Astérisque

J. GIL DE LAMADRID

Sur les mesures presque périodiques

Astérisque, tome 4 (1973), p. 61-89
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__61_0>

SUR LES MESURES PRESQUE PERIODIQUES

par J. GIL DE LAMADRID

I

On expose ici un partie d'un travail sur les mesures presque périodiques fait en collaboration avec L.N. Argabright et qui est en cours de rédaction.

La théorie de fonctions presque périodiques est classique. Elle a été introduite au début du siècle par Harald Bohr, (frère du physicien), pour les fonctions sur la droite IR. Elle a été généralisée peu après par plusieurs personnes, notamment von Neumann [5], aux groupes abéliens localement compacts et même à des classes plus générales de groupes. Plus récemment, Eberlein [3] a introduit la notion de fonctions faiblement presque périodiques et a établi son rôle dans l'analyse harmonique.

Ici, on cherche à généraliser la théorie de fonctions presque périodiques encore plus loin de façon à ce qu'elle s'applique aux mesures sur un groupe abélien localement compact G . La première question qui se pose est : pourquoi encore une extension de la théorie ? D'abord, pourquoi pas ? Un nombre remarquable de notions et de résultats se prolongent au cas général sans beaucoup plus de travail. D'autre part, notre motivation a été plus concrète que cela, mais une bonne explication des motifs doit attendre le déroulement de ces exposés. De façon générale, on peut dire que nous avions déjà étudié des mesures, dites <u>transformables</u>, telles que la transformée $\hat{\mu}$ d'une telle mesure μ généralise entre autres la transformée $\hat{\nu}$ de Fourier - Stieltjes d'une mesure finie ν . Or, Eberlein avait déjà observé que $\hat{\nu}$ est toujours une fonction continue faiblement presque périodique. Dans notre cas, $\hat{\mu}$ n'est plus, en général, une fonction ; c'est une mesure. Donc, pour étendre la théorie d'Eberlein, à notre transformée $\hat{\mu}$, il a fallu généraliser la presque périodicité.

I

Il faut signaler ici ce qu'on doit au travail de L.Schwartz [6] , qui avait déjà introduit la notion de distribution presque périodique. Malheureusement, la notion de distribution, d'ailleurs très puissante dans ses autres aspects, semble être trop générale pour permettre le développement d'une théorie telle qu'on expose ici. D'autre part, notre définition de presque périodicité et même la démonstration de l'existence de la moyenne, ont été modelées d'après l'exposé de Schwartz.

On va commencer par esquisser quelques parties de la théorie classique de la presque périodicité de fonctions, et, après, présenter la généralisation aux mesures.

Le symbole G notera toujours un groupe topologique abélien localement compact. Toutes les mesures envisagées ici sont numériques complexes. Il en est de même pour les fonctions, sauf pour un très bref intervalle où il convient de traiter l'intégration de fonctions à valeurs vectorielles. En tout cas, sauf mention du contraire, les fonctions envisagées ici sont numériques complexes. Toutes les mesures sur G seront supposées boréliennes et régulières. On note $K(G)$, $C_0(G)$ et $B(G)$ les espaces respectifs de toutes les fonctions continues à support compact, s'annulant à l'infini, bornées. Le dual de l'espace de Banach $C_0(G)$, pour $||f||_\infty$, la norme "sup" , est l'espace $\mathcal{M}_F(G)$ de toutes les mesures finies (bornées) sur G. L'espace $K(G)$ sera le plus souvent muni de la topologie localement convexe, limite inductive des sous espaces de $K(G)$ de la forme $K(A,S)$, sous espace de toutes les f $K(G)$ portée par un compact donné A S. L'espace $K(A,S)$ est un espace de Banach pour la norme . Une application linéaire de $K(G)$ dans un espace vectoriel topologique localement convexe est continu si et seulement si sa restriction à chaque $K(A,S)$ est continue. Le dual de l'espace localement convexe $K(G)$, pour la topologie limite inductive est l'espace $\mathcal{M}(G)$ de <u>toutes</u> les mesures (c.a.d. boréliennes régulières) sur G. Ces mesures, dont la mesure de Haar, ne sont pas toujours bornées. On sait que toute mesure μ a une mesure variation (positive) notée $|\mu|$. Les espaces $K(G)$, $C_o(G)$, $B(G)$ sont stables pour l'opération $f \quad f'$ de réflexion, c.a.d., $f'(x) = f(x^{-1})$, pour conjugaison $f \longrightarrow \bar{f}$, donc pour l'involution $f \;\, = \bar{f}'$.

On notera λ la mesure de Haar G et par dx son élément infinitésimal. Soit f une fonction localement intégrable (pour λ), c.a.d. intégrable sur tout compact de G. On identifiera f avec la mesure produit $f\lambda$, ce qui ne donnera lieu à aucune confusion. Donc, dire qu'une mesure μ est une fonction c'est dire qu'elle est de cette forme. Dire que μ est une fonction continue, c'est dire que f est continue, etc ...

On a souvent besoin de faire la convolution de deux mesures, même si elles ne sont pas bornées. Cela n'est pas forcément possible. Par exemple, la mesure de Haar λ n'est convolable qu'avec les mesures finies. Suivant Bourbaki [2], on dira que deux mesures μ, $\nu \in \mathcal{M}(G)$ sont <u>convolables</u> si, quel que soit $f \in K(G)$ la fonction $f(xy)$ sur $G \times G$ est intégrable pour $|\mu| \otimes |\nu|$. Dans ce cas, on définit

$$(1) \qquad \mu * \nu\,(f) = \int_G \int_G f(xy)\,d\mu(x)\,d\nu(y).$$

Dans beaucoup de cas, la situation est plus simple. Par exemple, si g est une fonction continue, ou bien localement intégrable et portée par un ensemble σ - compact, si on sait en plus que g (c.a.d., $g\lambda$) est convolable avec $\mu \in \mathcal{M}(G)$, alors $f * \mu$ est une fonction, donnée, pour presque tout $x \in G$, par la formule :

$$(2) \qquad * \mu\,(x) = \int_G f\,(xy^{-1})\,d\mu(y).$$

I

Toute mesure a support compact est convolable avec toutes les mesures. En particulier, si $g \in K(G)$, (2) a un sens pour tout x, et $f * \mu$ est même une fonction continue sur G, qui n'est pas toujours bornée ; par exemple, sur la droite, une fonction arbitraire $g \in K(\mathbb{R})$, $0 \neq g \geq 0$, et $d\mu(x) = x\,dx$. En particulier, pour les mesures de Dirac δ_x, $x \in G$ $\delta_x * \mu$ est la translatée de μ par x. On emploiera toujours cette notation pour les translatées, et de même, pour les translatées $\delta_x * f$ des fonctions. On voit facilement que l'espace de Banach $B(G)$ (pour la norme $\| \ \|_\infty$ est stable pour les translations et même pour la convolution par les mesures finies.

Soit maintenant f un élément de $B(G)$. On dit que f est <u>fortement</u> (<u>faiblement</u>) presque périodique si l'adhérence forte (faible) de l'ensemble $\{\delta_x * f\}_{x \in G}$ $B(G)$ est fortement (faiblement) compacte. On note $SAP(G)$ $(WAP(G))$ le sous espace de $B(G)$ de toutes les fonctions fortement (faiblement) presque périodiques. On a évidemment $SAP(G) \subset WAP(G) \subset B(G)$. On démontre dans la théorie classique que les espaces $SAP(G)$ et $WAP(G)$ sont des sous espaces vectoriels fermés de $B(G)$, donc des espaces de Banach pour la norme $\| \ \|_\infty$ Ils sont même des C^*- algèbres pour cette norme ; c.a.d., ils sont stables pour la multiplication ponctuelle de fonctions. Enfin, ces espaces sont invariants pour les translations, la conjugaison $f \to \bar{f}$, et la réflexion $f \longrightarrow f'$, donc pour l'involution $f \longrightarrow f$, et les fonctions qui appartiennent sont toutes uniformément continues. On a même que ces espaces sont stables pour la convolution par les mesures finies. Cela découle des propositions générales suivantes concernant l'intégration vectorielle dont on aura besoin aussi plus tard.

On dira, comme Bourbaki [1] , qu'un espace localement convexe séparé E est <u>quasi - complet</u> si tout ensemble borné de E est complet comme sous espace uniforme de E . On suppose ici les éléments de la théorie de l'intégration vectorielle. Alors, un résultat classique de cette théorie est le suivant.

Proposition 1.-

Soit S un espace localement compact et $F : S \longrightarrow E$ une application continue bornée de S dans un espace vectoriel topologique localement convexe quasi - complet E. Soit enfin μ une mesure (complexe, borélienne, régulière) bornée sur S. Alors, l'application F est intégrable par rapport à μ. En plus, si p est une semi norme continue sur E, la fonction numérique $s \longrightarrow p(F(s))$ $s \in S$, sur S et μ - intégrable et on a l'inégalité suivante :

(3) $$p\left(\int_S F(s)d\mu(s)\right) \leq \int_S p(F(s))d|\mu|(s).$$

Un corollaire immédiat de cette proposition est la proposition suivante.

Proposition 2.-

Supposons qu'on a une représentation $\pi : G \longrightarrow \quad (E)$ de G dans l'algèbre d'opérateurs continue sur un espace vectoriel topologique localement convexe séparé quasi-complet. E, qui soit continue et bornée, (c.a.d., quel que soit $v \in E$, l'application $x \longrightarrow \pi(x)v$, $x \in G$ de G dans E est continue et bornée. Alors π peut être prolongée à une représentation de l'algèbre de convolution $\mathcal{M}_F(G)$ de mesures finies sur G au moyen de l'intégrale

(4) $$\pi(\mu)v = \int_G \pi(x)vd\mu(x),$$
$$\mu \in \mathcal{M}_F(G).$$

Bien entendu, pour cette représentation on a quel que soit $\mu, \nu \in \mathcal{M}_F(G)$, $\pi(\mu * \nu) = \pi(\mu)(\nu)$

Corollaire 1.-

Les espaces $SAP(G)$ et $WAP(G)$ sont stables pour la convolution par les mesures finies.

Démonstration.-

Ces espaces vérifient les conditions sur E dans la proposition 2. Alors, on définit $\pi(x)f = \delta_x * f$ et on obtient une représentation satisfaisant l'hypothèse de la proposition 2. On constate enfin que $\mu * f$ n'est autre que $\pi(\mu) f'$.

On introduit ensuite le compactifié G_b de Bohr de G. Le passage de G à G_b joue un rôle analogue à celui du passage de G à son compactifié de Stone-Cech, celui de transformer une certaine classe de fonctions sur G en toutes les fonctions continues sur le nouvel espace. Dans le cas de G_b, il s'agit de l'espace SAP(G) . On considère le groupe dual Γ de G. C'est un groupe localement compact dont le dual est G. On prend le groupe abstrait Γ et on le munit de la topologie discrète. On obtient un groupe topologique discret Γ_d sur le même groupe abstrait de Γ . Son dual G_b est compact et on l'appelle le <u>compactifié de Bohr</u> de G. On a immédiatement que $G \subset G_b$ et que G est dense dans G_b, puisque G sépare les points de Γ_d. On a aussi que l'injection $G \subset G_b$ est continue car la topologie de G est de la convergence compacte sur Γ et celle de G_b de la convergence simple sur Γ . Il se trouve que les fonctions $f \in$ SAP(G) sont uniformément continues pour la topologie de la convergence simple (fait dont je ne connais pas une démonstration directe), voir p.e., [cf. p.91]) donc peuvent être prolongées en fonctions continues sur G_b , avec le même support. Réciproquement, puisque toute fonction continue sur un groupe <u>compact</u> est toujours fortement presque périodique, toute fonction continue sur G_b est le prolongement de sa restriction fortement presque périodique sur G. Donc on peut faire l'identification SAP(G) = $C(G_b)$, et dans la suite on ne distinguera pas entre la fonction fortement presque périodique f sur G et la fonction continue f sur G_b. On obtient immédiatement le théorème classique suivant.

I

Théorème 1. (d'approximation).-

Toute fonction fortement presque périodique est limite uniforme de combinaisons linéaires de caractères.

Démonstration.-

Appliquer Peter-Weyl à G_b, groupe compact.

On note λ_b la mesure de Haar de G_b, mesure finie qu'on normalise ($\lambda_b(G_b)=1$). Son élément infinitésimal est dx_b. On pose, quel que soit $f \in SAP(G)$

(5) $$M(f) = \int_{G_b} f(x_b)dx_b.$$

On appelle $M(f)$ la moyenne de la fonction fortement presque périodique f. On dit en passant que toute l'analyse de séries de Fourier-Bohr se réduit à l'analyse harmonique sur G_b.

Les fonctions faiblement presque périodiques ont été introduites par Eberlein [3], et, bien qu'elles ne soient pas prolongeables à G_b, il a démontré l'existence d'une forme linéaire positive $M(f)$ sur $WAP(G)$ prolongeant le $M(f)$ de (5). Il a aussi démontré le théorème suivant.

Théorème 2.-

La moyenne $M(f)$ est la seule forme linéaire continue positive sur $WAP(G)$ (ou $SAP(G)$), invariante pour les translations et telle que $M(1) = 1$ (1 est la fonction 1).

La formule de Bohr $M(f) = \lim (1/2n) \int_{-n}^{n} f(x)dx$ pour la moyenne d'une fonction presque périodique sur R est classique. Il en existe plusieurs généralisations. En voici une.

Théorème 3.-

(Formule de Bohr).

Soit $\{\varphi_\alpha\}$ un système filtrant de fonctions positives dans $L_1(G)$ normalisées (c.a.d. $\int_G \varphi_\alpha(x)dx = 1$), telles que, quel que soit $f \in WAP(G)$, (6), $\lim \int [\varphi_\alpha(x) - \delta_x * \varphi_\alpha(y)] f(y)dy = 0$.
Alors quel que soit $f \in WAP(G)$

(7) $$M(f) = \lim \int_G \varphi_\alpha(y)f(y)dy.$$

I

Démonstration.-

A cause de la normalisation, les φ_α peuvent être considérées comprises dans la boule unité de l'espace dual de l'espace de Banach WAP(G) , boule qui est faiblement compacte. Donc, quel que soit l'ultrafiltre u sur les α , la limite dans (7), selon u , existe. Notons la $M_u(f)$. (C'est une forme linéaire continue, qui est invariante pour les translations (à cause de (6)) et telle que $M_u(1) = 1$. Donc (théorème 2) $M_u = M$. Cela entraîne que la limite (7) existe et donne M(f).

Sur la droite $\mathbb{R}$, on peut prendre $\varphi_n = (1/2n)1_{[-n,n]}$, et (7) se réduit à la formule classique de Bohr. Dans le cas général, un tel système φ_α peut toujours s'obtenir en prenant les φ_α comme transformées de Fourier de fonctions $\varphi_\alpha = \theta_\alpha^* \star \theta_\alpha$ sur le groupe dual Γ de G , les θ_α étant telles que $||\theta_\alpha||=1$, et que ses supports tendent vers e.

Considérons l'équation suivante :

(8) $M(|f|^2) = 0.$

Evidemment, si $f \in SAP(G)$, f = 0. D'autre part, une $f \in WAP(G)$, différente de 0 peut satisfaire à (8). On appelle une telle fonction fonction faiblement presque périodique nulle. Un exemple est une fonction $f \in K(G)$, si G n'est pas compact. Notons $WAP_0(G)$ la classe de toutes les fonctions faiblement presque périodiques nulles. C'est un sous espace vectoriel de WAP(G). Cela découle du fait que $||f||_{b\,2} = \sqrt{M(|f|^2)}$ est une semi norme de WAP(G) (inégalité de Minkowski-Bohr). Cette seminorme est continue. On a la décomposition suivante.

I

Théorème 4.5 (Décomposition d'Eberlein)

Toute $f \in WAP(G)$ possède une décomposition unique de la forme

(9) $f = {}_s f + {}_o f$,

où ${}_s f$ est presque périodique, et ${}_o f$ une fonction faiblement presque périodique nulle. En outre, l'application $f \longrightarrow {}_s f$ est un projecteur borné de $WAP(G)$.

Donc, les espaces $SAP(G)$ et $WAP_o(G)$ sont supplémentaires dans $WAP(G)$. On en a plus.

Proposition 3.-

L'espace $WAP_o(G)$ est un idéal fermé de l'algèbre $WAP(G)$ qui est stable pour les convolutions par les mesures finies.

Démonstration.-

L'espace $WAP_o(G)$ est fermé dans $WAP(G)$, puisque le projecteur $f \longrightarrow {}_s f$ du théorème 3 est borné. Alors, pour $f \in WAP_o(G)$ et $g \in SAP(G)$, on a (Inégalité de Cauchy-Schwarz-Bohr),
$M(|gf|^2) = M(|g^2 f||f|) = \sqrt{M(|g^2 f^2|)}\sqrt{M(|f|^2)} = 0$. Pour la convolution on sait déjà que, pour $f \in WAP_o(G)$ et $\mu \in \mathcal{M}_F(G)$, $f * \mu \in WAP(G)$.
Alors, on utilise l'inégalité (4) avec $p(f) = \sqrt{M(|f|^2)}$ et on obtient

(10) $$\sqrt{M(|\mu * f|^2)} \leq \int_G \sqrt{M(|\delta_x * f^2|)}\,d\mu(x) = \int_G \sqrt{M(|f|^2)}\,d|\mu|(x) = 0.$$

Cela achève la démonstration.

On termine cet exposé en esquissant le rapport entre les fonctions presque périodiques et la transformation de Fourier.

Soit μ une mesure finie sur le dual Γ de G. On peut écrire sa transformée de Fourier-Stieltjes $\hat{\mu}$ comme

(11) $$\hat{\mu}(x) = \int_\Gamma \overline{\gamma(x)}\,d\mu(\gamma)$$

C'est toujours une fonction continue bornée sur G , c.a.d., $\hat{\mu} \in B(G)$.

I

Théorème 5 (Eberlein).-

Soit μ une mesure finie sur le dual Γ de G. Alors, la transformée de Fourier-Stieltjes $\hat{\mu}$ de μ est faiblement presque périodique. Elle est presque périodique si et seulement si μ est une mesure discrète. Dans le cas général, la décomposition d'Eberlein de $\hat{\mu}$ correspond à la décomposition de μ en sa partie discrète $_d\mu$ et sa partie continue $_c\mu$ dans ce sens que $(_d\mu)^\wedge = {}_s(\hat{\mu})$ et $(_c\mu)^\wedge = {}_o(\mu)^\wedge$

Appendice.-

Proposition

Toute fonction fortement presque périodique sur un groupe abélien localement compact G est uniformément continue pour la topologie de G de la convergence simple sur le groupe dual Γ de G.

Démonstration.-

Soit f une fonction fortement presque périodique sur G. On considère dans l'espace de Banach SAP(G) l'adhérence A de l'ensemble $\{\delta_x * f\}_{x \in G}$ des translatées de **f** . C'est un espace métrique (pour la norme de SAP(G)) compact, donc complet. Soit Φ le groupe de toutes les isométries de l'espace métrique A. On munit Φ de la topologie de la convergence uniforme sur A. On sait déjà que c'est un groupe topologique compact (théorème d'Ascoli). On définit une application $x \longrightarrow \varphi_x$ de G dans Φ , par la formule $\varphi_x(g) = \delta_x * g$. Cela donne bien une isométrie φ_x de A. Cette application est évidemment un homomorphisme de G dans Φ . Je dis que cet homomorphisme est continue. C'est, parce que, l'ensemble des fonctions A étant compact, est équi-continu. Donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage N de e dans G tel que $|g(x)-g(u^{-1}x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in G$, $g \in A$ et $u \in N$. Autrement dit, $||g- \delta_u * g||_\infty < \varepsilon$, ce qui définit un voisinage uniforme de l'identité dans Φ , et montre la continuité.

I

Notons H l'adhérence dans Φ de l'image de G. C'est un groupe abélien compact. Son groupe dual H' est discret, et la topologie de H, qui est toujours celle de la convergence uniforme sur A, est aussi (théorème de la dualité de Pontriagin) la topologie de la convergence simple sur H'.

On revient à f ; on prend l'identité $e \in G$, et on définit la fonction numérique $\varphi \longrightarrow \varphi(f)(e)$, $\varphi \in H$, sur H, $\varphi(f)(e)$ étant l'image de f par φ, évaluée en e. C'est évidemment une fonction continue sur H, donc uniformément continue pour la topologie de la convergence simple sur H'. En appliquant cette continuité uniforme à l'image de G dans H, on obtient, quel que soit $\varepsilon > 0$, qu'il existe un ensemble fini $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n$ de caractères de H et $\delta > 0$ tels que $|\delta_x * f(e) - \delta_y * f(e)| < \varepsilon$ pour tous $x, y \in G$ tels que $|\varphi'_k(\varphi_x) - \varphi'_k(\varphi_y)| < \delta$ pour tout k. Or, l'homomorphisme $G \longrightarrow H$ donne lieu à un homomorphisme de H' dans Γ. Par rapport à cet homomorphisme, à chaque φ'_k correspond un caractère γ_k de G, explicité par $\gamma_k(x) = \varphi'_k(\varphi_x)$. Avec cette notation, (1) et (2) donnent le fait que $|\gamma_k(x) - \gamma_k(y)| < \delta$ pour tout k, entraîne $|f(x^{-1}) - f(y^{-1})| < \varepsilon$, ce qui explicite la continuité uniforme de f, pour la topologie de la convergence simple de G, et termine la démonstration.

I

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI
" Espaces vectoriels topologiques "
Paris. Hermann, 1952

[2] N. BOURBAKI
" Intégration " Chapitres 7 et 8
Mesure de Haar, convolution et représentations.
Hermann. Paris, 1963

[3] W.F. EBERLEIN
" A note on Fourier-Stieltjes transforms "
Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 2 (1955), p. 310 à 312

[4] A. GUICHARDET
" Analyse harmonique commutative "
Dunod. Paris, 1968

[5] J. VON NEUMANN
" Almost periodic functions on groups "
Amer. Math. Soc. Vol. 36 (1934), p. 445-492

[6] L. SCHWARTZ
" Théorie des distributions "
Tome II. Hermann. Paris. 1959

[7] L.N. ARGABRIGHT - J. GIL DE LAMADRID
" Fourier analysis of unbounded measures on locally compact abelian groups "

II

Soit $\mu \in \mathfrak{M}(G)$. On dit que μ est, respectivement, *fortement presque périodique*, *faiblement presque périodique*, *à translatées bornées* si, de façon correspondante, quel que soit $f \in K(G)$ la convolée $f * \mu$ appartient à SAP(G), à WAP(G) , à B(G). On note (G), (G) $\mathfrak{M}_B(G)$ les espaces correspondants de mesures qui résultent de ces définitions. On a évidemment (G)$\subset$ (G)$\subset \mathfrak{M}_T(G)$.

Les mesures à translatées bornées ont été déjà étudiées dans [7] , mais en tant que mesures individuelles, plutôt que comme éléments de l'espace $\mathfrak{M}_B(G)$. Dans [7] , on a montré qu'une mesure μ est à translatées bornées si et seulement si, quel que soit A ensemble compact dans G, la fonction $x \longrightarrow |\mu|(A_x)$ de G dans R est bornée. Dans cette fonction, A_x indique la translatée de A par l'élément $x \in G$. Cette caractérisation justifie la terminologie.

Ici, on s'occupe de l'espace $\mathfrak{M}_B(G)$ de mesures à translatées bornées. Cet espace joue, à l'égard des *mesures* presque périodiques, un rôle analogue à celui de B(G) pour les *fonctions* presque périodiques. Donc, avant de passer à l'étude des mesures presque périodiques, il faut regarder cet espace de plus près. Il est évident que $\mathfrak{M}_B(G)$ est stable pour les opérations de réflexion, conjugaison, involution. Ces opérations sont définies, par transposition. Par exemple, $\mu^*(f) = \mu(f^*)$. On a démontré,par ailleurs, [7] , et on ne le fera pas ici que toute $\nu \in \mathfrak{M}_B(G)$ est convolable avec toute mesure finie et que $\mathfrak{M}_B(G)$ est stable pour ces convolutions.
On le munit d'une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe, appelée topologie *forte*, comme suit. Quel que soit $f \in K(G)$, on pose, pour $\mu \in \mathfrak{M}_T(G)$

(1) $$||\mu||_f = ||f * \mu||_\infty .$$

II

Puisque $f * \mu$ est bornée, $||\mu||_f$ est bien définie. C'est une semi-norme sur $\mathcal{M}_B(G)$ et il est évident que la famille de semi-normes qui en résulte, lorsque f parcourt $K(G)$ définit une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe séparé. La topologie faible correspondante sera appelée topologique faible de $\mathcal{M}_B(G)$. Donc toutes les notions topologiques employées ici, dites fortes ou faibles, se rapporteront à ces deux topologies.

Il convient d'avoir une autre description de ces topologies. On considère la puissance $[B(G)]^{K(G)}$ de l'espace de Banach $B(G)$ à l'exponentiel $K(G)$, et on le munit de la topologie produit, c'est à dire la topologie de la convergence simple sur $K(G)$. Comme d'habitude, on note un élément de $[B(G)]^{K(G)}$ suivant ses coordonnées, ainsi $\omega = \{g_f\}_{f \in K(G)}$, $g_f \in B(G)$. L'espace $[B(G)]^{K(G)}$ est évidemment complet. On définit maintenant l'application $\mu \longrightarrow \{f * \mu\}_{f \in K(G)}$ de $\mathcal{M}_B(G)$ dans $[B(G)]^{K(G)}$. C'est une application bi-univoque et plonge $\mathcal{M}_B(G)$ de façon bi-continue dans $[B(G)]^{K(G)}$. Nous écrirons tout simplement $\mathcal{M}_B(G) \subset [B(G)]^{K(G)}$. Il est évident que ce plongement est aussi bi-continue pour les topologies faibles.

<u>Théorème 1</u>.-

Tout ensemble borné fermé de $\mathcal{M}_B(G) \subset [B(G)]^{K(G)}$ est fermé dans $[B(G)]^{K(G)}$.

<u>Démonstration</u>.-

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble borné fermé de $\mathcal{M}_B(G)$. Soit $\omega = \{g_f\}$ un élément de $[B(G)]^{K(G)}$ adhérent à $\mathcal{A}$. Il suffit de montrer que ω appartient à $\mathcal{M}_B(G)$. On pose

(2) $\omega(f) = g_{f'}(e)$.

On rappelle que $f'(x) = f(x^{-1})$.

La formule (2) donne une fonction numérique sur $K(G)$. Puisque ω est adhérente à $\mathcal{A}$, $\omega(f)$ est limite des nombres $\mu(f) = f' * \mu(e)$, $\mu \in \mathcal{A}$, donc ω est une forme linéaire sur $K(G)$. Pour montrer que

II

ω est en fait une mesure, il faut montrer qu'elle est continue pour la topologie limite inductive de $K(G)$, ou, ce qui revient au même, que sa restriction à tout espace de Banach $K(A,G)$, A compact $\subset G$, est continue, c.a.d. bornée. On considère aussi les restrictions des μ dans $\mathcal{S}$ à $K(A,G)$. Quel que soit $f \in K(A,G)$, l'ensemble de nombres $\{\mu(f)\}_{\mu \in \mathcal{S}}$ est borné. Par le théorème de la borne uniforme appliqué à l'espace de Banach $K(A,G)$, on obtient qu'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $|\mu(f)| < \varepsilon||f||_\infty$, quel que soit $f \in K(A,G)$ et $\mu \in \mathcal{S}$. On obtient la même inégalité pour ω : $||\omega(f)| < \varepsilon||f||_\infty$ Cela veut dire que la restriction de ω à $K(A,G)$ est bornée. Donc, ω est une mesure. Il reste à montrer que ω est translatées bornées. Cela est immédiat, car si $f \in K(G)$, $f * \omega = g_f$ est limite uniforme des $f \quad \mu$, μ , donc est bornée, car $f * \nu$ est un ensemble borné de fonctions dans $B(G)$. Cela découle de ce que veut dire que $\mathcal{S}$ soit borné. Donc $\omega \in \mathcal{M}_B(G)$, et, puisque $\mathcal{S}$ est fermé , $\omega \in \mathcal{S}$. Donc $\mathcal{S}$ est fermé dans $[B(G)]^{K(G)}$, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 1.-

L'espace $\mathcal{M}_B(G)$ muni de sa topologie forte est quasi-complet.

Démonstration.-

D'après le théorème 1, tout ensemble borné fermé $\mathcal{S}$ de $\mathcal{M}_B(G)$ est fermé dans $[B(G)]^{K(G)}$, qui est complet; Donc, $\mathcal{S}$ est complet.

Il est assez facile de voir que ces espaces sont fermés dans $\mathcal{M}_B(G)$, donc quasi-complets, et stables pour la réflexion, la conjugaison, et l'involution.

Proposition 1.-

Les espaces $\mathcal{SAP}(G)$ et $\mathcal{WAP}(G)$ sont stables pour la convolution par les mesures finies.

Démonstration.-

Pour tout $x \in G$ et toute mesure μ dans l'un de ces espaces, on définit $\pi(x) = \delta_x * \mu$, qui est bien défini. Cela donne un opérateur continu de l'espace en question, puisque $||f * \delta_x * \mu||_\infty = ||\delta_x * f * \mu||_\infty = ||f * \mu||_\infty$. Le même calcul montre que la représentation qui en résulte est continue et bornée. La conclusion découle maintenant de la proposition 2 du premier exposé, de la même façon qu'on a démontré son corollaire 1.

Théorème 1.5 (critère de Bochner).-

Soit μ une mesure dans $\mathcal{M}_B(G)$. Alors μ est fortement (faiblement) presque périodique si et seulement si l'adhérence forte (faible) de l'ensemble des translatées de μ est fortement (faiblement) compact.

Démonstration.-

Soit A l'adhérence forte (faible) des translatées de μ. On va considérer $\mathcal{M}_B(G)$ comme plongé dans $[B(G)]^{K(G)}$. Supposons que A soit fortement (faiblement) compact. On écrit $\mu = \{f * \mu\}_{f \in K(G)}$ On fixe $f \in K(G)$. L'application $\nu \longrightarrow f * \nu$, $\nu \in A$, de A dans $B(G)$ correspond à la projection dans le produit $[B(G)]^{K(G)}$ définie par f. Donc, son image $\{f * \nu\}_{\nu \in A}$ est fortement (faiblement) compact. Cela contient évidemment l'adhérence forte (faible) de l'ensemble des translatées $\{\delta_x * f * \mu\} = \{f * \delta_x * \mu\}$ de $f * \mu$, qui est fortement (faiblement) compact, donc $f * \mu$ est fortement (faiblement)presque périodique. Cela montre que μ est fortement (faiblement) presque périodique.

Supposons, inversement, que μ soit fortement (faiblement) presque périodique. On montre que A est fortement (faiblmment) compact. Alors, pour toute $f \in K(G)$, soit A_f l'adhérence forte (faible) dans $B(G)$ de l'ensemble des translatées de $f * \mu$. C'est un ensemble fortement (faiblement) compact. On peut plonger

II

le produit $\prod_f A_f$, qui est compact, dans $[B(G)]^{K(G)}$, et on voit facilement que A est contenue dans ce produit . Or, A est un ensemble borné fermé, donc est fermé dans $\prod_f A_f$ (Théorème 1). Cela entraîne que A est fortement (faiblement) compact, et termine la démonstration.

On considère maintenant le rapport entre les fonctions presque périodiques (considérées comme des mesures) et les mesures presque périodiques. L'interprétation d'une fonction f comme une mesure se fait en identifiant f avec la mesure $f(x)dx$, ce qu'on fait désormais sans une autre explication.

Or, on a $SAP(G) \subset \mathcal{SAP}(G)$ et $WAP(G) \subset \mathcal{WAP}(G)$. Cela découle du fait que les espaces $SAP(G)$ et $WAP(G)$ sont stables pour la convolution par les mesures finies. En particulier, si g est dans l'un de ces espaces et $f \in K(G)$, $f * g$ est dans le même espace, ce qui démontre notre affirmation. En particulier, la fonction constante 1 s'identifie à la mesure de Haar λ , qui est donc fortement, donc faiblement presque périodique. Les fonctions faiblement presque périodiques sont toujours uniformément continues.

<u>Proposition 3</u>.-

Soit g une fonction continue bornée sur G. Alors, g est une fonction fortement (faiblement) presque périodique si et seulement si elle est uniformément continue et fortement (faiblement) presque périodique en tant que mesure.

<u>Démonstration</u>.-

On a vu déjà la moitié de la proposition. Soit donc g uniformément continue et fortement (faiblement) presque périodique en tant que mesure. On utilise une unité approchée $\{\varphi_\alpha\}$ pour la convolution, telle que les φ_α soient des fonctions continues, dont les supports compacts tendent vers l'élément identité de G . On a

II

d'abord que, pour chaque α , $\varphi_\alpha * g$ est fortement (faiblement) presque périodique. D'autre part, à cause de la continuité uniforme de g, $\|g - \varphi_\alpha * g\|_\infty \longrightarrow 0$; donc, g est fortement (faiblement) presque périodique.

On introduit maintenant la moyenne d'une mesure faiblement presque périodique. Soit μ une telle mesure et $f \in K(G)$. Alors, $f * \mu \in WAP(G)$ et $M(f * \mu)$ est bien défini. On a aussi que pour tout $x \in G$ $M((\delta_x * f) * \mu) = M(\delta_x * (f * \mu)) = M(f * \mu)$. Donc $M(f * \mu)$, considéré comme forme continue linéaire sur $K(G)$ est invariante pour les translations, donc est proportionnelle à l'intégrale de Haar. On note $M(\mu)$ la constante de proportionnalité. On a donc

(3) $$M(f * \mu) = M(\mu) \int_G f(x)dx.$$

On appelle $M(\mu)$ la <u>moyenne</u> de la mesure faiblement presque périodique μ . Cette méthode d'introduire la moyenne est due à L. Schwartz. Alors, pour $f \in K(G)$ fixé telle que $\lambda(f) = 1$, on a, pour toute $\mu \in \mathcal{WGP}(G)$

(4) $$M(\mu) = M(f * \mu),$$

ce qui montre que M est une forme linéaire continue sur $\mathcal{WGP}(G)$, invariante pour les translations.

Pour voir que cela généralise la moyenne d'une fonction faiblement presque périodique g, on utilise l'identité approchée $\{\varphi_\alpha\}$ de tout à l'heure. On a en tout cas une constante de proportionnalité τ telle que (4) $M(\varphi_\alpha * g) = \tau \int_G \varphi_\alpha(x)dx = \tau$. D'autre part, puisque $\varphi_\alpha * g$ tend vers g uniformément, la densité de (4) tend vers $M(g)$. En particulier, $M(\lambda) = M(1) = 1$.

III

Dans l'exposé antérieur, on a défini les mesures fortement et les mesures faiblement périodiques et on a montré qu'on peut associer une moyenne $M(\mu)$ à toute mesure faiblement presque périodique (et à fortiori, à toute mesure fortement presque périodique), définie par la formule

(1) $M(\mu) = M(f * \mu)$ pour

$f \in K(G)$ tel que $\lambda(f) = 1$. Dans cet exposé, on va étudier les propriétés de la moyenne.

Théorème 1.-

Soit $\mu \in \mathcal{W}\mathcal{G}\mathcal{P}(G)$. Alors, l'enveloppe convexe fortement fermée de l'ensemble $\{\delta_x * \mu\}_{x \in G}$ contient une, et une seule, mesure invariante pour les translatées, qui est forcément $M(\mu)\lambda$

Démonstration.-

Dans le théorème, on ne distingue pas l'enveloppe convexe fortement fermée de l'enveloppe convexe faiblement fermée parce qu'elles coïncident du fait que, pour les ensembles convexe, l'adhérence forte et l'adhérence faible coïncident. Soit A L'enveloppe convexe de l'ensemble de translatées de μ , et soit B l'adhérence de A. On va d'abord montrer que $M(\mu)\lambda \in B$. Pour cela, on s'appuie sur le fait correspondant (connu) sur les fonctions faiblement presque périodiques. Il convient de donner une nouvelle description de A. Pour $x \in G$, on note T_x indifféremment l'opérateur de translation par x appliqué à n'importe quel espace de fonctions ou de mesures pour lequel l'opérateur a un sens. Donc, par exemple, $T_x \mu = \delta_x * \mu$. Ians cette démonstration, on emploie la notation T pour désigner une combinaison convexe quelconque d'opérateurs de translations. Donc A peut être décrit comme l'ensemble de toutes les mesures $T\mu$, où T parcourt l'ensemble de tous ces opérateurs. Soient $f_1,\dots,f_n \in K(G)$ et $\varepsilon > 0$. On va

III

trouver T tel que $|| T - M(\mu)\lambda||_{f_k} < \varepsilon$, pour tout k, ce que démontrera l'assertion. Alors, en accord avec le théorème correspondant aux fonctions presque périodiques (dû à Eberlein), il existe, quel que soit k, un T_k tel que
$||T(f_k * \mu) - M(f_k * \mu) 1||_\infty < \varepsilon$, où 1 est la fonction constante 1. C'est la conséquence du fait que $f_k * \mu \in WAP(G)$. Alors, on sait que $M(f_k * \mu) = M(\mu)\lambda(f_k)1$. On vérifie, immédiatement que $f_k * M(\mu)\lambda = M(\mu)\lambda(f)1$. Ceci posé, on a donc

$$(2) \quad ||T_k\mu - M(\mu)\lambda||_{f_k} = ||f_k * T_k\mu - f_k * M(\mu)\lambda||_\infty$$

$$= ||T_k f_k * \mu - M(\mu)\lambda\,(\mu).1||_\infty = ||T_k f_k * \mu - M(f * \mu)1||_\infty$$

$$< \varepsilon$$

Alors, le T recherché est $T = T_1 T_2 \ldots T_n$, car, si on pose $T = T_k S_k$, où S_k est le produit des T_r, $r \neq k$, on a

$$(3) \quad ||T\mu - M(\mu)\lambda||_{f_k} = ||S_k T_k \mu - S_k M(\mu)\lambda||_{f_k}$$

$$||S_k||\ ||T_k\mu - M(\mu)\lambda||_{f_k} < \varepsilon.$$

Dans (3), $||S_k||$ désigne la norme de S_k comme opérateur dans $B(G)$, qui est ≤ 1. Cela démontre la première assertion.

Soit maintenant ν une mesure invariante pour les translatées contenue dans A. Alors ν est forcément de la forme $\alpha\lambda$ D'autre part, puisque la moyenne M est invariante pour les translations et continue, M est constante sur A. Donc, on a

$$\alpha = M(\alpha\lambda) = M(M(\mu)\lambda) = M(\mu).$$

ce qui achève la démonstration.

III

Corollaire 1.-

La moyenne M est la seule forme linéaire continue sur $\mathcal{WAP}(G)$ ou $\mathcal{SAP}(G)$ invariante pour les translations telle que $M(\lambda) = 1$.

Démonstration.-

Une telle forme M' est constante sur l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de translatées d'une mesure μ dans $\mathcal{WAP}(G)$ (ou $\mathcal{SAP}(G)$). Donc, d'après le théorème 1, $M'(\mu) = M(\mu)M'(\lambda) = M(\mu)$.

Théorème 2.-

(Formule de Bohr généralisée).

Soit $\mu \in \mathcal{WAP}(G)$ et $\{\varphi_\alpha\}$ un système filtrant de fonctions positives dans $L_1(G)$ telles que $\int_G (x)dx = 1$. On suppose de plus, que, quel que soit $x \in G$, $\{\varphi_\alpha - \delta_x \varphi_\alpha\|_1$ tend vers 0 avec α que chaque $\varphi_\gamma \in L_1(\mu)$ et que la convolée $\varphi_\alpha * \mu(x) = \int_G \varphi_\alpha(xy^{-1})d\mu(y)$ existe en fonction continue en $x = e$. Enfin, on suppose que les fonctions $\varphi_\gamma * \mu$ soient équicontinues en $x = e$. Alors, on a la formule

$$(4) \qquad M(\mu) = \lim_\alpha \int_G \varphi_\alpha(x)d\mu(x).$$

Démonstration.-

On prend $f \in K(G)$ telle que $\lambda(f) = 1$, et, par conséquent, $M(\mu) = M(f * \mu)$. En vertu du théorème 3 de l'exposé 1, on a

$$(5) \qquad M(\mu) = \lim \int_G \varphi_\alpha(x) f * \mu(x)dx.$$

On manipule l'intégrale de (5). Or, on a

$$(6) \qquad \int_G \varphi_\alpha(x) f * \mu(x)dx = \int_G \varphi_\alpha(x) \int_G f(xy^{-1})d\mu(y)dx$$

$$= \int_G \int_G \varphi_\alpha(xy)f(x)dxd\mu(y)$$

$$= \int_G f(x) \int_G \varphi_\alpha(xy)d\mu(y)dx.$$

III

On va maintenant approcher la dernière intégrale de (6) par $\int_G \varphi_\alpha(y)d\mu(y)$. On a

$$(7) \quad \int_G f(x) \int_G \varphi_\alpha(xy)d\mu(y)dx - \int_G \varphi_\alpha(y)d\mu(y) =$$

$$= \int_G f(x) \int_G [\varphi_\alpha(xy) - \varphi_\alpha(y)] \, d\mu(y) \, dx$$

Alors, on peut choisir un voisinage V de l'élément unité e de G tel que, pour $x \in V$, $\int_G [\varphi_\alpha(xy) - \varphi_\alpha(y)] \, d\mu(y)$ soit aussi petit qu'on veut. On peut alors choisir f portée par V. Cela termine la démonstration.

Le théorème précédent n'est pas aussi fort que le théorème correspondant (théorème 3, exposé 1) pour les fonctions presque périodiques. C'est parce que, pour une mesure $\mu \in W\mathfrak{M}(G)$ arbitraire, on ne connaît pas une méthode pour trouver un système $\{\varphi_\alpha\}$ satisfaisant à la condition d'équicontinuité du théorème. D'autre part, pour les cas de mesures $\hat{\nu}$, transformées de Fourier d'une mesure ν sur Γ, le système $\{\varphi_\gamma\}$ se trouve par la même méthode que pour le cas de fonctions. Le cas des transformées de Fourier est l'un des plus importants des mesures faiblement presque périodiques.

On passe maintenant à un autre aspect de la presque périodicité. On a identifié déjà l'espace $SAP(G)$ à l'espace $C(G_b)$. Donc, à cause de la décomposition $WAP(G) = SAP(G) \oplus WAP_0(G)$, on a une application linéaire continue de $WAP(G)$ sur $C(G_b)$ qui prolonge l'injection naturelle de $SAP(G)$ dans $C(G)$. Or il est naturel de chercher un analogue de ces transformations pour les mesures.

III

Lemme 1.-

Soit $g \in SAP(G)$ et $\mu \in \mathcal{WGP}(G)$ ($\mathcal{SGP}(G)$). Alors la mesure produit $g\,\mu$ (c.a.d., $d(g\mu)(x) = g(x)dx(x)$) est fortement faiblement presque périodique.

Démonstration.-

Supposons d'abord que g soit un caractère γ. Les caractères sont toujours fortement presque périodiques. Soit $f \in K(G)$. Alors, on constate tout de suite que $f * (\gamma\mu) = \gamma\,[(f\bar{\gamma}) * \mu]$, qui est évidemment faiblement presque périodique. Cela démontre l'assertion pour les caractères $g = \gamma$, donc pour g, combinaison linéaire de caractères. Soit maintenant g une fonction fortement presque périodique arbitraire et soit g_n une suite de combinaisons linéaires de caractères (théorème 1, exposé 1) convergeant uniformément vers g. Soit $f \in K(G)$. On a

$$(8) \quad | f*(g\mu)(x) - f*(g_n*\mu)(x)| = \left|\int_G f(xy^{-1})\,[g(y)-g_n(y)]\,d\mu(y)\right|$$

$$\leq ||g - g_n||_\infty \sup_x \int_G | f(xy^{-1})\,d\mu(y).$$

Le fait que le sup dans (8) existe découle du fait que μ est à translatées bornées. L'inégalité de (8) entraîne que $||f*(g\mu) - f*(g_n\mu)||_\infty$ tend vers 0, ce qui montre que $f*(g\mu)$ est fortement (faiblement) presque périodique, et qu'il en est de même de $g\,\mu$. Cela achève la démonstration.

IV

Dans l'exposé antérieur, un lemme affirmait que les mesures fortement (faiblement) presque périodiques sont stables pour la multiplication par les fonctions fortement presque périodiques. Cela nous permet de définir une application linéaire de $\mathcal{WGP}(G)$ dans $\mathcal{M}(G_b)$, qui est injective sur $\mathcal{SGP}(G)$, prolonge l'application classique de WAP(G) dans $C(G_b)$, (précisée dans l'exposé antérieur).

Théorème 1.-

Il existe une application linéaire, et une seule, de $\mathcal{WGP}(G)$ dans $\mathcal{M}(G_b)$, notée $\mu \longrightarrow \mu_b$, telle que, quel que soit $\mu \in \mathcal{WGP}(G)$ et $g \in SAP(G) = \mathcal{C}(G)$,

(1) $$M(g\mu) = \int_{G_b} g(x_b)d\mu_b(x_b).$$

Cette application est injective sur $\mathcal{SGP}(G)$ et prolonge l'application $f \longrightarrow {}_sf$ de WAP(G) dans $C(G_b) = SAP(G)$, ou ${}_sf$ est la partie fortement presque périodique de f dans la décomposition de Eberlein de $f \in WAP(G)$.

Démonstration.-

Etant donnée $\mu \in \mathcal{WGP}(G)$, l'application $g \longrightarrow M(g\mu)$ définit une forme linéaire sur $SAP(G) = C(G_b)$. Pour voir que cette forme est bornée, on choisit une fonction $f \in K(G)$, telle que $\lambda\ (f) = 1$.

On a :

(2) $$M(g\mu) = M(\ f * g\ \mu\ ) \leq \ ||f * g\ \ \mu||_\infty.$$

(3) $$|\ f * g\ \mu(x)| = |\int_G f(xy^{-1})g(y)d\mu(y)| \ \leq \ \int_G|\ f(xy^{-1})||g(y)|d|\mu|\ (y)$$
$$||g||_\infty||\ \ |f| * |\mu|\ \ ||_\infty \quad ,$$

d'où on obtient $|\ M(g\mu)\ | \leq \ ||g||_\infty\ \ ||\ \ |\ f\ | * |\ \mu\ |\ ||_\infty$. Donc, pour la forme linéaire $g \longrightarrow M(g\mu)$ est bornée. On en tire qu'il existe une mesure μ_b sur G_b et une seule satisfaisant à (1). Donc on en obtient l'application linéaire $\mu \longrightarrow \mu_b$ requise. Pour montrer que cette application est injective sur $\mathcal{SGP}$ (G) , on suppose que

IV

$\mu \in \mathcal{SGP}(G)$ et que $\mu_b = 0$. Cela entraîne que, quel que soit $f \in K(G)$, $M((f\gamma) * \gamma\mu) = M(\gamma\mu)\lambda(f\gamma) = \mu_b(\gamma)\lambda(f\gamma) = 0$, pour tout caractère γ de G. D'autre part, on constate que $(f\gamma)*(\gamma\mu)=\gamma(f*\mu)$. Donc $M(\gamma(f*\mu)) = 0$ pour tout caractère. Cela veut dire que tous les coefficients de Fourier-Bohr de la fonction presque périodique $f * \mu$ s'annulent, donc que $f * \mu = 0$, ce qui entraîne $\mu = 0$, d'où l'injectivité de $\mu \to \mu_b$ sur $\mathcal{SGP}(G)$. Pour voir que cette application prolonge l'application $f \longrightarrow {}_s f$ sur WAP(G), on remarque que, pour toute $g \in SAP(G)$, (voir la proposition 3 du premier exposé) que ${}_s(gf) = g_s f$, d'où
$M(gf) = M(g_s f) = \int_{G_b} g(x_b)_s f(x_b)dx_b$, pour $f \in WAP(G)$. Cela entraîne que la mesure sur ^bG_b correspondant à la mesure $f \in \mathcal{WGP}(G)$, satisfaisant (1) est ${}_s f$, ce qui fallait démontrer.

On remarquera que, tandis que la mesure $\mu \in \mathcal{WGP}(G)$ n'est pas forcément finie, la mesure μ_b l'est, étant une mesure sur le groupe compact G_b. On a maintenant le moyen d'obtenir pour les mesures l'analogue de la décomposition d'Eberlein pour les fonctions faiblement presque périodiques. On appelle mesure faiblement presque périodique <u>nulle</u> une mesure $\mu \in \mathcal{WGP}(G)$ telle que $\mu_b = 0$. On peut montrer d'après un raisonnement employé dans la démonstration du théorème antérieur qu'une mesure $\mu \in \mathcal{WGP}(G)$ est nulle si et seulement si, quel que soit $f \in K(G)$, $f * \mu$ est une fonction faiblement presque périodique nulle. On note $\mathcal{WGP}_o(G)$ l'ensemble de toutes les mesures faiblement presque périodiques nulles. C'est évidemment un sous espace vectoriel, qui est fermé en vertu de la dernière caractérisation de ses éléments. Il est évidemment stable pour les translations et la conjugaison. Il est également stable pour la réflexion (ce qui se démontre à l'aide de la dernière caractérisation des éléments de $\mathcal{WGP}_o(G)$), donc par l'involution. De ces faits, il résulte que $\mathcal{WGP}_o(G)$ est stable pour la convolution par les mesures finies. Enfin $\mathcal{WAP}_o(G)$ est évidemment stable pour la multiplication par les fonctions fortement presque périodiques.

Théorème 2.- (Décomposition d'Eberlein généralisée)

Toute $\mu \in \mathcal{WAP}(G)$ possède une décomposition unique de la forme

(3) $\mu = {}_s\mu + {}_o\mu$,

où ${}_s\mu \in \mathcal{SAP}(G)$ et ${}_o\mu \in \mathcal{WAP}_o(G)$.

Démonstration.-

Soit $\mu \in \mathcal{WAP}(G)$. Pour toute $f \in K(G)$, $f * \mu \in$ WAP(G) et possède une décomposition d'Eberlein.

(4) $f * \mu = {}_s(f * \mu) + {}_o(f * \mu)$.

On définit, de façon formelle,

(5) ${}_s\mu(f) = {}_s(f' * \mu)(e)$ et ${}_o\mu(f) = {}_o(f' * \mu)(e)$.

Montrons, par exemple que ${}_s\mu$ est une mesure. Elle est bien une forme linéaire sur $K(G)$. Pour cela, il faut se rappeler que le projecteur $g \longrightarrow {}_sg$ de WAP(G) dans SAP(G) est borné, donc qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que $\| {}_sg \|_\infty < \alpha \| g \|_\infty$ pour tout $g \in$ WAP(G) . Soit maintenant A un compact de G et $\beta_A > 0$ tel que $| \mu(f) | < \beta_A \|f\|_\infty$, quel que soit $f \in K(G)$. On a alors :

(6) $| {}_s\mu(f)| = |{}_s(f' * \mu)(e)| < \|{}_s(f' * \mu)\|_\infty \leq \alpha \|f' * \mu\|_\infty$

D'autre part, pour tout $x \in G$, $|f' * \mu(x)| = |\mu(\delta_x * f')| \leq \beta_A \|f\|_\infty$, où $\beta_A = \sup_x |\delta_x * \mu|(A) < +\infty$. Il s'ensuit que $| {}_s\mu(f)| < \beta_A \| f \|_\infty$. Donc μ_s est une mesure. On montre maintenant que ${}_s(f * \mu) = f * {}_s\mu$. D'abord, on voit que, quel que soit $x \in G$, $\delta_x * {}_sf = {}_s(\delta_x * f)$ pour toute $f \in$ WAP(G). Cela tient au fait que la décomposition d'Eberlein de f est stable pour la convolution par les mesures finies. Or, on a, pour $x \in G$

IV

$$(7) \quad f *_s \mu(x) = {}_s\mu(\delta_x * f') = {}_s((\delta_x * f') * \mu)(e)$$
$$= {}_s((\delta_x - 1 * f) * \mu)(e) = (\delta_x - 1 \overset{*}{_s} (f * \mu))(e)$$
$$= {}_s(f * \mu)(x).$$

Un raisonnement pareil montre que ${}_o\mu$ est une mesure , et que ${}_o(f * \mu) = f *_o \mu$, donc que ${}_o\mu$ est une mesure faiblement presque périodique nulle. Alors (4) peut s'écrire de la forme

$$(8) \quad f * = f *_s \mu + f *_o \mu ,$$

d'où on obtient la décomposition (3). Cela achève la démonstration. On doit signaler à l'égard du théorème 1, que, tandis que l'application $f \longrightarrow {}_sf$ de WAP(G) dans $C(G_b)$ est surjective, l'application $\mu \longrightarrow \mu_b$ ne l'est jamais si G n'est pas compact. C'est, par exemple, parce que, par exemple, la mesure δ_e dans G_b ne provient pas d'une mesure presque périodique sur G. En fait, on croit avoir démontrer que dans le cas où G n'est pas compact, toute mesure sur $g \in G_b$ de la forme μ_b est continue.

On passe maintenant à des exemples. On sait déjà que toute fonction $f \in K(G)$ est faiblement presque périodique nulle si G n'est pas compact. Puisque $WAP_o(G)$ est complet, il en est de même pour toute $f \in C_o(G)$, (continue s'annulant à l'infini). Donc, pour toute mesure finie μ , et $f \in K(G)$, $f * \mu$ est une fonction continue nulle à l'infini. Cela démontre que μ est une mesure faiblement presque périodique nulle. Cela et le fait que les fonctions fortement presque périodiques sont, en général, des mesures non bornées montre la nécessité de considérer les mesures non bornées dans la théorie de la presque périodicité des mesures. Pour un autre exemple, on considère un sous groupe fermé H de G et la mesure de Haar λ_H de H. On peut considérer λ_H comme mesure sur G , concentrée sur H. Alors, λ_H est toujours faiblement presque périodique. Pour le voir, on montre que, pour toute fonction continue à support compact φ sur Γ , le groupe dual

IV

de G, $\hat{\varphi} * \lambda_H$ et la transformée de Fourier-Stieltjes de la mesure finie $\varphi \lambda_{H^\perp}$, où $\lambda_{H^\perp}$ est la mesure de Haar du groupe orthogonal $H_\perp$ de H dans Γ.

En vertu d'un théorème de Eberlein, cela entraîne que $\hat{\varphi} * \mu$ est faiblement presque périodique. Après cela, on peut montrer que, quel que soit $f \in K(G)$ on peut approcher $f * \lambda_H$ uniformément par les fonctions du type $\hat{\varphi} * \lambda_H$ comme tout à l'heure. Cela montre la presque périodicité de $f * \lambda_H$ et donc de λ_H. On peut en plus montrer que λ_H est fortement presque périodique si et seulement si $H_\perp$ est discret, et, ce qui revient au même, si G/H est compact. Dans ce cas, la mesure $(\lambda_H)_b$ dans G_b s'identifie à la mesure de Haar du compactifié de Bohr H_b, qui peut être considéré comme sous groupe fermé de G_b. Dans le cas contraire, la mesure faiblement presque périodique λ_H est nulle.

J. GIL DE LAMADRID
Department of Mathematics
University of Minnesota
MINNEAPOLIS - Minnesota 55455 - USA