Astérisque

C. Belaiche-Fremond
M. Sueur-Pontier

Théorème de renouvellement pour les groupes abéliens localement compacts

Astérisque, tome 4 (1973), p. 17-25
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1973__4__17_0>

THEOREME DE RENOUVELLEMENT

POUR LES GROUPES ABELIENS LOCALEMENT COMPACTS

par

C. BELAICHE-FREMOND (*) et M. SUEUR-PONTIER

(Paris)

(*) Equipe de recherche n° 1
" Processus stochastiques et applications "
dépendant de la section n° 1 Mathématiques et Informatique
associée au C.N.R.S.

Dans cet article, nous donnons une démonstration du théorème de renouvellement pour les groupes abéliens localement compacts qui n'utilise pas d'analyse harmonique ([5]), mais des outils probabilistes : théorie du potentiel et principe du maximum. Nous nous sommes inspirés également des démonstrations de C. Herz ([2]) et de D. Revuz ([6]).

Soit G un groupe abélien localement compact et μ une mesure de probabilité sur G. On suppose que le sous groupe fermé engendré par le support de μ est égal à G. On considère la marche aléatoire définie par μ, c'est à dire la chaîne de Markov de probabilité de transition $\varepsilon \cdot \mu$. Nous considérons le cas où cette marche est <u>transiente</u>, le potentiel associé à la mesure μ, c'est à dire $\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}$ est alors une mesure de Radon. On désigne par λ la mesure de Haar sur G et par $C_k(G)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans G, et $C_k^+(G)$ l'ensemble des fonctions continues positives à support compact dans G. Pour toute fonction f de $C_k(G)$, l'expression $\nu f(x)$ représente $\nu(x,f)$, où $\nu(x,.)$ est la mesure produit de convolution $\varepsilon_x * 0$, pour tout x de G.

<u>Lemme 1.-</u>

Pour toute fonction f de $C_k(G)$ et pour tout compact K de G, $\lim_{x\to\infty} [\nu f(x+y) - \nu f(x)] = 0$, uniformément en y dans K.

<u>Lemme 2.-</u>

Pour toute fonction f de $C_k^+(G)$, le produit $\nu f(x)\, \nu f(-x)$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε tel qu'on ait l'inégalité :

$$\nu f(x)\, \nu f(y) \leq [\nu f(x+y) + \varepsilon]\, \|\nu f\|$$

pour tout x hors de K_ε et pour tout y de G.

Lemme 3.-

Pour toute fonction f de $C_k^+(G)$, l'ensemble $\{\nu(x,f)$, $x \in G\}$ admet au plus une valeur d'adhérence strictement positive quand x tend vers l'infini.

La démonstration de ces lemmes est, à très peu de choses près, la même que dans Herz([2], prop. 3, 4 et 5) ou dans Revuz ([6], chapitre V).

Le lemme 3 admet le corollaire suivant dont la démonstration utilise le théorème de Choquet - Deny :

Corollaire 4.-

Pour la topologie vague, l'ensemble $\{\nu(x,.)\ ,\ x \in G\}$ admet comme valeurs d'adhérence quand x tend vers l'infini, soit la seule valeur 0, soit les valeurs 0 et $C . \lambda$ avec $C > 0$.

On peut alors donner les définitions suivantes :

une marche aléatoire transiente est dite de type I si elle est définie par une probabilité μ dont le potentiel ν est tel que $\nu(x,.)$ converge vaguement vers zéro quand x tend vers l'infini. Elle est dite de type II sinon.

Les lemmes qui suivent sont énoncés dans [5] , mais la démonstration en est différente.

Lemme 5.-

Si le groupe G admet un sous - groupe ouvert G_1 , compactement engendré mais non compact, tel que G/G_1 soit infini, alors toute probabilité μ définit une marche de type I.

<u>Démonstration</u> :

Supposons que μ définisse une marche de type II. Il existe alors une constante C strictement positive telle que $C \cdot \lambda$ soit valeur d'adhérence de $\{ \varepsilon_x * \nu \}$ quand x tend vers l'infini. Soit donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendant vers l'infini telle que $\varepsilon_{x_n} * \nu$ converge vaguement vers $C \cdot \lambda$. Nous allons montrer que ceci est impossible en distinguant deux cas :

1°) Supposons qu'une infinité de classes modulo G_1 contiennent au moins un élément de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On peut alors extraire une sous suite que nous appelons encore $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tendant vers l'infini et telle que les classes $x_n + G_1$ soient disjointes.

Par ailleurs, comme G_1 est compactement engendré mais non compact, d'après [4], il existe un élément x de G_1 tel que $n x$ tende vers l'infini. Alors, pour f dans $C_k^+(G)$, d'après le lemme 2

$$\nu f (n x) \, \nu f (- n x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 .$$

Quitte à changer x en $- x$, on en déduit qu'il existe une suite d'entiers $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\nu f (k_n x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Pour n_o fixé, $\nu f (k_n x + x_{n_o})$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini puisque cette quantité a même limite que $\nu f (k_n x)$ d'après le lemme 1.

Donc, pour tout n, il existe un entier h_n tel que

$$\nu f (x_n + h_n x) \leq C/2 \, \lambda (f).$$

L'ensemble des entiers $k > 0$ tels que $\nu f (x_n + h x) > C/2 \, \lambda (f)$ est non vide pour n fixé assez grand puisque $\nu f (x_n)$ tend vers $C \, \lambda(f)$ par hypothèse, et est majoré par h_n. On peut donc poser :

$$\ell_n = \sup \{k > 0, \nu f (x_n + k_x) > C/2 \, \lambda (f)\} .$$

Dans ces conditions, on a

$$\nu\, f\, (x_n + \ell_n x) > C/2\ \lambda\ (f)$$
$$\nu\, f\, [x_n + (\ell_n+1)\ x] \leq C/2\ \lambda\ (f),$$

ce qui, si $C > 0$, est contradictoire avec le fait que $\nu\, f\, (x_n + \ell_n x) - \nu\, f\ \ x_n + \ell_n x + x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (car $x_n + k\ x$ tend uniformément en k vers l'infini quand $n \longrightarrow \infty$ grâce à l'hypothèse que le sous groupe G_1 est ouvert).

2°) Il faut donc supposer maintenant qu'une classe modulo G_1, soit $x_o + G_1$, contient une infinité d'éléments de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ceux ci peuvent s'écrire $x_n = x_o + y_n$, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers l'infini dans G_1 et vérifiant

$$\nu\, f\, (y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} C\ \lambda\ (f)$$

puisque $\nu\, f\, (x_n) - \nu\, f\, (y_n) \longrightarrow 0$.

Les éléments y_n sont non compacts à partir d'un certain rang, puisque dans le groupe G_1 compactement engendré, l'ensemble des éléments compacts est compact. Donc, pour n fixé assez grand, la suite $k\ y_n$ tend vers l'infini avec k. Pour n fixé, la suite $\varepsilon_{ky_n} * \nu$ admet au plus $C\ .\ \lambda$ et 0 comme valeurs d'adhérence. Si pour tout n, elle n'admet que 0 comme valeur d'adhérence, elle tend vers zéro et on peut trouver un entier k_n tel que :

$$\nu\, f\, (k_n y_n) > C/2\ \lambda\ (f) \text{ et } \nu\, f\, [\,(k_n+1)\ y_n\,] \leq C/2\ \lambda\ (f)$$

puisque par hypothèse $\nu\, f\, (y_n)$ tend vers $C\ \lambda\ (f)$. Donc, en prenant au besoin une suite extraite, on peut dire que $\nu f\, (k_n\ y_n)$ tend vers $C\ \lambda\ (f)$ et $\nu\, f[(k_n+1)\ y_n]$ vers zéro. Prenant n assez grand pour que y_n soit hors du compact K_ε du lemme 2, on a :

$$\nu\, f\, (k_n y_n)\ \nu f(y_n) \leq M\ \ [\,\varepsilon + \nu\, f\, [\,(k_n+1)\ y_n]]\ .$$

Le premier membre de cette inégalité tend vers $C\ \lambda(f)^2$, et le second membre vers $M\ \varepsilon$, on aboutit à une contradiction.

Donc, la suite $\varepsilon_{ky_{n_o}} * \nu$ admet aussi $C . \lambda$ comme valeur d'adhérence pour un entier n_o. Par suite, $(z_n)_{n \in N}$ tendant vers l'infini, telle que les classes $z_n + G_1$ soient disjointes et telle que $\nu f (z_n)$ tende vers zéro. Posant alors $y_{n_o} = x$, $\nu f (kx)$ admet $C \lambda(f)$ pour valeur d'adhérence, et en remarquant que $z_n + k x$ tend uniformément en k vers l'infini avec n, un raisonnement analogue à celui de 1° aboutit à une contradiction.

<u>Lemme 6.-</u>

Si le groupe G peut se mettre sous la forme $\mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2} \oplus H$, où H est un sous groupe compact et $d_1 + d_2 > 1$, toute probabilité μ définit une marche de type I.

On peut se ramener au cas où $G = \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$, car pour toute fonction f de $C_k^+ (G)$, les fonctions $\nu f (x+h)$ et $\nu f (x)$ ont même comportement quand x tend vers l'infini dans $\mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$ d'après le lemme 1.

Si on a $d z \geq 1$, on est immédiatement ramené au lemme précédent en considérant dans G le sous groupe $\mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_z - 1}$.

Sinon, on a $d z = 0$, $d_1 > 1$. Si la fonction continue, $\nu f (x)$, $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, admettait deux valeurs d'adhérence distinctes 0 et b, pour tout $\varepsilon > 0$, il existerait une boule $S_{d_1 - 1}$ de rayon assez grand où la fonction prendrait toutes les valeurs comprises entre ε et $b - \varepsilon$ et $\nu f(x)$ admettrait une infinité de valeurs d'adhérence en contradiction avec le corollaire 4.

<u>Lemme 7.-</u>

Si tous les éléments de G sont compacts toute probabilité μ définit une marche de type I.

Démonstration (d'après [4] , p. 259-260)

Supposons la marche de type II et soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\varepsilon_{z_n} * \nu$ converge vers $C\ \lambda$ $(C > 0)$. Pour tout n, l'adhérence de $\{ k\, z_n\ ,\ k > 0 \}$ est un semi groupe compact donc un sous groupe de G, et par conséquent contient $-z_n$. C'est dire qu'il existe une suite $(k_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'entiers telle que $k_p z_n$ converge vers $-z_n$ lorsque p tend vers l'infini.

Soit f dans $C_k^+(G)$. Comme ν f est uniformément continue, pour tout n et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier k_n tel que

$$\nu\, f\, (k_n z_n) \leq \nu\, f\, (-z_n) + \varepsilon/_n$$

D'après le lemme 2, $\nu\, f\, (-z_n)$ tend vers zéro, puisque $\nu\, f\, (z_n)$ tend vers $C\ \lambda\ (f)$ et par conséquent $\nu\, f\, (k_n\, z_n)$ tend vers zéro. Soit $M > \max\, (||\nu f||\ ,\ C\ \lambda\ (f)/_4)$. Au moins à partir d'un certain rang, on peut définir un entier h_n par

$$h_n = \sup \{ k\ ;\ 0 < k \leq h_n - 1\ ,\ \nu\, f\, (kz_n) \geq \frac{[(C\ \lambda(f)]}{4\ M} \}$$

On a alors :

$$\nu\, f\, (h_n z_n) \geq \frac{|C\ \lambda(f)\ |^2}{4\ M}$$

$$\nu\, f\, ((h_{n+1}) z_n) < \frac{[C\ \lambda(f)]^2}{4\ M}$$

D'après le lemme 2, on a pour n assez grand

$$\nu\, f\, (z_n)\ \nu\, f\, (h_n z_n) \leq M\ [\ \varepsilon + \nu\, f\, ((h_{n+1}) z_n)\ ]$$

et de plus

$$\nu\, f\, (z_n) \geq C\ \ \lambda\ (f)\ /\ 2.\ \text{Donc}$$

$$\nu\, f\, (h_n z_n) \leq \frac{2\ M}{C\lambda\ (f)}\ [\ \varepsilon + \nu\, f\, ((h_{n+1}) z_n)\ ]$$

$$\leq \frac{2\ M\ \varepsilon}{C\ \lambda(f)} + \frac{C\ \lambda(f)}{2} \leq 2\ \varepsilon + \frac{C\ \lambda(f)}{2}$$

et $\nu\, f\, ((h_{n+1})\ z_n \geq \frac{C\ \lambda(f)}{2\ M}\ \nu\, f\, (h_n z_n) - \varepsilon \geq \frac{[\ C\ \lambda(f)]^3}{8\ M^2} - \varepsilon$.

En choisissant ε assez petit, on peut trouver des constantes a, b, c et d telles que pour n assez grand, on ait :

$$0 < a \leq \nu f (h_n z_n) \leq b < C \lambda (f)$$

$$0 < c \leq \nu f ((h_n+1) z_n) \leq d < c \lambda (f)$$

On peut extraire de l'une des deux suites $(h_n z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $((h_n+1) z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous suite g_n qui converge vers l'infini, car, sinon, la suite (z_n) ne convergerait pas vers l'infini. Mais la suite $\nu f (y_n)$ ne peut avoir pour valeurs d'adhérence que 0 et $C \lambda (f)$, ce qui est contradictoire.

On montre alors comme dans [4] la proposition suivante.

Proposition 8.-

Lorsque la probabilité μ définit une marche de type II, le groupe G est nécessairement de la forme $\mathbb{R} \oplus H$, ou $\mathbb{Z} \oplus H$, où H est un sous groupe compact.

On peut alors montrer le théorème de renouvellement.

Théorème 9.-

Si les mesures $\nu (x,.)$ ne convergent pas vers zéro quand x tend vers l'infini, le groupe G est de la forme $\mathbb{R} \oplus H$ (ou $\mathbb{Z} \oplus H$), où H est un sous groupe compact de G.

De plus, si on désigne par Ψ la projection canonique de G sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{Z}$) et si on note $m = \int \Psi (x) \mu (dx)$, m est fini et non nul.

Si $m > 0$ (resp. < 0) , $\nu (x,.)$ converge vaguement vers $m^{-1} \lambda$ (resp. 0) lorsque $\Psi (x)$ tend vers $- \infty$, et vers 0 (resp. $(m)^{-1} \lambda$) lorsque $\Psi (x)$ tend vers $+ \infty$.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du résultat correspondant montré par C. Herz ([2]) et D. Revuz ([6]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. FELLER
" An introduction to probability theory and its application "
II, Wiley, 1962

[2] Carl. S. HERZ
" Théorème de renouvellement "
Annales de l'Institut Fourier. Grenoble. 15.1. (1965)
PP. 169-188

[3] E. HEWITT and K.A. ROSS
" Abstract harmonic analysis "
I. Academic Press. N.Y. (1963)

[4] A. KESTEN and F. SPITZER
" Random walks on countably infinite abelian groups "
Acta Mathematica 74 (1963)

[5] S.C. PORT and C.J. STONE
" Potential theory of random walks on abelian groups "
Acta Mathematica 122 : 1-2 (1969)

[6] D. REVUZ
" Cours multigraphié de 3ème cycle " (1970)
Chapitre V