J. L. BRYLINSKI

Modules holonomes a singularités régulières et filtration de Hodge II

Astérisque, tome 101-102 (1983), p. 75-117
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1983__101-102__75_0>

MODULES HOLONOMES A SINGULARITÉS RÉGULIÈRES ET FILTRATION DE HODGE II

J.L. BRYLINSKI

INTRODUCTION :

Soit Y un espace analytique réduit. Deligne a décrit un complexe $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{Y}$ de faisceaux sur Y, à cohomologie bornée et constructible (ou plutôt un objet de la catégorie dérivée adéquate) dont l'hypercohomologie calcule la cohomologie d'intersection de Y (à coefficients rationnels) ; voir [D2] et [G-M]. Il y a un an, en même temps que Beilinson et Bernstein et pour les mêmes raisons, Kashiwara et moi avons introduit, pour tout plongement de Y dans une variété analytique lisse X, un $\mathcal{D}_X$-Module holonome $\mathcal{L}(Y,X)$ tel que $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{Y}$(prolongé à X par zéro) est le complexe de De Rham de $\mathcal{L}(Y,X)$, décalé convenablement (voir [B-B], [Br-K], [Br]). Dés lors, on pouvait espérer utiliser $\mathcal{L}(Y,X)$ pour obtenir des informations sur la cohomologie d'intersection de Y. Dans [Br], exploitant le fait que $\mathcal{L}(Y,X)$, étant à singularités régulières, se trouve muni d'une <u>bonne filtration canonique</u> grâce à Kashiwara et Kawai [K-K] j'ai indiqué comment définir une filtration sur les groupes $IH^{p}(Y,\mathbb{C})$ et j'ai conjecturé que c'était une filtration qui donnait lieu à une structure de Hodge polarisée (pour Y projective). Cheeger, Goresky et MacPherson avaient conjecturé l'existence d'une telle structure de Hodge dans [C-G-M], où ils indiquaient les conséquences topologiques d'une telle conjecture ; depuis lors, les travaux de Deligne et de Gabber, ainsi que ceux de Beilinson et Bernstein, sur les analogues ℓ-adiques des complexes $\underline{\underline{IC}}^{\bullet}_{Y}$, pour Y une variété sur un corps fini, ont permis d'obtenir des résultats topologiques profonds, qui se transposent en caractéristique zéro (théorèmes de Lefschetz pour la cohomologie d'intersection, "théorème de décomposition"). De la sorte, l'intérêt d'exhiber une structure de Hodge sur les $IH^{p}(Y)$ paraît à première vue fort réduit, puisque les fruits hypothétiques d'un tel effort ont déjà été obtenus par d'autres méthodes. Le but de cet article est de montrer qu'il n'en est rien, et de suggérer au contraire qu'une généralisation (téméraire) de la conjecture antérieure aboutit à une transposition aux Modules holonomes du formalisme des faisceaux mixtes et des complexes mixtes de $\mathbb{Z}_\ell$ - faisceaux, développé par Deligne dans [D1]. Au départ de ces nouvelles conjectures, il y a l'analogie bien connue entre $\mathbb{Z}_\ell$ - faisceaux lisses purs et variations de structures de Hodge polarisées. On aimerait ensuite disposer d'une théorie des "variations constructibles de structures de Hodge" analogue à celle des $\mathbb{Z}_\ell$-faisceaux constructibles, purs, etc... Mais personne n'a la moindre idée de ce que devraient être ces hypothètiques objets. Force est donc d'opérer un détour, qui est autorisé par la théorie des $\mathcal{D}$-Modules holonomes. Le point central est que pour X une variété analytique lisse, le foncteur "complexe de De Rham" établit une équivalence de catégories entre $\mathcal{D}_X$-Modules holonomes à singularités régulières et faisceaux pervers au sens de Deligne (voir [D3], [Br]). En se bornant alors aux faisceaux pervers, au lieu d'essayer de leur appliquer directement des structures de Hodge variantes, on cherchera à enrichir le Module holonome correspondant d'une bonne filtration étendant celle qu'on associe à un fibré vectoriel à connexion intégrable porteur d'une variation de structures de Hodge satisfaisant la condition de transversalité de Griffiths.

Cette donnée enrichissante, censée fournir l'analogue des faisceaux pervers purs, définira donc un <u>Module holonome purifié</u>. Cette notion sera stable par "image directe intermédiaire" pour une immersion ouverte. Par analogie avec [D1], je suis amené à définir les modules holonomes mixtes et les complexes holonomes mixtes. J'ai reculé devant la définition de Modules et de complexes purs, parce que cela nécessite une méthode pour transférer une filtration d'un complexe en une filtration du complexe dual et que la méthode naïve pour ce faire est inadéquate (voir 1.2 et 2.3). Contournant (provisoirement ?) cette difficulté, je conjecture que l'image directe d'un Module holonome purifié par un morphisme projectif est somme directe, dans une catégorie dérivée filtrée convenable, de Modules holonomes purifiés décalés. Cela donnerait un théorème de décomposition analogue à celui démontré par Deligne, Gabber, Beilinson et Bernstein en caractéristique p. Je reste assez prudent en ce qui concerne des objets mixtes, faute d'une compréhension suffisante de la filtration par le poids (qui utilisera sans doute de facon cruciale les travaux de Beilinson et Bernstein sur la relation entre $\mathcal{D}_X$-modules et cycles évanescents).

Pour atténuer l'aspect fantasmagorique de l'exposition, je tenterai de justifier les relations proposées entre structures de Hodge et bonnes filtrations de Modules holonomes. La bonne filtration d'un Module holonome à singularités régulières, utilisée ici, a ceci d'effrayant qu'elle fait intervenir toute la variété caractéristique de ce Module ; je m'explique sur ce point en arguant de la grande importance géométrique de cette variété caractéristique. Je vérifie aussi l'indépendance du plongement pour la filtration introduite sur $IH^P(Y)$, et une comptabilité avec le cup-produit par la classe d'une section hyperplane. Pour ce qui est des Modules holonomes purifiés, je donne en 2.2 une vérification complète que ma conjecture résulte, dans le cas d'une courbe, des travaux de Zucker [Z]. Cela semble au moins suggérer que les idées sont essentiellement correctes. Il conviendrait également de comparer ma filtration "de Hodge" avec la définition qu'en donnent Varchenko, ainsi que Scherk et Steenbrink, dans le cas des cycles évanescents.

Je remercie Pierre Deligne, dont les conseils et les critiques m'ont été précieux.

§ 1 PLAIDOYER PRO DOMO

1.1 Ubiquité des variétés caractéristiques : L'idée générale de [Br] est d'utiliser une bonne filtration $\{\mathcal{M}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonome $\mathcal{M}$ pour filtrer son complexe de De Rham

$$DR(\mathcal{M}) \; : \; 0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \Omega^1_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{M} \longrightarrow \Omega^2_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{M} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^n_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

où $n = \dim X$. J'ai donc défini une filtration décroissante F de $DR(\mathcal{M})$

$$F^P \, DR(\mathcal{M}) \; : \; 0 \longrightarrow \mathcal{M}_{-p} \longrightarrow \Omega^1_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{M}_{-p+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^n_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{M}_{-p+n} \longrightarrow 0$$

Mon opinion générale est que chaque fois qu'on connait (ou qu'on espère) une structure de Hodge sur l'hypercohomologie de $DR(\mathcal{M})$, elle provient d'une filtration de $DR(\mathcal{M})$ correspondant à une bonne filtration adéquate de $\mathcal{M}$. Je me suis risqué (loc. cit.) à dire ce que devrait être cette filtration lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{L}(Y,X)$ pour Y sous-variété réduite de X. Elle est définie par des procédés de calcul microdifférentiel, rappelés en 1.2 et nécessite donc la connaissance de la variété caractéristique $Ch(\mathcal{M})$ avec les multiplicités des variétés lagrangiennes qui y interviennent. On m'a souvent fait remarquer depuis lors que l'intervention de l'analyse microlocale dans des questions d'analyse globale (théorie de Hodge) n'était guère justifiée. Dans ce numéro, je vais exposer pourquoi je suis convaincu de l'importance géométrique fondamentale de la variété caractéristique d'un Module holonome.

a) D'après Kashiwara [K], il existe une stratification de Whitney $\{X_\alpha\}$ de X telle que $Ch(\mathcal{M})$ soit contenue dans $\bigcup_\alpha T^*_{X_\alpha} X$ et que les faisceaux de cohomologie $\mathcal{H}^i\, DR(\mathcal{M})$ soient localement constants de rang fini le long des X_α. On dispose alors pour chaque α de deux invariants : la <u>multiplicité</u> m_α de $\overline{T^*_{X_\alpha} X}$ dans $Ch(\mathcal{M})$ (un entier ≥ 0) et l'indice $\chi_\alpha(DR(\mathcal{M}))$ par rapport à la strate X_α défini par $\chi_\alpha(DR(\mathcal{M})) = \sum_i (-1)^i \dim \mathcal{H}^i DR(\mathcal{M})_{x_\alpha}$, où $x_\alpha \in X_\alpha$. Kashiwara [K1] a donné une formule permettant d'exprimer les χ_α au moyen des m_β, à l'aide d'invariants topologiques de la stratification. On observe dans [B-D-K] que ces invariants ne sont autres que les obstructions d'Euler locales de Mac Pherson pour les adhérences de strates. Une manière d'interpréter ce fait consiste à dire que tout procédé de détermination des m_α (il n'en existe pas actuellement de systématique) conduit au calcul de ces obstructions d'Euler. Or on sait le rôle clef qu'elles jouent dans la théorie des classes de Chern singulières de MacPherson. Cette théorie peut se comprendre comme un théorème du style de Riemann-Roch pour les modules holonomes, où l'objet crucial est le cycle support de $\mathcal{M}$ défini formellement comme

$$Z(\mathcal{M}) = \sum_{\alpha}(-1)^{\operatorname{codim} X_\alpha} \cdot m_\alpha \cdot [X_\alpha]$$

Une forme globale du théorème de l'indice, due à Dubson, décrit la caractéristique d'Euler de l'hypercohomologie de $DR(\mathcal{M})$ en termes de multiplicités d'intersection de $Ch(\mathcal{M})$ avec la section nulle de T^*X. Par ailleurs, la formule de l'indice peut être explicitement inversée (loc.cit. et [Du]) de sorte que m_α apparaît comme une caractéristique d'Euler de cycles évanescents (les géomètres peuvent donc considérer l'analyse microlocale comme un procédé d'étude des cycles évanescents).

b) Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre entre variétés algébriques lisses (sur $\mathbb{C}$). Un théorème de Deligne, Gabber, Beilinson, Bernstein (voir [G-M2]) affirme l'existence d'une décomposition

$$\mathbb{R}f_*(\mathbb{C}_X) \cong \bigoplus_i IC^\cdot\,(W_i, L_i)\,[m_i]$$

où les W_i sont des sous-variétés fermées de Y, les L_i des systèmes locaux irréductibles sur des ouverts des W_i, et les m_i sont des entiers. Je montre ici, à titre d'illustration des propos précédents, comment une étude de certaines variétés caractéristiques permet sans fatigue de dresser une liste finie de sous-variétés de Y, qui contient en tout cas chacun des W_i (la détermination exacte de ces sous-variétés serait incomparablement plus ardue).

Je suppose que f se factorise en une immersion fermée $i : X \hookrightarrow Y\times Z$ (avec Z propre) suivi de $p_1 : Y\times Z \longrightarrow Y$. Posons $\ell = \dim X$, $m = \dim Y$, $n = \dim Z$. On a alors :

$$\int_f \mathcal{O}_X = \int_{p_1}\left(\int_i \mathcal{O}_X\right) = \int_{p_1} \mathcal{H}^{m+n-\ell}_{[X]}(\mathcal{O}_{Y\times Z}) \text{ (où on a identifié X à i(X)).}$$

$\mathcal{H}^{m+n-\ell}_{[X]}(\mathcal{O}_{Y\times Z})$ est un Module holonome sur $Y\times Z$, à singularités régulières, dont la variété caractéristique est $T^*_X(Y\times Z)$ (fibré conormal à $X = i(X)$ dans $Y\times Z$ En lui appliquant $\int_{p_1}$ on obtient un complexe de $\mathcal{D}_{Y\times Z}$-Modules, dont les faisceaux de cohomologie, notés $\int^{(k)}_{p_1}$ sont holonomes (à singularites régulières). Les variétés caractéristiques de ces Modules holonomes sont contenues dans une variété lagrangienne décrite par Kashiwara [K3,§4]. Plus précisément, soit $T^*(Y\times Z)/Y$ le sous-fibré de $T^*(Y\times Z)$ formé des vecteurs cotangents orthogonaux à TZ (en d'autres termes, $T^*(Y\times Z)/Y = p_1^{-1}\, T^*Y$). Soit $\mathcal{C} = T^*_X\,(Y\times Z) \cap T^*(Y\times Z)/Y \subset T^*(Y\times Z)$ et soit $\chi : T^*(Y\times Z)/Y \longrightarrow T^*Y$ la projection évidente. Alors $\chi(\mathcal{C})$ est une variété lagrangienne de T^*Y, et pour tout k, on a :

$$\mathrm{Ch}\,\left(\int_f^{(k)} \mathcal{O}_X\right) \subset \chi(\mathcal{C}).$$

Comme $\chi(\mathcal{C})$ est une variété lagrangienne, ses composantes irréductibles sont adhérences de fibrés conormaux à des sous-variétés irréductibles de Y. Une telle composante irréductible est projection d'une composante irréductible de $\mathcal{C}$. Par définition, $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $(x=(y\times z) \in X\ ;\ \eta, 0)$ avec $\eta \in T^*_y\,Y$ orthogonal à l'image de $(df)_x$. Dans cette description $\mathcal{C}$, comme sous-variété de $X \times_Y T^*\,Y$, se révèle indépendante de la factorisation $f=p_1 o\, i$; il en est de même de $\chi(\mathcal{C})$. Filtrons X par les sous-espaces $X_r = \{x \in X \text{ t.q. } \mathrm{rg}(df)_x \leq r\}$. Le morphisme $[(X_r - X_{r-1})\times_Y T^*Y] \cap \mathcal{C} \longrightarrow X_r - X_{r-1}$ est équidimensionel, et apparaît donc comme une fibration vectorielle. Soit (V_α) la famille des composantes irréductibles des $X_r - X_{r-1}$ (pour r variable). $\mathcal{C}$ est alors la réunion des $\mathcal{C}_{V_\alpha} = [V_\alpha \times_Y T^*Y] \cap \mathcal{C}$ qui sont irréductibles. Les composantes irréductibles de $\chi(\mathcal{C})$ figurent parmi les $\chi(\overline{\mathcal{C}}_{V_\alpha})$; ou bien $\chi(\overline{\mathcal{C}}_{V_\alpha})$, pour α donné, n'est pas lagrangienne ou bien c'est l'adhérence du fibré conormal à la partie lisse de sa projection sur Y, laquelle n'est autre que $\overline{f(V_\alpha)} = f(\overline{V}_\alpha)$. En résumé :

<u>Proposition</u> : Pour tout k, la variété caractéristique de $\int_f^{(k)} \mathcal{O}_X$ est contenue dans la réunion des $\overline{T^*_{f(V_\alpha)_{reg}}\,Y}$, où (V_α) est la famille des composantes irréductibles des $X_r - X_{r-1}$, pour r variable.(1)

Avec les notations de [G-M2] et invoquant [Me1], la décomposition plus haut de $\mathbb{R}f_*(\mathbb{C}_X)$ se traduit ainsi :

---

(1) Voir note à la fin de la bibliographie

$$\int_f \mathcal{O}_X = \bigoplus_i \mathcal{L}\,(W_i,\ Y\ ;\ L_i)\ [-k_i]$$

(k_i est un nouvel entier, dont la valeur exacte m'équilatère). Chaque $\mathcal{L}(W_i,\ Y\ ;\ L_i)$ est facteur direct de $\int_f^{(k_i)} \mathcal{O}_X$, et sa variété caractéristique contient $T^*_{W_i} Y$, comme La Palisse l'a démontré. On a donc obtenu le

<u>Corollaire</u> : Les W_i qui apparaissent dans la décomposition de $\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_X$ sont égaux à $\overline{f(V_\alpha)}$ pour α convenable.

<u>Remarque</u> : Il n'est donc pas nécessaire d'aller bien loin dans les symboles de Boardman pour déterrer les W_i. Il semble moins aisé de décrire a priori les L_i possibles ; on peut au moins imaginer qu'ils ont pour fibre (un morceau de) la cohomologie d'intersection (tordue ?) des fibres de f restreint au-dessus d'un ouvert convenable de V (j'espère pouvoir à l'avenir me montrer moins elliptique). Gabber m'a indiqué oralement une démonstration topologique directe du corollaire plus haut, qui consiste à étudier les faisceaux de cycles évanescents de $\mathbb{R}f_*\mathbb{C}_X$ pour une germe de fonction dont la différentielle s'annule sur l'espace tangent à W_i en un point. Je signale, par ailleurs que la proposition donne une estimation de la variété caractéristique du Module holonome $\mathcal{L}(Z,Y)$ (en prenant pour X une résolution de Z) ; j'ignore si cette estimation est intéressante.

c) Je signale pour mémoire les applications des variétés caractéristiques à la théorie des algèbres enveloppantes (variétés associées aux modules simples, idéaux primitifs, induction parabolique) qui seront publiées par Borho et l'auteur.

1.2. <u>La filtration de Kashiwara-Kawai</u> :

1.2.1. <u>L'ordre d'une section d'un $\mathcal{E}_X$-Module holonome R.S.</u> : X est encore une variété complexe lisse, T^*X son fibré cotangent, $\mathcal{E}_X$ le faisceau sur T^*X des opérateurs microdifférentiels [S-K-K], [K3], [B_j]. C'est un faisceau cohérent d'anneaux, limite inductive des faisceaux $\mathcal{E}_X(m)$ des opérateurs microdifférentiels d'ordre au plus m. Le quotient $\mathcal{E}_X(m)/\ \mathcal{E}_X(m-1)$ s'identifie au faisceau des germes de fonctions sur T^*X homogènes de degré m (c'est bien une propriété locale que d'être homogène). La restriction de $\mathcal{E}_X$ à la section nulle de T^*X s'identifie à $\mathcal{D}_X$. Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{E}_X$-Module cohérent, son support est une sous-variété involutive de T^*X[S-K-K], [M], [G], [B_j]. Lorsque $\mathcal{N} = 0$ ou lorsque le support de $\mathcal{N}$ est de dimension minimale, égale à dimX, $\mathcal{N}$ est dit <u>holonome</u>. Kashiwara et Kawai ont introduit la condition R.S. ("regular singularities") pour un $\mathcal{E}_X$ Module holonome $\mathcal{N}$. De manière générale, supposant seulement $\mathcal{N}$ cohérent, et V étant une sous-variété involutive d'un ouvert de $T^*X-T^*_X X$ contenu dans le domaine de définition de $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}$ est à <u>singularités régulières le long de V</u> si, $\mathcal{E}_V$ désignant la sous-algèbre de $\mathcal{E}_X$ engendrée par les opérateurs microdifférentiels d'ordre ≤ 1 dont le symbole d'ordre 1 s'annule sur V, il existe au voisinage de tout point p de Ω, un voisinage U de p et un sous $\mathcal{E}_V$ - Module $\mathcal{N}_o$ de $\mathcal{N}$ défini sur U tel que :

- $\mathcal{N}_o$ soit cohérent comme $\mathcal{E}(0)$ - Module ;
- $\mathcal{N}_o$ engendre $\mathcal{N}$ comme $\mathcal{E}_X$ - Module.

Pour $x \in V$, $\mathcal{N}$ est dit à singularités régulières le long de V si la restriction de $\mathcal{N}$ à un voisinage convenable de x dans T^*X l'est. On dit que $\mathcal{N}$ est à <u>singularités régulières</u> si l'ensemble des points de Supp($\mathcal{N}$) $-\ T^*_X X$, où $\mathcal{N}$ n'est pas à singularités régulières le long de Supp($\mathcal{N}$), n'est nulle part dense dans Supp($\mathcal{N}$)$-T^*_X X$ [K-K, I.1]. Cette condition se vérifie donc séparément sur les parties lisses des diverses composantes irréductibles de Supp($\mathcal{N}$)$-T^*_X X$.

Un $\mathcal{D}_X$ - Module holonome $\mathcal{M}$ est dit à singularités régulières si $\mathcal{E}_X \underset{p^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} p^{-1}\mathcal{M}$ l'est ($p: T^*X \longrightarrow X$ est la projection). Rappelons que Mebkhout a défini par ailleurs la condition de <u>régularité</u> d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonome $\mathcal{M}$[R], [Me1], [Me2], [Me3] (en fait, plus généralement, d'un complexe borné de $\mathcal{D}_X$-Modules à cohomologie holonome).

La mise au point suivante, qui ne prétend à aucune originalité s'impose donc.

Proposition : Un $\mathcal{D}_X$ - Module holonome $\mathcal{M}$ est R.S. au sens de Kashiwara - Kawai si et seulement si il est régulier au sens de Mebkhout.

Preuve : C'est un simple travail de compilation. Si $\mathcal{M}$ est R.S., il est régulier d'après [K-K, Theorem 5.4.1.]. La réciproque est un peu plus délicate. Soit $\mathcal{M}$ régulier au sens de Mebkhout. On s'appuiera sur les faits suivants

① Si $\mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'$ est une suite exacte de Modules holonomes, et si $\mathcal{M}'$ et $\mathcal{M}''$ sont R.S., il en est de même de $\mathcal{M}$.

② Soit f : $X \longrightarrow Y$ un morphisme projectif, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module holonome R.S. Alors les $\int_f^{(k)} \mathcal{M}$ sont R.S. sur Y.

③ Supposons que $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}_X$-Module holonome du type de Deligne : il existe une hypersurface Y de X et un système local L sur X-Y tel que $\mathrm{Sol}(\mathcal{M}) = j_!(L)$ (où $j : X-Y \hookrightarrow X$) et que les solutions multivaluées de $\mathcal{M}$ sur X-Y soient dans la classe de Nilsson. Alors $\mathcal{M}$ est R.S.

Pour démontrer ① , on travaille au niveau des $\mathcal{E}_X$-Modules holonomes ($\mathcal{E}_X$ est plat sur $p^{-1} \mathcal{D}_X$) ; on se place sur un ouvert lisse d'une composante de $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})-T_X^* X$; par transformation canonique, on se ramène au cas où cette composante est le fibré conormal à une hypersurface de X, et on utilise les techniques de [K-K, 1.3]. L'énoncé ② n'est autre que [K-K, Theorem 6.2.1] et ③ résulte [K-K, chapitre 2].

Soit donc $\mathcal{M}$ régulier ; par dévissage, et en s'appuyant sur ① , on se ramène à supposer $\mathcal{M} = \mathcal{L}(Y,X;\ \mathcal{F})$ (voir [Br], dont je suis les notations. Soit $p : \widetilde{Y} \longrightarrow X$ une résolution de Y telle que, si Z est un fermé strict de Y donné contenant le lieu singulier de Y et celui de $\mathcal{F}$, $p^{-1}(Z)$ soit un diviseur à croisements normaux [H]. Alors $\mathcal{L}(\widetilde{Y},\ \widetilde{Y};\ p^{-1}\mathcal{F})$ est un sous $\mathcal{D}_{\widetilde{Y}}$-Module d'un Module holonome du type de Deligne, donc est R.S. d'après ① et ③. On montre facilement que $\mathcal{L}(Y,X;\ \mathcal{F})$ est un sous-Module de $\int_p^{(o)} \mathcal{L}(\widetilde{Y},\ \widetilde{Y};\ p^{-1}\mathcal{F})$, donc il est R.S. d'après ② et ①. Ceci achève la démonstration.

Remarque : On trouvera une brève indication de démonstration dans [K-K, Theorem 6.4.7]. J'ai simplement voulu, en donnant une preuve essentiellement complète, dissiper les doutes qui auraient pu subsister.

Comme promis, je vais rappeler la définition de l'ordre d'une section u non nulle d'un $\mathcal{E}_X$-Module holonome dont le support est une variété lagrangienne lisse Λ de $T^*X - T^*_X X$. Je suppose d'abord, pour simplifier, que u est non dégénérée, c'est-à-dire que le faisceau d'idéaux J engendré par les $\sigma_o(P)$, pour P section de $\mathcal{E}_X(0)$ annulant u, est réduit. Alors Sato, Kashiwara et Kawai ont montré l'existence d'un nombre complexe α tel que, pour tout système de coordonnées locales $(x^1,\ldots,x^n\ ;\ \xi_1,\ldots,\xi_n)$ de T^*X et toute section P de $\mathcal{E}_X(m)$ annulant u satisfaisant $P_m = \sigma_m(P) \in J$ et $dP_m \in J.\Omega^1_{T^*X} + \mathcal{O}_{T^*X}.\ \omega$, on ait :

$$\left(P_{m-1} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P_m}{\partial x^i \partial \xi_i}\right) \omega \equiv \left(\alpha + \frac{m-1}{2}\right) dP_m \bmod J.\Omega^1_{T^*X}$$ (ici $\omega = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, dx^i$ est la 1-forme fondamentale sur T^*X ; on a utilisé l'écriture $P = \sum_{j\leq m} P_j(\underline{x},\frac{\partial}{\partial \underline{x}})$, où P_j est homogène de degré j en les $\frac{\partial}{\partial \underline{x}^i}$; l'expression $P_{m-1} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P_m}{\partial x^i \partial \xi_i}$ est le symbole sous-principal de P_m, bien défini modulo J du fait que le symbole principal P_m appartient à J). Je réfère à [S-K-K, II.4] pour tout cela.

Exemple : Soit $X = \mathbb{C}^n$ (coordonnées $x^1,\ldots,x^n$) ; soit $Y \subset \mathbb{C}^n$ d'équations $x^1 = \ldots = x^r = 0$ (pour $1 \leq r \leq n$), soit $\Lambda = T^*_Y X - T^*_X X$, soit $\mathcal{N} = \mathcal{E}_X \underset{p^{-1}\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{B}_{Y/X}$ (cf. [K2]) et soit u la section bien connue de $B_{Y/X}$, telle que

$x^1.u = \ldots = x^r.u = \frac{\partial}{\partial x^{r+1}} u = \ldots = \frac{\partial}{\partial x^n} u = 0$. Il est clair que u est non dégénérée.

Soit P l'opérateur différentiel $P = \sum_{i=1}^{r} x^i . \frac{\partial}{\partial x^i} + r$; il est clair que $P.u = 0$, donc P_1 s'annule sur Λ

$$\text{on a } dP_1 = \sum_{i=1}^{r} \xi_i . dx^i + \sum_{i=1}^{r} x^i . d\xi_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \xi_i . dx^i - \sum_{i=r+1}^{n} \xi_i . dx^i + \sum_{i=1}^{r} x^i . d\xi_i$$

$$\equiv \omega \bmod J . \Omega^1_{T^*X}$$

Donc P vérifie les conditions requises (avec m = 1). On a alors :

$P_o - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^i \partial \xi_i} = r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} = \alpha$. On conclut que u est d'ordre $\frac{r}{2}$ relativement à $\Lambda = T^*_Y X$.

Il est prouvé loc. cit. que si P est un opérateur microdifférentiel d'ordre m elliptique, et u une section non dégénérée de $\mathcal{N}$, on a : ord (P_u) = m + ord(u). Ceci justifié (partiellement) la définition de l'ordre donnée dans [Br]. Mais dans loc. cit. j'ai autoritairement modifié ord(u) de sorte que dans l'exemple précédent l'ordre soit nul. Je me propose de justifier cette modification, en montrant que l'ordre modifié est compatible avec l'opération "image directe par une immersion fermée". Soit donc i : $X \hookrightarrow Z$ une immersion fermée entre variétés lisses. Rappelons l'existence d'un faisceau de $(\mathcal{E}_{Z|X \times_Z T^*Z}, \rho^{-1} \mathcal{E}_X)$ bi-Modules $\mathcal{E}_{Z \xleftarrow{i} X}$ (où $\rho : X \times_Z T^*Z \longrightarrow T^*X$) défini par $\mathcal{E}_{Z \xleftarrow{i} X} = \mathcal{C}_{X/X\times Z} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{\dim X}_X$ où X est plongé dans X × Z par (Id,i); $\mathcal{C}_{X/X\times Z}$ est un $\mathcal{E}_{X\times Z}$ Module à gauche, égal à $\mathcal{E}_{X\times Z} \otimes_{\mathcal{D}_{X\times Z}} B_{X/X\times Z}$ (voir [S-K-K], [K, §4]). Il est clair que le support de $\mathcal{C}_{X/X\times Z}$ est égal à la variété caractéristique de $B_{X/X\times Z}$, c'est-à-dire au fibré conormal $T^*_X(X\times Z)$, qui s'identifie à $X \times_Z T^*Z$. Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{E}_X$-Module, $\mathcal{E}_{Z \xleftarrow{i} X} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N}$ est un $\mathcal{E}_Z$-Module supporté par $X \times_Z T^*Z \hookrightarrow T^*Z$.

Si u est une section de $\mathcal{N}$ (supposée non dégénérée) et si ω est une section non nulle de $\Omega^{\dim X}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} [i^*\Omega^{\dim Z}_Z]^{\otimes -1}$, $u \otimes \omega$ s'identifie à une section non dégénérée de $\mathcal{E}_{Z \xleftarrow{i} X} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N}$. Il est prouvé dans [S-K-K, II.Prop.4.2.4] que l'on a :

$\operatorname{ord}(u\otimes\omega) - \frac{1}{2}\dim Z = \operatorname{ord}(u) - \frac{1}{2}\dim X$ (on calcule ord (u) relativement à une sous-variété lagrangienne Λ de T^*X et $\operatorname{ord}(u\otimes\omega)$ relativement à $\rho^{-1}(\Lambda)\subset T^*Z$). Mon ordre modifié pour u est égal à ord $u - \frac{r}{2}$ où r est la codimension de la projection sur X de Λ. De même l'ordre modifié de $u\otimes\omega$ est $\operatorname{ord}(u\otimes\omega) - \frac{r}{2}$ $-\frac{1}{2}(\dim Z - \dim X)$. On en conclut

Lemme : L'ordre modifié d'une section non dégénérée d'un $\mathcal{E}$-Module holonome est stable par l'opération "image directe par une immersion fermée".

En pratique, pour calculer l'ordre d'une section u de $\mathcal{N}$ par rapport à Λ, on effectue une transformation canonique de manière que Λ devienne le fibré conormal à l'hypersurface $x^1 = 0$ de X. Sous l'hypothèse que u est non dégénérée, le $\mathcal{E}_X$-Module $\mathcal{E}_X.u$ est alors isomorphe à

$$\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X.(x_1.\frac{\partial}{\partial x^1} - \lambda) + \mathcal{E}_X.(\frac{\partial}{\partial x^2}) + \dots + \mathcal{E}_X.(\frac{\partial}{\partial x^n})$$ et on vérifie aisément que

l'ordre modifié de u est égal à $-\lambda - 1$. Le même procédé permet de définir l'ordre d'une section u éventuellement dégénérée, comme une partie finie de $\mathbb{C}$; on observe [, §1.3] que $\mathcal{E}_X.u$ est obtenu comme extension de $\mathcal{E}_X$-Modules du type précédent ; l'ordre modifié de u est l'ensemble des $-\lambda-1$, tels que le $\mathcal{E}_X$-Module $\mathcal{M}_\lambda$ apparaît dans cette suite de composition. On trouvera dans [K-K, §1.5] une définition plus intrinsèque. Cette description permet en tout cas de déduire du lemme plus haut le Scholie : L'ordre modifié d'une section non nulle d'un $\mathcal{E}$-Module holonome est stable par l'opération "image directe par une immersion fermée".

Le résultat le plus frappant concernant la notion d'ordre d'une section d'un Module holonome est le théorème 5.1.6 de [K-K], dont je reproduis l'énoncé (qui est valable soit pour l'ordre de Kashiwara-Kawai, soit pour mon ordre modifié).

Théorème : Soit $c\in\mathbb{R}^+$, et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{E}_X$-Module R.S. défini sur un ouvert de $T^*X - T^*_XX$. Soit Λ le support de $\mathcal{N}$. Soit $\mathcal{N}_c$ le sous-faisceau de $\mathcal{N}$ formé des sections dont l'ordre modifié, en tout point régulier de Λ est compris dans $\{\lambda \in \mathbb{C}$ t.q $\mathrm{Re}\,\lambda \leq c\}$. Alors

(i) $\mathcal{N}_c$ est cohérent comme $\mathcal{E}_X(0)$-Module

(ii) on a $\mathcal{N} = \mathcal{E}_X . \mathcal{N}_c$ et $\mathcal{N}_c = \mathcal{E}_\Lambda . \mathcal{N}_c$

(iii) pour tout fermé analytique W d'un ouvert de T^*X, de dimension $<$ dimX, on a $\mathcal{H}^o_W(\mathcal{N} | \mathcal{N}_c) = 0$.

Ici, le point (i) est hautement non trivial, et très profond. Je crois l'hypothèse $c \geq 0$ nécessaire. Je rajoute, pour usage futur, l'énoncé (iv) sous les mêmes hypothèses, $\mathcal{N}_{c+1} = \mathcal{E}_X(1) . \mathcal{N}_c$. D'après (iii), il se vérifie sur le lieu lisse de Λ, que l'on embellit par transformation canonique (on prouve $\mathcal{E}_x(1) . \mathcal{N}_c \subset \mathcal{N}_{c+1}$ puis $\mathcal{E}_X(-1) . \mathcal{N}_{c+1} \subset \mathcal{N}_c$)

Remarque importante : J'ai négligé de faire observer que, contrairement à l'ordre au sens de Kashiwara-Kawai, le mien n'est pas invariant par transformation canonique ; son comportement étant aisément déterminé dans une telle opération.

1.2.2 Où la parole est à la variable muette

Une fois démontré un résultat sur les $\mathcal{E}_X$-Modules, le procédé standard pour l'adapter aux $\mathcal{D}_X$-Modules consiste en l'addition d'une variable muette, grâce à laquelle, dans une nouvelle dimension, on décolle de la section nulle du fibré cotangent (voir [K, §2], [K-K, Appendice A]). Soit donc X une variété analytique complexe, et soit $X' = \mathbb{C} \times X$. Sur $T^*\mathbb{C}$ on prendra des coordonnées (t,τ). On identifie T^*X' à $T^*\mathbb{C} \times T^*X$. Soit $V = \{(0,\tau)\ ;\ \tau \neq 0\} \times T^*X$, et soit F la projection de V sur T^*X. Soit $\mathcal{L}$ le faisceau $\mathcal{E}_{X'} | \mathcal{E}_{X'} t$ sur V ; c'est un $(\mathcal{E}_{X'}, F^{-1}\mathcal{E}_X)$-bi-Module, muni d'une section canonique notée u_o. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{E}_X$-Module, on lui associe le $\mathcal{E}_{X'}$-Module $\Phi(\mathcal{M}) = \mathcal{L} \underset{F^{-1}\mathcal{E}_X}{\otimes} F^{-1}\mathcal{M}$. Soit $j : T^*X \hookrightarrow T^*X'$ le morphisme tel que $j(p) = (0, 1\ ;\ p)$ à tout $\mathcal{E}_{X'}$-Module $\mathcal{N}$ à support dans V, on associe le $\mathcal{E}_X$-Module $\Psi(\mathcal{N})$ défini par $\Psi(\mathcal{N}) = j^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{X'}}(\mathcal{L}, \mathcal{N})$.

On construit un isomorphisme canonique entre $\Psi \circ \Phi(\mathcal{M})$ et $\mathcal{M}$, pour tout $\mathcal{E}_X$-Module $\mathcal{M}$.

Le point important **est le suivant. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$ - Module** cohérent et soit $\mathcal{N} = \Phi\,(\mathcal{E}_X \otimes \mathcal{M}$ qui est un $\mathcal{E}_{X'}$-Module cohérent. Soit $\mathcal{N}_o$ un sous $\mathcal{E}_{X'}(0)$-Module cohérent de $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{N} = \mathcal{E}_{X'}\, \mathcal{N}_o$ et que $t.\,\mathcal{N}_o \subset \mathcal{N}_o(-1) = \mathcal{E}_{X'}(-1).\,\mathcal{N}_o$. Soit j_o le composé de l'inclusion de X dans T^*X et de $j : T^*X \hookrightarrow T^*X'$; $\mathcal{M}$ s'identifie à un sous-Module de $j_o^{-1}(\mathcal{N})$ par $s \longrightarrow u_o \otimes s$. Alors les $\mathcal{M}_k = j_o^{-1}\, \mathcal{N}_o(k) \cap \mathcal{M}$ définissent une bonne filtration de $\mathcal{M}$. On a de plus $\mathcal{N}_o = \sum_k \mathcal{E}_{X'}(-k).\,(u_o \otimes \mathcal{M}_k)$

Maintenant, si $\mathcal{M}$ est holonome R.S., $\mathcal{N}$ l'est également. (voir [K-K, lemma 5.1.9]). Pour $c \in \mathbb{R}^+$, on dispose de $\mathcal{N}_c \subset \mathcal{N}$ qui vérifie $\mathcal{N} = \mathcal{E}_{X'}.\,\mathcal{N}_c$ et qui est cohérent sur $\mathcal{E}_{X'}(0)$ d'après le théorème rappelé en 1.2.1. Comme supp $(\mathcal{N})$ est contenu dans V, où t s'annule, on a $t.\,\mathcal{N}_c \subset \mathcal{N}_c(-1)$ d'après le même théorème (énoncé(ii)) d'où une bonne filtration de $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}_k$ est formé des sections s de $\mathcal{M}$ telles que $u_o \otimes s$ soit une section de $\mathcal{N}_{c+k}$ (d'après l'énoncé (iv)). Cela revient à dire que l'ordre de s, comme section de $\mathcal{E}_X \otimes \mathcal{M}$ est inclus dans $\{\lambda \;;\; \mathrm{Re}\,\lambda \leq c + k\}$. En pratique, on prendra $c = 0$. Si P est une section de $\mathcal{D}_X$ d'ordre m telle que $\sigma_m(P)$ s'annule sur $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$, alors P, comme section de $\mathcal{E}_{X'}$, s'annule sur le support de $\mathcal{N}$, donc $P(\mathcal{N}_{c+k}) \subset \mathcal{N}_{c+k+m-1}$ d'où $P.\,\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+m-1}$.

Ces considérations justifient la

<u>Définition</u> : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module holonome R.S. Soit $\mathcal{M}_k$ le sous-faisceau formé des sections qui sont partout sur $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ d'ordre(modifié) inclus dans $\{\lambda \text{ t.q } \mathrm{Re}(\lambda) \leq k\}$. Alors $\{\mathcal{M}_k\}$ est une bonne filtration de $\mathcal{M}$; si P est une section locale de $\mathcal{D}_X(m)$ telle que $\sigma_m(P)$ s'annule sur $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$, on a : $P.\,\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+m-1}$. Cette bonne filtration s'appelle la <u>bonne filtration canonique</u> de $\mathcal{M}$.

<u>Lemme</u> : Si $\mathcal{M} = \mathcal{L}(Y,X)$, on a $\mathcal{M}_{-1} = 0$.

<u>Preuve</u> : Soit s une section locale de $\mathcal{M}_{-1}$; $s|_{X-Y_{sing}}$ est une section de $\mathcal{B}_{Y-Y_{sing}}|_{X-Y_{sing}}$; comme l'ordre d'une section $\neq 0$ de ce dernier faisceau est un entier ≥ 0, $s|_{X-Y_{sing}}$ est nulle. Mais $\mathcal{M}$ n'a pas de section à support dans Y_{sing} [B-K, §8] donc $s = 0$.

<u>Exercice</u> : Calculer l'ordre de $u = (X^3Y^5+Z^2Y^3+X^2Y^2Z-3Y^4Z)^{\frac{1}{5}}$ et envoyer la réponse à l'auteur.

1.3 <u>Vérification de quelques compatibilités</u>

Je rappelle que dans [Br], pour Y un espace analytique réduit irréductible, plongé dans une variété lisse X, ayant filtré le Module holonome $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(Y,X)$ comme en 1.2, je filtre le complexe de De Rham $DR(\mathcal{L})$ par les

$$F^P\, DR(\mathcal{L}) \; : \; 0 \longrightarrow \mathcal{L}_{-p} \longrightarrow \Omega^1_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{L}_{-p+1} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \Omega^{\dim X}_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{L}_{-p+\dim X} \longrightarrow 0$$

Si ℓ est la codimension de Y dans X, le complexe $IC^{\bullet}_Y$ est incarné par $DR(\mathcal{L})[\ell]$. Si on définit $F^P_{\cdot}\, IC^{\bullet}_Y$ comme correspondant par décalage à $F^{P+\ell}\, DR(\mathcal{L})$, on obtient un objet $(IC^{\bullet}_Y,\, F^{\bullet})$ de la catégorie dérivée filtrée des complexes bornés de faisceaux sur X. On veut montrer qu'il est essentiellement indépendant du plongement de Y choisi. Au moins localement sur Y, il existe au moins un plongement minimal de Y, disons $i : Y \hookrightarrow X$. On a alors l'objet $(IC^{\bullet}_Y, F_{(X)})$. Soit $j : X \hookrightarrow Z$, un plongement de X dans une variété lisse Z. L'objet $j_*(IC^{\bullet}_Y, F_{(X)})$ vit dans la catégorie dérivée filtrée relative à Z, de même que l'objet $(IC^{\bullet}_Y,\, F_{(Z)})$. On veut montrer qu'ils sont naturellement isomorphes. On dispose sur Z du Module holonome $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(Y,Z)$ et de la filtration $F^{\bullet}$ de $DR(\mathcal{L}')$. On a $\mathcal{L}' = j_*(\mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{L}(Y,X))$ (voir [K3 ,§4]). On dispose pour tout k d'un morphisme résidu Res : $\Omega^k_Z \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{D}_{Z \leftarrow X} \longrightarrow \Omega^{k+\dim X-\dim Z}_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}_X$, grâce auquel on définit un morphisme de complexes de $DR(\mathcal{L}')\,[\ell+\dim Z-\dim X]$ vers $DR(\mathcal{L})\,[\ell]$: ou de $DR(\mathcal{L}')\,[\dim Z-\dim X]$ vers $DR(\mathcal{L})$

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k_Z \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{L}' = \Omega^k_Z \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \mathcal{D}_{Z\leftarrow X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{L} \\ \big\downarrow \text{Res} \otimes \text{Id} \\ \Omega_X^{k+\dim X-\dim Z} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{L} \end{array}$$

Il est compatible aux filtrations $F^\bullet$ grâce au lemme suivant.

<u>Lemme</u> : Soit $\mathcal{D}_{Z\leftarrow X}$ muni de la filtration par l'ordre des opérateurs ($\mathcal{D}_{Z\leftarrow X}$ étant obtenu en tordant $\mathcal{D}_Z \otimes \mathcal{O}_X$ par un faisceau inversible). Alors

$$\mathcal{L}'_m = \sum_{i+j=m} j_*(\mathcal{D}_{Z\leftarrow X}(i) \otimes \mathcal{L}_j)$$

La démonstration, facile est omise. Pour montrer que ce morphisme canonique de complexes filtrés est un quasi-isomorphisme filtré, on se localise sur Y de sorte que $X \hookrightarrow Z$ soit le plongement de $X = X\times\{v\}$ dans $X\times V$, où V est une variété lisse. Soit ω_V une forme différentielle sur V, de degré maximum et partout non nulle. On définit alors un morphisme φ de complexes de $DR(\mathcal{L})$ vers $DR(\mathcal{L}')[\dim V]$ défini en degré k par $\varphi : \Omega^k_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{L} \longrightarrow \Omega^{k+\dim V}_{X\times V} \underset{\mathcal{O}_{X\times V}}{\otimes} \mathcal{D}_{X\times V\leftarrow X} \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{L}$ par

$\varphi(\alpha \otimes u) = (\alpha \wedge \omega) \otimes (\ell\, \omega^{\otimes -1}) \otimes u.$

On vérifie que ce morphisme fournit un quasi-inverse au morphisme canonique précédent. En particulier, on a la

<u>Proposition</u> : Pour Y une variété projective, la filtration $F^\bullet$ sur $IH^k(Y)$ obtenue par la filtration "de Hodge" de $DR\,\mathcal{L}(Y,X)$, est indépendante du plongement de Y dans une variété lisse X.

Ce fait nous facilitera la vérification de la compatibilité suivante:

<u>Proposition</u> : Soit Y une variété projective, soit $\eta \in H^2(Y,\mathbb{C})$ la classe de cohomologie d'une section hyperplane. Le cup-produit par η envoie $F^P\, IH^k(Y)$ vers $F^{P+1}\, IH^{k+2}(Y)$.

Preuve : Grâce à l'indépendance du plongement, on peut travailler avec un plongement $i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N$. On a $\eta = i^*(\gamma)$, où γ est le générateur habituel de $H^2(\mathbb{P}^N, \mathbb{C})$. Le cup-produit :

$$H^2(\mathbb{P}^N) \times IH^k(Y) \longrightarrow H^2(Y) \times IH^k(Y) \longrightarrow IH^{k+2}(Y)$$

se réalise au niveau des complexes de De Rham, par un accouplement

$$DR(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}) \times DR(\mathcal{L}) \longrightarrow DR(\mathcal{L})$$

dont la construction est évidente. Bien sûr $DR(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}) = \Omega^{\bullet}_{\mathbb{P}^N}$ et γ appartient à l'image de $\mathbb{H}^2(\mathbb{P}^N, F^1\, DR(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}))$ dans $\mathbb{H}^2(\mathbb{P}^N, DR(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N})) = H^2(P^N, \mathbb{C})$. Dans l'accouplement précédent, $F^1\, DR(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}) \times F^k\, DR(\mathcal{L})$ s'envoie vers $F^{k+1}\, DR(\mathcal{L})$, d'où le résultat.

On aimerait bien sûr que la filtration $F^{\bullet}$ des $IH^k(Y)$ soit telle que, vis-à-vis de la "forme-intersection" $IH^k(Y) \times IH^{2m-k}(Y) \longrightarrow \mathbb{C}$ (où $m = \dim Y$) $F^p\, IH^k(Y)$ soit orthogonal à $F^{m+1-p}\, IH^{2m-k}(Y)$. Je n'ai pas réussi à le démontrer, mais ce fait résulterait d'une réponse positive à la question suivante.

Question : Soit Y plongée dans X lisse, $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}(Y,X)_n$. Est-il vrai que $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_n, \mathcal{O}_X) = 0$ pour tout n et pour tout $i > \dim X - \dim Y$?

On aimerait aussi avoir une sorte de compatibilité de la bonne filtration $\{\mathcal{L}_k\}$ avec la dualité des Modules holonomes. Rappelons que le dual $\mathcal{M}^*$ d'un Module holonome $\mathcal{M}$ est un Module holonome à gauche tel que $\mathcal{M}^* \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X = \mathcal{E}xt^{\dim X}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_X)$ (égalité de $\mathcal{D}_X$-Modules à droite). Le foncteur $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^*$ est exact ; on a canoniquement $(\mathcal{M}^*)^* \cong \mathcal{M}$.

Lemme : $\mathcal{M}^*$ est R.S. si et seulement si $\mathcal{M}$ l'est.

Cela ne semble pas explicitement énoncé dans [K-K], mais se prouve facilement par microlocalisation. Ce fait a été démontré par Mebkhout [Me3] et constitue, dans son approche, un point fondamental.

Au niveau des $\mathcal{E}_X$-Modules, on a une dualité entre $\mathcal{E}_X$-Modules à gauche holonomes (resp. R.S.) et $\mathcal{E}_X$-Modules holonomes à droite (resp.R.S.) qui envoie $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{E}xt^{\dim X}_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{N},\mathcal{E}_X)$. On a :

$\mathcal{E}xt^{\dim X}_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}, \mathcal{E}_X) \cong \mathcal{E}xt^{\dim X}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{D}_X) \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{E}_X$ du fait que $\mathcal{E}_X$ est plat sur $\mathcal{D}_X$[S-K-K, II.4]. Cette dualité est également compatible à l'opération d'adjonction d'une variable muette décrite en 1.2 (voir [K3, lemma 2.4]).

Cela dit, pour $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-Module holonome muni d'une bonne filtration $\{\mathcal{M}_k\}$, un procédé standard permet de construire une bonne filtration de $\mathcal{E}xt^{\dim X}_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{D}_X)$ (ou de $\mathcal{M}^*$, c'est pareil). On la décrit localement au moyen d'une résolution filtrée libre

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_X^{r_N} \xrightarrow{d_{N-1}} \mathcal{D}_X^{r_{N-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{D}_X^{r_1} \xrightarrow{d_1} \mathcal{D}_X^{r_o} \xrightarrow{d_o} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

(où les $\mathcal{D}_X^{r_i}$ sont munis de filtrations $\mathcal{D}_X^{r_i}(k)$ de sorte que chaque d_i soit compatible aux filtrations et que la suite d'homomorphismes de $gr(\mathcal{D}_X)$-Modules obtenue par passage au gradué soit une résolution graduée libre de $gr(\mathcal{M})$). On a posé N = dimX. Le complexe $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^{r_i}, \mathcal{D}_X) \xrightarrow{d_i^*} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{D}_X^{r_{i+1}}, \mathcal{D}_X)$ est alors filtré, d'où une filtration sur son N-ème faisceau de cohomologie, qui n'est autre que $\mathcal{E}xt^N_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M},\mathcal{D}_X)$. Cette filtration <u>est une bonne filtration</u> de ce Module holonome à droite, parce que son gradué associé est un sous-quotient du $gr(\mathcal{D}_X)$-Module $\mathcal{E}xt^N_{gr(\mathcal{D}_X)}(gr(\mathcal{M}), gr(\mathcal{D}_X))$ qui est $gr(\mathcal{D}_X)$-cohérent (voir[B_j, chap.2] pour tout ceci.

Malheureusement, si $\mathcal{M}$, holonome R.S. est muni de sa filtration par l'ordre, la filtration obtenue sur $\mathcal{M}^*$ n'est <u>pas</u> la filtration par l'ordre, comme on le voit sur les exemples les plus simples en dimension 1.* Pour avoir une invariance de la bonne filtration canonique par passage au dual, il faut donc trouver un autre procédé pour transférer une bonne filtration sur le dual d'un Module holonome. Comme la définition de la filtration provenait de l'ana-

*Il apparait un décalage aux points singuliers

On s'aidera de la propriété mirifique des sous $\mathcal{E}_X(0)$-Modules $\mathcal{N}_c$ du $\mathcal{E}_X$-Module holonome R.S. $\mathcal{N}$ décrits en 1.2.1. On posera $\Lambda = \mathrm{supp}(\mathcal{N})$ et pour tout m on introduira $\mathcal{E}_\Lambda(m)' \subset \mathcal{E}_X(m+1)$, le sous-faisceau formé des éléments dont le symbole d'ordre m+1 s'annule sur Λ. On a alors $\mathcal{E}_\Lambda(m)'.\mathcal{N}_c \subset \mathcal{N}_{c+m}$. On filtre $\mathcal{E}_X$ par les $\mathcal{E}_\Lambda(m) = \sum_{m_1+\dots+m_k=m} \mathcal{E}_\Lambda(m_1)'. \dots .\mathcal{E}_\Lambda(m_k)'$. On travaillera alors avec des résolutions filtrées libres de $\mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est muni de la filtration par les $\mathcal{N}_k$ (k entier ≥ 0) et $\mathcal{E}_X$ de la filtration par les $\mathcal{E}_\Lambda(m)$. On construit alors, par le procédé décrit plus haut, une bonne filtration de $\mathcal{E}xt^N_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{N},\mathcal{E}_X)$ qui à la même propriété mirifique que la filtration par l'ordre. On veut se convaincre que ce n'est rien d'autre que la filtration par l'ordre. Il est facile de voir que les deux filtrations coïncident en dehors d'un fermé analytique rare de Λ (contenant son lieu singulier) car on peut alors, par transformation canonique, se ramener au cas où Λ est le fibré conormal à l'hypersurface $x^1 = 0$ de X et où $\mathcal{N} = \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X.(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - \lambda)^m + \mathcal{E}_X.\frac{\partial}{\partial x^2} + \dots + \mathcal{E}_X.\frac{\partial}{\partial x^n}$;

on a alors une résolution filtrée libre de $\mathcal{N}$ obtenue par le complexe de Koszul pour les éléments $(x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} - \lambda)^m, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ qui commutent deux à deux ; le point est que chacun de ces éléments est une section de $\mathcal{E}_\Lambda(0)$. Je ne sais pas vérifier qu'il en est de même sur tout Λ, faute de disposer d'un théorème du type de Hartogs pour les $\mathcal{E}_\Lambda$-Modules cohérents sur $\mathcal{E}_X(0)$. En tout cas, cette vérification générique sur Λ suffit à démontrer la

<u>Proposition</u> : Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{E}_X$-Module holonome R.S., filtré par les $\mathcal{N}_k$. Filtrons $\mathcal{N}' = \mathcal{E}xt^N_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{N},\mathcal{E}_X)$ par le procédé ci-dessus. Alors la filtration de $\mathcal{N}'$ par les $\mathcal{N}'(k) = \{$sections de $\mathcal{N}'$ qui sont de filtration $\leq$ k en dehors d'un fermé rare de $\mathrm{Supp}(\mathcal{N})\}$ coïncide avec la filtration canonique (par les éléments dont l'ordre est inclus dans $\{\lambda \in \mathbb{C}$ t.q $\mathrm{Re}\,\lambda \leq k\}$.

En utilisant la technique d'adjonction d'une variable muette, on transférera toute filtration d'un $\mathcal{D}_X$-Module holonome $\mathcal{M}$, définie par une condi tration de $\mathcal{M}^*$ du même type.

<u>Définition et corollaire</u> : Une bonne filtration du $\mathcal{D}_X$-Module holonome R.S. est dite <u>admissible</u> si $\mathcal{M}_k$ est défini par une condition relative à chaque composante Λ du type suivant : si $\Lambda \neq T^*_X X$, la condition est d'avoir un ordre $\leq k + \alpha(\Lambda)$ relativement à Λ, où $\alpha(\Lambda) \in \mathbb{R}_+$; si $\Lambda = T^*_X X$, $\{\mathcal{M}_k\}|_{X-SS(\mathcal{M})}$ est une filtration de longueur finie. On en déduit une filtration de $\mathcal{M}^*$, également admissible, par le procédé plus haut, à ce détail près que pour $\Lambda = T^*_X X$, $\mathcal{M}^*_k$ est dual (sur $\mathcal{O}_{X-SS(\mathcal{M})}$) de $(\mathcal{M}|\mathcal{M}_{1-k})|_{X-SS(\mathcal{M})}$. Cette filtration de $\mathcal{M}^*$ sera dite la filtration obtenue par <u>transfert</u> à partir de celle de $\mathcal{M}$.

Ceci sera peut-être utile un jour.

§ 2 VARIATIONS DE STRUCTURES DE HODGE POLARISÉES ET MODULES HOLONOMES R.S.

2.1. Modules holonomes purifiés

Soit Y un espace analytique irréductible, U un ouvert lisse de Y, $V_{\mathbb{Q}}$ un système local de $\mathbb{Q}$-vectoriels sur U, $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} V_{\mathbb{Q}}$ le système local de $\mathbb{C}$-vectoriels associé, $\mathcal{V} = \mathcal{O}_U \underset{\mathbb{C}_U}{\otimes} V_{\mathbb{C}}$ le fibré vectoriel à connection intégrable correspondant. Supposons donnée une filtration décroissante de longueur finie $\mathcal{F}^\cdot \mathcal{V}$ de $\mathcal{V}$ par des sous-fibrés vectoriels (ou plutôt des sous-faisceaux localement libres, localement facteurs directs, $\mathcal{F}^P \mathcal{V}$).

<u>Lemme</u> : La condition de transversalité de Griffiths : $v.\mathcal{F}^P \mathcal{V} \subset \mathcal{F}^{P-1} \mathcal{V}$ pour tout germe de champ de vecteurs v sur U, équivaut au fait que les $\mathcal{V}_k = \mathcal{F}^{-k}$ définissent une (bonne) filtration du $\mathcal{D}_U$-Module à gauche $\mathcal{V}$.

C'est clair. On suppose dans toute la suite que cette condition est vérifiée $(V_{\mathbb{Q}}, \mathcal{V}, \mathcal{F}^\cdot \mathcal{V})$ est une <u>variation de structures de Hodge</u> de poids m sur U si pour tout $x \in U$, l'espace vectoriel rationnel $V_{\mathbb{Q},x}$ muni de la filtration

$F^p(V_{\mathbb{C},x})$ induite par les $F^p\mathcal{V}_x$, se trouve muni d'une structure de Hodge de poids m.

Supposons donnée de plus un accouplement $V_{\mathbb{Q}} \otimes V_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\Psi} \mathbb{Q}_U$ $(-1)^m$-symétrique et partout non dégénéré. On dit que Ψ est une polarisation de cette variation de structures de Hodge si pour tout $x \in U$, Ψ_x définit une polarisation de la structure de Hodge $V_{\mathbb{Q},x}$, i.e si $\frac{\Psi(y,C.\bar{y})}{(2\pi i)^{-m}} > 0$ pour $y \in V_{\mathbb{C},x}, y \neq 0$

(C est l'endomorphisme de $V_{\mathbb{C},x}$ qui opère par i^{q-p} sur les éléments de type (p,q)). On dit alors que $(V_{\mathbb{Q}}, \Psi, \mathcal{V}, \mathfrak{F}^{\cdot}\mathcal{V})$ est une variation de structures de Hodge polarisées. On notera que Ψ définit un isomorphisme de V avec $V^*(-m)$, où V^* est la variation de structures de Hodge duale et (-m) dénote un twist à la Tate.

Soit maintenant $i : Y \hookrightarrow X$ un plongement dans une variété lisse. Soit $Z = Y - U$, $i' : U \hookrightarrow X-Z$ le plongement restreint à U. Au $\mathcal{D}_U$-Module $\mathcal{V}$ est associé le $\mathcal{D}_{X-Z}$-Module $\int_{i'} \mathcal{V} = i'_*(\mathcal{D}_{X-Z \xleftarrow{i'} U} \otimes_{\mathcal{D}_U} \mathcal{V})$. C'est un module holonome R.S. ; comme on l'a expliqué 1.3, à la bonne filtration de $\mathcal{V}$ décrite par le lemme correspond une bonne filtration de $\int_{i'} \mathcal{V}$, telle que $(\int_{i'} \mathcal{V})_m$ est engendré, comme $\mathcal{O}_{X-Z}$-Module, par les $\mathcal{D}_{X-Z \leftarrow U}(k) \otimes \mathcal{V}_{m-k}$ (pour k entier variable) Ce Module holonome $\int_{i'} \mathcal{V}$ n'est autre que $\mathcal{B}_{U|X-Z} \otimes_{\mathbb{C}_U} V_{\mathbb{C}}$, et la filtration qu'on a défini est en quelque sorte la somme des filtrations sur les deux facteurs du produit tensoriel.

Ensuite, on sait [B-B], [Br], qu'on dispose d'un prolongement canonique $\mathcal{L}(Y,X;V_{\mathbb{C}})$ de $\mathcal{B}_{U|X-Z} \otimes_{\mathbb{C}_V} V_{\mathbb{C}}$ qui est un Module holonome R.S. (en particulier, il n'a aucune section non nulle à support dans Z). L'isomorphisme entre $V_{\mathbb{C}}$ et $V^*_{\mathbb{C}}(-m)$ induit par une polarisation se prolonge en un isomorphisme entre $\mathcal{L}(Y,X; V_{\mathbb{C}})$ et $\mathcal{L}(Y,X;V^*_{\mathbb{C}}(-m))$; or ce dernier n'est autre que le dual (au sens des Modules holonomes) de $\mathcal{L}(Y,X;V_{\mathbb{C}})$. On a donc le Scholie : Une polarisation de la variation V de structures de Hodge sur V induit un isomorphisme de $\mathcal{L}(Y,X;V_{\mathbb{C}})$ avec $\mathcal{L}(Y,X;V^*_{\mathbb{C}}(m))$.

Bien sûr, la torsion à la Tate est sans effet sur le système local

$V_{\mathbb{C}}^{*}$, mais c'est surtout aux filtrations que nous nous intéressons actuellement.

On veut donc définir de façon naturelle une bonne filtration de $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Y,X;V_{\mathbb{C}})$ qui prolonge la bonne filtration déjà construite sur X-Z. L'idée est comme au §1 de définir $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}$ par des conditions qui se lisent sur les diverses composantes de $Ch(\mathcal{L})$; on est persuadé d'avoir déjà la bonne condition sur la composante $T_Y^{*}X$; la condition sur les autres composantes (s'il en existe) sera fournie par une inégalité portant sur l'ordre modifié (introduit en 1.2).

<u>Définition et lemme</u> : La filtration $\{\mathcal{L}_k\}$ de $\mathcal{L}$ est la plus petite filtration telle que, si s est une section locale de $\mathcal{L}$ satisfaisant les conditions :

i) $s|_{X-Z}$, section de $\mathcal{B}_{U|X-Z} \underset{\mathbb{C}_U}{\otimes} \mathcal{V}$, appartient à $(\int_i \mathcal{V})_k$;

ii) s est une section de $\mathcal{L}$ d'ordre (modifié) ≤ 0 au sens de 1.2.1 ; alors s est une section de $\mathcal{L}_k$.

<u>Remarque</u> : Par définition, une filtration $\{\mathcal{L}_k\}$ de $\mathcal{L}$ satisfait la condition $\mathcal{D}(m).\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}_{k+m}$.

$\{\mathcal{L}_k\}$ est une bonne filtration de $\mathcal{L}$. Lorsque V est polarisée, $\mathcal{L}$, muni de cette filtration, reçoit le nom de <u>Module holonome purifié</u> de poids m + 2dimY-dimX.

Pour prouver que $\{\mathcal{L}_k\}$ est une bonne filtration, on construit des $\mathcal{E}_{X\times\mathbb{C}}(0)$-Modules cohérents $\mathcal{N}_k \subset \Phi(\mathcal{L})$ (notations de 1.2) tels que $\mathcal{L}_k = j_o^{-1}(\Phi(\mathcal{L})) \cap \mathcal{L}$ et que $\mathcal{N}_{k+1} = \mathcal{E}_{X\times\mathbb{C}}(1).\mathcal{N}_k$ pour k assez grand. Cette construction se fait aisément sur Λ_{reg}, par le procédé de 1.2, et on prend ensuite une image directe qu'on sait cohérente sur $\mathcal{E}_{X\times\mathbb{C}}(0)$ d'après [K-K, Theorem 5.1.8] (il s'agit là d'un résultat très profond).

Notons que si l'on remplace V par V(r), on peut identifier V à V(r) de sorte que le fibré $\mathcal{V}(r)_k$ coincide avec $\mathcal{V}_{k-r}$; bien sûr p(V(r))=p(V)-r, de sorte que l'on a : $[\mathcal{L}(Y,X;V(r))]_k = [\mathcal{L}(Y,X;V)]_{k-r}$. En résumé, la construction faite est compatible aux torsions à la Tate de la variation V de structures de Hodge polarisées.

Par ailleurs l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(Y,X;V)$ et $\mathcal{L}(Y,X;V^*(m))$ induit par la polarisation de V est strictement compatible aux filtrations.

Remarque autocritique : Je ne dispose pas à l'heure actuelle d'information suffisantes pour pouvoir considérer cette construction comme définitive. Je ne connais pas d'exemple où elle ne soit pas compatible avec la définition de [Br], dans le cas où $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}_Y$.

De la définition même, il résulte que si $X_1 \overset{i}{\hookrightarrow} X_2$ est une immersion fermée entre variétés lisses, la construction $\mathcal{L} \longmapsto i_*(\mathcal{D}_{X_2 \leftarrow X_1} \underset{\mathcal{D}_{X_1}}{\otimes} \mathcal{L})$, et le procédé plus haut d'extension d'une bonne filtration, envoie bijectivement Modules holonomes purifiés de poids m sur X_1 sur Modules holonomes purifiés sur X_2.

Pour $i : X_1 \hookrightarrow X_2$ une immersion ouverte, $\mathcal{L}$ un Module holonome R.S. sur X_1 ; on lui associe un Module holonome R.S. $i_{!*}\mathcal{L}$ sur X_2, l'image directe intermédiaire de $\mathcal{L}$. Via la correspondance entre Modules holonomes R.S. et faisceaux pervers, cette opération correspond à celle définie par Deligne pour les faisceaux pervers : le foncteur i^*, de la catégorie des faisceaux pervers sur X_2 vers celle des faisceaux pervers sur X_1, admet un adjoint à gauche $i_!$ et un adjoint à droite i_* ; Deligne définit alors $i_{!*}(K)$ comme l'image de $i_!(K)$ dans $i_*(K)$ (il faut remarquer que le morphisme de $i_!(K)$ vers $i_*(K)$ peut avoir un noyau non nul dans la catégorie abélienne des faisceaux pervers). La définition de $i_{!*}(\mathcal{L})$ s'inspire de la construction de $\mathcal{L}(Y,X)$ donnée dans [B-K, Prop.8.5]. Il faut utiliser le fait connu (mais non trivial) que $\mathcal{L}$ a une extension $\mathcal{L}'$ à X_2, qui est holonome R.S. On pose $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}'/\mathcal{H}^0_{[X_2-X_1]}\mathcal{L}'$ et on définit $i_{!*}\mathcal{L} = [\mathcal{L}''^*/\mathcal{H}^0_{[X_2-X_1]}\mathcal{L}''^*]^*$. Bien que non semi-exact, $i_{!*}$ conserve mono-et épi-morphismes. Cela dit, il est clair que ma définition des Modules holonomes purifiés est stable par image directe intermédiaire.

La conjecture énoncée plus bas concerne le comportement d'un Module holonome purifié par un morphisme projectif $f : X \longrightarrow Y$. Comme, localement suivi de $p : Y \times \mathbb{P}^N \longrightarrow Y$, et comme le comportement par une immersion fermée a déjà été expliqué, on pourra supposer que $X = Y \times \mathbb{P}^N$ (et $f = p$). Soit donc $\mathcal{L}$ un Module holonome purifié sur X. L'<u>intégration sur les fibres</u> (de p) du $\mathcal{D}_X$-Module $\mathcal{L}$ est un objet de la catégorie dérivée des complexes bornés de $\mathcal{D}_Y$-Modules à faisceaux de cohomologie holonomes R.S., défini par :

$$\int \mathcal{L} = \mathbb{R}\, p_*(\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{L})$$

Les faisceaux de cohomologie sont notés $\int^i \mathcal{L}$(voir [K, § 4] ou [B_j ; Chap.6§2] pour la définition, [Me3], [K-K, 6.2] pour la démonstration que les faisceaux de cohomologie sont holonomes R.S.).

Le bi-Module $\mathcal{D}_{Y\xleftarrow{f} X}$ est défini, de manière générale, par

$\mathcal{D}_{Y\xleftarrow{f} X} = f^{-1}(\mathcal{D}_Y \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} (\Omega_Y^{\dim Y})^{\otimes -1}) \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega_X^{\dim X}$. Ici on a simplement

$\mathcal{D}_{Y\xleftarrow{p} X} = p^{-1}\mathcal{D}_Y \underset{p^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega^N_{X/Y}$ où bien sûr $\Omega^N_{X/Y} = \mathcal{O}_X \underset{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}}{\otimes} \Omega^N_{\mathbb{P}^N}$. On dispose d'une résolution de $p^{-1}\mathcal{D}_Y \underset{p^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega^N{}_{X/Y}$ comme $\mathcal{D}_X$-Module à droite.

$$0 \longrightarrow \Omega^0_{X/Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}_X \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^i_{X/Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}_X \longrightarrow \Omega^{i+1}_{X/Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}_X \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow \Omega^N_{X/Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}_X \longrightarrow p^{-1}\mathcal{D}_Y \underset{p^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega^N_{X/Y} \longrightarrow 0$$

où le complexe $\Omega^{\bullet}_{X/Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}_X = p_2^{-1}(\Omega^{\bullet}_{\mathbb{P}^N}) \underset{p_2^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N})}{\otimes} \mathcal{D}_X$ est le complexe de De Rham de $\mathcal{D}_X$, vu comme $p_2^{-1}(\mathcal{D}_{\mathbb{P}^N})$-Module à gauche. Localement, ce complexe apparaît comme un complexe de Koszul pour un système de champs de vecteurs sur $\mathbb{P}^N$ commutant deux à deux, d'où son exactitude.

Cette résolution de $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X}$ par des $\mathcal{D}_X$-Modules à droite localement libre permet d'incarner $\mathcal{D}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathbb{L}}{\underset{\mathcal{D}_X}{\otimes}} \mathcal{L}$ par le <u>complexe de De Rham relatif</u> (i.e le long des fibres) $DR_{X/Y}(\mathcal{L})$

$$\Omega^{o}_{X/Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{L} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \Omega^{i}_{X/Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{L} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \Omega^{N}_{X/Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}_X$$

à ceci près que $\Omega^{i}_{X/Y} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{L}$ apparaît en degré i-N.

Cela dit, à la bonne filtration $\{\mathcal{L}_k\}$ de $\mathcal{L}$ correspond une filtration $F^{\cdot}DR_{X/Y}(\mathcal{L})$, définie de la même facon que dans [Br]

$$F^{P}\ DR_{X/Y}(\mathcal{L}) : \Omega^{o}_{X/Y} \otimes \mathcal{L}_{-p} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \Omega^{i}_{X/Y} \otimes \mathcal{L}_{-p+i}$$

Cela permet de filtrer les $\mathcal{D}_Y$-Modules $\int^k \mathcal{L} = R^{N+k}\, \pi_{*}\, DR_{X/Y}(\mathcal{L})$. La filtration ainsi obtenue sera notée $(\int^k \mathcal{L})_n$ ($n \in \mathbb{Z}$). La propriété $\mathcal{D}_Y(1).\ (\int^k \mathcal{L})_n \subset (\int^k \mathcal{L})_{n+1}$ est évidente, car $p^{-1}\mathcal{D}_Y$ opère, degré par degré, sur le complexe $DR_{X/Y}(\mathcal{L})$ à travers l'action de $p^{-1}\mathcal{D}_Y \subset \mathcal{D}_{Y\times \mathbb{P}^N}$ sur $\mathcal{L}$.

<u>Proposition</u> : L'ensemble des $(\int^k \mathcal{L})_n$ constitue une bonne filtration de $\int^k \mathcal{L}$.

<u>Démonstration</u> : Il résulte d'abord du théorème de Grauert que l'image du faisceau cohérent $R^{N+k}\, \pi_{*}\, F^{-k}\, DR_{X/Y}(\mathcal{L})$ dans le faisceau quasi-cohérent $R^{N+k}\, \pi_{*}\, DR_{X/Y}(\mathcal{L})$ est cohérente (sur $\mathcal{O}_Y$). On considère le $\mathcal{E}_X$-Module holonome $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{E}_X \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \mathcal{L}$ filtré par les sous $\mathcal{E}_X(0)$-Modules cohérents $\hat{\mathcal{L}}_n$, qui sont engendrés par $\mathcal{E}_X(0) \otimes \mathcal{L}_n$. On peut définir le $\mathcal{E}_Y$-Module $\int^k \hat{\mathcal{L}}$ de manière analogue à ce qu'on a fait plus haut, de sorte que $\int^k \hat{\mathcal{L}} \cong \mathcal{E}_Y \underset{\mathcal{D}_X}{\otimes} \int^k \mathcal{L}$. Il s'obtient comme $R^{N+k}\, \tilde{p}_{*}\, DR_{X/Y}(\hat{\mathcal{L}})$ (voir [K3, §4]), où $\tilde{p}$ est la projection de $T^*X = T^*Y \times T^*\mathbb{P}^N$ sur T^*Y. Puisque $\{\mathcal{L}_n\}$ est une bonne filtration l'image réciproque de $\mathrm{gr}\,\mathcal{L} = \underset{n}{\otimes} (\mathcal{L}_n/\mathcal{L}_{n-1})$ (qui s'identifie à $\mathrm{gr}\,\hat{\mathcal{L}}$, modulo la sous-catégorie de Serre des faisceaux cohérents sur X, auxquels le théorème de Grauert s'applique) est un faisceau cohérent sur T^*X. Comme $\mathcal{O}_{T^*Y}$-Module, $\mathrm{gr}(\int^k \hat{\mathcal{L}})$ est un sous-quotient de $R^{N+k}\, \pi_{*}\, \mathrm{Gr}\, F^{-\cdot}\, DR_{X/Y}(\mathcal{L})$ qui lui-même est égal à

$$R^{N+k}\, \pi_{*}\, [\Omega^{o}_{X/Y} \otimes \mathrm{Gr}\,\mathcal{L}_{\cdot} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \Omega^{i}_{X/Y} \otimes \mathrm{Gr}\,\mathcal{L}_{\cdot+i} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{N}_{X/Y} \otimes \mathrm{Gr}\,\mathcal{L}_{\cdot+N}]$$

Dans [K, Theorem 4.2] Kashiwara prouve que le complexe $DR_{X/Y}(\hat{\mathcal{L}})$ est exact en dehors de $T^*_Y Y \times T^*_o \mathbb{P}^N$. On va montrer qu'il en est de même de notre complexe, de terme général $\Omega^i_{X/Y} \otimes \mathrm{Gr}\, \mathcal{L}_{.+i}$, modulo la catégorie de Serre des faisceaux cohérents sur T^*X tels que leurs images directes (supérieures) sur T^*X sont cohérentes. On peut remplacer $\Omega^i_{X/Y} \otimes \mathrm{Gr}\, \mathcal{L}_{.+i}$ par $\Omega^i_{X/Y} \otimes \mathrm{Gr}\, \hat{\mathcal{L}}_{.+i}$ grâce aux remarques précédentes. En un point de $T^*_Y Y \times (T^* \mathbb{P}^N - T^*_o \mathbb{P}^N)$, on peut choisir des coordonnées locales $(x^1,\dots x^N)$ sur $\mathbb{P}^N$ de sorte que $\frac{\partial}{\partial x^N}$ soit elliptique au point considéré de $T^*_{\mathbb{P}^N}$. Alors, pour n_o assez grand, on a $\mathcal{E}_X(1)\cdot \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n+1}$ pour $n \geq n_o$ (n_o ne dépend que de la bonne filtration $\{\mathcal{L}_n\}$ et par conséquent $\frac{\partial}{\partial x^N} \cdot \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n+1}$ pour $n \geq n_o$. Comme notre complexe est le complexe de Kaszul de $\mathrm{Gr}\mathcal{L}_{\bullet}$ relativement aux symboles des $\frac{\partial}{\partial x^i}$, on voit que ce complexe est exact modulo de petits ennuis pour les $\mathcal{L}_n$ avec $n < n_o$. Les faisceaux de cohomologie sont donc cohérents sur $\mathcal{O}_X$ (et non seulement sur $\mathcal{O}_{T^*X}$). De cette analyse il résulte que les faisceaux de cohomologie de notre complexe sont cohérents sur $\mathcal{O}_{T^*Y \times \mathbb{P}^N}$; leurs images directes supérieures sur T^*Y sont alors cohérentes d'après Grauert. La proposition est donc démontrée.

Par les méthodes de 1.2, on déduit de cette démonstration le

<u>Corollaire</u> : Il existe n_o tel que pour $n \geq n_o$, une section s de $\int^k \mathcal{L}$ est dans $(\int^k \mathcal{L})_n$ si et seulement si $1 \otimes s$ est une section de $(\int^k \hat{\mathcal{L}})_n$.

<u>Remarque</u> : Je ne prétends pas que cette proposition ne puisse être prouvée autrement que par voie microlocale. J'ai voulu simplement éclairer la description microlocale de l'intégration des Modules holonomes, en concentrant mon attention sur le comportement des bonnes filtrations.

Il ne nous suffit pas de filtrer les faisceaux de cohomologie de $\int \mathcal{L}$, nous voulons aussi filtrer ce complexe (ou bien construire un objet d'une catégorie dérivée filtrée convenable). Il suffit pour cela d'utiliser une résolution de $DR_{X/Y}(\mathcal{L})$ par des faisceaux acycliques pour le foncteur p_*. Pour cela, on prend un recouvrement $(U_i)_{0 \leq i \leq N}$ de $\mathbb{P}^N$ du type ordinaire ; on recouvre $Y \times \mathbb{P}^N$ par les ouverts $V_i = Y \times U_i$ et on résoud $DR_{X/Y}(\mathcal{L})$ par le double complexe de faisceaux quasi-cohérents (où pour $J \subset \{0,\dots,N\}$ on a posé

$V_J = \bigcap_{i\in J} V_i$ et où $j_J : V_J \hookrightarrow X$ est l'inclusion).

$$\longrightarrow \bigotimes_{\#J=p} (j_J)_* (j_J)^* DR_{X/Y}(\mathcal{L}) \longrightarrow \cdots .$$

Ce complexe (de Czech) est évidemment filtré, d'où une filtration (comme $\mathcal{O}_Y$-Module) de son image directe par p. C'est le complexe filtré cherché. Dans la catégorie dérivée obtenue à partir des complexes bornés de $\mathcal{D}_Y$-Modules munis d'une filtration du complexe sous-jacent de $\mathcal{O}_Y$-Modules, par inversion des quasi-isomorphismes filtrés, l'objet ainsi obtenu est indépendant du choix d'une résolution par un complexe d'objets acycliques pour p_*. On a donc associé au Module holonome $\mathcal{L}$ filtré un complexe $\int \mathcal{L}$ filtré ; on aurait pu de même partir d'un objet $\mathcal{L}^\bullet$ de la catégorie dérivée filtrée précédente pour X, à faisceaux de cohomologie holonomes R.S. et bien filtrés pour la filtration induite, et obtenir un objet $\int\mathcal{L}^\bullet$ du même type sur X. On démontrerait alors, non sans peine, le

<u>Scholie</u> : Cette construction est compatible à la composition des morphismes projectifs.

Bien sûr, on n'a supposé les morphismes projectifs que par commodité. En particulier si on a un complexe $\mathcal{L}^\bullet$ de $\mathcal{D}_X$-Modules, à cohomologie holonome, pour $x \in X$, pour U un voisinage de Stein convenable prenant pour f la projection de U sur un point, $\int\mathcal{L}^\bullet$ s'identifie à la fibre en x de $DR(\mathcal{L}^\bullet)$. Le scholie précédent entraîne le

<u>Corollaire</u> : Soit $\mathcal{L}$ un Module holonome bien filtré sur X, soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme projectif, et soit $\int^f \mathcal{L}$ un complexe de $\mathcal{D}_Y$-Modules $\mathcal{O}_Y$-filtré incarnant l'objet construit dans la catégorie dérivée filtrée plus haut. La filtration obtenue sur le complexe simple associé au complexe double DR $(\int^f \mathcal{L})$ par le sempiternel procédé coincide, modulo décalage, avec celle déduite sur $\mathbb{R}f_*\, DR(\mathcal{L})$ de la filtration de $DR(\mathcal{L})$.

Le préambule ainsi achevé, introduisons la mirobolante

<u>Conjecture</u> : Soit $\mathcal{L}$ un Module holonome purifié sur X, soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme projectif. Considérons l'objet $\int \mathcal{L}$ de la catégorie dérivée définie

supra (sur Y). Alors

(1) $\int \mathcal{L} = \bigoplus_k \int^k \mathcal{L}\,[-k]$ dans la susdite catégorie

(2) Chaque $\int^k \mathcal{L}$, comme Module holonome filtré, est somme directe isobare de Modules holonomes purifiés.

Scholie : Cette conjecture entraîne l'analogue suivante du théorème de décomposition de Deligne-Gabber-Beilinson-Bernstein. Soit Z un espace analytique irréductible, et soit V un système local sur un ouvert lisse de Z sous-jacent à une variation de structures de Hodge polarisées ; soit $f : Z \longrightarrow Y$ un morphisme projectif. Alors il existe des sous-variétés (non nécessairement lisses) W_i de Y, et des systèmes locaux L_i sur des ouverts de W_i sous-jacents à des variations de structures de Hodge polarisées, tels que l'on ait un isomorphisme :

$$\mathbb{R}f_* \, IC^\bullet(Z,V) = \bigoplus_i \, IC^\bullet(W_i, L_i)\,[k_i]$$

La preuve est immédiate, en appliquant la fonction "complexe de De Rham" aux décompositions de la conjecture. Ce scholie fait apparaître clairement l'analogie espérée entre Modules holonomes purifiés et faisceaux pervers ℓ-adiques purs (sur une variété définie sur un corps fini). Je n'ai pas supposé les variétés algébriques, parce qu'en gros c'est l'algébricité des fibres qui importe (et est ici fournie par le théorème de Chow). Les L_i devraient bien sûr s'interpréter conformément à la suggestion de 1.1. Une liste finie de sous-variétés de Y, où figurent nécessairement les W_i, peut en principe être établie comme en loc. cit.

Exemple (éclatement d'un point du plan). Soit $\mathbb{A}^2$ le plan affine, de coordonnées (x,y). L'éclatement X de l'origine de $\mathbb{A}^2$ est une sous-variété de $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ d'équation $x\,v - u\,y = 0$, où $(u:v)$ sont les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^1$. Soit $\pi : X \longrightarrow \mathbb{A}^2$ qui se factorise en $i : X \hookrightarrow \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ suivi de $p : \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^2$. On veut calculer "le" complexe filtré de $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}$-Modules $\int_{(p)} \mathcal{O}_X$; tout d'abord $\int_{(i)} \mathcal{O}_X$ est le $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1}$-Module $\mathcal{H}^1_{[X]}(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1})$ qu'on désignera par $\mathcal{L}$. On recouvre $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ par les ouverts V_1 (complémentaire de l'hypersurface $u = 0$) et V_2 complémentaire de $v = 0$. Si on note $\mathcal{L}_u$, $\mathcal{L}_v$, $\mathcal{L}_{uv}$ les localisés de $\mathcal{L}$ par rapport aux équations en indice, $\int_{(p)} \mathcal{O}_X$ est donc incarné par le complexe simple associé au double complexe qui commence en bidegré $(-1,0)$

$$\begin{array}{ccc} \pi_* \mathcal{L}_u \oplus \pi_* \mathcal{L}_v & \longrightarrow & \pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_u) \oplus \pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_* \mathcal{L}_{uv} & \longrightarrow & \pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_{uv}) \end{array}$$

Je dis que les flèches verticales sont <u>surjectives.</u> On peut le montrer par un calcul explicite: $\pi_* \mathcal{L}_u$ est engendré, comme $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$-Module, par des sections de $\mathcal{L}$ du type $\dfrac{V^k}{(y-Vx)^n}$ (avec $k \geq 0$, $n \geq 1$). De même $\pi_* \mathcal{L}_v$ est engendré par des sections du type $\dfrac{U^\ell}{(x-Uy)^n}$ ($\ell \geq 0$, $n \geq 1$) (il faudrait en fait considérer des séries dont le terme général est de ce type). Et $\pi_* \mathcal{L}_{uv}$ est engendré par des sections du type $\dfrac{V^k}{(y-Vx)^n}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$). Une telle section est dans $\pi_* \mathcal{L}_u$ ssi $k \geq 0$, elle est dans $\pi_* \mathcal{L}_v$ ssi $k \leq n$; tout $k \in \mathbb{Z}$ étant d'un de ces deux types, on voit que $\pi_* \mathcal{L}_{uv} = \pi_* \mathcal{L}_u \oplus \pi_* \mathcal{L}_v$. Similairement $\pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_u)$ est engendré par les $\dfrac{V^k dV}{(y-Vx)^n}$ ($k \geq 0$, $n \geq 1$), $\pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_v)$ par les $\dfrac{U^\ell dU}{(x-Uy)^n}$ ($\ell \geq 0, n \geq 1$) et $\pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_{uv})$ par les $\dfrac{V^k dV}{(y-Vx)^n}$ pour $n \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$; une telle section est dans $\pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_v)$ ssi $k \leq n-2$. Comme $n \geq 1$, tout entier k satisfait ou bien $k \geq 0$ ou bien $k \leq -1 \leq n-2$ donc $\pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_{uv}) = \pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_u) \oplus \pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_v)$.

Une chasse au diagramme fournit alors un quasi-isomorphisme filtré du complexe précédent avec le complexe

$$\underset{\text{degré-1}}{\pi_* \mathcal{L}} \xrightarrow{d} \underset{\text{degré0}}{\pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L})}$$

filtré par les $\pi_* \mathcal{L}_{-p} \longrightarrow \pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_{-p+1})$

On sait a priori que ce complexe n'a de cohomologie qu'en degré 0 (car son rait bien sûr se vérifier élémentairement. Comme on connait le théorème de décomposition qui s'applique à $\pi_* \mathbb{C}_X$, on s'attend que $\mathcal{H}^o(\int_{(p)}\mathcal{L})$ soit isomorph à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \oplus \mathcal{B}_{\{0\}/\mathbb{A}^2}$; on veut le vérifier en contrôlant les filtrations.

On exhibe d'abord un élément non nul de $\mathcal{H}^o(\int_{(p)}\mathcal{L})$ annulé par l'idéa maximal de O. Pour cela, on observe que $\frac{1}{y-Vx}$ est une section de $\pi_* \mathcal{L}$ (d'aprè les calculs précédents) et que $d(\frac{1}{y-Vx}) = \frac{xdV}{(y-Vx)^2}$. Considérons alors la sect $\frac{dV}{(y-Vx)^2}$ de $\mathcal{H}^o(\int_{(p)}, \mathcal{L})$; elle n'est pas dans l'image de d, mais x $\frac{dV}{(y-Vx)^2}$ est dans l'image de d, et il en est de même de y $\frac{dV}{(y-Vx)^2} = d(\frac{V}{y-Vx})$; sa classe dans $\mathcal{H}^o(\int_{(p)} \mathcal{L})$ est donc non nulle et annulée par l'idéal maximal de O. Elle y engendre donc un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}$-Module isomorphe à $\mathcal{B}_{\{0\}/\mathbb{A}^2}$. Observons que $\frac{dV}{(y-Vx)^2}$ est une section de $\pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L}_1)$ donc notre élément de $\mathcal{B}_{\{0\}/\mathbb{A}^2}$ est de filtration exactement 0 ; on voit aisément que la filtration induite sur $\mathcal{B}_{\{0\}_{\mathbb{A}^2}}$ est la filtration canonique de 1.2.

Considérons ensuite $\frac{xdV}{y-Vx}$; comme $\frac{xdV}{y-Vx} = \frac{-x\ dU}{U^2V(x-Uy)} = \frac{-x\ dU}{U(x-Uy)} = \frac{-yUdU}{x-Uy}$, c'est bien une section de $\pi_*(\Omega^1_{\mathbb{P}^1} \otimes \mathcal{L})$; elle est de filtration -1 ; sa classe dans $\mathcal{H}^o(\int_{(p)}\mathcal{L})$ est non nulle, mais est annulée par $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$. A titre d'illustration, montrons-le pour $\frac{\partial}{\partial y}$: on a $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{xdV}{y-Vx}) = \frac{-xdV}{(y-Vx)^2}$ qui est dans l'image de d, comme on l'a vu plus haut. Elle engendre dans $\mathcal{H}^o(\int_{(p)}\mathcal{L}$ un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^2}$-Module isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$, où tous les éléments non nuls sont de filtration -1.

On obtient ainsi un quasi-isomorphisme filtré de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2} \oplus \mathcal{B}_{\{0\}/\mathbb{A}^2}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}$ étant muni de la filtration canonique décalée de 1 et $\mathcal{B}_{\{0\}/\mathbb{A}^2}$ muni de la filtration canonique, avec le complexe filtré $\int_{(p)}\mathcal{L}$. Ce sont deux Modules holonomes purifiés de poids-2.

ter des exemples plus intéressants. Je pense en effet que son aspect quelque peu "torique" est inessentiel.

2.2 Le cas de la dimension 1 (sur un exemple)

Il s'agit de tester la construction de 2.1 lorsque sur un ouvert U d'une surface de Riemann compacte X, on a une variation de structures de Hodg polarisées (V_Q, Ψ, $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}^{\cdot}\mathcal{V}$) (on suppose bien sûr vérifiée la condition de transversalité de Griffiths). On décrira d'abord concrètement le $\mathcal{D}_X$-Module holonome $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X,X;V)$; on sait que $DR(\mathcal{L}) = IC^{\cdot}(X,\mathcal{V}) = j_{*}(V_{\mathbb{C}})$, où $j : V \hookrightarrow X$ est l'inclusion. Soit $\mathcal{M}$ le Module holonome (R.S.) tel que $DR(\mathcal{M}) = \mathbb{R}_{j*}(V_{\mathbb{C}})$. Le morphisme (de faisceaux pervers) $j_{*}(V_{\mathbb{C}}) \longrightarrow \mathbb{R}_{j*}(V_{\mathbb{C}})$ s'inscrit dans le triangle

$$\begin{tikzcd} j_{*}(V_{\mathbb{C}}) \arrow[rr] & & \mathbb{R}_{j*}(V_{\mathbb{C}}) \arrow[dl] \\ & R^1_{j_*}(V_{\mathbb{C}})[-1] \arrow[ul, "+1"] & \end{tikzcd}$$

Comme $R^1_{j_*}(V_{\mathbb{C}})[-1]$ est un faisceau pervers, le morphisme de $\mathcal{D}_X$-Modules $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$ est injectif ; son conoyau est bien sûr supporté par l'ensemble fini $S = X-U$. Le faisceau $\mathcal{M}$ n'a pas de section à support de dimension 0. On peut donc caractériser $\mathcal{L}$ comme le <u>socle</u> de $\mathcal{M}$ (c'est-à-dire l'intersection des sous-$\mathcal{D}_X$-Modul cohérents non nuls de $\mathcal{M}$). La description de $\mathcal{M}$ est classique. On regarde d'abord les prolongements $\overline{\mathcal{V}}$ possibles de $\mathcal{V}$ en un fibré vectoriel sur X, de sorte que la connection intégrable : $\nabla : \mathcal{V} \longrightarrow \Omega^1_U \underset{\mathcal{O}_u}{\otimes} \mathcal{V}$ se prolonge en un morphism

$\overline{\nabla} : \overline{\mathcal{V}} \longrightarrow \Omega^1_X(\log S) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \overline{\mathcal{V}}$ (c'est dire que la connexion a au plus des pôles d'ordre 1 aux points de S). Un tel prolongement étant encore loin d'être uniq on le rigidifie par une condition portant sur le <u>résidu</u> $Res_x(\overline{\nabla})$ de $\overline{\nabla}$ en un poi x de S ; $Res_x(\overline{\nabla})$ est l'endomorphisme de la fibre $\overline{\mathcal{V}}_x$ (un espace vectoriel de dimension finie!) obtenu en composant $\overline{\nabla}$ avec le résidu

$\Omega^1_{X,x}(\log\{x\}) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} \cong \mathbb{C}$. Il est usuel, pour des raisons géométriques, d'imposer la condition :

(*)Pour tout $x \in S$, et pour toute valeur propre λ de $\mathrm{Res}_x(\overline{\nabla})$, on a : $0 \leq \mathrm{Re}\,\lambda < 1$.

(d'autres normalisations sont bien sûr possibles)

On sait qu'il existe un unique prolongement $\overline{\mathcal{V}}$ où la connexion a des pôles d'ordre au plus 1, satisfaisant (*) (je réfère, bien entendu, à [D3]).

Soit alors $\mathcal{O}_X(*S)$ le faisceau sur X des germes de fonctions méromorphes, et holomorphes en dehors de S. On décrit alors $\mathcal{M}$ comme $\mathcal{O}_X(*S) \otimes_{\mathcal{O}_X} \overline{\mathcal{V}}$ (qui ne dépend pas de la normalisation choisie (*)). Pour décrire maintenant le sous-faisceau $\mathcal{L}$ de $\mathcal{M}$, on travaille dans un voisinage d'un point x de S, isomorphe au disque unité ouvert D de $\mathbb{C}$. Le système local $(V_{\mathbb{Q}})_{/D}$ est décrit par un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ (sa fibre en un point choisi de $D^* = D - \{0\}$), muni d'un automorphisme T, la transformation de monodromie. Le système local $(V_{\mathbb{C}})_{/D^*}$ est une somme directe de systèmes locaux irréductibles, pour lesquels T est représenté par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} e(-\alpha)-1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & e(-\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{d'ordre } (d+1) \times (d+1)$$

(avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $0 \leq \mathrm{Re}(\alpha) < 1$) et $e(\alpha) = \exp(-2\pi i\alpha)$)

Pour simplifier les notations, on supposera $V_{\mathbb{C}}$ lui-même de cette forme, et on écrira $V, \mathcal{V}$ au lieu de $V_{/D^*}, \mathcal{V}_{/D^*}$, etc...le fibré à connection intégrable $\mathcal{V}$ à donc une base $(e_0,\dots,e_d)$ de sections horizontales multiformes. De la forme de T on déduit que $F_0 = z^\alpha . e_0, \dots, F_d = z^\alpha . [e_d + (\frac{\log z}{2\pi i})\, e_{d-1} + \dots + (\frac{\log z}{2\pi i})^d\, e_0]$ est une base de $\mathcal{V}$ (sur D^*) formée de sections univalées (bien sûr pas horizontales). On vérifie aisément que le prolongement canonique $\overline{\mathcal{V}}$ a pour fibre en 0 (au sens faisceautique) les sections de $\mathcal{V}$ sur un voisinage de 0 (moins 0) qui s'écrivent $\sum_{i=0}^{d} g_i \cdot F_i$ avec g_i holomorphe. En effet, on calcule que $\nabla_{(z\cdot\frac{d}{dz})} F_i = \alpha \cdot F_i + \frac{F_{i-1}}{2\pi i}$.

On sait donc que $\mathcal{M}$ est formé des $\sum_{i=0}^{d} g_i \cdot F_i$, où g_i est méromorphe avec pôles éventuel en 0. Il reste à déterminer $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$.

a) si $\alpha \neq 0$, on a $\mathcal{L} = \mathcal{M}$ puisque $R^1 j_* V = 0$

b) supposons $\alpha = 0$. On vérifie immédiatement que $\frac{1}{z} F_d$ engendre le $\mathcal{D}_D$-Module $\mathcal{M}$ et que $(z \cdot \frac{d}{dz} + 1)^d \cdot F_d = 0$. Comme $\mathcal{L}$ est le noyau du morphisme $\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\{0\}/D}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathcal{B}_{\{0\}/D}$ il s'agit de déterminer $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\{0\}/D})$. Un $\mathcal{D}$-morphisme $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{B}_{\{0\}/D}$ est décrit par $\varphi(\frac{1}{z} F_d)$ qui doit être annulé par $(z \cdot \frac{d}{dz} + 1)^d$; donc $\varphi(\frac{1}{z} F_d)$ doit être un multiple du générateur "$\frac{1}{z}$" de $\mathcal{B}_{\{0\}/D}$. Donc il existe un tel morphisme φ envoyant $\frac{1}{z} F_d$ sur $\frac{1}{z}$ et tout autre morphisme en est un multiple. On en déduit que $\mathcal{L}$ est engendré par les $z^{-k} \cdot F_i$ $(0 \leq i \leq d-1)$ et par F_d.

<u>Remarque</u> : Le fait que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_{\{0\}/D})$ soit de dimension 1 équivaut bien sûr au fait que $H^1(D^*, V_{\mathbb{C}})$ est de dimension 1.

Soit $N = \mathrm{Res}_0(\overline{\nabla})$ agissant sur $\overline{\mathcal{V}}/z \cdot \overline{\mathcal{V}}$. Il résulte des considérations précédentes que $\mathcal{L}$ contient $\overline{\mathcal{V}}$ et que son image dans $\frac{1}{z} \cdot \overline{\mathcal{V}}/\overline{\mathcal{V}}$ est engendrée par $\frac{1}{z} \cdot F_0, \dots, \frac{1}{z} \cdot F_{d-1}$, c'est-à-dire par $\frac{1}{z} \cdot \mathrm{Im}(N)$. Ceci est valable sous la seule hypothèse que $V_{/D^*}$ est à monodromie unipotente.

On suppose désormais la monodromie de V unipotente en chaque point de S.

Je veux maintenant rappeler quelques points importants du travail de Zucker [Z]. Utilisant une métrique sur le système local $V_{\mathbb{C}}$ associée à la polarisation, et dans le disque D^*, une métrique de Poincaré $\frac{i}{2} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{|z|^2 \cdot |\mathrm{Log} z|^2}$, il définit la condition L_2 pour une forme différentielle sur D^* à valeurs dans $\mathcal{V}$ et le complexe $\Omega^{\cdot}(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ des formes localement L_2. Il montre que l'inclusion de $j_* V_{\mathbb{C}}$ dans $\Omega^{\cdot}(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ est un quasi-isomorphisme. Il définit une filtration décroissante de $\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ par les sous-complexes $F^p\,\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$: $\mathcal{F}^p_{(2)} \xrightarrow{\nabla} (\Omega^1 \otimes \mathcal{F}^{p-1})_{(2)}$ avec les notations évidentes. (On notera bien sûr la similitude avec mon procédé pour filtrer $DR(\mathcal{L})$). Il prouve, par des techniques de cohomologie L_2 et une généralisation de la théorie des formes harmoniques, que la filtration induite par $F^\cdot$ sur $H^i(X, j_*V)$ en fait une structure de Hodge polarisable de poids m + i. Pour des raisons géométriques incontestables, exposées par Zucker dans [loc.cit, §14 et §15], la structure de Hodge qu'il construit est nécessairement la bonne. Par conséquent, la filtration que je définis dans 2.1 sur $H^i(X,j_*(V)) = IH^i(X,V)$ se doit de coïncider avec celle construite par Zucker. Je vérifie ci-dessous que tel est bien le cas, en m'appuyant sur les travaux de Schmid et de Zucker.

De toute évidence, les complexes $\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ et $DR(\mathcal{L})$ coïncident sur X-S, ainsi que leurs filtrations. Je veux commencer par montrer que, globalement sur X, $\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ est un sous-complexe de $DR(\mathcal{L})$ et que la filtration $F^\cdot$ de $\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ est la filtration induite de ma filtration $F^\cdot$ de $DR(\mathcal{L})$. La vérification de ceci se fait localement en un point de S ; on considère à nouveau un disque D comme voisinage typique. Une description très maniable de $\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ sur D se trouve dans [Z, Prop.4.1]. Rappelons que la filtration par le poids $\{W_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ du système local $V_{/D^*}$ (toujours supposé de monodromie unipotente) est la seule qui induit sur une fibre V_s une filtration (encore notée W_k) telle que, N_s désignant le <u>logarithme</u> de la monodromie T_s, on ait :

(i) $N_s(W_k) \subset W_{k-2}$

(ii) N_s induit pour tout $k \geq 0$ un isomorphisme entre $Gr^W_{m+k}(V_s)$ et $Gr^W_{m-k}(V_s)$

D'où en particulier l'utile

<u>Scholie</u> : $W_{m-1}(V_s)$ est contenu dans $Im(N_s)$. A W_k est associé un fibré vectoriel à connexion intégrable $\mathcal{W}_k$ sur X-S, de prolongement canonique $\overline{\mathcal{W}_k}$ (un sous-fibré de $\overline{\mathcal{V}}$).

<u>Exemple</u> : Pour le cas d'un système local indécomposable sur D^* étudié plus haut, le générateur F_i de $\overline{\mathcal{V}}$ est une section de $\overline{\mathcal{W}}_{m+2i-d}$ mais pas de $\overline{\mathcal{W}}_{m+2i-d-1}$.

Avec ces notations, on a la

<u>Proposition</u> [Z, Prop.4.1] $\Omega^{\bullet}(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ (restreint à D) est le complexe

$$\overline{\mathcal{W}}_m + z.\overline{\mathcal{V}} \xrightarrow{\nabla} \frac{dz}{z} \otimes [\overline{\mathcal{W}}_{m-2}+z.\overline{\mathcal{V}}]$$

Nous sommes en mesure de prouver la

<u>Proposition</u> : $\Omega^{\bullet}(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ est un sous-complexe de DR($\mathcal{L}$) et la filtration de Zuck
$F^{\bullet}$ sur $\Omega^{\bullet}(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ coïncide avec la filtration induite par la filtration $F^{\bullet}$ de DR($\mathcal{L}$) définie en 2.1.

<u>Preuve</u> : On a $\overline{\mathcal{W}}_m+z.\overline{\mathcal{V}} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \mathcal{L}_o$ et $\frac{1}{z}.[\overline{\mathcal{W}}_{m-2}+z.\overline{\mathcal{V}}]$ est inclus dans $\frac{1}{z}.\overline{\mathcal{W}}_{m-1}+\overline{\mathcal{V}}$, donc son image dans $\frac{1}{z}.\overline{\mathcal{V}}|\overline{\mathcal{V}}$ est incluse dans $\frac{1}{z}$. In(N) (d'après le scholie) donc dans $\mathcal{L}|\overline{\mathcal{V}}$; on a bien $\frac{1}{z}.[\overline{\mathcal{W}}_{m-2}+z.\overline{\mathcal{V}}] \subset \mathcal{L}$ et en fait $\subset \mathcal{L}_o$. Un élément de $\overline{\mathcal{V}}$ est dans $\mathcal{L}_p$ ssi il est dans $\mathfrak{J}^{-p}$, donc la filtration induite sur $\overline{\mathcal{W}}_m+z.\overline{\mathcal{V}}$ est bien celle de Zucker. Un élément de $\frac{1}{z}.\overline{\mathcal{W}}_{m-2}+z.\overline{\mathcal{V}}$ est dans $\mathcal{L}p$- est aussi dans $\frac{1}{z}.\mathfrak{J}^{p-1}$, donc la filtration induite par $\mathcal{L}p-1$ sur $\frac{1}{z}.\overline{\mathcal{W}}_{m-2}+\overline{\mathcal{V}}$ est bien celle de Zucker, q.e.d.

Rappelons maintenant que d'après Schmid [Sc], les filtrations W. (induite par $\overline{\mathcal{W}}.$) et $F^{\bullet}$(induite par $\mathfrak{J}^{\circ}$) sur $\bar{V} = \overline{\mathcal{V}}|z.\overline{\mathcal{V}}$, y définissent une structure de Hodge mixte (relativement à une structure réelle déduite de cell du système local V). De plus, $N = \mathrm{Res}_o(\bar{\nabla})$ est un endomorphisme de type (-1,-1 de cette structure de Hodge mixte.

On introduit pour $k \geq 0$ le sous-complexe suivant de DR($\mathcal{L}$)

$$(Ck)\mathcal{L} \cap \frac{1}{z^k}\overline{\mathcal{V}} \xrightarrow{d} dz \otimes [\mathcal{L} \cap \frac{1}{z^{k+1}}\overline{\mathcal{V}}]$$

On munit C_k de la filtration induite de celle de DR($\mathcal{L}$).

<u>Proposition</u> : L'inclusion du complexe filtré $\Omega^{\circ}(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ dans C_o est un quasi-isomorphisme filtré.

<u>Preuve</u> : En vertu de la proposition précédente, il s'agit de montrer que le complexe filtré $\overline{\mathcal{V}}|\overline{\mathcal{W}}_m+z.\overline{\mathcal{V}} \xrightarrow{d=\bar{\nabla}} \frac{dz}{z} \otimes [z.\mathcal{L}\cap \overline{\mathcal{V}}|\overline{\mathcal{W}}_{m-2}+z.\overline{\mathcal{V}}]$ est acyclique en tant que complexe filtré. Ce complexe se réécrit

$$\bar{V}|W_m(\bar{V}) \xrightarrow{N} \mathrm{Im}(N)|W_{m-2}(\bar{V})$$

Il est filtré par les sous-complexes

$F^{+p}(\bar{V})|F^p(\bar{V})\cap W_m(\bar{V}) \xrightarrow{N} F^{p-1}(\bar{V})\cap \mathrm{Im}(N)/F^{p-1}(\bar{V})\cap W_{m-2}(\bar{V})$

dont on doit prouver qu'ils sont acycliques.

Soit $\alpha \in F^p(\bar{V})$ tel que $N.\alpha \in W_{m-2}$. Je dis que $\alpha \in W_m$. En effet il existe $\beta \in W_m$ tel que $N.\alpha = N.\beta$, donc $\alpha-\beta$ appartient à $\ker(N) \subset W_m$, donc $\alpha \in F^p(\bar{V})\cap W_m$. Donc le morphisme N ci-dessus est injectif.

Soit ensuite $\beta \in \mathrm{Im}(N) \cap F^{p-1}(\bar{V})$. Comme N est un endomorphisme de structures de Hodge mixte de type $(-1,-1)$, et comme un morphisme de structures de Hodge mixtes est <u>strict</u> vis-à-vis des filtrations de Hodge [D4, Théorème 2.1.10], il existe $\alpha \in F^p(\bar{V})$ tel que $N.\alpha=\beta$.

D'où la proposition.

<u>Lemme</u> : Pour $k \geq 0$, l'inclusion de C_k dans C_{k+1} est un quasi-isomorphisme filtré

<u>Preuve</u> : Il est facile de voir que, par construction, la filtration induite sur $\frac{1}{z^j}\bar{\mathcal{V}}\cap \mathcal{L} | \frac{1}{z^{j-1}}\bar{\mathcal{V}}\cap \mathcal{L}$ par la filtration $\{\mathcal{L}_p\}$ a son terme d'ordre p engendré par $(\frac{d}{dz})^{j-1}(\frac{1}{z}\bar{\mathcal{V}}\cap\mathcal{L}_{p-j+1})$ (ceci pour $j \geq 1$). Le complexe $C_{k+1}|C_k$ est filtré par les sous-complexes

$$(\frac{d}{dz})^k(\frac{1}{z}\bar{\mathcal{V}}\cap\mathcal{L}_{-p-k}) \bmod \frac{1}{z^k}\bar{\mathcal{V}} \longrightarrow (\frac{d}{dz})^{k+1}(\frac{1}{z}\bar{\mathcal{V}}\cap\mathcal{L}_{-p-k}) \bmod \frac{1}{z^{k+1}}\bar{\mathcal{V}}$$

qui sont clairement acycliques.

On a ainsi démontré le

<u>Théorème</u> : Le morphisme de complexes filtrés

$$(\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(\alpha)},F^\cdot) \longrightarrow (DR(\mathcal{L}),F^\cdot)$$

est un quasi-isomorphisme filtré.

<u>Corollaire</u> : La filtration $F^\cdot$ de 2.1 définit sur $\mathbb{H}^1(X,DR(\mathcal{L})) = H^1(X,j_*V_{\mathbb{C}})$ une structure de Hodge pure de poids m+1, à savoir celle construite par Zucker.

<u>Exemple</u> (local) On considère la famille $E \xrightarrow{\pi} D^*$ de courbes elliptiques, où $E_z = \pi^{-1}(z) = \mathbb{C}^*/\{z^k, k \in \mathbb{Z}\}$ le système local $V_{\mathbb{Z}} = R^1\pi_*\mathbb{Z}$ est porteur d'une

(e_o, e_1) est choisie, de sorte que $N\cdot e_o = 0$, $N\cdot e_1 = -e_o$; $\mathfrak{J}^1 \subset \mathcal{V}$ est engendrée par la section univaluée $F_1 = e_1 + (\frac{\log z}{2\pi i})\, e_o$. On a $\mathfrak{J}^2 = 0 \subset \mathfrak{J}^1 \subset \mathfrak{J}^o = \mathcal{V}$. Pour la filtration par le poids, on a $\overline{\mathcal{W}}_{-1} = 0 \subset \overline{\mathcal{W}}_o = \mathcal{O}_D\cdot e_o = \overline{\mathcal{W}}_1 \subset \overline{\mathcal{W}}_2 = \overline{\mathcal{V}}$.

Le complexe $\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ est donc $\mathcal{O}_D\cdot e_o + z\overline{\mathcal{V}} \longrightarrow dz \otimes \overline{\mathcal{V}}$

$$F^2\,\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)} \text{ est } 0 \longrightarrow dz \otimes \mathcal{O}_D\cdot F_1$$

$$F^1\,\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)} \text{ est } \mathcal{O}_D\cdot zF_1 \longrightarrow dz \otimes \overline{\mathcal{V}}$$

$$F^o\,\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)} = \Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$$

$\mathcal{L}$ est engendré sur $\mathcal{O}_D$ par F_1 et par les $z^{-k}\,e_o$. On a $\mathcal{L}_{-2} = 0, \mathcal{L}_{-1} \cap (\frac{1}{z}\quad) = \mathcal{O}_D\cdot F_1$, $\mathcal{L}_o \cap (\frac{1}{z}\overline{\mathcal{V}}) = \frac{1}{z}\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{O}_D\cdot F_1 + z^1\mathcal{O}_D\cdot e_o$; le complexe C_o est

$$\overline{\mathcal{V}} \longrightarrow dz \otimes (\mathcal{O}_D\cdot F_1 + \mathcal{O}_D\cdot \tfrac{1}{z}\, e_o)$$

Il est filtré par

$$F^2 \quad 0 \longrightarrow dz \otimes (\mathcal{O}_D\cdot F_1)$$

$$F^1 \quad \mathcal{O}_D\cdot F_1 \longrightarrow dz \otimes (\mathcal{O}_D\cdot F_1 + \mathcal{O}_D\cdot \tfrac{1}{z}\, e_o)$$

$$F^o = C_o$$

On vérifie aisément que $F^i\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)} \longrightarrow F^i\,\Omega^\cdot(V_{\mathbb{C}})_{(2)}$ est un quasi-isomorphisme (pour $i = 1$, il suffit d'observer que $dF_1 = 2\pi i\; dz \otimes \frac{e_o}{z}$)

2.3 Vers des objets mixtes

Il est naturel d'utiliser la notion de Module holonome purifié introduite en 2.1 pour définir des objets mixtes.

Définition : Un Module holonome mixte (de poids $\leq m$) est un Module holonome R.S. $\mathcal{M}$ muni des structures suivantes :

(i) un faisceau pervers en $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels $K^\cdot_Q$ et un isomorphisme de faisceaux pervers $K^\cdot_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes K^\cdot_Q \xrightarrow{\sim} DR(\mathcal{M})$

(ii) une filtration croissante (localement) séparée de $K^\cdot_{\mathbb{Q}}$ par des faisceaux pervers $W_k(K^\cdot_{\mathbb{Q}})$ telle que $W_m\,(K^\cdot_Q) = K^\cdot_{\mathbb{Q}}$.

On notera $W_k(\mathcal{M})$ la filtration correspondante de $\mathcal{M}$ par des sous-Modules holonomes, de sorte que $DR\; W_k(\mathcal{M}) = W_k(K^\cdot_{\mathbb{C}})$

(iii) une bonne filtration $\{\mathcal{M}_\ell\}$ de $\mathcal{M}$ telle que les Modules holonomes $Gr_k^W(\mathcal{M})$, filtrés par la filtration induite, soient des Modules holonomes purifiés de poids k.

Remarque : On appelle encore Module holonome purifié une somme directe d'objets du type construit en 2.1.

Par exemple, soit $\mathcal{L}$ un Module holonome R.S. sur un ouvert U d'une variété algébrique complexe X, complémentaire d'une hypersurface Y de X. Soit $j : U \hookrightarrow X$ l'inclusion. Supposons $\mathcal{L} = \mathcal{L}(Z\cap U, U; V_{\mathbb{C}})$ pour Z une sous-variété de X, $\mathcal{V}$ une variation de structures de Hodge polarisées sur un ouvert de $Z\cap U$ et munissons $\mathcal{L}$ de la bonne filtration $\{\mathcal{L}_n\}$ définie en 2.1. Soit $j_* \mathcal{L}$ l'unique Module holonome R.S. sur X tel que $DR(j_*\mathcal{L})$ soit $\mathbb{R}j_* \, DR(\mathcal{L}) = \mathbb{R}j_* \, IC^\cdot(Z\cap U, V_{\mathbb{C}})$ $[-\mathrm{codim} Z]$. On obtient la structure (i) de la définition en posant $K^\cdot_{\mathbb{Q}} = j_*$ $IC^\cdot(Z\cap U, V_{\mathbb{Q}})$ (où j_* est l'image directe au sens des faisceaux pervers ; voir la conférence de Deligne dans ce volume).

Beilinson et Bernstein ont donné un procédé pour définir une filtration $W.(K^\cdot_{\mathbb{Q}})$ qui est certainement la bonne car, lorsque toute la situation se réduit bien sur un corps fini, elle se réduit en l'unique filtration par le poids (au sens de [D1]) sur les compagnons ℓ-adiques de $K^\cdot_{\mathbb{Q}}$. Je vais donner la description locale de la filtration correspondante de $j_* \mathcal{L}$, en supposant Y défini par l'équation $F = 0$. On introduit une variable s (chère à Bernstein, Björk, Kashiwara...) et on considère, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, le $\mathcal{D}_X[s]$-Module $\Gamma_\alpha \otimes j_* \mathcal{L}$, où $\Gamma_\alpha = \bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{C}.\,(\mathrm{Log}F)^k.\,F^\alpha$; $\mathcal{D}_X$ opère de la manière évidente et s opère sur Γ_α par $s.\,(\mathrm{Log}F)^k.\,F^\alpha = k(\log F)^{k-1}.\,F^\alpha + \alpha.(\mathrm{Log}F)^k.\,F^\alpha$. On a un morphisme de $\mathcal{D}_X[s]$-Modules $j_!(\Gamma_\alpha \otimes \mathcal{L}) \longrightarrow j_*(\Gamma_\alpha \otimes \mathcal{L})$ dont le noyau "correspond" au faisceau pervers $(\Psi\, K^\cdot_{\mathbb{C}})\,[-1]_\alpha$ sur X, à support dans Y ; $\Psi(-)$ est le foncteur "spécialisation à Y" introduit par Deligne, et étudié par Verdier dans sa conférence à Luminy. Ce faisceau pervers $(\Psi\, K^\cdot_{\mathbb{C}})\,[-1]$ est muni d'un automorphisme de monodromie T ; par $(\Psi\, K^\cdot_{\mathbb{C}})\,[-1]_\alpha$ j'ai dénoté sa composante isotypique pour la valeur propre $e(\alpha)$.

Pour simplifier, je supposerai $(\Psi\, K^{\bullet}_{\mathbb{C}})\,[-1] = (\Psi K^{\bullet}_{\mathbb{C}})\,[-1]_0$. Le morphisme de $\mathcal{D}_X$-Modules $j_!\,(\Gamma_o \otimes \mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi} j_*(\Gamma_o \otimes \mathcal{L})$ est surjectif ; $j_*(\mathcal{L})$ est naturellement inclus dans $j_*(\Gamma_o \otimes \mathcal{L})$; $j_!\,(\Gamma_o \otimes \mathcal{L})$ est filtré par les $j_!(\Gamma^i_o \otimes \mathcal{L})$ où $\Gamma^i_o = \ker\,(s^{i+1}) \subset \Gamma_o$ est engendré par $1,\ldots,(\mathrm{Log}F)^i$. On filtre alors $j_*\,\mathcal{L}$ par les sous-$\mathcal{D}_X$-Modules $j_*(\mathcal{L}) \cap \varphi\,[j_!(\Gamma^i_o \otimes \mathcal{L})]$; c'est (à renversement des signes et décalage près, la filtration cherchée). Pour fixer les idées, notons que $j_*(\mathcal{L}) \cap \varphi\,[j_!\,\Gamma^o_o \otimes \mathcal{L}]$ est l'image de $j_!\,\mathcal{L}$ dans $j_*\,\mathcal{L}$, c'est-à-dire $j_{!*}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}(Z,X;V_{\mathbb{C}})$ qui doit être égal à $W_m(j_*\,\mathcal{L})$.

<u>Remarque</u> : Bernstein donne à la filtration ainsi construite le nom de "filtration de Jantzen", parce qu'elle lui a permis, ainsi qu'à Beilinson, de prouver une conjecture de Jantzen relative à certaines filtrations des modules de Verma.

Puisqu'on dispose de la filtration W., il ne reste plus qu'à essayer de définir la bonne filtration $\{\mathcal{M}_\ell\}$ de $\mathcal{M} = j_*\,\mathcal{L}$. Une section de $j_*\,\mathcal{L}$ sera dans $\mathcal{M}_\ell$ si et seulement si

(i) sa restriction à U est une section de $\mathcal{M}_\ell$

(ii) son ordre relativement à une composante de $\mathrm{Ch}(\mathcal{M})$ qui n'est <u>pas</u> l'adhérence d'une composante de $\mathrm{Ch}(\mathcal{L})$ est $\leq \ell + p(V) - \varepsilon_m$ comme en 2.1.

Ceci amène irrésistiblement la

<u>Conjecture 2</u> : $j_*\,\mathcal{L}$, muni de la filtration W. et de la bonne filtration $\{j_*\mathcal{L}\}_\ell$, est un Module holonome mixte de poids $\leq$ m.

J'aimerais pouvoir, en imitant la méthode de Deligne [D1, Définition 6.2.4] définir un Module holonome pur de poids m, comme un Module holonome mixte de poids $\leq$ m, dont le dual est mixte de poids $\leq -$ m. Le problème est que ma construction de la bonne filtration de $\mathcal{L}(X,Y;V_{\mathbb{C}})$ (en 2.1) se transfère mal au dual de ce Module, par le procédé donné en 1.3 (elle n'a pas les miraculeuses propriétés de la filtration canonique par l'ordre). Je remets donc cette question à plus tard, et me contenterai de remarquer qu'on peut sans difficulté définir les complexes mixtes de $\mathcal{D}$-Modules (à cohomologie holonome R.S.) et conjecturer leur comportement par un morphisme quelconque de variétés algébriques complexes.

BIBLIOGRAPHIE

[B-B] Beilinson A. et Bernstein J. : Localisation des $\mathcal{G}$-Modules, C.R.A.S. t.292 (5 janvier 1981), p. 15-18.

[Bj] Björk J.E. : Rings of differential operators, North-Holland.

[B-K] Brylinski J.L. et Kashiwara M. : Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Inv. Math. 1981.

[B-D-K] Brylinski J.L., Dubson A. et Kashiwara M. : Formule de l'indice pour les Modules holonomes et obstruction d'Euler locale, C.R.A.S., t.293 (30 novembre 1981, p.573-576)

[Br] Brylinski J.L. : Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge. I, à paraître dans les Comptes-Rendus de la conférence de Géométrie Algébrique de La Rabida (Espagne)

[C-G-M] Cheeger J., Goresky M. et MacPherson R. : The L^2 cohomology and singular intersection homology for singular algebraic varieties, preprint.

[D1] Deligne P. : La conjecture de Weil II, Publ. Math. I.H.E.S. n°52 p.138-251.

[D2] Deligne P. : Lettre à Kazhdan et Lusztig, datée du 20 avril 1979.

[D3] Deligne P. : Equations différentielles à points singuliers réguliers Springer Lecture Notes n°163 (1970).

[D4] Deligne P. : Théorie de Hodge II, Publ. Math. de l'I.H.E.S. vol.40 p. 5-57.

[Ga] Gabber O. : On the integrability of the characteristic varieties, Annals of Maths. 1981.

[G-M-1] Goresky M. et MacPherson R. : Intersection homology theory II, Topology 1981.

[G-M-2] Goresky M. et MacPherson R. : On the topology of complex algebraic maps, prepublication I.H.E.S., juin 1981.

[H] Hironaka H. : Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I and II, Annals of Math 79 (1964) p. 109-326.

[K1] Kashiwara M. : Index theorem for maximally overdetermined systems, Proc. Japan Acad. 49, p. 803-804 (1973).

[K2] Kashiwara M. : On the maximally overdetermined systems of linear differential equations II, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. 10, p. 563-579 (1975).

[K3] Kashiwara M. : B-functions and holonomic systems, Inv. Math. 38 p.33-58 (1976).

[K-K] Kashiwara M. et Kawai T. : On the holonomic systems of linear differential equations (systems with regular singularities) III Publ. R.I.M.S. à paraître ?

[Ma] Malgrange B. : L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels, exposé au Séminaire Bourbaki n°522 (juin 1978).

[Me 1] Mebkhout Z. : Thèse d'Etat, Université de Paris VII, février 1979 (à paraître dans Arkiv för Mat.)

[Me 2] Mebkhout Z. : Dualité de Poincaré, Exposé au Séminaire sur les singularités Publ. Math. de l'Univ. Paris VII n°7

[Me 3] Mebkhout Z. : Une autre équivalence de catégories, prépublication (1981).

[R] Ramis J.P.: Variations sur le thème "GAGA". Springer Lecture Notes 694 p.228 - 289.

[Sc] Schmid W. : Variation of Hodge structures ; the singularities of the period mapping, Inv. Math. 22 p. 211-320 (1973).

[St] Steenbrink J.H.M. : Limits of Hodge structures, Inv. Math. 31 p.229-257 (1976).

[Z] Zucker S. : Hodge theory with degenerating coefficients : L_2 cohomology in the Poincaré metric, Annals of Math. 109 (1979), p.415-476.

[Du] Dubson A. : Calcul des invariants numériques des singularités et applications, publication S.F.B. Theoretische Mathematik Universitat Bonn (1981) .

(1) La lecture en parallèle de R. MacPherson: "Chern classes for singular algebraic varieties", Annals of Math. 100 (1974) p.423-432, et de [B-D-K], met en évidence une formule pour la somme alternée (sur k) des multiplicités des $\int_F^{(k)} \mathcal{O}_X$.

<u>NOTE</u> : En ce qui concerne les relations du travail de Scherk et Steenbrink avec ma conjecture, on lira avec profit la conférence de Frédéric Pham (dans le même volume).

Jean-Luc BRYLINSKI
Ecole Polytechnique
Centre de Mathématiques
91128 PALAISEAU (France)
"L.A. 169 du C.N.R.S."