

Astérisque

TEWFIK SARI

Sur la théorie asymptotique des oscillations non stationnaires

Astérisque, tome 109-110 (1983), p. 141-158

http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__109-110__141_0

© Société mathématique de France, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LA THÉORIE ASYMPTOTIQUE
 DES OSCILLATIONS NON STATIONNAIRES
 Tewfik SARI

A. INTRODUCTION

La méthode d'approximations asymptotiques de KRYLOV-BOGOLIUBOV-MITROPOLSKI (notée méthode KBM et appelée aussi méthode de centrage ou de moyennisation selon les auteurs), objet de nombreuses études, constitue un chapitre important de la théorie des oscillations non stationnaires (voir par exemple BOGOLIUBOV et MITROPOLSKI [3], HALE [7], MITROPOLSKI [9], ROSEAU [14] et VOLOSOV [17] qui contiennent aussi de nombreuses références).

Le problème central consiste en l'étude du système

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon F(t, x) \qquad x(0) = a \qquad (1)$$

où $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Selon la méthode KBM, la solution $x(t, \epsilon)$ du système non autonome (1) est approchée, lorsque ϵ tend vers zéro, par la solution $\xi(\epsilon t)$ du système autonome

$$\frac{d\xi}{dt} = \epsilon F_0(\xi) \qquad \xi(0) = a \qquad (2)$$

où $F_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la moyenne de la fonction $F(t, x)$ par rapport à la variable t

$$F_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t, \xi) dt \qquad (3)$$

D'autres conditions sur F sont utiles et seront précisées dans la suite. L'approximation de $x(t, \epsilon)$ par $\xi(\epsilon t)$ est valable dans un intervalle

$$0 \leq t \leq L/\epsilon \qquad (4)$$

où L est une constante arbitraire. Sous certaines conditions ce domaine de validité est étendu à $[0, +\infty[$ et des approximations d'ordre supérieur peuvent être calculées.

L'objet de cet article est de présenter une approche nouvelle de ce problème, basée sur des techniques de l'analyse non standard (*). Plusieurs raisons m'ont poussé à réexaminer cette méthode ; d'une part l'ANS fournit des outils bien adaptés à ce domaine et permet une formulation très naturelle du problème ; d'autre part, les preuves classiques sont longues et difficiles et n'expliquent pas le

(*) Pour une présentation détaillée de l'analyse non standard, en plus de l'ouvrage original de ROBINSON [13], se reporter à NELSON [10] ou à LUTZ et GOZE [8] qui contient de nombreuses informations sur l'utilisation de l'ANS dans des problèmes de perturbations.

phénomène (*) ; enfin, on peut se demander dans quelle mesure les conditions habituellement requises sur $F(t,x)$ sont nécessaires.

La méthode décrite ici donne une réponse satisfaisante à ces questions. Les préliminaires utiles pour la suite sont rappelés au paragraphe B. Le paragraphe C contient la démonstration du théorème KBM ; on y montre comment, vue à l'échelle $\tau = \epsilon t$, la fonction $x(t,\epsilon)$ se présente comme un train de petites oscillations rapides portées par la fonction $\xi(\epsilon t)$. Au paragraphe D, les hypothèses du théorème KBM sont commentées, mettant en évidence un problème du type (1) ne vérifiant pas toutes les hypothèses du théorème KBM, mais qui peut être abordé par la méthode proposée ici. L'article se termine par certaines généralisations et applications à d'autres problèmes d'oscillations non linéaires (paragraphe E) et par la description des approximations d'ordre supérieur (paragraphe F). Les approximations uniformes dans $[0, +\infty[$ et d'autres applications feront l'objet d'une publication ultérieure.

B. PRÉLIMINAIRES

Soit t une variable réelle, ϵ un nombre réel infiniment petit (i.p.) positif, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction standard continue et $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution du système (1) où a est un point limité de \mathbb{R}^n . On suppose qu'il existe une fonction standard continue $F_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tout x limité dans \mathbb{R}^n et tout réel T infiniment grand (i.g.) on ait

$$F_0(x) \approx \frac{1}{T} \int_0^T F(t,x) dt \tag{5}$$

Il s'agit de mettre en évidence des conditions sur le second membre $F(t,x)$ de (1) pour que le système (2) admette une solution $\xi(\epsilon t)$ telle que $x(t) \approx \xi(\epsilon t)$ tant que $\xi(\epsilon t)$ et ϵt sont limités. A l'échelle $\tau = \epsilon t$, les systèmes (1) et (2) s'écrivent (avec $y(\tau) = x(\tau/\epsilon)$)

$$\frac{dy}{d\tau} = F(\tau/\epsilon, y) \qquad y(0) = a \tag{6}$$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = F_0(\xi) \qquad \xi(0) = a \tag{7}$$

La fonction $y(\tau)$ présente de petites oscillations rapides autour de $\xi(\tau)$ qui varie lentement. Cette situation suggère d'utiliser la technique de stroboscopie infinitésimale de CALLOT [4] qui consiste à observer le graphe G de la fonction $y(\tau)$

(*) Ces preuves sont basées essentiellement sur des évaluations d'intégrales comme dans [3], ou apparaissent comme des conséquences de théorèmes plus généraux de dépendance continue des solutions par rapport à un paramètre comme dans [14]. Ma propre expérience m'indique que de telles présentations ne laissent que peu de place à la compréhension du phénomène, dont - à ma connaissance - la seule tentative classique d'explication est l'approche de ECKHAUS [6].

en des instants successifs infiniment proches τ_i , $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \dots$ tels que l'ombre de la suite de points $(\tau_i, y_i = y(\tau_i))$ coïncide avec l'ombre de G. La clef de la méthode consiste alors à choisir les instants τ_i tels que

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} \approx F_0(y_i) \quad (8)$$

Dans ce cas, les points de la suite (τ_i, y_i) sont précisément ceux que l'on construit en intégrant l'équation (7) par la méthode de PEANO. Il en résulte alors que $y(\tau)$ et $\xi(\tau)$ sont infiniment proches tant que τ et $\xi(\tau)$ sont limités (pour les détails voir [4]).

Les deux résultats suivants interviennent constamment dans la suite

i) le principe de permanence (ou lemme de Robinson) dont l'importance n'est plus à démontrer et dont une conséquence est qu'une fonction réelle i.p. pour tout réel limité, le demeure jusqu'à un réel i.g.

ii) le lemme suivant

Lemme 1 - Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad x(0) = x_0$$

où $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction continue, et x_0 est un point limité de \mathbb{R}^n . S'il existe une fonction continue $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tous t et x limités, $f(t, x)$ et $f_0(t)$ sont limités et infiniment proches, alors pour tout t limité, on a

$$x(t) \approx x_0 + \int_0^t f_0(s) ds$$

La conclusion est évidemment vraie si $f_0(t)$ est une fonction standard ; c'est une conséquence du lemme fondamental de la théorie des perturbations régulières, dont l'importance a été soulignée dès les premiers travaux sur les applications de l'ANS à des problèmes de perturbations - voir DIENER (lemme de l'ombre courte [5]), LUTZ et GOZE [8] ou TROESCH [16] ; ce résultat affirme que sous certaines hypothèses les courbes intégrales de deux champs de vecteurs infiniment proches d'un champ de vecteurs standard, issues d'un même point limité, restent infiniment proches sur tout intervalle de temps limité où elles sont définies et limitées.

Sous les conditions du lemme 1, les fonctions $f(t, x)$ et $f_0(t)$ ont une ombre commune, mais celle-ci n'est pas nécessairement continue, ce qui ne permet pas d'utiliser le résultat rappelé ci-dessus.

Preuve du lemme 1 - La propriété $f(t, x) \approx f_0(t)$ est vraie pour tout x limité et le reste - d'après le principe de permanence - dans une boule B de rayon i.g. centrée à l'origine. Dans cette boule B, $f(t, x)$ est donc limité (car $f_0(t)$ est limité). Supposons qu'il existe un réel t_0 limité tel que $x(t_0)$ soit i.g. ; on peut choisir alors un instant \bar{t} plus petit que t_0 tel que $x(\bar{t})$ soit i.g. et que pour tout t inférieur ou égal à \bar{t} , $x(t)$ soit dans la boule B. On en déduit que

$$x(\bar{t}) = x_0 + \int_0^{\bar{t}} f(s, x(s)) ds$$

est limité, d'où une contradiction. Par suite $x(t)$ est limité pour tout t limité et

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds \approx x_0 + \int_0^t f_0(s) ds$$

ce qui démontre le lemme.

C. LE THÉORÈME KBM

Dans les applications, le second membre $F(t, x)$ de (1) est une fonction presque périodique en t , et bien souvent d'ailleurs une somme de fonctions périodiques. Pour de telles fonctions la moyenne $F_0(\xi)$ vérifie

$$F_0(\xi) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F(s, \xi) ds \tag{3'}$$

uniformément par rapport à t . Je vais tout d'abord établir le théorème KBM avec l'hypothèse plus forte (3') que l'on traduit par : pour tout ξ limité dans \mathbb{R}^n , pour tout t dans \mathbb{R} et tout T i.g. on a

$$F_0(\xi) \approx \frac{1}{T} \int_t^{t+T} F(s, \xi) ds \tag{5'}$$

Observons à l'aide du stroboscope la fonction $y(\tau)$ solution du système (6). Soit τ_i l'un des instants d'observation ; notons $y_i = y(\tau_i)$ et $t_i = \tau_i/\epsilon$. L'instant d'observation suivant τ_{i+1} doit être infiniment proche de τ_i et satisfaire à la condition (8). Effectuons le changement de variable

$$r = \frac{\tau - \tau_i}{\epsilon} \quad \text{et} \quad Y(r) = \frac{y(\tau_i + \epsilon r) - y_i}{\epsilon} \tag{9}$$

qui permet d'observer le graphe de la fonction $y(\tau)$ au voisinage de son point (τ_i, y_i) , à l'aide d'une loupe de grossissement $1/\epsilon$, centrée en (τ_i, y_i) . Le système (6) devient

$$\frac{dY}{dr} = F(t_i + r, y_i + \epsilon Y) \quad Y(0) = 0 \tag{10}$$

Du lemme 1 on déduit alors que, pour tout r limité, on a

$$Y(r) \approx \int_0^r F(t_i + s, y_i) ds = \int_{t_i}^{t_i+r} F(s, y_i) ds \tag{11}$$

pourvu de supposer que pour tout t dans \mathbb{R}^+ et tout x limité, $F(t, x)$ est limité et que $x' \approx x$ implique $F(t, x') \approx F(t, x)$ (*).

Les propriétés de τ_{i+1} nécessitent le choix d'un temps $r_i = R$ vérifiant $\epsilon R = \tau_{i+1} - \tau_i$ i.p. positif et

$$\frac{Y(R)}{R} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} \approx F_0(y_i).$$

(*) $F(t, x)$ étant une fonction standard, ces conditions signifient qu'elle est bornée pour tout t dans \mathbb{R} et tout x dans un compact K de \mathbb{R}^n , et qu'elle est continue par rapport à x , uniformément par rapport à t .

La propriété (11) est permanente jusqu'à un R i.g. que l'on peut choisir tel que ϵR soit i.p. De la condition (5') on déduit alors que

$$\frac{Y(R)}{R} \approx \frac{1}{R} \int_{t_i}^{t_i+R} F(s, y_i) ds \approx F_o(y_i)$$

D'autre part la suite (τ_i) permet d'atteindre tout nombre réel limité τ car $\tau_{i+1} - \tau_i = \epsilon R$ et toujours supérieur à ϵ et l'ombre de la suite de points (τ_i, y_i) coïncide avec celle de la fonction $y(\tau)$ car celle-ci est à dérivée limitée, tant qu'elle reste limitée. Notons enfin qu'il n'est pas nécessaire de supposer $F(t, x)$ standard : il suffit d'imposer à $F(t, x)$ d'être infiniment proche d'une fonction standard vérifiant les hypothèses ci-dessus (*). Ainsi on a démontré le

THÉORÈME 1 - Soit $y(\tau)$ une solution du système $\frac{dy}{d\tau} = F(\frac{\tau}{\epsilon}, y)$, $y(o) = a$, avec $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue satisfaisant aux conditions

H.1. Pour tout t dans \mathbb{R}^+ et tout x limité, $F(t, x)$ est limité et $x' = x$ implique $F(t, x') \approx F(t, x)$ (notons ${}^oF(t, x)$ l'ombre de la fonction $F(t, x)$: elle est continue en x uniformément par rapport à t ; supposons de plus qu'elle soit continue en t et que $F(t, x) \approx {}^oF(t, x)$ pour tout t dans \mathbb{R}^+).

H.2. Il existe une fonction standard continue $F_o : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tout ξ limité dans \mathbb{R}^n , pour tout t dans \mathbb{R}^+ et tout T i.g. on ait $F_o(\xi) \approx \frac{1}{T} \int_t^{t+T} {}^oF(s, \xi) ds$

Alors, il existe une solution $\xi(\tau)$ de $\frac{d\xi}{d\tau} = F_o(\xi)$, $\xi(o) = a$ telle que $y(\tau)$ soit infiniment proche de $\xi(\tau)$ tant que τ et $\xi(\tau)$ sont limités.

Je vais établir maintenant le théorème KBM avec la condition (5) ci-dessus.

THÉORÈME 2 - Dans le théorème 1 on peut remplacer la condition H.2. par H'2: Il existe une fonction standard continue $F_o : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, telle que pour tout ξ limité dans \mathbb{R}^n , et tout T i.g. on a

$$F_o(\xi) \approx \frac{1}{T} \int_0^T {}^oF(t, \xi) dt$$

Preuve - Comme pour la démonstration du théorème 1, observons la fonction $y(\tau)$ à l'aide du stroboscope, en centrant une loupe de grossissement i.g. en un point d'observation (τ_i, y_i) . La puissance de la loupe convenable n'est plus $1/\epsilon$ comme en (9) mais est fournie par le lemme suivant.

(*) Le fait que $F(t, x)$ soit une fonction éventuellement non standard nous dispense de considérer une famille $F(t, x, \epsilon)$ dépendant de ϵ et de manier des propriétés encombrantes qui portent sur toute cette famille ; on y substitue des propriétés simples et faciles à manier, du seul individu $F(t, x)$.

Lemme 2 - Si $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie la condition H'2 du théorème 2, alors pour tout ξ et τ limités, il existe S i.g. tel que $\alpha = \epsilon S$ soit i.p. et

$$F_o(\xi) = \frac{1}{S} \int_t^{t+S} \circ F(s, \xi) ds \quad \text{où } t = \tau/\epsilon$$

Soit τ_i l'un des instants d'observations ; notons $y_i = y(\tau_i)$ et $t_i = \tau_i/\epsilon$. D'après le lemme 2, il existe S_i i.g. tel que $\alpha_i = \epsilon S_i$ soit i.p. et

$$F_o(y_i) = \frac{1}{S_i} \int_{t_i}^{t_i+S_i} \circ F(s, y_i) ds$$

L'instant d'observation suivant τ_{i+1} est définie par $\tau_{i+1} = \tau_i + \alpha_i$. Sous la loupe

$$r = \frac{\tau - \tau_i}{\alpha_i} \quad \text{et} \quad Y(r) = \frac{y(\tau_i + \alpha_i r) - y_i}{\alpha_i} \quad (9')$$

le système (7) devient

$$\frac{dY}{dr} = F(t_i + S_i r, y_i + \alpha_i Y) \quad Y(0) = 0 \quad (10')$$

Utilisant la propriété H.1. et le lemme 1, on voit que

$$Y(r) \approx \int_0^r \circ F(t_i + S_i r, y_i) ds$$

pour tout r limité. On en déduit

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} = Y(1) \approx \int_0^1 \circ F(t_i + S_i r, y_i) dr = \frac{1}{S_i} \int_{t_i}^{t_i+S_i} \circ F(s, y_i) ds \approx F_o(y_i)$$

D'autre part la suite (τ_i) permet d'atteindre tout nombre réel limité τ , car $\tau_{i+1} - \tau_i = \alpha_i$ est toujours supérieur à ϵ . Ceci prouve le théorème 2.

Preuve du lemme 2 - Notons $g(t) = \circ F(t, \xi)$. Soit τ un réel fixé. On pose $t = \tau/\epsilon$ et pour tout T i.g. on écrit

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(s) ds = \frac{t+T}{T} \cdot \frac{1}{t+T} \int_0^{t+T} g(s) ds - \frac{1}{T} \int_0^t g(s) ds \quad (12)$$

i) si t est limité, le premier terme du membre de droite de (12) est infiniment proche de $F_o(\xi)$ et le second i.p. ; ceci montre que S existe

ii) si t est i.g., on écrit (12) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(s) ds &= \frac{1}{t+T} \int_0^{t+T} g(s) ds + \frac{t}{T} \left[\frac{1}{t+T} \int_0^{t+T} g(s) ds - \frac{1}{t} \int_0^t g(s) ds \right] \\ &= F_o(\xi) + \eta_1(T) + \frac{t}{T} [F_o(\xi) + \eta_1(T) - F_o(\xi) - \eta_2] \end{aligned}$$

où $\eta_1(T)$ et η_2 sont i.p. (il suffit d'utiliser H'2). Posons $\eta(T) = \eta_1(T) - \eta_2$; alors

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} g(s) ds = F_o(\xi) + \eta_1(T) + \frac{t}{T} \eta(T).$$

Le terme $\frac{t}{T} \eta(T) + \eta_1(T)$ est i.p. pour tout T i.g. tel que $\frac{t}{T}$ soit limité.
 D'après le principe de permanence, cette propriété reste vraie jusqu'à un S i.g.
 tel que que t/S soit i.g. Ainsi

$$\frac{1}{S} \int_t^{t+S} g(s) ds = F_0(\xi) + \eta_1(S) + \frac{t}{S} \eta(S) \approx F_0(\xi)$$

D'autre part de $\tau = \epsilon t$ limité et de t/S i.g., on déduit $\alpha = \epsilon S$ i.p. ce qui prouve le lemme 2.

D. UN EXEMPLE

Soit $F(t,x) = \sin tx$ définie dans \mathbb{R}^2 . Cette fonction est bornée, admet $F_0(x) = 0$ comme moyenne par rapport à la variable t, mais n'est pas continue en x uniformément par rapport à t. Si le théorème KBM était applicable ici, les ombres des solutions de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} = F\left(\frac{t}{\epsilon}, y\right) = \sin \frac{ty}{\epsilon} \quad y(0) = a \quad (13)$$

seraient des droites horizontales dans le plan (τ, y) . Cette conclusion est manifestement fautive puisque les solutions de (13), pour $\tau^2 > y^2$, ont pour ombres des branches d'hyperboles τy constant. La description de ce comportement s'obtient facilement en utilisant des pièges à trajectoires (voir [12]). Dans la région $\tau^2 < y^2$, les solutions présentent des oscillations infiniment petites et CALLOT a montré (voir [4]) que la suite $(\tau_i, y_i = y(\tau_i))$ des minimas d'une solution $y(\tau)$ vérifie la propriété

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} = g(\tau_i, y_i) \quad \text{où} \quad g(\tau, y) = \frac{y}{\tau} \left(\sqrt{1 - \frac{\tau^2}{y^2}} - 1 \right)$$

Ainsi la solution $y(\tau)$ de (13) est infiniment proche de la fonction $\xi(\tau)$ solution de

$$\frac{d\xi}{d\tau} = g(\tau, \xi) \quad \xi(0) = a \quad (14)$$

tant que $\xi^2 > \tau^2$.

C'est ce résultat de CALLOT qui est à l'origine de la méthode de stroboscopie infinitésimale - dont une première description a été donnée par REEB [12] - et qui a été ensuite reprise par CALLOT [4] dans une présentation plus systématique et avec de nouvelles applications. Je me propose ici de reprendre le calcul de [4] sur l'équation

$$\frac{dy}{dt} = f\left(\frac{t}{\epsilon}, y\right) \sin \frac{ty}{\epsilon} \quad (15)$$

où f est une fonction continue en τ et y vérifiant l'hypothèse (H): Pour tous y et τ limités, $f(\tau, y)$ est limitée et $y' \approx y, \tau' \approx \tau$ impliquent $f(\tau', y') \approx f(\tau, y)$.

Comme pour le cas $f(\tau, y) = 1$, l'étude comporte deux parties

- a) pour $y^2 - \tau^2 f^2(\tau, y) < 0$ les pièges à trajectoires
- b) pour $y^2 - \tau^2 f^2(\tau, y) > 0$ la stroboscopie.

Les pièges - La région P du plan définie par $y^2 - \tau^2 f^2(\tau, y) < 0$ ne rencontre ni les axes de coordonnées $\tau = 0$, $y = 0$, ni l'ensemble $f(\tau, y) = 0$. Plusieurs cas sont à considérer selon les signes de $\frac{y}{\tau}$ et $f(\tau, y)$. On n'explicité que le cas $\frac{y}{\tau} > 0$ et $f(\tau, y) > 0$; les autres situations se traitent similairement. Considérons les deux branches d'hyperboles $y\tau = (2k\pi - \pi)\epsilon$ et $y\tau = (2k\pi - \frac{\pi}{2})\epsilon$ où k est un entier positif et $k\epsilon$ est limité. Ces deux hyperboles ont même ombre d'équation $y\tau = 2^0(k\epsilon)\pi$. La pente du champ associé à (16) est $-f(\tau, y)$ sur la première branche et 0 sur la deuxième. D'autre part comme $\frac{y}{\tau}$ et $f(\tau, y)$ sont positifs, la condition $y^2 - \tau^2 f^2(\tau, y) < 0$ donne $-f(\tau, y) < -y/\tau < 0$ qui signifie que les pentes des tangentes aux hyperboles restent comprises entre 0 et $-f(\tau, y)$. Ceci décrit le piège dans la région considérée. En conclusion, dans la région P, les trajectoires ont pour ombres des branches d'hyperboles $y\tau$ constant.

La stroboscopie - La région S du plan définie par $y^2 - \tau^2 f^2(\tau, y) > 0$ contient l'axe $\tau = 0$, et ne rencontre pas l'axe $y = 0$. Observons une intégrale de (16) à l'aide du stroboscope. Soit τ_i l'un des instants d'observation. Notons $y_i = y(\tau_i)$ et $t_i = \tau_i/\epsilon$. L'instant suivant τ_{i+1} doit être choisi tel que $\tau_{i+1} - \tau_i$ soit i.p. positif $y(\tau) \approx y_i$ pour tout τ dans $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ et

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} \approx \Phi(\tau_i, y_i)$$

où $\Phi(\tau, y)$ est une fonction standard continue à déterminer. Sous la loupe

$$r = \frac{\tau - \tau_i}{\epsilon} \quad Y(r) = \frac{y(\tau_i + \epsilon r) - y_i}{\epsilon}$$

l'équation (15) devient

$$\frac{dY}{dr} = f(\tau_i + \epsilon r, y_i + \epsilon Y) \sin(t_i y_i + y_i r + \tau_i Y + \epsilon r Y) \quad Y(0) = 0 \quad (16)$$

et le problème consiste maintenant à trouver un instant $r_i = R$ tel que ϵR soit i.p. et $\frac{Y(R)}{R} \approx \Phi(\tau_i, y_i)$.

Grâce à la condition H sur $f(\tau, y)$, la solution de (16) est approchée par la solution de l'équation

$$\frac{dZ}{dr} = f(\tau_i, y_i) \sin(t_i y_i + y_i r + \tau_i Z) \quad Z(0) = 0 \quad (17)$$

Posons $\theta = y_i r + \tau_i Z$, l'équation (17) s'écrit

$$\frac{d\theta}{dr} = y_i + \tau_i f(\tau_i, y_i) \sin(t_i y_i + \theta).$$

Choisissons R tel que $\theta(R) = 2\pi$. On a

$$R = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{y_i + \tau_i f(\tau_i, y_i) \sin(t_i y_i + \theta)} = \frac{2\pi}{y_i} \left(1 - \frac{\tau_i^2 f^2(\tau_i, y_i)}{y_i^2} \right)^{-1/2}$$

et
$$Y(R) \approx Z(R) = \frac{2\pi - y_i R}{\tau_i} = \frac{2\pi}{\tau_i} \left[1 - \left(1 - \frac{\tau_i^2 f^2(\tau_i, y_i)}{y_i^2} \right)^{-1/2} \right]$$

Et par suite

$$\frac{Y(R)}{R} = \frac{y_i}{\tau_i} \left(\sqrt{1 - \frac{\tau_i^2 f^2(\tau_i, y_i)}{y_i^2}} - 1 \right)$$

Posons alors

$$\phi(\tau, y) = \frac{y}{\tau} \left(\sqrt{1 - \frac{\tau^2 f^2(\tau, y)}{y^2}} - 1 \right) \tag{18}$$

Alors les solutions de (15) sont infiniment proches des solutions $\xi(\tau)$ de

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \phi(\tau, \xi) \tag{19}$$

dans la région du plan définie par $y^2 - \tau^2 f^2(\tau, y) > 0$.

Remarquons que la fonction $\phi(\tau, y)$ est du signe contraire de $\frac{y}{\tau}$, qu'elle est prolongeable par continuité en $\tau = 0$ par $\phi(0, y) = 0$ et que sur la frontière entre les régions S et P, définie par $y^2 - \tau^2 f^2(\tau, y) = 0$, on a $\phi(\tau, y) = -\frac{y}{\tau}$. Ainsi les solutions de (19) se raccordent avec les pièges à trajectoires de manière C^1 , et l'ombre de la trajectoire de (15) vérifiant $y(0) = a$ est une courbe C^1

- i) croissante [resp. décroissante] pour $\tau < 0$ [resp. $\tau > 0$] si $a > 0$
 - ii) décroissante [resp. croissante] pour $\tau < 0$ [resp. $\tau > 0$] si $a < 0$
- Les figures de la page suivante (*) illustrent bien ce comportement.

A gauche sont représentées des solutions de l'équation (15) pour $\epsilon = 0,1$.

A droite sont représentées les ombres de solutions de (15) pour ϵ i.p.

Ces ombres sont obtenues en résolvant l'équation (19) pour les mêmes conditions initiales a que les dessins de gauche, puisque l'axe $\tau = 0$ est toujours situé dans la région (S) du plan où les trajectoires de l'équation (15) sont oscillantes ; lorsque le bord de (S) est atteint, les courbes obtenues sont raccordées à des branches d'hyperboles $\xi\tau = \text{constant}$, elles mêmes raccordées à des solutions de l'équation (19) quand ces branches d'hyperboles reviennent de nouveau dans la région (S)... et ainsi de suite. Les courbes en pointillés ont pour équation $\tau^2 - \tau^2 f^2(\tau, \xi) = 0$.

Figure 1 $f(\tau, y) = y - \tau$ $a = 0, 1, 3, 6, 10$

Les solutions ont été représentées entre $\tau = -4$ et $\tau = 6$. Les trajectoires de conditions initiales négatives s'obtiennent par symétrie par rapport à l'origine des coordonnées.

Figure 2 $f(\tau, y) = (y-2)(\tau-2)$ $a = -3, 0, 1, 2, 3, 5, 8$

Les solutions ont été représentées entre $\tau = -3$ et $\tau = 7$.

(*) Je remercie le Centre Universitaire de Tlemcen qui a mis à ma disposition un micro-ordinateur H.P. 9825 avec sa table traçante, et Eric BENOIT pour son aide précieuse.

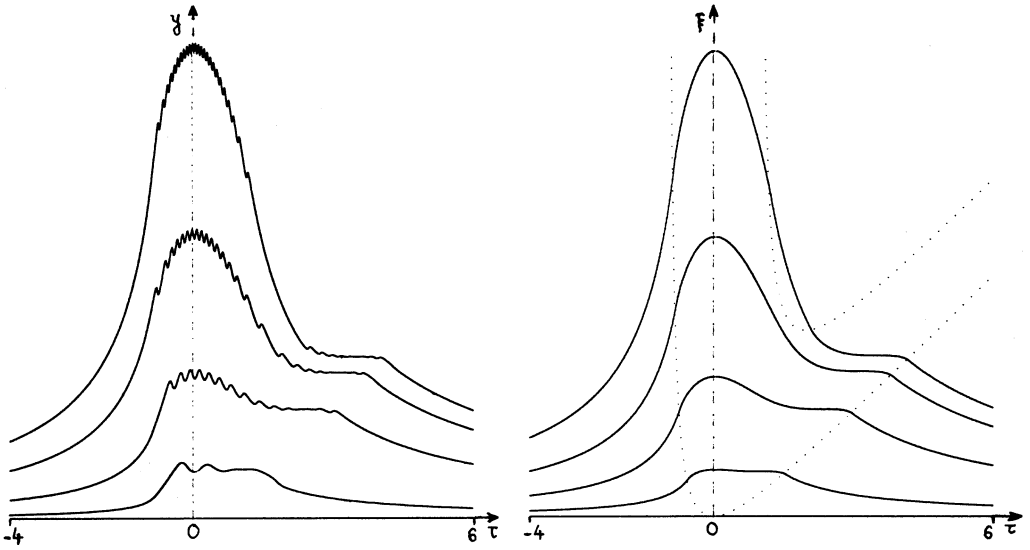


Figure 1

$$f(\tau, y) = y - \tau$$

$$a = 0, 1, 3, 6, 10$$

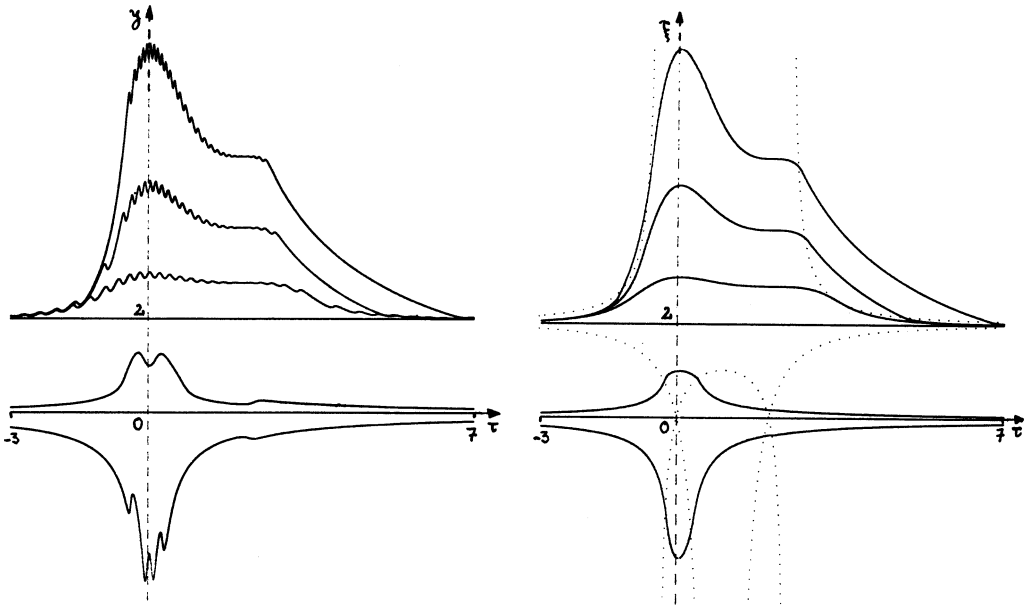


Figure 2

$$f(\tau, y) = (y-2)(\tau-2)$$

$$a = -3, 0, 1, 2, 3, 5, 8$$

E. AUTRES APPLICATIONS

a) Le théorème KBM est une conséquence du théorème général de continuité des solutions par rapport à un paramètre (voir [14] page 45). La méthode décrite ici permet de prouver aisément ce théorème. En effet, soit $x(t)$ une solution du système

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (20)$$

où f est une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n , éventuellement non standard, et vérifiant les propriétés suivantes

H.1. f est continue en t et x et pour tous t et x limités, f est limitée et $x' \approx x$ implique $f(t, x') \approx f(t, x)$.

H.2. il existe une application standard continue $F(t, x)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^n telle que pour tous t et x limités,

$$\int_{t_0}^t f(s, x) ds \approx \int_{t_0}^t F(s, x) ds$$

Alors on a le

THÉORÈME 3 - Sous les hypothèses ci-dessus, il existe une solution $\xi(t)$ de l'équation

$$\frac{d\xi}{dt} = F(t, \xi) \qquad \xi(t_0) = x_0 \qquad (21)$$

telle que $x(t)$ soit infiniment proche de $\xi(t)$ tant que t et $\xi(t)$ sont limités.

La démonstration de ce théorème nécessite le

LEMME 3 - Si la condition H.2. ci-dessus est satisfaite alors il existe ϵ i.p. positif tel que pour tous t et x limités, il existe α i.p. vérifiant $\alpha > \epsilon$ et

$$\frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} f(s, x) ds \approx F(t, x) \qquad (22)$$

Preuve du théorème - Observons la fonction $x(t)$ à l'aide du stroboscope. Soit t_i l'un des instants d'observation et $x_i = x(t_i)$. Le lemme ci-dessus fournit alors un réel α_i i.p. tel que $\alpha_i > \epsilon$ et

$$\frac{1}{\alpha_i} \int_{t_i}^{t_i+\alpha_i} f(s, x_i) ds \approx F(t_i, x_i)$$

L'instant d'observation suivant t_{i+1} est défini par $t_{i+1} = t_i + \alpha_i$. Sous la loupe

$$T = \frac{t - t_i}{\alpha_i} \qquad X = \frac{x(t_i + \alpha_i T) - x_i}{\alpha_i}$$

le système (20) devient

$$\frac{dX}{dT} = f(t_i + \alpha_i T, x_i + \alpha_i X) \qquad X(0) = 0 \qquad (23)$$

Utilisant la propriété H.1. et le lemme 1, on voit que

$$X(T) \approx \int_0^T f(t_i + \alpha_i r, x_i) dr$$

pour tout T limité. On en déduit

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{t_{i+1} - t_i} = X(1) \approx \int_0^1 f(t_i + \alpha_i r, x_i) dr = \frac{1}{\alpha_i} \int_{t_i}^{t_i + \alpha_i} f(s, x_i) ds \approx F(t_i, x_i)$$

D'autre part la suite (t_i) permet d'atteindre tout réel limité t car $t_{i+1} - t_i = \alpha_i$ est toujours supérieur à ϵ , et l'ombre de la suite de points (t_i, x_i) coïncide avec celle de la fonction $x(t)$. Ceci prouve le théorème.

Preuve du lemme - Supposons l'hypothèse H.2. satisfaite, alors pour tout t limité et tout α non i.p. on a

$$\frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} f(s, x) ds \approx \frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} F(s, x) ds$$

Cette propriété est permanente jusqu'à un réel α i.p. (que l'on peut choisir supérieur à ϵ où ϵ est un i.p. positif fixé), pour lequel on a

$$\frac{1}{\alpha} \int_t^{t+\alpha} F(s, x) ds \approx F(t, x)$$

Car $F(t, x)$ est une fonction standard continue en t. Ceci prouve le lemme.

Remarquons qu'en fait, pour une fonction limitée, la condition (22) est équivalente à H.2. En effet pour tout t limité, on écrit

$$\int_{t_0}^t f(s, x) ds = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_i + \alpha_i} f(s, x) ds + \int_{t_{n+1}}^t f(s, x) ds \quad (24)$$

où la suite (t_i) est définie à partir de t_0 par $t_{i+1} = t_i + \alpha_i$, avec $\alpha_i > \epsilon$ et

$$\int_{t_i}^{t_i + \alpha_i} f(s, x) ds = \alpha_i F(t_i, x) + \eta_i$$

η_i étant i.p. De plus on choisit n tel que t_{n+1} soit infiniment proche de t (ceci est possible car $\alpha_i > \epsilon$ pour tout i). La fonction f étant limitée, le dernier terme de (24) est i.p. et

$$\int_{t_0}^t f(s, x) ds \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i [F(t_i, x) + \eta_i]$$

$F(t, x)$ étant une fonction standard continue, on a

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i F(t_i, x) \approx \int_{t_0}^t F(s, x) ds$$

Ainsi

$$\int_{t_0}^t f(s, x) ds = \int_{t_0}^t F(s, x) ds + \sum_{i=1}^n \alpha_i \eta_i$$

et la réciproque est vérifiée puisque le terme $\sum_{i=0}^n \alpha_i \eta_i$ est i.p. ; en effet

$$\left| \sum_{i=0}^n \alpha_i \eta_i \right| < \eta \sum_{i=0}^n \alpha_i = \eta (t_{n+1} - t_0)$$

et $\eta = \max(\eta_i)$ est i.p.

b) Les résultats et les méthodes des paragraphes précédents peuvent aussi être étendus au cas d'un système de la forme

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon F(t, \epsilon t, x) \quad x(0) = a \quad (25)$$

où l'on suppose que $F(t, \tau, x)$ dépend à la fois du temps lent $\tau = \epsilon t$ et du temps rapide t . On suppose que pour tout t positif et tous τ et x limités, $F(t, \tau, x)$ est limitée et infiniment proche de son ombre ${}^0F(t, \tau, x)$. De plus ${}^0F(t, \tau, x)$ est supposée continue en t pour τ et x fixés, continue en (τ, x) uniformément par rapport à t et possède une moyenne continue $F_0(\tau, x)$ par rapport à t .

Un calcul analogue à celui du paragraphe C permet de montrer que le système

$$\frac{d\xi}{dt} = \epsilon F_0(\epsilon t, x) \quad \xi(0) = a$$

admet une solution $\xi(\epsilon t)$ vérifiant $x(t) - \xi(\epsilon t)$ i.p. tant que ϵt et $\xi(\epsilon t)$ sont limités. De toute façon on se ramène au cas du système (1) en posant

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{F}(t, \bar{x}) = \begin{pmatrix} F(t, \tau, x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors le système (25) est équivalent à

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \epsilon \bar{F}(t, \bar{x})$$

et les hypothèses requises sur F montrent que le théorème 3 s'applique.

c) Un cas moins facile - et qui a été considéré dans la littérature - est celui où l'on scinde les variables spatiales en deux parties, l'une à vitesse rapide et l'autre à vitesse lente. De façon précise considérons le système

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon f(t, \epsilon t, x, y) \quad x(0) = x_0 \quad (26)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(t, \epsilon t, x, y) \quad y(0) = y_0$$

où $f(t, \tau, x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g(t, \tau, x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. Comme pour le système (25) on peut se ramener à un système ne dépendant explicitement ni de t ni de τ en posant

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} \quad \bar{g} = \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} \quad \bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f(t,\tau,x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} g(t,\tau,x,y) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans la discussion qui suit on considère alors le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \epsilon f(x,y) & x(0) &= x_0 \\ \frac{dy}{dt} &= g(x,y) & y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{27}$$

C'est dans des systèmes de ce type que l'on assiste aux importants phénomènes de résonance, fondamentaux dans toutes les applications. De nombreux auteurs les ont étudiés, entre autres ARNOLD [1], BALANCHANDRA [2], REEB [11]. La variante la plus simple de ce système est celle où y est une variable réelle et où les fonctions f et g vérifient la propriété

H.1. Pour tout y dans R et tout x limité, f et g sont limités et infiniment proches de leurs ombres 0f et 0g . De plus on suppose que ${}^0g(x,y) = \omega(x)$ ne dépend que de la variable x, est continue en x et ne s'annule pas et que ${}^0f(x,y)$ est continue en y et continue en x uniformément par rapport à y.

A l'échelle $\tau = \epsilon t$ le système (27) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= f(x,y) & x(0) &= x_0 \\ \epsilon \frac{dy}{d\tau} &= g(x,y) & y(0) &= y_0 \end{aligned} \tag{28}$$

Observons les solutions de ce système à l'aide du stroboscope. Soit τ_i un instant d'observation, $x_i = x(\tau_i)$ et $y_i = y(\tau_i)$. Sous la loupe

$$r = \frac{\tau - \tau_i}{\epsilon} \quad X(r) = \frac{x(\tau_i + \epsilon r) - x_i}{\epsilon} \quad \text{et} \quad Y(r) = y(\tau_i + \epsilon r) - y_i$$

le système (28) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dr} &= f(x_i + \epsilon X, y_i + Y) & X(0) &= 0 \\ \frac{dY}{dr} &= g(x_i + \epsilon X, y_i + Y) & Y(0) &= 0 \end{aligned}$$

et le problème consiste à choisir un instant $r_i = R$ tel que $\epsilon R = \tau_{i+1} - \tau_i$ soit i.p. et que

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\tau_{i+1} - \tau_i} = \frac{X(r)}{r} \approx M(\tau_i, x_i)$$

où M est une fonction standard à déterminer.

Du lemme 1 et de la condition H.1. ci-dessus, on déduit que

$$Y(r) \approx \omega(x_i) \cdot r \quad \text{et} \quad X(r) = \int_0^r {}^0f(x_i, y_i + \omega(x_i)s) ds = \frac{1}{\omega(x_i)} \int_{y_i}^{y_i + \omega(x_i)r} {}^0f(x_i, \theta) d\theta$$

Supposons alors que

H.2. La fonction ${}^0f(x,y)$ est 2π -périodique en y . Désignons par

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} {}^0f(x,y) dy$$

sa moyenne par rapport à y

Prenons R tel que $Y(R) = 2\pi$. Alors

$$R \approx \frac{2\pi}{\omega(x_1)} \quad \text{et} \quad \frac{X(R)}{R} = \frac{1}{2\pi} \int_{y_1}^{y_1+2\pi} {}^0f(x_1, \theta) d\theta = F(x_1)$$

Ainsi on a démontré le

THEOREME 4 - Sous les hypothèses H.1. et H.2. ci-dessus, la première composante $x(\tau)$ de la solution $(x(\tau), y(\tau))$ du système (28) est infiniment proche de $\xi(\tau)$ solution du système

$$\frac{d\xi}{d\tau} = F(\xi)$$

tant que τ et $\xi(\tau)$ restent limités.

Ce théorème est très utile dans les applications, notamment dans l'étude des invariants adiabatiques des systèmes hamiltoniens dépendant lentement du temps, et dans l'étude des systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables (voir [1] et [15]).

F. APPROXIMATIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR

Nous allons voir maintenant comment les résultats des paragraphes précédents permettent de déterminer des approximations d'ordre supérieur. Supposons alors que le second membre $F(t,x)$ de (1) satisfait les hypothèses du théorème 2. Posons

$$x(t) = \xi(\epsilon t) + \epsilon z(t)$$

où $x(t)$ est une solution du système (1) et $\xi(\epsilon t)$ une solution du système (2) qui, en vertu du théorème 2, vérifient $\epsilon z(t)$ i.p. tant que ϵt et $\xi(\epsilon t)$ sont limités. Le système vérifié par $z(t)$ est

$$\frac{dz}{dt} = F(t, \xi + \epsilon z) - F_0(\xi) \quad z(0) = 0$$

Supposons que pour tout t dans R^+ , il existe une matrice standard $A(t, \xi)$ continues en t , telle que pour tout ζ i.p. il existe v i.p. vérifiant

$$F(t, \xi + \zeta) - F(t, \xi) = A(t, \xi) \cdot \zeta + v \cdot \zeta$$

On obtient alors

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon A(t, \xi) \cdot Z + F(t, \xi) - F_0(\xi) + \epsilon v \cdot Z$$

Posons

$$u(t) = \int_0^t [F(s, \xi(\epsilon s)) - F_0(\xi(\epsilon s))] ds \quad \text{et} \quad Z(t) = z(t) - u(t)$$

On obtient

$$\frac{dZ}{dt} = \epsilon g(t, \epsilon t, Z) \quad Z(0) = 0$$

avec

$$g(t, \tau, Z) = (A(t, \xi(\tau)) + v) \cdot (Z + u(t))$$

Ce système est du type (25) si le terme $u(t)$ vérifie la propriété: il existe une fonction standard continue $v(t, \tau): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ limitée pour tout t positif et tout τ limité et vérifiant la relation

$$u(t) \approx v(t, \epsilon t)$$

tant que ϵt est limité (*).

Ainsi la fonction $g(t, \tau, Z)$ est limitée pour tout t positif, tant que τ , Z et $\xi(\tau)$ restent limités. Elle est de plus infiniment proche de son ombre

$${}^0g(t, \tau, Z) = A(t, \xi(\tau)) [Z + v(t, \tau)]$$

tant que ϵt est limité. Pour appliquer le résultat du paragraphe Eb, il suffit de supposer qu'il existe des fonctions standard continues $A(\tau)$ et $g(\tau)$ telles que pour tout τ limité et tout T i.g. on ait

$$A_0(\tau) \approx \frac{1}{T} \int_0^T A(s, \xi(\tau)) ds$$

$$g(\tau) \approx \frac{1}{T} \int_0^T A(s, \xi(\tau)) v(s, \tau) ds$$

Ainsi la fonction $Z(\tau)$ est infiniment proche de $\theta(\tau)$ solution du système linéaire non homogène

$$\frac{d\theta}{d\tau} = A_0(\tau) \cdot \theta + g(\tau) \quad \theta(0) = 0$$

tant que τ est limité. Et par suite, on a

$$y(\tau) = \xi(\tau) + \epsilon [v(\frac{\tau}{\epsilon}, \tau) + \theta(\tau) + \mu]$$

où μ est i.p. Ceci prouve le

THEOREME 5 - Soit $y(\tau)$ une solution du système $\frac{dy}{d\tau} = F(\frac{\tau}{\epsilon}, y)$, $y(0) = a$ avec $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue satisfaisant aux conditions

H.1. Pour tout t dans \mathbb{R} et tout x limité, $F(t, x)$ est limitée et infiniment proche de son ombre ${}^0F(t, x)$; de plus ${}^0F(t, x)$ est continue en t pour x fixé et continue en x uniformément par rapport à t .

(*) Cette condition est effectivement satisfaite dans la plupart des cas rencontrés dans les applications, en particulier quand $F(t, x)$ est une somme de fonctions périodiques en t (voir [6]).

H.2. Il existe une fonction standard continue $F_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que pour tout ξ limité dans \mathbb{R}^n , et tout t dans \mathbb{R}^+ et tout T i.g. on ait

$$F_0(\xi) \approx \frac{1}{T} \int_0^T {}^0F(s, \xi) ds$$

Soit $\xi = \xi(\tau)$ la solution de $\frac{d\xi}{d\tau} = F_0(\xi)$, $\xi(0) = a$, telle que $y(\tau) - \xi(\tau)$ soit i.p. pour tout τ et $\xi(\tau)$ limités. Supposons que

H.3. Il existe une fonction continue $A(t, \xi)$ telle que pour tout t dans \mathbb{R}^+ , et pour tout ξ i.p., il existe v i.p. vérifiant

$$F(t, \xi + \xi) - F(t, \xi) = (A(t, \xi) + v) \cdot \xi$$

H.4. Il existe une fonction standard continue $v(t, \tau)$ limitée pour tout t dans \mathbb{R}^+ et tout τ limité vérifiant

$$v(t, \varepsilon t) \approx \int_0^t [F(s, \xi(\varepsilon s)) - F_0(\xi(\varepsilon s))] ds$$

tant que εt et $\xi(\varepsilon t)$ restent limités.

H.6. Il existe deux fonctions standard continues $A_0(\tau)$ et $g(\tau)$ telles que pour tout τ et $\xi(\tau)$ limités et tout T i.g. on ait

$$A_0(\tau) \approx \frac{1}{T} \int_0^T A(s, \xi(\tau)) ds$$

$$g(\tau) \approx \frac{1}{T} \int_0^T A(s, \xi(\tau)) v(s, \tau) ds$$

Alors pour tout τ limité, tel que $\xi(\tau)$ soit limité on a

$$y(\tau) = \xi(\tau) + \varepsilon [v(\frac{\tau}{\varepsilon}, \tau) + \theta(\tau) + \mu]$$

où μ est i.p. et $\theta(\tau)$ la solution du système linéaire non homogène standard

$$\frac{d\theta}{d\tau} = A_0(\tau) \cdot \theta + g(\tau) \qquad \theta(0) = 0.$$

RÉFÉRENCES

- [1] V. ARNOLD, Les méthodes mathématiques de la mécanique classique. MIR. Moscou (1976) et Chapitre supplémentaires à la théorie des équations différentielles. MIR. Moscou (1979).
- [2] M. BALACHANDRA et P.R. SETHNA. A Generalization of the Method of Averaging for Systems with Two Time Scales Arch. for Rat. Mech. and Anal. 58 (1975) p. 261-283.
- [3] N.N. BOGOLIOUBOV et Y.A. MITROPOLSKI. Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non stationnaires. Gauthiers Villars. Paris (1962).
- [4] J.L. CALLOT, Stroboscopie infinitésimale. IRMA Strasbourg (à paraître).
- [5] F. DIENER. Méthode du plan d'observabilité. Thèse. Strasbourg (1981).

- [6] W. ECKHAUS. New Approach to the Asymptotic Theory of Nonlinear Oscillations and Wave-Propagation. Jour. of Math. Anal. and Appl. 49 (1975) p. 575-611.
- [7] J.K. HALE. Ordinary Differential Equations. Wiler-Interscience. New-York (1969)
- [8] R. LUTZ et M. GOZE. Nonstandard Analysis. A pratical Guide with Applications. Lectures Notes in Math. n° 881. Springer Verlag. Berlin (1981).
- [9] Y.A. MITROPOLSKI. Problèmes de la théorie asymptotique des oscillations non stationnaires. Gauthiers Villars. Paris (1966).
- [10] E. NELSON. Internal Set Theory : a new Approach to Nonstandard Analysis. Bull. of the Amer. Math. Soc. 83 (1977) p. 1165-1198.
- [11] G.H. REEB. Sur un théorème de Seifert sur les trajectoires fermées de certains champs de vecteurs. International Symposium on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics. Edited by J.P. La Salle and S. Lefschetz. Academic Press. New York (1963).
- [12] G.H. REEB. Equations différentielles et analyse non classique. Proceedings of the IV International Colloquium on Differential Geometry. Santiago de Compostella (1978).
- [13] A. ROBINSON. Nonstandard Analysis. North Holland. Amsterdam (1974).
- [14] M. ROSEAU. Equations différentielles. Masson. Paris (1976), et Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité. Springer. Berlin (1966).
- [15] T. SARI. Moyennisation dans les systèmes d'équations différentielles à solutions rapidement oscillantes. IRMA. Strasbourg (à paraître).
- [16] A. TROESCH. Etude qualitative de systèmes différentiels: une approche basée sur l'analyse non standard. Thèse. Strasbourg (1981).
- [17] V.M. VOLOSOV. Averaging in Systems of Ordinary Differential Equations. Russ. Math. Surveys 17 (1962).

Tewfik SARI
UNIVERSITE DE HAUTE ALSACE
I.S.E.A.
4, rue des Frères Lumière
68093 MULHOUSE Cédex