \wedge D$$

(on rappelle que la fonction G_σ est symétrique , cf. (4.11.4.2)).

Cela étant, le résultat suivant justifie la définition 6.6 :

PROPOSITION 6.8.- Pour tout $L \in \text{ob PIC}_c(X)$ et tout $D \in \text{Div}_c(X)$, on a

$$(L \cdot \mathcal{O}_X(D)) = L \wedge D .$$

En particulier le produit $(L.M)$ est bilinéaire (car linéaire en L et symétrique).

Démonstration : On a d'abord le lemme utile (et trivial) :

LEMME 6.8.1.- Soit L un faisceau inversible (ordinaire) sur X et soit Σ un ensemble fini de points (non nécessairement fermés) de X . Alors L admet une section rationnelle s telle que $\text{Supp}(\text{div}(s)) \cap \Sigma = \emptyset$.

Démonstration : Comme f est projectif et S_f affine, il existe un ouvert affine U de X contenant Σ ; on peut donc trouver une section globale de L sur U , non nulle en chaque point de Σ . ■

LEMME 6.8.2.- Soient L et $M \in \text{ob PIC}_C(X)$, et soit $D \in \text{Div}_C(X)$ tel que $\text{Supp}(D_f)$ soit contenu dans l'ouvert de lissité de f . Alors

$$(L.M \otimes \mathcal{O}_X(D)) = (L.M) + L \wedge D .$$

Démonstration : Vu nos hypothèses, les composantes de D_f sont encore des diviseurs de Cartier. Nous sommes donc ramenés à deux cas :

(a) $D = f^*D_0$ où $D_0 \in \text{Div}_C(S)$. Posant $M_0 = \mathcal{O}_S(D_0) \in \text{ob PIC}_C(S)$, il suffit de voir d'après (6.7.3.1) que l'on a un isomorphisme

$$\langle L, M \otimes f^*M_0 \rangle = \langle L, M \rangle \otimes M_0^{\otimes \deg L} .$$

Cette formule est elle-même conséquence de

$$\det \text{Rf}_*(N \otimes f^*M_0) = \det \text{Rf}_*N \otimes M_0^{\otimes \chi} X/S^{(N)}$$

pour tout $N \in \text{ob PIC}_C(X)$ (en appliquant la définition de $\langle L, M \rangle$).

On a déjà (1.1.7) un tel isomorphisme entre les \mathcal{O} -modules inversibles sous-jacents; le fait qu'il soit compatible aux normes de Faltings résulte de 4.13.1(a).

(b) D est intègre et fini sur S : dans ce cas on se ramène (par changement de base) au cas où D est combinaison linéaire de sections de f (toujours contenues dans l'ouvert de lissité), puis au cas où $D = E(S)$ est une telle section. On a alors, pour tout $N \in \text{ob PIC}_C(X)$, un isomorphisme canonique (1.3.3)

$$\det \text{Rf}_*(N \otimes \mathcal{O}_X(E)) = \det \text{Rf}_*N \otimes E^*(N \otimes \mathcal{O}_X(E))$$

qui est compatible aux normes aux places à l'infini, en vertu de 4.13 (iii).

Appliquant la définition de $\langle L, M \rangle$ on en tire

$$\langle L, M \otimes \mathcal{O}_X(E) \rangle = \langle L, M \rangle \otimes E^*L$$

d'où le lemme, puisque $L \wedge E = \deg_S E^*L$. ■

6.8.3.- Fin de la démonstration de 6.8 : Soient L et D comme dans l'énoncé. Alors, d'après le lemme 6.8.1, L est de la forme $\mathcal{O}_X(D')$, où D'_f est contenu dans le lieu lisse de f et est sans composantes communes avec D_f (appliquer le lemme avec $\Sigma = \text{Sing}(f) \cup \{\text{points maximaux de } \text{Supp}(D_f)\}$). On a donc

$$\begin{aligned}
 (L \cdot \mathcal{O}_X(D)) &= (\mathcal{O}_X(D') \cdot \mathcal{O}_X(D)) \\
 &= (\mathcal{O}_X(D) \cdot \mathcal{O}_X(D')) \quad (\text{symétrie}) \\
 &= \mathcal{O}_X(D) \wedge D' \quad (6.8.2, \text{ avec } M = \mathcal{O}_X) \\
 &= \mathcal{O}_X(D') \wedge D \quad (6.7.4.5) \\
 &= L \wedge D \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

COROLLAIRE 6.9. - Soit $X' \longrightarrow \text{Spec } \mathcal{O}$ une autre surface arithmétique et soit $\pi : X' \longrightarrow X$ un morphisme birationnel compatible aux données de 6.0 (ii) sur $X_{\mathcal{O}}$ et $X'_{\mathcal{O}}$ pour $\sigma \in S_{\infty}$. Si L_1 et $L_2 \in \text{ob PIC}_C(X)$, alors

$$(L_1 \cdot L_2)' = (\pi^* L_1 \cdot \pi^* L_2) \quad .$$

Démonstration : le morphisme π est un isomorphisme en dehors d'un ensemble fini Σ de points fermés de X . Grâce au lemme 6.8.1 on peut donc supposer que $L = \mathcal{O}_X(D)$, où D vérifie $\text{Supp}(D_f) \cap \Sigma = \emptyset$. Le corollaire est alors trivial, compte tenu de 6.8. \blacksquare

Remarques 6.10. -

a) Bien entendu, derrière la bilinéarité de $(L \cdot M)$ se cache celle de $\langle L, M \rangle$ mentionnée en 2.9 (et qui est compatible aux normes de Faltings). Un avantage de la définition "homologique" 6.6 est que $\langle L, M \rangle$ n'est pas un élément de $\text{Pic}_C(S)$ mais bien un *objet* de $\text{PIC}_C(S)$ (du moins "à isomorphisme unique près"). Ceci permet, en particulier, de raisonner localement sur S pour certaines questions. Bien entendu, la signification géométrique de $(L \cdot M)$ apparaît mieux (au moins à distance finie) dans les calculs locaux de 6.7.4.

b) Lorsque l'on change les métriques $\rho_{\Delta, \sigma}$ en $\rho'_{\Delta, \sigma} = \alpha_{\sigma} \rho_{\Delta, \sigma}$, on obtient une nouvelle théorie des intersections $(\cdot)'$. On vérifie alors que

$$(6.10.1) \quad (L, M)' = (L \cdot M) + (\deg L) (\deg M) \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \log \alpha_{\sigma}$$

en utilisant par exemple 4.13.1.c).

De même, si D_1 et $D_2 \in \text{Div}_C(X)$, posons $[D_1 \cdot D_2] = (\mathcal{O}_X(D_1) \cdot \mathcal{O}_X(D_2))$.

Alors les $\rho'_{\Delta, \sigma}$ donnent une nouvelle intersection $[D_1 \cdot D_2]'$, et l'on a

$$(6.10.2) \quad [D_1 \cdot D_2]' = [D_1 \cdot D_2] - (\deg D_1) (\deg D_2) \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma} \log \alpha_{\sigma} ;$$

on obtient cette formule soit par (6.10.1) et 6.3, soit directement à partir des calculs locaux 6.7.4.

THÉORÈME 6.11.- (formule d'adjonction). Soit $E : S_{\mathbb{F}} \rightarrow X$ une section contenue dans l'ouvert de lissité. Alors on a un isomorphisme canonique dans $\text{PIC}_{\mathbb{C}}(S)$

$$E^* \omega_{X/S} = E^* \mathcal{O}_X(-E)$$

et en particulier (en prenant les degrés)

$$(\omega_{X/S} \cdot \mathcal{O}_X(E)) = -(\mathcal{O}_X(E) \cdot \mathcal{O}_X(E)) = -[E \cdot E]$$

(notation de 6.10.b)).

Démonstration : On obtient, par la formule d'adjonction classique, un isomorphisme canonique entre les \mathcal{O} -modules inversibles sous-jacents. Le fait qu'il soit compatible aux normes résulte de la définition des métriques sur $\omega_{X/S}$, qui sont telles que pour tout $\sigma \in S_{\infty}$ et tout $a \in X_{\sigma}$, l'isomorphisme naturel (4.11.3.1)

$$(\omega_{X_{\sigma}})_a = (\mathcal{O}_{X_{\sigma}}(-a))_a$$

soit une isométrie. ■

Notons que présentée ainsi, la formule d'adjonction est tautologique. Le point non trivial est le fait que les métriques sur les $\omega_{X_{\sigma}}$ sont permises (4.10), donc que $\omega_{X/S}$ est bien un objet de $\text{PIC}_{\mathbb{C}}(X)$.

6.12.- Le théorème de Riemann-Roch (préliminaires).

Définition 6.12.1.- Un \mathcal{O} -module compactifié M est la donnée d'un \mathcal{O} -module de type fini $M_{\mathbb{F}}$ et, pour chaque $\sigma \in S_{\infty}$, d'une norme hermitienne sur $M_{\sigma} := M_{\mathbb{F}} \otimes_{\mathcal{O}_{\sigma}} \mathbb{C}$ (notation de 6.0).

(De façon équivalente, on aurait pu choisir sur chaque $M \otimes_{\mathcal{O}_{\sigma}} K_{\sigma}$ une norme euclidienne (resp. hermitienne) pour σ réelle (resp. complexe)).

Pour M comme ci-dessus, on a un élément de volume (réel) canonique sur $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, obtenu en décomposant $M_{\mathbb{R}}$ en $\bigoplus_{\sigma \in S_{\infty}} M \otimes_{\mathcal{O}_{\sigma}} K_{\sigma}$, et en normalisant les volumes de la façon suivante : pour chaque σ , si (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de $M \otimes_{\mathcal{O}_{\sigma}} K_{\sigma}$, alors le pavé

$$\{\sum x_i e_i \mid 0 \leq x_i \leq 1\} \quad (\sigma \text{ réelle})$$

$$\{\sum z_i e_i \mid 0 \leq \text{Re } z_i \leq 1, \quad 0 \leq \text{Im } z_i \leq 1\} \quad (\sigma \text{ complexe})$$

est de volume 1 (peu importe la définition de $\text{Im } z_i$).

On pose alors, généralisant I, :

$$(6.12.2) \quad \chi(M) = -\log \text{vol}(M_{\mathbb{R}}/\bar{M}_{\mathbb{F}}) + \log \#(M_{\mathbb{F}})_{\text{tors}}$$

où $(M_{\mathbb{F}})_{\text{tors}}$ est le sous-module de torsion de $M_{\mathbb{F}}$, et $\bar{M}_{\mathbb{F}} = M_{\mathbb{F}} / (M_{\mathbb{F}})_{\text{tors}}$.

Une suite exacte de \mathcal{O} -modules compactifiés M', M, M'' est par définition une suite exacte

$$0 \longrightarrow M'_f \longrightarrow M_f \longrightarrow M''_f \longrightarrow 0$$

des \mathcal{O} -modules sous-jacents, induisant en chaque place à l'infini une suite exacte d'espaces hermitiens. L'existence d'une telle suite exacte implique que

$$(6.12.3) \quad \chi(M) = \chi(M') + \chi(M'').$$

6.12.4.- Pour tout \mathcal{O} -module compactifié M , il existe une "résolution" de M , i.e. une suite exacte

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de \mathcal{O} -modules compactifiés, où $(P_1)_f$ et $(P_0)_f$ sont localement libres.

On pose alors

$$(6.12.4.1) \quad \det M = (\det P_0) \otimes (\det P_1)^{-1}$$

où $\det P_0$ et $\det P_1$ sont munis des normes déduites de celles de P_0 et P_1 .

On obtient ainsi un objet de $\text{PIC}_c(S)$ qui ne dépend pas, à isomorphisme unique près, de la résolution choisie, et qui est "additif" pour les suites exactes, en un sens évident.

Toutes ces assertions résultent essentiellement de [K-M], l'introduction des normes hermitiennes ne posant pas de difficultés.

On pose

$$(6.12.5) \quad \deg M = \deg (\det M)$$

et l'on vérifie que l'on a

$$(6.12.6) \quad \begin{aligned} \chi(M) &= \chi(\det M) + (\text{rg } M - 1) \chi(\mathcal{O}) \\ &= \deg M + (\text{rg } M) \chi(\mathcal{O}) \quad (\text{Riemann-Roch sur } \mathcal{O}). \end{aligned}$$

Remarque 6.12.7 : Nous appelons ici $\deg M$ ce que Faltings [F] note à tort $\chi(M)$.

6.12.8.- Revenons à la surface arithmétique $X \xrightarrow{f} S$. Si $L \in \text{ob } \text{PIC}_c(X)$, on est tenté de poser

$$(6.12.8.1) \quad \chi(X, L) = \chi(f_*L) - \chi(R^1f_*L).$$

Il faut, pour que cela ait un sens, munir f_*L et R^1f_*L de normes aux places à l'infini. Or il résulte de [K-M] que l'on a un isomorphisme canonique de \mathcal{O} -modules inversibles

$$(6.12.8.2) \quad \det Rf_*L = \det(f_*L) \otimes (\det(R^1f_*L))^{-1}$$

Supposons choisie , pour tout $\sigma \in S_\infty$, une norme sur $\det \text{Rf}(\mathcal{O}_{X_\sigma})$. Alors $\det \text{Rf}_*L$ devient un objet de $\text{PIC}_C(S)$.

On peut dès lors munir f_*L et R^1f_*L de normes à l'infini telles que (6.12.8.2) soit un isomorphisme dans $\text{PIC}_C(S)$. De cette façon (6.12.8.1) acquiert un sens ; d'autre part (6.12.6) donne alors

$$(6.12.8.3) \quad \begin{aligned} \chi(X,L) &= \deg(f_*L) - \deg(R^1f_*L) + \chi_{X/S}(L) \chi(\mathcal{O}) \\ &= \deg(\det \text{Rf}_*L) + \chi_{X/S}(L) \chi(\mathcal{O}) \end{aligned}$$

Ceci ne dépend pas du choix des normes sur les R^1f_*L vérifiant la condition requise plus haut. La définition suivante a donc un sens (dépendant des normes sur $\det \text{Rf}_*\mathcal{O}_X$) :

DÉFINITION 6.12.9.- Soit $L \in \text{ob PIC}_C(X)$; on pose

$$\chi(X,L) = \deg(\det \text{Rf}_*L) + (\deg L + 1 - g) \chi(\mathcal{O}) ,$$

où $\deg L$ désigne comme d'habitude le degré de L dans les fibres.

THÉORÈME 6.13.- (Riemann-Roch pour les surfaces arithmétiques).

Pour tout $L \in \text{ob PIC}_C(X)$, on a

$$\chi(X,L) = \frac{1}{2}(L.L \otimes \omega_X^{-1}) + \chi(X,\mathcal{O}_X) .$$

(on rappelle que $\omega_X = \omega_{X/S} \otimes f^*\omega_{\mathcal{O}}$) .

Démonstration : Appliquant les définitions de χ et ω_X , on voit que la formule ci-dessus équivaut à

$$(6.13.1) \quad \deg(\det \text{Rf}_*L) - \deg(\det \text{Rf}_*\mathcal{O}_X) = \frac{1}{2}(L.L \otimes \omega_{X/S}^{-1})$$

ou encore à

$$\deg(\det \text{Rf}_*L \otimes (\det \text{Rf}_*\mathcal{O}_X)^{-1}) = -\frac{1}{2} \deg \langle L, L^{-1} \otimes \omega_{X/S} \rangle .$$

Cette dernière formule est une conséquence de

$$(6.13.2) \quad \langle L, L^{-1} \otimes \omega_{X/S} \rangle \simeq (\det \text{Rf}_*L)^{\otimes -2} \otimes (\det \text{Rf}_*\mathcal{O}_X)^{\otimes 2} ,$$

isomorphisme dans $\text{PIC}_C(S)$ que l'on obtient en développant le premier membre (6.5.1) :

$$\begin{aligned} \langle L, L^{-1} \otimes \omega_{X/S} \rangle &= \det \text{Rf}_* \omega_{X/S} \otimes (\det \text{Rf}_*L)^{-1} \\ &\quad \otimes (\det \text{Rf}_*(L^{-1} \otimes \omega_{X/S}))^{-1} \otimes \det \text{Rf}_*\mathcal{O}_X \end{aligned}$$

et en remarquant que par dualité de Serre (4.14.2) on a

$$\det \text{Rf}_* \omega_{X/S} \simeq \det \text{Rf}_* \mathcal{O}_X$$

$$\det \text{Rf}_*(L^{-1} \otimes \omega_{X/S}) \simeq \det \text{Rf}_* L \quad \blacksquare$$

6.14.- La formule de Faltings-Hriljac

Désignons par J_K la jacobienne de X_K sur le corps de nombres K , par $\phi_K : J_K \xrightarrow{\sim} J_K^t$ sa polarisation canonique, et par $h_\phi : J_K(K) \times J_K(K) \rightarrow \mathbb{R}$ l'accouplement

$$h_\phi(x, y) = h(x, \phi_K(y))$$

où $h : J_K(K) \times J_K^t(K) \rightarrow \mathbb{R}$ est l'accouplement de Néron-Tate.

Soient L_K et M_K deux faisceaux inversibles de degré 0 sur X_K . On se propose de calculer $h_\phi(\text{cl } L_K, \text{cl } M_K)$ en termes d'intersections d'Arakelov.

LEMME 6.14.1.- *On suppose le schéma X régulier. Soit L_K un faisceau inversible de degré 0 sur X_K . Il existe un entier $n \geq 1$ et un unique faisceau inversible sur X , prolongeant $L_K^{\otimes n}$ et dont la restriction à chaque composante de chaque fibre de $f : X \rightarrow S$ est de degré 0.*

Démonstration : La question est locale au voisinage des fibres réductibles de f . Soit F une telle fibre, et soient C_i ($1 \leq i \leq m$) ses composantes irréductibles. Considérons le \mathbb{Q} -espace vectoriel

$$V = \left(\bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Q} [C_i] \right) / \mathbb{Q} \cdot \sum_{i=1}^m C_i$$

On sait que la forme intersection (habituelle) induit sur V une forme bilinéaire définie négative ([SPC], I, Prop. 2.6), et en particulier non dégénérée. D'autre part, si L est un prolongement arbitraire de L_K , l'intersection avec L induit une forme linéaire sur V (puisque $\text{deg } L_K = 0$). Il existe donc $n \geq 1$ et $D = \sum_{i=1}^m r_i C_i$ ($r_i \in \mathbb{Z}$) tels que $n \text{ deg}(L|_{C_j}) = -D \cdot C_j$ pour $j = 1, \dots, m$. Le prolongement annoncé est alors $L^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_X(D)$. \blacksquare

THÉORÈME 6.15.- (Faltings-Hriljac). *Soient L et $M \in \text{ob PIC}_C(X)$. On suppose que $\text{deg } M_K = 0$, et que $L \cdot C = 0$ pour toute composante C de toute fibre de $f : X \rightarrow S$. Alors*

$$(L.M) = -h_\phi(\text{cl } L_K, \text{cl } M_K)$$

Démonstration : D'après 6.9, on peut supposer le schéma X régulier (remarquer que si $\pi : X' \rightarrow X$ est birationnel, alors π^*L vérifie encore l'hypothèse

requis). On peut aussi remplacer L et M par des puissances non triviales ; d'autre part, l'hypothèse sur L implique que le membre de gauche ne dépend de M que par sa fibre générique M_K , de sorte qu'appliquant 6.14.1 ci-dessus on peut également supposer que M est orthogonal aux composantes des fibres.

Introduisons les composantes neutres respectives J et J^t des modèles de Néron de J_K et J_K^t sur S , ainsi que l'unique biextension \mathcal{P} sur $J \times J^t$ prolongeant le faisceau de Poincaré \mathcal{P}_K sur $J_K \times J_K^t$ (2.8.2). L'isomorphisme $\phi_K : J_K \xrightarrow{\sim} J_K^t$ se prolonge en $\phi : J \xrightarrow{\sim} J^t$.

L'hypothèse sur L et M signifie que $\text{cl } L_K$ et $\text{cl } M_K$ se prolongent en des sections $\text{cl } L$ et $\text{cl } M : S \longrightarrow J$. On a alors

$$\begin{aligned}
 (6.15.1) \quad h_\phi(\text{cl } L_K, \text{cl } M_K) &= h(\text{cl } L_K, \phi_K(\text{cl } M_K)) \\
 &= \text{deg}_S[(\text{cl } L, \phi \circ \text{cl } M)^* (\mathcal{P})] \quad (5.4) \\
 &= \text{deg}_S[(\text{cl } L, \text{cl } M)^* (\text{id}_J \times \phi)^* (\mathcal{P})] \quad .
 \end{aligned}$$

Posons $\mathcal{B} = (\text{id}_J \times \phi)^* (\mathcal{P})$: c'est l'unique biextension sur $J \times J$ prolongeant la biextension dualisante \mathcal{B}_K sur $J_K \times J_K$ de (2.7.1). On a donc, en vertu de 2.8.5, un isomorphisme canonique

$$(6.15.2) \quad (\text{cl } L, \text{cl } M)^* \mathcal{B} = \langle L, M \rangle^{-1}$$

dont nous avons vu en 4.14.1 qu'il est compatible aux normes à l'infini. Par suite

$$h(\text{cl } L_K, \text{cl } M_K) = \text{deg}_S(\text{cl } L, \text{cl } M)^* \mathcal{B} \quad (6.15.1)$$

$$= -\text{deg}_S \langle L, M \rangle \quad (6.15.2)$$

$$= -(L.M)$$

par définition de $(L.M)$. ■

6.16.- Application : le théorème de l'indice

Désignons par $\text{Pic}_C^T(X)$ le sous-groupe de $\text{Pic}_C(X)$, noyau de la forme intersection (\cdot) .

PROPOSITION 6.16.1.- Soit $L \in \text{ob } \text{Pic}_C(X)$. Pour que $\text{cl } L \in \text{Pic}_C^T(X)$ il faut et il suffit qu'il existe $n \geq 1$ tel que $L^{\otimes n}$ provienne d'un faisceau inversible compactifié de degré 0 sur S .

Démonstration : La suffisance est évidente. Inversement si L est dans $\text{Pic}_C^T(X)$ alors L est orthogonal aux composantes des fibres et en particulier

$cl L_K \in J_K(K)$. Le théorème précédent implique alors que

$$h_\phi(cl L_K, cl L_K) = 0$$

donc L_K est d'ordre fini car la forme bilinéaire h_ϕ sur $J(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est définie positive ([L], 5, §6). La proposition résulte alors de l'assertion d'unicité de 6.14.1. ■

Posons maintenant $Pic_C^{num}(X) = Pic_C(X)/Pic_C^T(X)$. Si v est une place quelconque de K et si $\sigma \in S_\infty$, il est immédiat que $\mathcal{O}_X([X_v] - \frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_\sigma} [X_\sigma])$ est dans $Pic_C^T(X)$. Les classes des fibres engendrent donc dans $Pic_C^{num}(X)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 1, évidemment isotrope, et noté F , de sorte que l'on a une filtration

$$0 \subset F \subset F^\perp \subset Pic_C^{num}(X)$$

et que le degré (dans les fibres) induit un isomorphisme

$$deg : Pic_C^{num}(X)/F^\perp \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z} .$$

Posons $V = (F^\perp/F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Alors V contient le sous-espace

$$W := \bigoplus_{v \in S_f} W_v$$

où
$$W_v := \left(\bigoplus_{\substack{C \text{ composante} \\ \text{de } X_v}} \mathbb{Q} \cdot [C] \right) / \mathbb{Q} \cdot [X_v]$$

de sorte que $W_v = 0$ si X_v est irréductible, et que W est somme orthogonale des W_v . On sait d'autre part ([SPC], I, prop. 2.6) que la forme intersection est définie négative sur chaque W_v . De plus le lemme 6.14.1 implique que l'orthogonal de W dans V s'identifie canoniquement à $J(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, qui est un \mathbb{Q} -vectoriel de dimension finie sur lequel ([L], loc. cit) la forme intersection est encore définie négative. Celle-ci est donc définie négative sur V .

Pour exprimer de façon commode le théorème de l'indice remarquons que $Pic_C^{num}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est extension d'un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie par le \mathbb{R} -espace vectoriel F : nous pouvons donc considérer le complété $Pic_C^{num}(X)_{\mathbb{R}}$ pour la topologie obtenue en trivialisant cette extension et en munissant \mathbb{Q} de sa topologie naturelle. On obtient ainsi un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration

$$0 \subset F \subset F_{\mathbb{R}}^\perp \subset Pic_C^{num}(X)_{\mathbb{R}} .$$

THÉORÈME 6.16.2 (Théorème de l'indice). - La signature de la forme intersection sur $Pic_C^{num}(X)_{\mathbb{R}}$ est $(+ \dots -)$, le nombre de signes $-$ étant

$$1 + \text{rang}(J(K)) + \sum_{v \text{ finie}} ((\text{nombre de composantes de } X_v) - 1).$$

Démonstration : Si $L \in \text{ob Pic}_C(X)$ est de degré > 0 , considérons le sous-espace $F \oplus QL$ de $\text{Pic}_C^{\text{num}}(X) \otimes \mathbb{Q}$: il est immédiat que celui-ci contient des éléments de carré > 0 et des éléments de carré < 0 . De plus son orthogonal est contenu dans F^\perp et se projette isomorphiquement sur V , donc d'après ce qui précède la forme est définie < 0 sur cet orthogonal. On a donc une décomposition

$$\text{Pic}_C^{\text{num}}(X) \otimes \mathbb{Q} = (F \oplus QL) \oplus (F \oplus QL)^\perp$$

(+ -) (-...-)

et l'on a $\dim(F \oplus QL)^\perp = \dim V$
 $= \text{rang}(J(K)) + \sum_{v \in S_f} \dim W_v$.

Le théorème en résulte. ■

Le théorème de l'indice a (entre autres) le corollaire utile suivant (cf. [SPC], III, §3, Proposition 2) :

PROPOSITION 6.17. - (Sziro) Soit $E : S_f \longrightarrow X$ une section à valeurs dans l'ouvert de lissité, identifiée au diviseur compactifié qu'elle définit. Alors on a :

$$(\omega_{X/S} \cdot \omega_{X/S}) \leq 4g(g-1) (\omega_{X/S} \wedge E)$$

ou encore, compte tenu de la formule d'adjonction 6.11 :

$$(\omega_{X/S} \cdot \omega_{X/S}) \leq -4g(g-1)E^2.$$

Démonstration : notons e, w, f les classes dans $\text{Pic}_C^{\text{num}}(X)_{\mathbb{R}}$ définies respectivement par $\mathcal{O}_X(E)$, $\omega_{X/S}$ et $\mathcal{O}_X(F)$ où F est une fibre (disons à l'infini). Considérons la forme quadratique sur \mathbb{R}^3 :

$$(x, y, z) \longrightarrow (xe + yw + zf)^2.$$

Pour z assez grand, on a $(e + zf)^2 > 0$, et le théorème de l'indice implique donc que cette forme est soit dégénérée, soit de type $(+ - -)$. Par suite son discriminant est ≥ 0 , ce qui donne, en appliquant le formule d'adjonction :

$$\begin{vmatrix} E^2 & -E^2 & 1 \\ -E^2 & (\omega_{X/S} \cdot \omega_{X/S}) & 2g - 2 \\ 1 & 2g - 2 & 0 \end{vmatrix} \geq 0$$

On obtient le résultat annoncé en développant. ■

B I B L I O G R A P H I E

- [A] S.Ju. ARAKELOV - *Intersection Theory of Divisors on an Arithmetic Surface*, Math. USSR Izvestija 8(1974), n°6, 1167-1180.
- [AV] D. MUMFORD, *Abelian Varieties*, Oxford University Press, (1974).
- [D-M] P. DELIGNE et D. MUMFORD, *The Irreducibility of the Space of Curves of given Genus*, Pub. Math. IHES n°36. (1969), 75-109.
- [EGA] A. GROTHENDIECK et J. DIEUDONNÉ, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Springer, (1971).
- [F] G. FALTINGS, *Calculus on Arithmetic Surfaces*, Ann. of Math. 119 (1984), 387-424.
- [G-H] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-Interscience, (1978).
- [GIT] D. MUMFORD, *Geometric Invariant Theory*, Springer Ergebnisse n°34, (1965).
- [K-M] F. KNUDSEN et D. MUMFORD, *The Projectivity of the Moduli Space of Stable Curves I*, Math. Scand. 39 (1976), 19-55.
- [L] S. LANG, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer, (1983).
- [MB] L. MORET-BAILLY, *Pinceaux de variétés abéliennes*, Astérisque, à paraître.
- [SGA] A. GROTHENDIECK et al., *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie*, Springer Lecture Notes n°305 (SGA 4, 3ème partie) et n°288 (SGA 7, 1ère partie).
- [SPC] L. SZPIRO et al., *Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux*, Astérisque n°86, (1981).

Laurent MORET-BAILLY
 Université PARIS XI - Bat. 425
 Département de Mathématiques
 91405 ORSAY CEDEX