JEAN-PIERRE BOURGUIGNON

Déformations des métriques d'Einstein

Astérisque, tome 80 (1980), p. 21-31

<http://www.numdam.org/item?id=AST_1980__80__21_0>

Société Mathématique de France
Astérisque 80 (1980) p. 21-31

DÉFORMATIONS DES MÉTRIQUES D'EINSTEIN

par

Jean Pierre BOURGUIGNON

Cet exposé fait suite au précédent et présente les résultats connus sur les déformations d'Einstein sur une variété compacte connexe M , principalement le théorème probablement ancien établissant l'équation des déformations infinitésimales (d'où l'on déduit que l'espace des modules est de dimension finie), des théorèmes de non-déformabilité et les quelques exemples connus de modules de métriques d'Einstein.

Outre leur intérêt géométrique, ces résultats mettent en évidence l'importance d'une théorie spectrale des systèmes d'équations aux dérivées partielles donnant des estimées de nature géométrique des premières valeurs propres. Une telle théorie semble entièrement à faire. Remarquons encore que pour l'étude des déformations des métriques d' Einstein nous ne disposons pas, comme dans le cas des déformations de structures complexes, d'une théorie d'obstruction et ceci faute d'une interprétation cohomologique de l'espace tangent aux déformations.

Comme toujours lors de l'étude d'un espace de déformations, il faut, dans un premier temps, diviser par le groupe d'automorphismes (ici le groupe des difféomorphismes). Nous consacrons le paragraphe 1 à ce problème. Les équations des déformations infinitésimales d'Einstein sont établies au paragraphe 2 : c'est un système elliptique dont l'étude s'avère fondamentale dans plusieurs problèmes de géométrie riemannienne (elle est pourtant fort peu avancée !). Nous avons regroupé dans le paragraphe 3 les divers résultats connus à propos des déformations infinitésimales, puis dans le paragraphe 4 quelques exemples de modules (variétés plates, surfaces de Riemann de genre ≥ 2, certaines variétés kählériennes dont les surfaces complexes K3,...).

§ 1. ACTION DU GROUPE DES DIFFÉOMORPHISMES

Nous désignons par $\mathcal{M}$ l'espace des métriques riemanniennes C^∞ de la variété compacte M ; c'est un cône convexe dans l'espace vectoriel $\mathcal{S}^2M$ des champs de 2-formes symétriques sur M .

Dans un premier temps, il est commode de travailler sur la base $\mathcal{M}_o$ de ce cône, qui peut s'identifier à l'espace des métriques riemanniennes g sur M dont le volume total $\int_M v_g$ vaut 1. On a vu dans l'exposé précédent que les métriques d'Einstein sont les points critiques de la fonctionnelle définie sur $\mathcal{M}_o$ par $g \mapsto \int_M \mathrm{Scal}_g v_g$ où Scal_g désigne la courbure scalaire de la métrique g .

Remarquons que le groupe DM des difféomorphismes de M opère sur $\mathcal{M}_o$ (car par le théorème du changement de variables, $\int_M v_{\varphi^* g} = \int_M \varphi^* v_g = \int_M v_g$). De plus DM est un groupe d'invariance de la fonctionnelle précédemment définie. Cependant comme l'espace $\mathcal{M}_o/\mathrm{DM}$ n'est pas en général une variété (cf [2]), nous travaillerons le plus souvent de façon DM-équivariante sur $\mathcal{M}_o$.

Mais il est une normalisation intermédiaire (peu connue!) qui se révèle souvent intéressante d'un point de vue géométrique :

LEMME.- Dans l'étude des métriques à difféomorphisme près, il est toujours possible de n'étudier que les métriques ayant un élément de volume fixé v_o .

En effet, d'après un théorème de J. Moser (cf [12]), si v est un élement de volume tel que $\int_M v = \int_M v_o$, alors il existe un difféomorphisme φ tel que $\varphi^* v = v_o$. Comme la prise de l'élément de volume défini par une métrique est une opération "naturelle" (i.e. $v_{\varphi^* g} = \varphi^* v_g$), si g est une métrique de $\mathcal{M}_o$ définissant l'élément de volume v , la métrique $\varphi^* g$ a pour élément de volume $\varphi^* v = v_o$.

Nous poserons

$$\mathcal{N}_o = \{g \mid g \in \mathcal{M},\ v_g = v_o\}.$$

Bien entendu sur $\mathcal{N}_o$ seul le sous-groupe $D_oM = \{\varphi \mid \varphi \in \mathrm{DM}, \varphi^* v_o = v_o\}$ de DM opère. Les métriques d'Einstein sont encore les points critiques de la fonctionnelle D_oM-invariante définie sur $\mathcal{N}_o$ par $g \mapsto \int_M \mathrm{Scal}_g v_o$.

Alors que $T_g\mathcal{M} = \mathcal{S}^2M$ et que $T_g\mathcal{M}_o = \{h \mid h \in \mathcal{S}^2M, \int_M \bar{h}\, v_g = 0\}$ (nous notons $\bar{h}$ la trace par rapport à g de h), nous avons

$$T_g\,\mathcal{N}_o = \{h \mid h \in \mathcal{S}^2M,\ \bar{h} = 0\} = \mathcal{S}^2_oM\,.$$

Comme nous devons tenir compte de l'action de DM sur $\mathcal{M}$, rappelons quelques faits fondamentaux la concernant (pour plus de détails, voir [6] ou [2]*) .

i) L'espace tangent à l'orbite DM.g passant par une métrique g se décrit comme suit : si $t \mapsto \varphi_t^* g$ est un chemin dans l'orbite de g , alors $\frac{d}{dt}\varphi_t^* g\big|_{t=0} = \mathcal{L}_X g$ où $X = \frac{d}{dt}\varphi_t\big|_{t=0}$.

Il est commode d'introduire ici la connexion de Levi-Civita D^g de la métrique g , car, si Y et Z sont des vecteurs tangents à M , nous avons

$$(\mathcal{L}_Y g)(Y,Z) = g(D^g_Y X, Z) + g(D^g_Z X, Y).$$

Nous notons δ_g^* l'opérateur différentiel défini sur $\mathfrak{D}$M (l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur M) à valeurs dans $\mathcal{S}^2M$ par

$$\delta_g^* X = \frac{1}{2}\mathcal{L}_X g \quad .$$

Finalement $T_g(DM.g) = \mathrm{Im}\,\delta_g^*$.

L'opérateur δ_g^* étant à symbole injectif, $\mathrm{Im}\,\delta_g^*$ est un sous-espace fermé facteur direct de $\mathcal{S}^2M$ ($\simeq T_g\mathcal{M}$).

ii) En une métrique g , il existe une tranche $\mathcal{S}_g$ de l'action de DM sur $\mathcal{M}$ (ou $\mathcal{S}_g^o$ de D_oM sur $\mathcal{N}_o$) qui peut être prise telle que $T_g\mathcal{S}_g = \mathrm{Ker}\,\delta_g$ où δ_g désigne l'adjoint formel de δ_g^* (on prend $\mathcal{S}_g^o = \{h \mid h \in \mathcal{S}^2_oM, \exists f, \delta_g h = df\}$). L'opérateur δ_g n'est autre que la divergence des champs de 2-tenseurs symétriques (pour h dans $\mathcal{S}^2M$ et un vecteur tangent X ,

$$(\delta_g h)(X) = -\sum_{i=1}^{n} (D^g_{e_i} h)(e_i, X)$$

* Dans [2] la définition II.16 doit être modifiée pour s'appliquer à la situation considérée , ainsi que me l'a fait remarquer N. Koiso.

où (e_i) est une base orthonormée de l'espace tangent).

Nous avons donc

$$T_g\mathcal{M} = \mathrm{Im}\,\delta_g^* \oplus \mathrm{Ker}\,\delta_g \;.$$

Il suit de [5] que $\mathrm{Ker}\,\delta_g$ est de dimension infinie.

iii) La théorie précédente est aussi adaptée à l'action de D_oM sur $\mathcal{N}_o$, car l'opérateur δ_g^* applique l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle (l'algèbre de Lie de D_oM) dans $T_g\mathcal{N}_o$.

Dans la suite il nous sera commode d'appeler <u>structure riemannienne</u> une orbite de DM dans $\mathcal{M}$. Une <u>déformation de métriques</u> sera une courbe $t \mapsto g_t$ transverse aux orbites (par exemple se trouvant dans une tranche) par opposition à une <u>variation de métriques</u>, qui est une courbe quelconque $t \mapsto g_t$ dans $\mathcal{M}$. De même nous réserverons le terme de <u>déformation infinitésimale</u> en une métrique g à un champ de 2-tenseurs symétriques à divergence nulle par rapport à cette métrique.

L'importance des déformations infinitésimales est soulignée par le

THÉORÈME (N. Koiso, cf [9] page 427).- <u>Toute structure riemannienne d'Einstein n'ayant pas de déformation infinitésimale d'Einstein est isolée (i.e. dans un voisinage pointé de son orbite, il n'y a pas de métrique d'Einstein).</u>

§ 2. ÉQUATIONS DES DÉFORMATIONS INFINITÉSIMALES D'EINSTEIN

Dans ce paragraphe nous supposons que g est une métrique d'Einstein (i.e. $\mathrm{Ric}_g = K\cdot g$). En conséquence nous supprimons la référence à la métrique g partout où cela n'engendre pas de confusion.

Soit $t \mapsto g_t$ une famille de métriques d'Einstein (de telle sorte que $\mathrm{Ric}_{g_t} = K(g_t)\cdot g_t$) avec $g_o = g$.

Pour écrire l'équation infinitésimale nous utilisons l'expression (cf [1] page 389)

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Ric}_{g_t}\Big|_{t=0} = T_g\mathrm{Ric}(h) = \frac{1}{2}\Delta h - \delta^*\delta h - \frac{1}{2}\delta^*\, d\bar{h}$$

où $h = \frac{d}{dt} g_t\Big|_{t=0}$. Dans cette formule Δ est <u>le laplacien de Lichnerowicz de la métrique</u> g (cf [11]) défini, pour h dans $\mathcal{S}^2M$, par

$$\Delta h = D^*Dh + \mathrm{Ric}\circ h + h\circ \mathrm{Ric} - \overset{o}{R}(h)$$

où $\circ$ désigne la composition des endomorphismes et $\overset{\circ}{R}$ désigne la courbure opérant sur les tenseurs symétriques par

$$\overset{\circ}{R}(h) = \sum_{i,j=1}^{n} R(e_i,\cdot,e_j,\cdot)h(e_i,e_j)$$

((e_i) est une base orthonormée). C'est, au signe près, la seule façon dont un tenseur de courbure peut opérer sur les tenseurs symétriques.

Remarquons que le comportement de l'application courbure de Ricci est fixé le long de l'orbite par naturalité : de l'identité $\mathrm{Ric}_{\varphi^* g} = \varphi^* \mathrm{Ric}_g$, il suit

$$\frac{d}{dt} \mathrm{Ric}_{\varphi_t^* g}\Big|_{t=0} = T_g \mathrm{Ric}(\mathcal{L}_X g) \quad ,$$

soit finalement

$$\mathcal{L}_X \mathrm{Ric} = T_g \mathrm{Ric}(\mathcal{L}_X g).$$

Si $\mathrm{Ric}_g = K.g$,comme nous l'avons supposé, nous trouvons que $T_g\mathrm{Ric}(\mathcal{L}_X g) = K\,\mathcal{L}_X g$,i.e. que l'espace tangent à l'orbite est inclus dans le sous-espace propre de l'opérateur $T_g\mathrm{Ric}$ pour la valeur propre K. Ceci souligne le caractère non elliptique de l'opérateur différentiel $T_g\mathrm{Ric}$ lorsqu'il est considéré sur tout l'espace $T_g\mathcal{M} = \mathcal{S}^2M$. Si nous opérons plutôt dans $\mathcal{N}_o$ (cf § 1) , le terme $\delta^* d\bar{h}$ disparaît mais nous avons un terme en hessien de fonction venant de $\delta^*\delta h$. Dans une déformation infinitésimale d'Einstein $T_g\mathrm{Ric}$ va se réduire au laplacien de Lichnerowicz Δ (remarquer que Δ opère de $\mathcal{S}_o^2M$ dans $\mathcal{S}_o^2M$ et qu'en une métrique d'Einstein Δ opère dans la tranche, autrement dit dans les champs de 2-tenseurs symétriques à divergence nulle).

Nous pouvons énoncer le :

THÉORÈME (cf [1] page 390).- <u>L'équation des déformations infinitésimales d'Einstein est</u>

$$\begin{cases} \Delta h = 2Kh \\ \delta h = 0 \ , \ \bar{h} = 0 \end{cases} .$$

Dans [1] la dernière équation est déduite par un raisonnement analytique des autres, alors qu'elle est obtenue ici par une réduction géométrique directe*. Ici δh est a priori une différentielle de fonction, mais en prenant la trace de la première équation complète on voit que cette fonction

* Je remercie Marcel Berger de m'avoir signalé une erreur dans la présentation orale.

est constante et que $\frac{d}{dt}\mathcal{K}(g_t)|_{t=0} = 0$, d'où le

COROLLAIRE.- Le signe de la constante d'Einstein ne change pas au cours d'une déformation .

Par suite la détermination de l'espace tangent aux déformations d'Einstein se ramène à un problème spectral. Soulignons à cette occasion que la nature du laplacien de Lichnerowicz n'est toujours pas vraiment élucidée. Une caractérisation abstraite de cet opérateur serait certainement utile.

L'opérateur Δ étant elliptique, nous avons établi le

COROLLAIRE (cf [1] page 390).- L'espace tangent aux déformations d'Einstein est de dimension finie .

Rappelons que pour les systèmes, tels que celui que nous étudions, il n'existe pas de théorèmes fournissant des bornes inférieures du spectre comme il en existe pour les opérateurs sur les fonctions. De même l'analogue, s'il existe, du principe du maximum reste à trouver.

§ 3. RÉSULTATS SUR LES DÉFORMATIONS INFINITÉSIMALES

Nous commençons par les résultats de rigidité. Ils consistent tous à faire des hypothèses sur la courbure de M et à montrer que $2\mathcal{K}$ est inférieur à toute valeur propre de Δ .

THÉORÈME (cf [9] page 428 ou [3]).- Toute métrique d'Einstein sur une variété compacte M de dimension $n \geq 3$ à courbure sectionnelle σ , soit négative, soit $\frac{1}{3}$-pincée est isolée.

La preuve s'appuie sur les formules de Weitzenböck pour les 2-tenseurs symétriques : on écrit $\Delta = A^* A + [\text{courbure}]$ où A est un opérateur différentiel du premier ordre. Suivant le signe de la courbure sectionnelle σ , il s'agit de choisir A de façon appropriée : par exemple lorsque $\sigma < 0$, il faut prendre

$$(Ah)(X,Y,Z) = (D_X h)(Y,Z) - (D_Y h)(X,Z)$$

(X, Y et Z sont des vecteurs tangents) ; lorsque $\frac{1}{3} \leq \sigma \leq 1$, il faut prendre

$$(Ah)(X,Y,Z) = (D_X h)(Y,Z) + (D_Y h)(Z,X) + (D_Z h)(X,Y).$$

Remarque : A courbure positive le résultat est à rapprocher du résultat d'isolement de Fujitani (cf [7]) mentionné dans l'exposé précédent.

COROLLAIRE.- Les quotients compacts d'un espace symétrique non compact irréductible M de dimension n sont rigides en tant que variétés d'Einstein dès que $n \geq 3$, donc en tant qu'espaces localement symétriques.

La deuxième partie de ce corollaire remonte à [14], mais la preuve esquissée ici a l'avantage de ne pas nécessiter une étude cas par cas.

Par contre c'est après une étude cas par cas que N. Koiso a obtenu dans [10] le

THÉORÈME.- Il existe des déformations infinitésimales d'Einstein des espaces symétriques suivants :

i) SU_{n+1} pour $n \geq 2$;
ii) SU_n/SO_n pour $n \geq 3$;
iii) SU_{2n}/Sp_n pour $n \geq 3$;
iv) E_6/F_4 .

La preuve s'obtient après identification de Δ avec l'opérateur de Casimir du groupe d'isométries opérant sur la paire symétrique et par un calcul explicite de ses valeurs propres déduit de la structure du système de racines de la paire .

Le problème de savoir si ces déformations s'intègrent effectivement en une déformation d'Einstein de la métrique reste posé. Le premier cas intéressant est celui de SU_3 qui se fibre sur S^5 à fibres S^3, laissant peut-être bien augurer de l'existence d'une construction géométrique d'une telle déformation.

§ 4. MODULES DE VARIÉTÉS D'EINSTEIN

Jusqu'en 1977, les seuls exemples connus de modules de variétés d'Einstein compactes étaient des variétés à courbure sectionnelle constante. Ainsi pour les variétés plates compactes (les tores et leurs quotients), leur espace de modules en tant que variétés d'Einstein coïncide avec leur espace de modules en tant que variétés plates (du point de vue infinitésimal, l'équation se réduit à $D^*Dh = 0$ ce qui implique que h est parallèle).

De même sur les surfaces de Riemann de genre ≥ 2 avec une métrique à courbure constante, il existe un espace de modules, l'espace de Teichmüller.

Plus récemment certaines variétés kählériennes ont fourni de nouveaux et très intéressants exemples de modules de variétés d'Einstein.

En effet si (M,J,g,ω) est une variété kählérienne compacte dont la première classe de Chern $c_1(M,J)$ est nulle, il suit de la solution de la conjecture de Calabi par S. T. Yau (cf [15]) que, dans la classe de Kähler de ω, il existe une unique métrique à courbure de Ricci nulle. De plus dès que $b_{1,1} > 1$ (la classe de Kähler de ω peut alors se déformer en restant une classe de Kähler), ou dès que la structure complexe est déformable, cela donne lieu automatiquement à des modules de variétés d'Einstein (il faut s'assurer que ces métriques qui sont différentes d'un point de vue complexe sont bien différentes du point de vue riemannien).

Il y a beaucoup d'exemples de telles variétés, par exemple pour $m \geq 2$ les hypersurfaces régulières de $\mathbb{C}P^{m+1}$ de degré $m+2$ (les quartiques de $\mathbb{C}P^3$, les quintiques de $\mathbb{C}P^4, \ldots$)

Nous allons terminer cet exposé en examinant plus en détail le cas des surfaces complexes K3, pour lesquelles des résultats complets sont maintenant connus (cf [13] ou, pour un rapport sur les surfaces K3 dans l'optique qui nous intéresse ici, [4]).

Rappelons qu'une surface K3 est une surface complexe dont le premier nombre de Betti est nul et dont la première classe de Chern entière est nulle. On sait que toutes ces variétés sont simplement connexes, même difféomorphes entre elles et en particulier à une quartique de $\mathbb{C}P^3$. De plus leur "diamant" de Hodge s'écrit

$$\begin{array}{rccccc} & & & 1 & & \\ & & 0 & & 0 & \\ b_{2,0} = & 1 & & \begin{matrix}1\\+\\19\end{matrix} & & 1 \\ b_{1,0} = & & 0 & & 0 & \\ & & & 1 & & \end{array} \quad .$$

Leur signature (pour l'orientation naturelle de variété complexe) vaut -16 et leur caractéristique d'Euler 24.

D'après [15], sur toute surface K3 kählérienne (d'après [13], elles le sont toutes), il existe une métrique kählérienne Ricci-plate. Toute métrique d'Einstein sur une surface K3 est automatiquement Ricci-plate et même antidemiplate (cf [8]) à cause des valeurs de la signature et de la caractéristique d'Euler. Expliquons-nous : si nous décomposons le tenseur de courbure en composantes irréductibles sous l'action du groupe orthogonal,

$$R = R_{I} + R_{II} + R_{III} ,$$

nous avons vu (cf exposé précédent) que R est un tenseur de courbure d'Einstein si $R_{II} = 0$. D'autre part la constante d'Einstein est nulle si $R_{I} = 0$. Mais en dimension 4, si M est orientée, il existe un raffinement de cette décomposition sous la forme

$$R_{III} = R^{+}_{III} + R^{-}_{III} .$$

En effet R opère sur l'espace des 2-formes qui, en dimension 4 et si M est orientée, se décompose en l'espace Λ^{+} des 2-formes positives et en l'espace Λ^{-} des 2-formes négatives. La partie R^{+}_{III} (resp. R^{-}_{III}) est celle de R_{III} qui envoie Λ^{+} dans Λ^{+} (resp. Λ^{-} dans Λ^{-}). Le tenseur de courbure R est dit antidemiplat si $R^{+}_{III} = 0$.

Pour la connexion de Levi-Civita d'une métrique Ricci-plate antidemiplate (c'est le cas des surfaces K3), le fibré des 2-formes positives est plat. On choisit alors une base de formes qui parallèlisent ce fibré (il est commun de les considérer comme des structures complexes et de les choisir, ce qui est possible, se multipliant comme la base naturelle des quaternions imaginaires, d'où la notation classique I, J, K).

Nous avons alors

THÉORÈME (cf [13] et [4] pour la deuxième partie).- L'espace des modules des surfaces K3 en tant que variétés d'Einstein s'identifie à un quotient de l'espace symétrique $SO(19,3)/SO(19)\times SO(3)$ par un groupe discret. Il est donc de dimension 57. Son espace tangent s'identifie au produit tensoriel de l'espace des 2-formes harmoniques positives (donc parallèles) par l'espace des 2-formes harmoniques négatives.

Pour éclairer la deuxième partie du théorème, remarquons qu'il existe un isomorphisme de SO_4-modules entre $\Lambda^{+}\otimes\Lambda^{-}$ et S^{2}_{o} (c'est un exercice instructif!) qui permet de considérer le produit tensoriel d'une 2-forme positive ω^{+} par une 2-forme négative ω^- comme une variation infinitésimale de métrique. De plus si ω^+ et ω^- sont harmoniques, alors $\delta(\omega^+ \otimes \omega^-) = 0$ et $\Delta(\omega^+ \otimes \omega^-) = 0$ (ω^+ étant parallèle, la réciproque est aussi vraie : si $\Delta(\omega^+ \otimes \omega^-) = 0$, alors ω^- est harmonique). L'espace des modules est donc de dimension $3.19 = 57$. Le deuxième nombre de Betti $b_2 = b_{2,0} + b_{1,1} + b_{0,2}$ étant égal à 22, l'espace des 2-formes harmoniques négatives est en effet de dimension 19 .

Le compte des paramètres peut se faire aussi comme suit : l'espace des structures complexes est de dimension complexe 20 (une surface K3 a son fibré canonique trivial de telle sorte que $\dim_{\mathbb{C}} H^1(M, \mathscr{C}_{\mathbb{C}} M) = b_{1,1} = 20$ et il n'y a pas d'obstruction car $\dim_{\mathbb{C}} H^2(M, \mathscr{C}_{\mathbb{C}} M) = b_{2,1} = 0$ *). Pour une structure complexe donnée l'espace des classes de Kähler de volume total donné est de dimension réelle 19. Or toute métrique Ricci-plate est kählérienne pour toute une sphère S^2 de structures complexes (la boule unité de l'espace des 2-formes positives parallèles). Nous avons donc $40 + 19 - 2 = 57$ paramètres réels pour décrire l'espace des modules des surfaces K3 en tant que variétés d'Einstein. Remarquons qu'alors se trouvent satisfaites les deux conditions pour avoir des modules ($b_{1,1} > 1$ et une structure complexe déformable). Ce sont les seules hypersurfaces du projectif complexe pour lesquelles c'est le cas .

Remarquons pour finir que les variétés complexes à première classe de Chern ont, elles aussi, un espace de modules de structures complexes non réduit à un point. Comme il y a existence et unicité de la métrique d'Einstein-Kähler à structure complexe fixée (cf. 15 par exemple), dans ce cas-là aussi, nous trouvons des modules de métriques d'Einstein.-

---

* Pour une présentation de la théorie des déformations des variétés complexes on pourra consulter le livre "Complex manifolds" de K. Kodaira et J. Morrow Holt, Rinehart, Winston (1971).

RÉFÉRENCES

[1] M. BERGER, D. G. EBIN, Some decompositions of the space of symmetric tensors on a Riemannian manifold, J. of Diff. Geom. 3 (1969), 379-392.

[2] J. P. BOURGUIGNON, Une stratification de l'espace des structures riemanniennes, Compositio Math. 30 (1975), 1-41.

[3] J. P. BOURGUIGNON, Riemannian geometry, differential operators and elementary representation theory, cours de 3ème cycle (à paraître).

[4] J. P. BOURGUIGNON, Les surfaces K3, Exposé au séminaire A. Besse sur la géométrie riemannienne de dimension 4 (1979).

[5] J. P. BOURGUIGNON, D. G. EBIN, J. E. MARSDEN, Sur le noyau des opérateurs pseudo-différentiels à symbole surjectif et non-injectif, C. R. Acad. Sci. Paris, 282 (1976), 867-870.

[6] D. G. EBIN, The manifold of Riemannian metrics, Proc. Symp. Pure Math AMS, XV Berkeley (1970), 11-40.

[7] FUJITANI, On compact suitably pinched Einstein manifolds, Preprint.

[8] N. HITCHIN, Compact four-dimensional Einstein manifolds, J. Diff. Geom. 9 (1974), 435-441.

[9] N. KOISO, Non-deformability of Einstein metrics, Osaka J. of Math., 15 (1978), 419-433.

[10] N. KOISO, Infinitesimal deformations of Einstein metrics, Preprint.

[11] A. LICHNEROWICZ, Propagateurs et commutateurs en relativité générale, Publ. Math. I. H. E. S., 10 (1961), 293-344.

[12] J. MOSER, On the volume elements on a manifold, Trans. A. M. S., 120 (1965), 286-294.

[13] A. TODOROV, Exposé à l'Arbeitstagung, Bonn (Juin 1979).

[14] A. WEIL, On discrete subgroups of Lie groups (II), Ann. of Maths, 75 (1962), 578-602.

[15] S. T. YAU, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation I, Comm. Pure Appl. Math., XXXI (1978), 339-412.

J. P. BOURGUIGNON
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex (France)
(Laboratoire associé au C.N.R.S n° 169)