Astérisque

RÉMI LANGEVIN

Courbures au voisinage d'une singularité algébrique isolée

Astérisque, tome 82-83 (1981), p. 33-43

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1981__82-83__33_0>

Séminaire E.N.S. (1978-1979)

Exposé n° 3

COURBURES AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITÉ ALGÉBRIQUE ISOLÉE

par Rémi LANGEVIN

Soit $f : \mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme ayant une singularité isolée en l'origine. Nous voulons étudier cette singularité à l'aide des propriétés métriques des hypersurfaces de niveau $(f = t\ ,\ t \neq 0)$ de f .

La première étude de la courbure au voisinage d'une singularité algébrique complexe est la thèse de L. Ness [Ne] . Elle démontre en particulier le résultat suivant : soit $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ un polynôme admettant l'origine comme point singulier isolé ; la courbure des courbes de niveau $f = t$ est non bornée au voisinage de l'origine ([Ne] p. 33).

Cet exposé continue cette étude et comporte trois parties :

1) un rappel sur les fonctions symétriques de courbure ;

2) l'étude de la courbure d'un niveau de f au voisinage du point singulier ;

3) l'étude de la courbure du feuilletage défini par les niveaux de f au voisinage du point singulier.

I. Fonctions symétriques de courbure.

Soit $V^{2k} \subset R^N$ une sous-variété plongée de R^N , éventuellement à bord, et compacte. Pour r assez petit, le tube de rayon r , $\mathrm{Tub}_r V^{2k}$

$$\mathrm{Tub}_r V^{2k} = \bigcup_{x \in V} D_r(x)$$

où $D_r(x)$ est le disque de rayon r de l'espace normal à V en x , est un fibré en disques plongé.

H. Weyl, [W], a démontré que le volume du tube $\mathrm{Tub}_r V^{2k}$ est le produit d'un polynôme pair en r de degré $2k$ par r^{N-2k} :

$$\operatorname{vol} \operatorname{Tub}_r V^{2k} = r^{N-2k}\Big[\sum_{k=0}^{[\frac{k}{2}]} \gamma_{2i} r^{2i}\Big]$$

où les nombres γ_{2i} ne dépendent que de la métrique de la variété V .

Les nombres γ_{2i} sont des intégrales sur V de fonctions que nous appellerons, après les avoir normalisées par des constantes ne dépendant que de la dimension, fonctions symétriques de courbure $\sigma_{2i}(x)$. Dans la suite du texte nous noterons c^{te} une constante positive ne dépendant que des dimensions $2k$ et N .

<u>Remarques</u>.- Si $2i = 2k$, $\sigma_{2i}(x)$ est la courbure de Lipschitz-Killing de V .

- Si V est une hypersurface, les fonctions σ_{2i} sont les fonctions symétriques de courbure usuelles définies à l'aide de la seconde forme fondamentale II_x par :

$$\det(Id + t.II_x) = \sum_0^{2k} t^j \sigma_j(x)$$

qui ont un indice pair.

Soit maintenant $V^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$ une hypersurface complexe. Sur sa partie lisse, l'application de Gauss complexe $\gamma_{\mathbb{C}} : V^n \longrightarrow \mathbb{P}^*_n(\mathbb{C})$ fait correspondre au point régulier x la direction de l'hyperplan tangent à V^n en x .

Soit ω la forme de Kaehler de V^n et ω_o celle de $\mathbb{P}_n\mathbb{C}$. Si V est une hypersurface compacte (donc à bord) de $\mathbb{C}^{n+1}$ la formule de Weyl s'écrit [Gr] :

$$\operatorname{vol} \operatorname{Tub}_r V = r^2\Big(\sum_0^n c^{te}\Big[\int_V \gamma^*_{\mathbb{C}}(\omega_o^j) \wedge \omega^{r-j}\Big] r^{2j}\Big) .$$

D'après la définition donnée plus haut des fonctions symétriques de courbure, nous avons donc :

$$\sigma_{2i} \circ \omega^n = c^{te}(\gamma^*_{\mathbb{C}}\omega^j) \wedge \omega_o^{n-j} .$$

II. <u>Étude du niveau</u> $f = t$.

Quand l'origine est un point singulier isolé de f , les niveaux $f = t$, $t \neq 0$, sont lisses au voisinage de l'origine. Cependant

en s'approchant de l'origine. Un premier résultat dans cette direction a été démontré par L. Ness. Nous montrons dans cette partie que les fonctions symétriques de courbure des niveaux $f = t$, $t \neq 0$, conduisent à voir des "masses de courbure" concentrées au point singulier (théoremes 3 et 4), qui se calculent en fonction d'invariants analytiques de la singularité : les nombres de Milnor $\mu^{(i)}$.

Définissons d'abord le nombre de Milnor $\mu(f)$.

THÉORÈME 1 (Milnor [M]).- <u>Soit</u> f <u>un polynôme admettant l'origine comme point singulier isolé</u>. <u>Pour</u> ϵ <u>assez petit et</u> t <u>assez petit</u> (<u>choisi apres</u> ϵ) <u>l'intersection</u> $B_\epsilon \cap (f=t)$ <u>du niveau</u> t <u>de</u> f <u>et de la boule de rayon</u> ϵ <u>centrée en l'origine a le type d'homotopie d'un bouquet de</u> $\mu(f) = \mu$ <u>spheres de dimension réelle</u> n .

Considérons maintenant la restriction de f à un sous-espace linéaire P^i de dimension i passant par l'origine. Teissier démontre le résultat suivant :

THÉORÈME 2 (Teissier [T_1] et [T_2]).- <u>Il existe un ouvert dense</u> Ω <u>de la grassmannienne</u> $G_{n+1,i}$ (<u>en fait le complémentaire d'un fermé algébrique</u>) <u>tel que si</u> P^i <u>appartient à</u> Ω <u>on ait</u> :

1) <u>La restriction de</u> f <u>à</u> P^i <u>admet l'origine comme point singulier isolé</u>.

2) <u>Le nombre de Milnor</u> $\mu(f|_{P^i})$ <u>est constant sur</u> Ω .

Nous noterons $\mu^{(i)}$ le nombre de Milnor de la restriction de f à un sous-espace de dimension i passant par l'origine générique. En particulier nous noterons $\mu^{(n+1)}$ le nombre $\mu(f)$.

<u>Remarque</u>.- Partout où le nombre $\mu(f|_{P^i})$ est défini, on a $\mu(f|_{P^i}) \geqslant \mu^{(i)}$.

La relation entre les nombres de Milnor et les courbures des niveaux est donnée par les deux théoremes :

THÉORÈME 3 ([La_1]).- <u>Si l'origine est un point singulier isolé du polynôme</u> f , <u>la courbure de Lipschitz-Killing des niveaux lisses de</u> f <u>et les nombres de Milnor sont liés par l'égalité</u> :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ \lim_{t\to 0} \int_{B_\epsilon \cap (f=t)} \sigma_{2n} = c^{te}[\mu^{(n+1)}+\mu^{(n)}]$$

Le théoreme suivant généralise le résultat du théoreme 3 aux autres fonctions symétriques de courbures σ_{2i} .

THÉORÈME 4 ([Gr] p. 506).- Dans les hypothèses du théoreme 3 on a :

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ \lim_{t\to 0} \frac{1}{\epsilon^{2(n-i)}} \int_{B_\epsilon \cap (f=t)} \sigma_{2i} = c^{te}[\mu^{(i+1)}+\mu^{(i)}]$$

Remarque.- La démonstration du théoreme 4 donnée dans [Gr] est incomplete car elle repose sur la formule "crofton III" p. 485, qui n'est pas exacte dans le cadre général où elle est énoncée. Lê Dũng Trang m'a indiqué que le résultat de Griffiths peut se démontrer par d'autres méthodes.

Donnons une idée de la démonstration du théorème 3 .

Pour cela rappelons d'abord un résultat de géométrie réelle. Soit V^{2k} une sous-variété immergée compacte éventuellement à bord de R^N . Soient H un hyperplan de R^N , $H^\perp$ la droite orthogonale à H , et p_H la projection orthogonale de R^N sur la droite H . Pour presque tout H la restriction de p_H à V^{2k} est une fonction de Morse. Notons :

$$\mu(V,H) = \sum_{x\in \mathrm{crit}(p_H)} (-1)^{\mathrm{ind}(x)}$$

la somme sur l'ensemble des points critiques de p_H de $(-1)^{\mathrm{ind}(x)}$.

THÉORÈME 5 (Chern-Lashof [C-L]).- Les nombres $\mu(V,H)$ sont liés à la courbure de Lipschitz-Killing par la relation suivante :

$$\mu(V,H) = c^{te} \int_V \sigma_{2k} .$$

Remarque 1.- Si la variété V est une hypersurface complexe $V^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$, la parité de l'indice des points critiques de la restriction à V^n de p_H est constante ; plus précisément $(-1)^{\mathrm{ind}(x)} = (-1)^n$.

Remarque 2.- [La$_1$] . Dans ce cas si $\gamma_{\mathbb{C}}$ est l'application de Gauss complète qui au point régulier x fait correspondre l'espace normal à V en x , on a :

$$|\text{jacobien } \gamma_{\mathbb{C}}|^2 = c^{te} \sigma_{2n} .$$

Il reste un pas à franchir pour lier le nombre de points critiques $\mu(V,H)$ à un invariant algébrique. Pour cela définissons la courbe polaire associée à une direction d'hyperplan H (cf. [Lê]).

Les hypersurfaces de niveau $f = t$ forment un feuilletage (avec singularités) de $\mathbb{C}^{n+1}$. En chaque point régulier du feuilletage, l'hyperplan T_xF est l'hyperplan tangent en x à l'hyperplan de niveau passant par x. La courbe polaire Γ_H est l'ensemble des points x vérifiant $T_xF = H$. Si $(e_1 \ldots e_n)$ est une base de l'hyperplan H des équations de Γ_H seront :

$$< \text{grad } f|e_1 > = < \text{grad } f|e_2 > = \ldots = < \text{grad } f|e_n > = 0$$

(Les produits scalaires considérés sont des produits scalaires hermitiens).

Les points critiques de la restriction à $(f=t) \cap B_\epsilon$ de la projection p_H sont les points d'intersection de la courbe polaire Γ_H avec le morceau d'hypersurface $(f=t) \cap B_\epsilon$. Utilisons maintenant un théorème de Teissier.

THÉORÈME 6 ([T_1] et [T_2]).- <u>Pour</u> H <u>appartenant à un ouvert dense de</u> $\mathbb{P}^*_n = G_{n+1,n}$ <u>on a</u>

$$\lim_{\epsilon\to 0} \lim_{t\to 0} \# [(f=t) \cap B_\epsilon \cap \Gamma_H] = (\Gamma_H.(f=0))_0 = \mu^{(n+1)} + \mu^n .$$

Réécrivons le résultat du théorème 3 pour la variété $(f=t) \cap B_\epsilon$:

$$\int_{(f=t)\cap B_\epsilon} \sigma_{2_k} = c^{te} \int_{\mathbb{P}^*_n} \mu((f=t)\cap B_\epsilon, H) .$$

Le nombre $\mu((f=t)\cap B_\epsilon) = \# [\Gamma_H \cap (f=t) \cap B_\epsilon]$ est dominé, quel que soit H, par $\delta(\delta-1)^n$. En effet le degré de chacune des équations définissant Γ_H est inférieur ou égal à $(\delta-1)$ si δ est le degré de f. On a donc

$$\begin{aligned} \# \Gamma_H \cap (f=t) &\leq \partial^0 f \,.\, \prod_{i=1}^{n} \partial^0 < \text{grad } f|e_i > \\ &\leq \delta.(\delta-1)^n . \end{aligned}$$

Le théorème de convergence dominée permet donc de passer à la limite dans la formule écrite plus haut, ce qui démontre le théorème 1 .

III. Le feuilletage de niveau au voisinage d'une singularité isolée.

Les hypersurfaces de niveau de f définissent un feuilletage (avec singularités) de $\mathbb{C}^{n+1}$. Notons F ce feuilletage et T_xF le plan tangent en x à la feuille de F passant par x. Ceci permet, en tout point non singulier de F de définir la valeur des fonctions symétriques de courbure : $\sigma_{2i}(x)$ est la valeur au point x de la $2i^{ème}$ fonction symétrique de courbure σ_{2i} de la feuille de F passant par x.

En étudiant la courbure du feuilletage F restreint au "tube" $T_\lambda = \{|f| < \lambda\}$ nous avons un moment espéré retrouver d'autres invariants analytiques de la singularité. Actuellement nous pouvons seulement démontrer ou annoncer des inegalités liant les intégrales des fonctions symétriques de courbure sur le "tube" T_λ et des exposants de Puiseux de f et de ses restrictions à des sous-espaces linéaires génériques.

Soit W un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$. Comme la courbe polaire Γ_H est algébrique, elle est coupée par un hyperplan parallèle à H en un nombre fini de points. Nous définissons une densité sur la droite $D = H^\perp$, en comptant en chaque point $\vartheta \in H$ le nombre de points d'intersection de l'hyperplan parallèle à H passant par ϑ avec la courbe polaire Γ_H contenu dans W. On en déduit une densité $m(H)$ sur $\mathbb{P}^*_n$ en intégrant la densité précédente sur les droites $D = H^\perp$.

Donnons à nouveau un théorème d'échange :

THÉORÈME 7 ([La_2]).- Soit W un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$ muni du feuilletage formé des niveaux du polynôme f, on a

$$\int_W |\sigma_{2n}(x)| = \int_{\mathbb{P}^*_n} m(H) \quad .$$

Remarque.- La fonction $\sigma_{2n}(x)$ a le signe de $(-1)^n$.

Esquisse de démonstration.- Définissons une application de Gauss Γ

$$\begin{aligned} \Gamma : W &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}^*_n \\ x &\longmapsto (x, T_xF) \end{aligned}$$

d'autre part $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}_n^*$ admet une projection π_2 canonique sur le fibré sur $\mathbb{P}_n^*$ suivant :

$$E = (H, v \in H^{\perp})$$

donnée par $\pi_2(x,H) = [H, p_H(x)]$. Soit $d\rho$ la forme volume de E .

La forme $\Gamma^* \pi_2^* d\rho$ est égale à $\sigma_{2n} dv$ où dv est la forme volume de W (à une constante près). Le théorème 5 se ramène maintenant à un changement de variable.

Il faut donc calculer pour presque tout H la valeur de $m(H)$. Pour cela rappelons la définition du diagramme de Cerf Δ_H :

$$\Delta_H \subset \mathbb{C}^2 \ , \ \Delta_H = [p_H x \in \Gamma_H, f(x)]$$
$$(\mathbb{C}^2 = H \times \mathbb{C}) \ .$$

La projection $p_H[\Gamma_H \cap T_\lambda]$ est exactement la projection sur $H^{\perp}$ de $\Delta_H \cap (H \times D_\lambda)$. Notons (z_0, t) les coordonnées de $H^{\perp} \times \mathbb{C}$.

THÉORÈME 8 ([Lê], [T_2]).- <u>Sur chaque branche du diagramme de Cerf,</u> z_0 <u>admet un développement de Puiseux de la forme</u> :

$$z_0 = a(H) t^{\left(\frac{m_q}{e_q + m_q}\right)} + \dots$$

Si l'on pose $\nu^{(e_q+m_q)} = t$; $r = \lambda^{\left(\frac{1}{e_q+m_q}\right)}$, la paramétrisation d'une branche du diagramme de Cerf se réécrit :

$$z_0 = g(\nu) = a(H)\nu^{m_q} + \dots$$

et le volume $m_b(H)$ d'une branche de $p_H[\Delta_H \cap H \times D_\lambda]$ se calcule par :

$$m_b(H) = \int_{D_r} |\text{jacobien réel } g| = \int_{D_r} |a(H) m_q \nu^{m_q - 1} + \dots|^2$$

cette dernière fonction est une fonction analytique en $r = |\lambda|$, $\theta = \arg \lambda$. Donc $m_b(H)$ est une fonction analytique de r dont le terme principal est

$$2\pi \int_{D_r^2} |a(H) m_q \rho^{m_q - 1}|^2 \rho d\rho = \frac{\pi}{m_q} |a(H) m_q|^2 r^{2m_q} \ .$$

On a donc :

$$m_b(H) = c_b(H)\lambda^{\left(2\frac{m_q}{e_q+m_q}\right)} + \ldots \qquad \text{(série de Puiseux en } \lambda\text{).}$$

La mesure $m(H)$ somme des mesures $m_b(H)$ calculées pour chacune des branches du diagramme de Cerf est aussi une série de Puiseux en λ de la forme

$$m(H) = c(H)\lambda^{\left(2\inf\frac{m_q}{e_q+m_q}\right)} + \ldots$$

Nous pouvons déduire des théorèmes 7 et 8 le

THÉORÈME 9.- <u>Pour tout compact</u> K <u>contenu dans l'espace</u> $\mathbb{P}_n - \Sigma$ <u>des directions non critiques, on a</u>

$$\int_{T_\lambda \cap B_\varepsilon \cap \gamma_{\mathbb{C}}^{-1}(K)} |\sigma_{2n}| = a(K)\lambda^{\left(2.\inf\left(\frac{m_q}{e_q+m_q}\right)\right)} [1+\varepsilon(\lambda)]$$

<u>où</u> $\varepsilon(\lambda)$ <u>tend vers</u> 0 <u>avec</u> λ .

Ce résultat est plus faible que le résultat espéré : calculer le terme principal de l'intégrale $\int_{T_\lambda \cap B_\varepsilon} |\sigma_{2n}|$.

Dans cette direction énonçons une proposition :

PROPOSITION 10.- <u>L'intégrale</u> $\int_{T_\lambda \quad B_\varepsilon} |\sigma_{2n}|$ <u>est bornée</u>.

<u>Démonstration</u>.- Nous avons vu que la majoration $\mu(f=0,H) <$ degré f , pour presque tout H , permettait de majorer l'intégrale $\int_{(f=0)} |\sigma_{2n}|$. D'autre part l'intersection du complémentaire de la boule $B(R)$ et de T_λ est presque un fibré en disques de rayon :

$$c^{te} \cdot \left|\frac{A.\lambda}{|\text{grad } f|}\right|^2 < \frac{A\,\lambda^2}{\|x\|^2}$$

sur l'intersection de $(f=0)$ avec le complémentaire de $B(R)$. Cette dernière remarque permet donc de majorer pour tout $\lambda < \lambda_0$ l'intégrale $\int_{T_\lambda \cap \complement B(R)} |\sigma_{2n}|$.

L'intégrale $\int_{B(R)\cap T_\lambda} |\sigma_{2n}|$ est également majorée, en effet on a :

$$\int_{B(R)\cap T_\lambda} |\sigma_{2n}| \leq \int_{B(R)} |\sigma_{2n}| = \int_{\mathbb{P}^*} m_{B(R)}(H)$$

cette dernière intégrale est majorée par :

$$\int_{\mathbb{P}^*_n} m_{B(R)}(H) \leqslant \pi R^2 . \frac{\omega_n}{2} . \partial^\circ[\Gamma_H]$$
$$\leqslant C^{te}.R^2 \quad .$$

Naturellement on peut chercher à calculer les intégrales sur le tube T_λ des autres fonctions symétriques de courbure.

Avec T. Shifrin je pense pouvoir prochainement démontrer les résultats suivants :

$$\int_{T_\lambda} \sigma_{2i} \geqslant \gamma_0 \lambda^{\left(2k \frac{m^1_q}{e^1_q+m^1_q}\right)} + \ldots$$

série de Puiseux en λ , où (m^1_q, e^1_q) sont les paires de Puiseux associées à la section de $(f=0)$ par un sous-espace de codiemnsion i générique.

En effet on peut définir une variété polaire associée à un sous-espace de dimension quelconque h de $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\Gamma_h = \{x | T_x F \supset h\}$$

et un diagramme de Cerf associé :

$$\Delta_h = \{p_h(x) | x \in \Gamma_h, f(x)\} \subset h \times \mathbb{C}$$

où p_h est la projection orthogonale sur h .

En outre, nous démontrerons dans le même travail avec T. Shifrin en cours de rédaction un théorème d'échange liant la fonction symétrique de courbure σ_{2n-2i} et les courbes polaires associées aux sous-espaces de codimension $i+1$.

Terminons par deux remarques.

1) Les nombres $\mu^{(i)}$ ressemblent étrangement aux classes de Chern des variétés compactes [C] . Les travaux récents de Mac Pherson [M.P] et de A. Dubson [D_1] et [D_2] ainsi que la thèse de T. Shifrin confirment l'intérêt de recherches dans cette direction.

2) N.A. Varchenko en utilisant de l'analyse démontre un résultat analogue au théorème 3. Il serait intéressant de trouver une passerelle entre les deux

démonstrations.

BIBLIOGRAPHIE.

[A] D. ASIMOV, On the average gaussian curvature of leaves of foliations, Bull. A.M.S. 1978, p. 131-133.

[B.L.R.] F. BRITO, R. LANGEVIN, H. ROSENBERG, Intégrales de courbure sur une variété feuilletée, note aux comptes-rendus Acad. Sci. Paris, série A, t. 285 (10 octobre 1977) p. 533-536, et article détaillé à paraître au journal of differential geometry.

[C] S.S. CHERN, On the cinematic formula in integral geometry, Journ. of Math. and Mechanics, vol. 16, n° 1 (1966), p. 101-118.

[C.L.] S.S. CHERN and R.K. LASHOF, On the total curvature of immersed, manifolds I and II American Journ. of Maht. 79 (1957) p. 306-318, and Michigan Math. Journ. (1958) p. 5-12.

[D_1] A. DUBSON, Classes caractéristiques des variétés singulières, note aux comptes-rendus Acad. Sci. Paris, série A, t. 287 (12 juin 1978) p. 237-240.

[D_2] A. DUBSON, exposé Séminaire Verdier (1978-1979) (ce fascicule).

[F] W. FENCHEL, On total curvature of riemannian manifolds I. Journ. of London Math. Soc. 15, p. 15-22 (1940).

[Gr] P. GRIFFITHS, Complex differential and integral geometry and curvature integrals associated to singularities of complex analytic varieties, Duke Math. Journ., sept. 1978, vol. 45, n° 3, p. 427-512.

[La_1] R. LANGEVIN, Courbure et singularités complexes, Commentarii Mathematici Helvetici 54 (1979), p. 6-16.

[La_2] R. LANGEVIN, Classe moyenne d'une sous-variété d'une sphère ou d'un espace projectif, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, série II, tome 28 (1979), p. 313-318.

[La_3] R. LANGEVIN, Courbure, feuilletages et singularités algébriques, à paraître au Séminaire Lê Dung Trang, Paris 7.

[$Lê_1$] LÊ DŨNG TRÁNG, Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe, Ann. Inst. Fourier 23, t. 4 (1973), p. 261-270.

[Lê$_2$] LÊ DŨNG TRÁNG, Curvature near singularities, Publication univ. Oulu (Finlande) décembre 1978.

[M] J. MILNOR, Singular points of complex hypersurfaces, Princeton Univ. Press.

[M.P] R. MAC PHERSON, Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Math. 100, n° 2 (1974), p. 423-432.

[Ne] Linda NESS, Ph. D. Thesis, Harvard 1975.

[T$_1$] B. TEISSIER, Introduction to equisingularity problems, Proceedings of symposia in Pure Math., vol. 29 (1975), p. 593-632.

[T$_2$] B. TEISSIER, Variétés polaires, Inventiones Math. 40 (1977), p. 267-292.

[V] A.N. VARCHENKO, Des limites d'intégrales de courbure sur le bord d'une singularité isolée de surface analytique de C^3 sont des entiers, Uspekhi mat. nauk. t. 33, fasc. 6, p. 199-200.

[W] H. WEYL, On the volume of tubes, Amer. Journ. of Math. 61 (1939) p. 461-472.