D. PICARD
J. DESHAYES

Grandes et moyennes déviations pour les marches aléatoires

Astérisque, tome 68 (1979), p. 53-71
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__68__53_0>

GRANDES ET MOYENNES DÉVIATIONS POUR LES

MARCHES ALEATOIRES.

D. PICARD - J. DESHAYES.

On considère une suite de vecteurs aléatoires indépendants et équidistribués : $\xi_1, \dots, \xi_n$ de l'espace euclidien R^k (toutes les normes étant équivalentes, on pourra utiliser la norme : $\rho(x) = \sup_{i=1,..k} | x^i |$

$$E\xi = 0$$

$$E\xi\xi' = B \text{ avec dét } B \neq 0.$$

On pose $S_o = 0$

$$S_j = \xi_1 + \dots + \xi_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

On définit la ligne polygonale $s_n(t)$, $t \in [0,1]$ dans R^k construite sur les points $(\frac{j}{n}, \frac{S_j}{x(n)})$ pour $j = 0, 1, \dots, n$; où $x(n)$ désigne une suite de nombres positifs telle que $\frac{x(n)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ et $x(n) = 0(n)$.

On s'intéressera au comportement asymptotique de $s_n(t)$; pour cela on se place dans l'espace $\mathcal{C}_k[0,1]$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans R^k muni de la norme uniforme notée $|| \cdot ||$; et on étudiera $P(s_n(.) \in G)$ où G est un borélien de $\mathcal{C}_k[0,1]$.

Dans la partie I, on introduit la fonctionnelle w qui joue pour les marches aléatoires le rôle de la transformée de Cramer dans les théorèmes de grandes déviations. En première lecture, on pourra omettre les propriétés de w. Après avoir énoncé les théorèmes dans la partie II, des exemples d'applications sont mis en évidence dans la partie III. La partie IV est consacrée aux démonstrations et dans la partie V, on envisage le cas où la transformée de Laplace de ξ existe seulement dans un voisinage de 0.

Cet exposé a été construit d'après des résultats de Borovkov [2] et Mogulskii [3].

EXPOSÉ 4

I. PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS.

On désigne par $\varphi_\xi(.)$ la transformée de Laplace de la variable aléatoire ξ et par $h_\xi(.)$ sa transformée de Cramer :

$$\lambda \in R^k \rightsquigarrow \varphi_\xi(\lambda) = Ee^{<\lambda,\xi>}$$

$$\alpha \in R^k \rightsquigarrow h_\xi(\alpha) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^k} \{ <\alpha,\lambda> - \log \varphi_\xi(\lambda) \}$$

On note $\mathcal{C}_o$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}_k[0,1]$ partant de 0 en t=0 et Γ l'ensemble des lignes polygonales (ayant un nombre fini de sommets) de $\mathcal{C}_o$, ces deux ensembles étant munis de la topologie trace.

Les propriétés asymptotiques seront énoncées à l'aide de la fonctionnelle w_ξ définie par :

$$f \in \Gamma \rightsquigarrow w_\xi(f) = \int_o^1 h_\xi(f'(t))dt \quad , \quad f \text{ dérivable presque partout.}$$

<u>Proposition</u>. w_ξ est une fonctionnelle semi-continue inférieurement sur Γ.

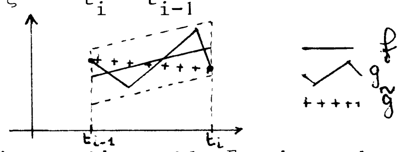
<u>*démonstration*</u> : soit $f\in\Gamma$ de sommets $(t_i, f(t_i))$, $i = 0, 1, \ldots, j$. Pour un nombre ε positif, on notera $B(f,\varepsilon)$ l'ensemble des fonctions g de $\mathcal{C}_k[0,1]$ telles que $||g - f|| < \varepsilon$

La fonction h_ξ étant s.c.i. (cf[1]), on en déduit que $\forall\ \eta > o$, $\exists \varepsilon>o$ tel que $g \in B(f,\varepsilon) \cap \Gamma$, $h_\xi\left(\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right) \geq h_\xi\left(\frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right) - \eta$,

pour $i = 1, 2, \ldots, j$. Par intégration, on obtient $w_\xi(\tilde{g}) \geq w_\xi(f) - \eta$, où $\tilde{g}$ désigne la ligne polygonale de sommets $(t_i, g(t_i))$, $i = 0, 1, \ldots, j$.

La fonction h_ξ étant convexe, on peut appliquer l'inégalité de Jensen : $\frac{1}{t_i-t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} h_\xi(g'(t)\, dt \geq h_\xi\left(\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)$ ce qui donne

$$\int_o^1 h_\xi(g'(t))dt \geq w_\xi(\tilde{g}) \geq w_\xi(f) - \eta$$



La fonctionnelle w_ξ étant s.c.i. sur l'ensemble Γ qui est dense dans $\mathcal{C}_o$, on la prolonge naturellement en une fonction s.c.i. sur $\mathcal{C}_o$ en posant :

$$f \in \mathcal{C}_o \rightsquigarrow w_\xi(f) = \inf_{\substack{\{f_n\} \in \Gamma \\ ||f_n - f|| \to o}} \underline{\lim}\ w_\xi(f_n)$$

<u>Remarque 1</u> : Si φ_ξ n'existe pas partout mais seulement dans un voisinage de 0, $w_\xi(f)$ coïncide avec $\int_0^1 h_\xi\,(f'(t))\,dt$ pour toutes les fonctions f de $\mathcal{C}_o$ telles que f' soit continue à valeurs à l'intérieur du domaine de définition de h_ξ.

<u>Remarque 2</u> : Si φ_ξ existe partout, alors la fonctionnelle w_ξ coïncide avec v_ξ définie sur $\mathcal{C}_o$ par $v_\xi(f) = \int_0^1 h(f'(t))dt$ pour f absolument continue

$$v_\xi\,(f) = +\infty \text{ sinon.}$$

Nous allons le montrer à l'aide des deux lemmes suivants :

<u>lemme 1</u> : $\forall f \in \mathcal{C}_o$, $w_\xi(f) \leq v_\xi(f)$

<u>démonstration</u> : si $v_\xi(f) = +\infty$, c'est trivial.

si f est absolument continue, elle admet un module de continuité uniforme δ. Désignons par $\tilde{f}_n$ la ligne polygonale de sommets $(\frac{j}{n}, f(\frac{j}{n}))\, j = 0, \ldots, n$

On a : $v_\xi(f) \geq v_\xi(\tilde{f}_n) = w_\xi(\tilde{f}_n)$ car h_ξ est convexe.

$$\begin{aligned}||\tilde{f}_n - f|| &= \sup_{t\in[0,1]} \rho|\tilde{f}_n(t) - f(t)| \\ &\leq \sup_t \{\rho[\tilde{f}_n(t) - \tilde{f}_n(\tfrac{[nt]}{n})] + \rho\,[\tilde{f}_n(\tfrac{[nt]}{n}) - f(t)]\} \\ &\leq \sup_t \{\rho[\tilde{f}_n(\tfrac{[nt]+1}{n}) - \tilde{f}_n(\tfrac{[nt]}{n})] + \rho\,[f(\tfrac{[nt]}{n}) - f(t)]\} \leq 2\,\delta(\tfrac{1}{n})\end{aligned}$$

$$||\tilde{f}_n - f|| \to 0 \Rightarrow v_\xi(f) \geq \underline{\lim}\, v_\xi(\tilde{f}_n) \geq v_\xi(f).$$

<u>lemme 2</u> : si φ_ξ existe partout, v_ξ est s.c.i. Alors on en déduit que pour $f \in \mathcal{C}_o$

$$v_\xi(f) \leq \inf_{\substack{\{f_n\}\in\mathcal{C}_o \\ ||f_n - f|| \to 0}} \underline{\lim}\, v_\xi\,(f_n) \leq \inf_{\substack{\{f_n\}\in\Gamma \\ ||f_n - f|| \to 0}} \underline{\lim}\, v_\xi\,(f_n) = w_\xi(f).$$

ce qui prouve, avec le lemme 1, l'identité de w_ξ et v_ξ.

<u>démonstration</u> : Pour montrer que v_ξ est s.c.i., on va prouver que pour tout K positif, les ensembles $A_K = \{f\in\mathcal{C}_o,\ v_\xi(f) \leq K\}$ sont fermés. Soit f_n une suite de A_K telle $||f_n - f|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$; montrons que $f \in A_K$.

$\int_0^1 h_\xi\,(f'_n(t))dt \leq K$ et $\lim_{\rho(x)\to\infty} \frac{h_\xi(x)}{\rho(x)} = +\infty$ entrainent que la suite f'_n est équiintégrable ; donc elle est relativement compacte pour la topologie $\sigma(L_1, L_\infty)$. Soient γ_1 et γ_2 deux valeurs d'adhérence de la suite f'_n pour $\sigma(L_1, L_\infty)$, on a alors : $f(t) = \int_o^t \gamma_1(u)du = \int_o^t \gamma_2(u)du$, ce qui implique que f est absolument continue et $\gamma_1 = \gamma_2 = f'$. Donc $f'_n \to f'$ pour $\sigma(L_1, L_\infty)$. En effet pour toute fonction η, $\int_o^1 h_\xi(\eta(t))dt \leq K$

$$\int_o^1 < g(t), \eta(t) > dt - \int_o^1 \text{Log}\, \varphi_\xi(g(t))dt \leq K \,, \; \forall\, g \in L^\infty.$$

Montrons le sens non trivial :

Remarquons d'abord que $\int_o^1 < g, \eta > dt - \int_o^1 \text{Log}\, \varphi_\xi(g(t))dt \leq K \,, \forall g \in L^\infty$ implique : $\int_o^1 [<g(t),\eta(t)> - \text{Log}\, \varphi_\xi[g(t)]]^+ dt \leq K, \forall g \in L^\infty$.

et par suite $\int_o^1 |<g(t),\eta(t)> - \text{Log}\varphi_\xi(g(t))|^+ dt \leq K, \forall g$

Prenons $g(t) = \theta_\varepsilon(\eta(t))$ avec θ_ε défini par :

$<x, \theta_\varepsilon(x)> - \text{Log}\, \varphi_\xi[\theta_\varepsilon(x)] = (1-\varepsilon)\, h_\xi(x)$ implique

$\int_o^1 [(1-\varepsilon)h_\xi[\eta(t)]]^+ \leq K$, et ε étant arbitraire

$$\int_o^1 h_\xi[\eta(t)]\, dt \leq K.$$

Proposition. si φ_ξ existe partout, l'ensemble $A_K = \{ f \in \mathcal{C}_o, w_\xi(f) \leq K \}$ est de plus compact dans $\mathcal{C}_o$.

démonstration : il suffit de trouver un module d'équicontinuité.

Ayant supposé l'existence de φ_ξ partout, nous pouvons considérer sa restriction à toutes les "diagonales" de R^k :

. Pour u croissant de 0 à $+\infty$, $\text{Log}\,\varphi_\xi(u,\delta)$ est une fonction croissante en u de 0 à $+\infty$, où δ désigne l'un des 2^k vecteurs de R^k dont les composantes valent +1 ou -1 ; nous pouvons alors considérer la fonction $\psi_\delta(u)$ inverse de $\dfrac{1}{\text{Log}\,\varphi_\xi(\frac{\delta}{u})}$: elle est définie pour $u \in]0,\infty[$, croissante et tendant vers 0 en 0.

Soit $\psi(u) = \sum_\delta \psi_\delta(u)$ définie pour $u > 0$, croissante et tendant vers 0 en 0.

Considérons maintenant une fonction g quelconque de A_K :

$0 \leq y \leq x \leq 1 \quad \rho[g(x) - g(y)] \leq \sum_{i=1}^k |g^i(x) - g^i(y)| = <\delta, g(x) - g(y)>$ pour l'un des δ.

$$g(x) - g(y) = \int_o^1 g'(t)\, 1_{[y,x]}(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \frac{\rho[g(x) - g(y)]}{\psi(x-y)} \leq \frac{<\delta, g(x) - g(y)>}{\psi_\delta(x-y)} = \int_o^1 <g'(t), \frac{\delta . 1_{[y,x]}(t)}{\psi_\delta(x-y)}> dt$$

Comme h_ξ et $\mathrm{Log}\,\varphi_\xi$ sont en dualité de Young

$$\forall\alpha,\ \forall\lambda,\quad \langle\alpha,\lambda\rangle \leq h_\xi(\alpha) + \mathrm{Log}\,\varphi_\xi(\lambda)$$

donc $\int_0^1 \langle g'(t),\ \delta\,\dfrac{1_{[y,x]}(t)}{\psi_\delta(x-y)}\rangle\,dt \leq \int_0^1 h_\xi(g'(t))\,dt + \int_0^1 \mathrm{Log}\,\varphi_\xi\left[\dfrac{1_{[y,x]}(t)}{\psi_\delta(x-y)}\right]dt$

$$= w_\xi(g) + \int_y^x \mathrm{Log}\,\varphi_\xi\left[\frac{1}{\psi_\delta(x-y)}\right]dt$$

$$\leq K + \int_y^x \frac{1}{x-y}\,dt = K+1$$

Nous obtenons $\rho[g(x)-g(y)] \leq (K+1)\,\psi\,(x-y)$, $\forall g \in A_K$, ce qui montre que $(K+1)\,\psi\,(.)$ est un module d'équicontinuité.

Pour G borélien de $\mathcal{C}_k[0,1]$, on pose $W_\xi(G) = \inf\limits_{g\in G\cap\mathcal{C}_0} w_\xi(g)$ si $G\cap\mathcal{C}_0 \neq \emptyset$
$= +\infty$ sinon.

Des remarques et propositions précédentes, on déduit que :

i) si G est ouvert, $W_\xi(G) = W_\xi(G\cap\Gamma)$

ii) $\forall f\in\mathcal{C}_0$, $W_\xi[B(f,\varepsilon)] \nearrow w_\xi(f)$ lorsque $\varepsilon \searrow 0$.

iii) si φ existe partout, $W_\xi[B(G,\varepsilon)] \nearrow W_\xi(\overline{G})$ pour tous les boréliens G vérifiant $W_\xi(\overline{G}) < \infty$, $\overline{G}$ désignant l'adhérence de G dans $\mathcal{C}_k\,[0,1]$

Lorsque ξ suit la loi normale : $\mathcal{N}(0,\ B)$, sa transformée de Laplace existe partout et on obtient les formes particulières suivantes :

$$h_0(\alpha) = \frac{1}{2}\,\alpha'\,B^{-1}\alpha$$

$$w_0(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 f'(u)'B^{-1}f'(u)\,du$$

$$W_0(G) = \inf_{g\in G\cap\mathcal{C}_0} w_0(g) \text{ si } G\cap\mathcal{C}_0 \neq \emptyset \text{ et } +\infty \text{ sinon.}$$

II. <u>ÉNONCÉS DES THÉORÈMES</u>.

1. <u>Grandes déviations</u>.

On suppose que les variables ξ ont une transformée de Laplace <u>sur R^k</u>. Soit $x(n)$ une suite telle que $\dfrac{x(n)}{n} \to 1$, alors $\forall G$ borélien de $\mathcal{C}_k$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{Log}\,P(s_n(.)\in G) \geq -W_\xi(\overset{\circ}{G}),\quad \overset{\circ}{G} \text{ étant l'intérieur de } G.$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{Log}\,P(s_n(.)\in G) \leq -W_\xi(\overline{G}) \quad \text{si } W_\xi(\overline{G}) < \infty\ .$$

Finalement, pour les boréliens G vérifiant $W_\xi(\overline{G}) = W_\xi(\overset{\circ}{G})$, on a

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{Log}\,P(s_n(.)\in G) \underset{n\to\infty}{\to} -W_\xi(G).$$

2. Moyennes déviations

On suppose que les variables ξ ont une transformée de Laplace dans un voisinage de 0. Soit x(n) une suite telle que $\frac{x(n)}{n} \to 0$ et $\frac{x(n)}{\sqrt{n}} \to \infty$

Alors $\forall$G borélien de $\mathcal{C}_k$,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \quad \frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P\ (s_n(.)\in G) \geq - W_o(\overset{\circ}{G})$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \quad \frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P\ (s_n(.)\in G) \leq - W_o(\overline{G}) \text{ si } W_o(\overline{G}) < \infty$$

Finalement, pour les boréliens G vérifiant $W_o(\overline{G}) = W_o(\overset{\circ}{G})$, on a :

$$\frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P\ (s_n(.)\in G) \to - W_o(G)$$

Remarques : i) si les variables ne sont pas centrées mais $E\xi = a$, il suffit de remplacer G par G_a dans les seconds membres des inégalités :

$$G_a = \{g(t) - a.t\ ,\ g\in G\}$$

ii) si la suite x(n) est telle que $\frac{x(n)}{n} \to \beta \neq 1$, il suffit de remplacer G par βG dans les seconds membres.

iii) $W_o(\overline{G}) = 0 \Leftrightarrow \overline{G}$ contient la fonction nulle.

Les deux théorèmes seront démontrés parallèlement, il sera donc commode d'utiliser les notations h, w, W, pour désigner respectivement h_ξ, w_ξ, W_ξ dans les cas de grandes déviations et h_o, w_o, W_o dans les cas de moyennes déviations.

III. EXEMPLES D'APPLICATION.

1. Interprétation de w(f)

$$\text{Si } w(f) < \infty,\ w(f) = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \underline{\lim_{n}} \ - \frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P(s_n(.)\in B(f,\varepsilon))$$

$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0} \overline{\lim_{n}} \ \frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P\ (s_n(.)\in B(f,\varepsilon)).$$

En effet, nous avons vu que $\forall f \in \mathcal{C}_o$, W $(B(f,\varepsilon)) \nearrow w(f)$ quand $\varepsilon \searrow 0$ et d'autre part, le théorème de grandes déviations permet d'écrire :

$$\underline{\lim} \quad \frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P\ (s_n(.) \in B(f,\varepsilon)) \geq -W_o(B(f,\varepsilon))$$

$$\overline{\lim} \quad \frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P\ (s_n(.) \in B(f,\varepsilon)) \leq -\ W\ (B(f,\ 2\varepsilon))$$

et on fait tendre ε vers 0

Remarque : Comme φ_ξ existe partout, W (B(f,ε)) est une fonction continue en ε (suffisamment petit) pour toutes les fonctions f satisfaisant à la condition : f' continue à valeurs à l'intérieur du domaine de définition de h.

Cela permet d'en déduire : $W(\overline{B(f,\varepsilon)}) = W\ (B(f,\varepsilon))$

et par suite : $\dfrac{n}{x(n)^2}$ Log P $(s_n(.) \in B(f,\varepsilon)) \to -\ W\ (B(f,\varepsilon))$

et :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \ \lim_{n} \ \frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P\ (s_n(.) \in B(f,\varepsilon)) = -\ w(f).$$

2. Franchissement de la barrière. (k = 1)

On prend $G = \{f \in \mathcal{C}_{[0,1]}$ telles que $\exists\ t \in [0,1],\ f(t) \geq g(t)\}$,

où g une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $g(t) > 0$, $\forall t$ (le cas contraire serait trivial : $\frac{1}{n}$ Log P $(s_n(.) \in G) \to 0$).

Etudions d'abord les grandes déviations.

1er cas : Si $\frac{g(t)}{t} >$ ess sup ξ, $\forall t$ ou si $\frac{g(t)}{t} \geq$ ess sup ξ dans le cas où $P(\xi =$ ess sup $\xi) = 0$, on a directement :

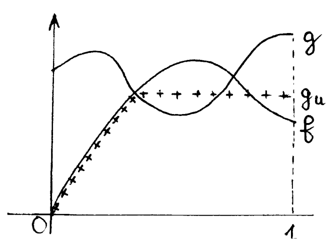
$P(s_n(.) \in G) = 0$

2e cas : si $\frac{g(t)}{t} \geq$ ess sup ξ, $\forall$ t dans le cas où $P(\xi =$ ess sup $\xi) > 0$ et $\exists\ t_o \in\ ]0,1]$ (le plus petit) tel que $\frac{g(t_o)}{t_o} =$ ess sup ξ. On obtient directement

$$P(s_n(.) \in G) = P(s_n(t_o) = t_o \text{ ess sup } \xi)$$
$$= [P(\xi = \text{ess sup}\xi)]^{[nt_o] + 1}$$

$\Rightarrow \frac{1}{n}$ Log P $(s_n(.) \in G) \to t_o$. Log $P(\xi =$ ess sup $\xi) = w_\xi\ (g_{t_o}) = W_\xi(G)$

Dans ce cas, la minoration donnée par le théorème serait sans intérêt : $W\ (\overset{\circ}{G}) = \infty$



<u>3e cas</u> : si $\exists\ t_o \in [0,1]$, $\frac{g(t_o)}{t_o} <$ ess sup ξ.

Pour $f \in G$, posons $u = \inf \{t \in [0,1],\ f(t) = g(t)\}$. La fonction g_u définie par $g_u(t) = \frac{g(u)}{u}\ [\inf(t,u)]$ appartient aussi à G et $w(f) \geq w(g_u)$ donc $W(G) = \inf_u w(g_u) = \inf_u u.h\left[\frac{g(u)}{u}\right]$

G est évidemment fermé et de plus $W(G) = W(\overset{\circ}{G})$. En effet, $\forall\ t$, $\frac{g(t)}{t} <$ ess sup ξ donc la fonction h_ξ est continue au point $\frac{g(t)}{t}$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \eta > 0$ tel que $h_\xi\left[(1+\eta)\frac{g(t)}{t}\right] \leq h_\xi\left[\frac{g(t)}{t}\right]\ (1+\varepsilon)$

la fonction $g_t^\eta = (1+\eta)\ g_t$ vérifie $w_\xi\ (g_t^\eta) \leq w_\xi\ (g_t)\ [1+\varepsilon]$ et $g_t^\eta \in \overset{\circ}{G}$ donc $W_\xi(\overset{\circ}{G}) \leq W(G)\ (1+\eta)$, $\forall\ \eta > 0$.

S'il existe u_o unique réalisant $\inf_u w\ (g_u)$, alors on peut interpréter g_{u_o} comme la trajectoire la plus probable conditionnellement au fait que l'on franchit la barrière (cf; [7]).

Pour les moyennes déviations, h_o est une fonction continue sur R pour toute fonction g continue sur $[0,1]$, on aura alors :

$$\frac{n}{x(n)^2}.\ \mathrm{Log}\ P\ (\exists t \in [0,1],\ s_n(t) \geq g(t)\} \to \quad - W_o(G) = -\inf_t \frac{[g(t)]^2}{2\sigma^2\ t}$$

3. <u>Non franchissement de barrières : k = 1.</u>

On prend $G = \{f \in \mathcal{C}[0,1]$ telle que $f(t) < g(t),\ \forall\ t\}$ où g de classe C^1 et telle qu'il existe $t \in\ ]0,1]$ tel que $g(t) < 0$ (les autres cas ne sont pas intéressants : $\frac{1}{n}$ Log P $(s_n(.) \in G) \to 0$ ou $-\infty$).

<u>1er cas</u> : Si $\exists t$ tel que $\frac{g(t)}{t} <$ ess inf ξ ou si $\exists t$ tel que $\frac{g(t)}{t} =$ ess inf ξ dans le cas où $P(\xi =$ ess inf $\xi) = 0$ on a directement :

$$P\ (s_n(.) \in G) = 0$$

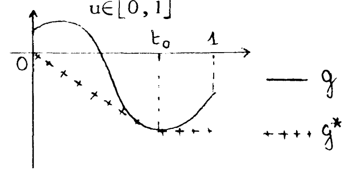
<u>2e cas</u> : $\exists t_o \in\ ]0,1]$ (le plus grand) tel que $\frac{g(t_o)}{t_o} =$ ess inf ξ dans le cas où $P\ (\xi =$ ess inf $\xi) > 0$. Ce cas sera traité avec le suivant car h_ξ est continue sur [ess inf ξ, 0].

<u>3e cas</u> : $\frac{g(t)}{t} >$ ess inf ξ, $\forall t$.

Considérons d'abord la fonction $\tilde{g}$, enveloppe convexe inférieure de $\{(0,0)\} \cup \{(t,y),\ y > g(t)\}$; en vertu des propriétés g, $\tilde{g}$ est continue sur

$[0,1]$ et $g(0) = 0$.

Considérons maintenant $t_o = \inf \{t,\ g(t) = \inf\limits_{u \in [0,1]} g(u)\}$, en vertu des propriétés de g, $\tilde{g}(t_o) = g(t_o) < 0$.



Notons g^* la fonction : $g^*(t) \quad = \tilde{g}(t),\ t \leq t_o$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ = g(t_o),\ t \geq t_o$

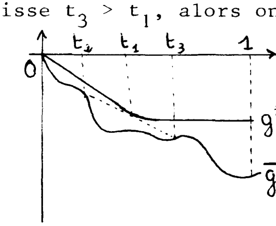
Nous allons montrer que $W(G) = w(g^*)$. D'abord $w(g^*) < t_o . h\ [\tilde{g}(0)] < \infty$ d'après les propriétés de h et de g. La fonctionnelle w étant s.c.i., elle atteint son minimum sur le compact $\{f \in G \cap \mathcal{C}_o,\ w(f) \leq w(g^*)\}$ pour une fonction notée $\bar{g}$:

$$W(G) = w(\bar{g}) \leq w(g^*)$$

Supposons que $w(\bar{g}) < w(g^*)$.

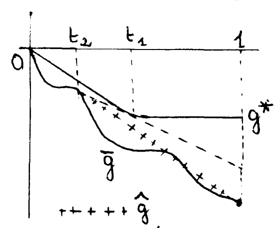
Si il existe t_1 tel que $\bar{g}(t_1) < g^*(t_1)$, considérons une tangente à g^*au point t_1 ; elle rencontre $\bar{g}$ en un point $t_2 < t_1$ car $\bar{g}(0) = g^*(0) = 0$ et g^* est convexe. Deux cas se présentent :

<u>1er cas</u> : Cette tangente rencontre $\bar{g}$ en un point d'abscisse $t_3 > t_1$, alors on aurait $w(\check{g}) < w(\bar{g})$, ce qui est impossible :



$$\check{g}(t) = \begin{cases} \bar{g}(t),\ t \leq t_2 \text{ et } t \geq t_3 \\ \\ \dfrac{t_3 - t}{t_3 - t_2}\ g(t_2) + \dfrac{t - t_2}{t_3 - t_2}\ \ g(t_3),\ t_2 \leq t \leq t_3 \end{cases}$$

<u>2e cas</u> : Cette tangente ne rencontre pas $\bar{g}$ pour $t > t_1$, alors on aurait $w(\hat{g}) < w(\bar{g})$, ce qui est impossible:



$$\hat{g}(t) = \begin{cases} \bar{g}(t),\ t \leq t_2 \\ \\ \dfrac{1-t}{1-t_2}\ g(t_2) + \dfrac{t - t_2}{1 - t_2}\ \ g(1),\ t \geq t_2 \end{cases}$$

ce qui prouve que $\bar{g} \geq g^*$.

Considérons maintenant l'ensemble $\{t \in [0,1],\ \bar{g}(t) > g^*(t)\}$: c'est un ouvert donc réunion au plus dénombrable d'intervalles :

. Pour un intervalle du type $]t'_n,\ t''_n[$ avec $t''_n < 1$, on a $g^*(t'_n) = \bar{g}(t'_n)$ et $g^*(t''_n) = \bar{g}(t''_n)$; d'autre part g^* est linéaire sur $]t'_n,\ t''_n[$ car elle est strictement inférieure à $\bar{g}$ donc à g sur cet intervalle.

La convexité stricte de h impliquerait que $\int_{t'_n}^{t''_n} h\,(g^{*'}(t))dt < \int_{t'_n}^{t''_n} h(\bar{g}'(t))dt$,

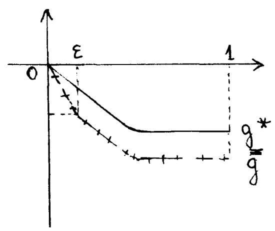
ce qui contredit l'optimalité de $\bar{g}$.

. Pour un intervalle du type $]t', 1[$, nécessairement $t' > t_o$ et on aurait $0 = \int_{t'}^{1} h\,(g^{*'}(t)dt < \int_{t'}^{1} h\,(\bar{g}'(t))dt$. Ce qui prouve que $\bar{g} = g^*$.

G est évidemment fermé et de plus $W(G) = W(\overset{\circ}{G})$ si $g(0) > 0$, et si $\frac{g(t)}{t} >$ ess inf $\xi, \forall t$.

Considérons la fonction de $\overset{\circ}{G}$ définie à partir de g^* par :

$$\bar{\bar{g}} \begin{cases} = [g^{*'}(0) - \varepsilon]t \text{ sur } [0,\varepsilon],\ \varepsilon \text{ petit de sorte que } g^{*'}(0) - \varepsilon > \text{ess inf } \xi \\ = g^*(t) + \bar{\bar{g}}(\varepsilon) - g^*(\varepsilon) \text{ sur } [\varepsilon, 1]. \end{cases}$$



On a : $0 \leq w(\bar{\bar{g}}) - w(g^*)$

$$\leq \int_0^{\varepsilon} |h(g^{*'}(t)) - h\,(g^{*'}(0) - \varepsilon)|dt$$

$$\leq \int_0^{\varepsilon} |h(g^{*'}(t)) - h(g^{*'}(0)|dt + \varepsilon|\, h(g^{*'}(0) - h(g^{*'}(0) - \varepsilon)|.$$

arbitrairement petit car $g^{*'}$ continue en 0 et h est continue en $g^{*'}(0)$.

Dans ces exemples, g^* peut être interprétée comme la trajectoire la plus probable de G, au sens suivant : asymptotiquement la probabilité pour $s_n(.)$ d'appartenir à G est "équivalente" à celle d'être au voisinage de g^*.

IV. DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES

Comme nous le verrons ces résultats sont obtenus par discrétisation et les outils essentiels sont les théorèmes sur les grandes et moyennes déviations sur R^k ; de façon plus précise, nous utiliserons les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. Grandes déviations (cf [1]).

Si les variables aléatoires ξ_i ont une transformée de Laplace définie dans un voisinage de 0, alors pour tout borélien Z de R^k :

$$\underline{\lim_n}\ \frac{1}{n} \text{Log } P\left(\frac{Sn}{n} \in Z\right) \geq - \inf_{z\in \overset{\circ}{Z}} h_\xi\,(z)$$

$$\overline{\lim_n}\ \frac{1}{n} \text{Log } P\left(\frac{Sn}{n} \in Z\right) \leq - \inf_{z\in B_\rho(Z,\varepsilon)} h_\xi\,(z),\ \forall\, \varepsilon > 0$$

où $\overset{\circ}{Z}$ désigne l'intérieur de Z dans R^k muni de la métrique ρ et $B_\rho(Z,\varepsilon)$ désigne $\{y \in R^k, \exists z \in Z \text{ tel que } \rho(z-y) < \varepsilon\}$.

Théorème 2. (moyennes déviations).

Si les variables aléatoires ξ_i ont une transformée de Laplace définie dans un voisinage de 0, alors pour tout borélien Z de R^k :

$$\underline{\lim}_n \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P\left(\frac{Sn}{x(n)} \in Z\right) \geq -\inf_{z \in \overset{\circ}{Z}} h_o(z)$$

$$\overline{\lim}_n \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P\left(\frac{Sn}{x(n)} \in Z\right) \leq -\inf_{z \in B_\rho(Z,\varepsilon)} h_o(z), \quad \forall \varepsilon > o$$

Ce théorème découle directement du théorème de moyennes déviations sur R (cf[4]) que l'on étend à R^k, de façon analogue aux grandes déviations.

En suivant la démarche de [3], nous ferons la démonstration en 3 étapes ;

- nous montrons d'abord l'existence d'un ε-précompact (voisinage d'ordre ε d'un compact) dont la probabilité du complémentaire est négligeable pour le problème .
- nous établissons ensuite les théorèmes dans le cas où G est une boule centrée sur une ligne polygonale.
- nous étendons enfin les résultats aux boréliens G, $G \cap \mathcal{C}_o \neq \emptyset$.

Lemme 1.

Si les variables aléatoires ξ_i admettent une transformée de Laplace au voisinage de 0 (resp. partout) dans le cas de moyennes (resp. grandes) déviations, $\forall C > 0, \forall \varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de lignes polygonales $f_1, \ldots, f_d \in \Gamma$ telles que $\overline{\lim}_n \frac{n}{x^2(n)} \operatorname{Log} P\left(s_n(.) \notin \bigcup_{j=1}^{d} B(f_j, \varepsilon)\right) \leq -C$

Démonstration

Des nombres $\varepsilon > 0$ et l N étant fixés, considérons l'ensemble

$$K(\varepsilon,l) = \bigcap_{i=1}^{l} \left\{ f \in \mathcal{C}_o, \sup_{\frac{i-1}{l} \leq t < \frac{i}{l}} \rho\left[f\left(\frac{i-1}{l}\right) - f(t)\right] < \varepsilon \right\}$$

En prenant les lignes polygonales f_j à sommets d'abscisses $0, \frac{1}{l}, \frac{2}{l}, \ldots, 1$, il est clair que $K(\varepsilon,l) \subset \bigcup_{j=1}^{d} B(f_j,\varepsilon)$, $d = 2^{k.l}$

$$P(s_n(.) \notin K(\varepsilon, 1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{1} \{s_n(.), \sup_{\frac{i-1}{1} \leq t \leq \frac{i}{1}} \rho|s_n(\tfrac{i-1}{1}) - s_n(t)| > \varepsilon\right)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{1} P\{\sup_{\frac{i-1}{1} \leq t \leq \frac{i}{1}} \rho[s_n(\tfrac{i-1}{1}) - s_n(t)] > \varepsilon\}$$

$$< 1.\ P\,(\sup_{0 \leq t \leq \frac{1}{1}} \rho[s_n(t)] > \varepsilon)$$

$$\leq 1.P\,(\max_{j \leq \frac{n}{1}} \rho|Si| > \varepsilon\, x(n))$$

De l'inégalité bien connue sur R (par exemple cf [5])

$$P\,(\max_{j \leq N} |Sj|>\lambda) \leq 2\, P(|S_N| > \lambda - \sqrt{2}\,\sigma\,\sqrt{N})$$

On tire : $P(s_n(.) \notin K(\varepsilon,1)) \leq 1 \sum_{i=1}^{k} P\,(\max_{j \leq \frac{n}{1}} [S_j^i] > \varepsilon\,.x(n))$

$$\leq 2k1 \sup_i P\,([S^i_{[\frac{n}{1}]}] > \varepsilon.x(n) - \sqrt{2}\,\sigma_i\,\sqrt{[\tfrac{n}{1}]})$$

$$\leq 2k1\ P\,(\rho[S_{[\frac{n}{1}]}] > \varepsilon 1.\ \frac{x(n)}{1} - \sqrt{2}\,\sqrt{\frac{n}{1}}\,\rho(\sigma))$$

En appliquant les théorèmes de moyennes et grandes déviations sur R^k, où $\frac{x(n)}{1}$ joue le rôle de $x\,([\frac{n}{1}])$, on obtient :

$$\overline{\lim_n}\ \frac{n}{x^2(n)} \operatorname{Log} P\,(s_n(.) \notin K\,(\varepsilon,1)) \leq -\frac{1}{1} \inf_{z \notin B_\rho(0,(1-1)\varepsilon)} h(z)$$

La fonction h étant la transformée de Cramer d'une variable ayant une transformée de Laplace définie partout, elle vérifie : $\frac{h(z)}{\rho(z)} \xrightarrow[\rho(z)\to\infty]{} \infty$ (cf [1])

On en déduit donc le lemme :

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \ \forall C > 0,\ \exists 1 \text{ tel que } \overline{\lim_n}\ \frac{n}{x^2(n)} \operatorname{Log} P\,(s_n(.) \notin K(\varepsilon,1) \leq -C\,.$$

Nous allons maintenant montrer que les théorèmes sont vrais lorsque G est une boule centrée sur une ligne polygonale f de Γ. La démonstration consiste à discrétiser le problème : au lieu de calculer $P\,(\rho[s_n(t) - f(t)] < \varepsilon,\ \forall t)$, on va étudier le comportement asymptotique de l'expression :

$$P\,(\bigcap_{q \in Q} \{\rho[s_n(q) - f(q)] < \varepsilon\})$$

où Q est un ensemble discret (r étant fixé, on prendra $Q_r = \{0, \frac{1}{r}, \ldots, \frac{r-1}{r}, 1\}$)

Il y aura donc deux parties :

- écrire un théorème de grandes ou moyennes déviations pour évaluer :

$$P\left(\bigcap_{q \in Q_r} \{\rho\left[s_n(q) - f(q)\right] < \varepsilon\right).$$

- approcher $P(s_n(.) \in B(f,\varepsilon))$ par densité en faisant tendre r vers l'infini. Il sera commode d'utiliser les notations suivantes :

pour $g \in \mathcal{C}_o$, soit $F_r(g) = \{ g(\frac{1}{r}), \ldots, g(\frac{j}{r}) - g(\frac{j-1}{r}), \ldots, g(1) - g(\frac{r-1}{r}) \}$

$$F_r^{(n)}(g) = \{ g(\frac{[\frac{n}{r}]}{n}), \ldots, g(\frac{j[\frac{n}{r}]}{n}) - g(\frac{(j-1)[\frac{n}{r}]}{n}), \ldots, g(\frac{r[\frac{n}{r}]}{n}) - g(\frac{(r-1)[\frac{n}{r}]}{n}) \}$$

L'application F_r de $\mathcal{C}_o$ dans $R^{k.r}$ consiste à mettre dans un vecteur de taille k.r les accroissements de g sur les segments $[\frac{j-1}{r}, \frac{j}{r}]$ et l'application $F_r^{(n)}$ approxime F_r de sorte que les accroissements soient pris en des points d'abscisse $\frac{i}{n}$.

<u>Lemme 2.</u>

Pour tout borélien Z de $R^{k.r}$

$$\underline{\lim_n} \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P\{F_r^{(n)}(s_n) \in Z\} \geq - \inf_{z \in \overset{\circ}{Z}} H_r(z)$$

$$\overline{\lim_n} \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P\{F_r^{(n)}(s_n) \in Z\} \leq - \inf_{z \in B_\rho(Z,\varepsilon)} H_r(z), \forall \varepsilon > 0$$

où $H_r(z) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} h(rz_i)$ si $z = (z_1, \ldots, z_r) \in (R^k)^r$

<u>*Démonstration.*</u>

C'est une application directe des théorèmes de moyennes et grandes déviations dans R^{k-r}, en effet :

$$F_r^{(n)}(s_n) = \left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_{[\frac{n}{r}]}}{x(n)}, \ldots, \frac{\xi_{(j-1)[\frac{n}{r}]+1} + \ldots + \xi_{j[\frac{n}{r}]}}{x(n)}, \ldots\right)$$

$$= \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_{[\frac{n}{r}]}}{x(n)}$$

où $X_j = (\xi_j, \xi_{j+[\frac{n}{r}]}, \dots, \xi_{j+(r-1)[\frac{n}{r}]})$ est une variable aléatoire de R^{kr} admettant pour transformée de Cramer au point z : $\sum_{i=1}^{k} h(z_i)$

Montrons d'abord la majoration dans le cas où G est une boule :

$$\overline{\lim_n} \frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P\,(s_n(.) \in B(f,\varepsilon)) \leq \overline{\lim_n} \frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P\,\{F_r^{(n)}(s_n) \in F_r^{(n)}[B(f,\varepsilon)]\}$$

$$\leq - \inf_{z \in B_\rho[F_r(B(f,\varepsilon)),\,\delta]} H_r(z) \qquad , \qquad \forall \delta > 0.$$

Mais $B_\rho[F_r(B(f,\varepsilon)),\delta] = F_r\,[B(f, \varepsilon + \delta\,]$

et $H_r[F_r(g)] = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} h\left[\frac{g(\frac{i}{r}) - g(\frac{i-1}{r})}{\frac{1}{r}}\right] = w(g_r)$ où g_r est la ligne polygonale de sommets $(\frac{i}{r}, g(\frac{i}{r}))$, i = 0, 1, 2, ... r.

Comme h est convexe, on a $w(g_r) \leq w(g)$ et comme w est s.c.i., $\lim_{r\to\infty} w(g_r) = w(g)$

et on en déduit : $\lim_{r\to\infty} \inf_{g \in B(f,\,\varepsilon+\delta)} w(g_r) \leq \inf_{g\in B(f,\,\varepsilon+\delta)} \lim_{r\to\infty} w(g_r) = \inf_{g\in B(f,\varepsilon+\delta)} w(g)$

d'où la majoration : $\overline{\lim} \frac{n}{x(n)^2} \text{ Log } P\,(s_n(.) \in B(f,\varepsilon)) \leq - \inf_{g\in B(f,\varepsilon+\delta)} w(g)$, $\forall \delta > 0$

Pour la minoration, on peut écrire :

$$P\,(s_n(.) \in B(f, \varepsilon)) \geq P\,\{F_r^{(n)}(s_n) \in F_r^{(n)}[B(f, \tfrac{\varepsilon}{3})]\}$$
$$-P\,\{F_r^{(n)}(s_n) \in F_r^{(n)}[B(f, \tfrac{\varepsilon}{3})] \cap s_n(.) \notin B(f,\varepsilon)\}$$

Le deuxième terme est négligeable devant le 1er car dans cet ensemble s_n est nécessairement "agitée" entre les points $\frac{j}{r}$, plus précisément :

$\{F_r^{(n)}(s_n) \in F_r^{(n)}\,|B(f, \frac{\varepsilon}{3}\,|\} \cap \{s_n(.) \notin B(f,\varepsilon)\} \cap K(\frac{\varepsilon}{3}, r) = \emptyset$ pour r > R,

où R défini à partir du module de continuité de f : $\psi_f\,(\frac{1}{R}) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Nous venons de montrer que :

$\forall \varepsilon > 0, \forall C, \exists$ r tel que $\overline{\lim_n} \frac{n}{x(n)^2}$ Log P $\{F_r^{(n)}(s_n) \in F_r^{(n)}[B(f, \frac{\varepsilon}{3})] \cap s_n \notin B(f,\varepsilon)\} \leq - C$

alors que d'autre part :

$$\lim_{n} \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P\{ F_r^{(n)}(s_n) \in F_r^{(n)} [B(f, \tfrac{\varepsilon}{3})] \}$$

$$= \lim_{n} \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P\{ F_r^{(n)}(s_n) \in B_\rho [F_r^{(n)}(f, \tfrac{\varepsilon}{3})\} \geq - H_r[F_r(f)] \geq -w(f) .$$

Il ne reste plus qu'à étendre les théorèmes à des boréliens G quelconques. La minoration est immédiate :

$$\underline{\lim}_{n} \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P(s_n(.) \in G) \geq \underline{\lim}_{n} \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P(s_n(.) \in \overset{\circ}{G})$$

$$\geq \underline{\lim}_{n} \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P(s_n(.) \in B(f,\varepsilon)), \forall f\ \Gamma \cap \overset{\circ}{G}, \quad \varepsilon \text{ étant choisi tel que } B(f,\varepsilon) \subset \overset{\circ}{G}$$

$$\geq - w(f), \quad \forall f \in \Gamma \cap \overset{\circ}{G}$$

donc $\underline{\lim}_{n} \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P(s_n(.)\ G) \geq -W(\Gamma \cap \overset{\circ}{G}) = - W(\overset{\circ}{G})$

Pour la majoration on a : $\forall \varepsilon > 0$,

$$P(s_n \in G) \leq P(s_n \in G \cap K(\tfrac{\varepsilon}{3}, 1)) + P(s_n \notin K(\tfrac{\varepsilon}{3}, 1))$$

ε étant fixé, 1 est choisi suffisamment grand pour que le 2e terme soit négligeable devant le 1er.

$$K(\tfrac{\varepsilon}{3},1) \subset \bigcup_{i=1}^{d} B(f_i, \tfrac{\varepsilon}{3}) \Rightarrow G \cap K(\tfrac{\varepsilon}{3}, 1) \subset \bigcup_{i} B(f_i, \tfrac{\varepsilon}{3}) \text{ tels que } B(f_i, \tfrac{\varepsilon}{3}) \cap G \neq 0$$

$$\overline{\lim} \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P\{s_n(.) \in G \cap K(\tfrac{\varepsilon}{3}, 1)\} \leq - \inf_{i} W|B(f_i, \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3})|, \text{ indices } i$$

tels que $B(f_i, \frac{\varepsilon}{3}) \cap G \neq \emptyset$.

soit finalement, $\overline{\lim}_{n} \frac{n}{x(n)^2} \operatorname{Log} P(s_n(.) \in G) \leq - W[B(G,\varepsilon)]$, $\forall \varepsilon > 0$.

V. RÉSULTATS DANS LE CAS OÙ φ_ξ N'EXISTE PAS PARTOUT

On suppose que φ_ξ existe dans un voisinage de 0. Donc tous les résultats sur les moyennes déviations restent vrais.

En ce qui concerne les grandes déviations, on est confronté avec deux types de problèmes :

- les problèmes liés à la définition et aux propriétés de w_ξ.

– les problèmes plus spécifiques à la convergence.

1. Propriétés de w_ξ :

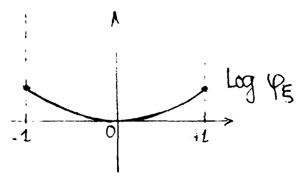
Les principaux ennuis viennent essentiellement du fait que $\dfrac{h_\xi(\alpha)}{\rho(\alpha)}$ ne tend plus vers l'infini dans toutes les directions. En particulier, les ensembles $A_K = \{f \in \mathcal{C}_o,\ w_\xi(f) \leq K\}$ ne sont plus compacts. De même, la convergence de $W_\xi(B(G,\varepsilon))$ vers $W_\xi(\overline{G})$, dans le cas où $W_\xi(\overline{G}) < \infty$, n'est plus assurée.

exemple : soit ξ une variable aléatoire réelle admettant la densité.

$$\frac{C}{1 + x^4} \cdot e^{-|x|} \text{ sur } R.$$

Elle admet clairement une transformée de Laplace sur $[-1, +1]$

Posons $\dfrac{\varphi'_\xi(1)}{\varphi_\xi(1)} = a\ (< \infty)$



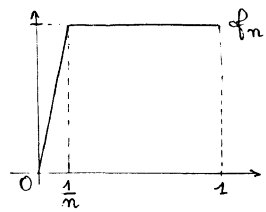
Pour $\alpha \notin [-a, +a]$, h_ξ est linéaire :

$h_\xi(\alpha) = |\alpha| - a + h_\xi(a)$

donc $\dfrac{h_\xi(\alpha)}{|\alpha|} \xrightarrow[\alpha \to \pm\infty]{} 1.$

L'ensemble $A_1 = \{f \in \mathcal{C}_o,\ w_\xi(f) \leq 1$ n'est pas compact car il contient la suite $\{f_n\}_{n \geq h_\xi(a)}$ suivante :

$1 + \dfrac{-h_\xi(a)}{n}$

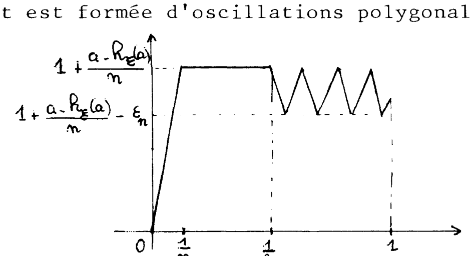


$f_n(t) = \inf \left[\dfrac{n + a - h_\xi(a)}{n},\ t\,(n + a - h_\xi(a))\right]$

$w_\xi(f_n) = \frac{1}{n}\ h_\xi\,[n + a - h_\xi(a)] = 1$ si $n \geq h_\xi(a)$.

Considérons l'ensemble $G = \{g_n\}_{n \geq \sup(2,\ h_\xi(a))}$

où $g_n(t) = f_n(t)$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et est formée d'oscillations polygonales de pente $\pm a$ d'amplitude $\varepsilon_n \searrow 0$



$\forall n \geq \sup\,[2,\ h_\xi(a)]$, $w_\xi(g_n) = 1 + \dfrac{h_\xi(a)}{2} \Rightarrow W_\xi(\overline{G}) = W_\xi(G) = 1 + \dfrac{h_\xi(a)}{2}$

En revanche, $\forall \varepsilon > 0$ pour n assez grand, $\varepsilon_n \leq \varepsilon \Rightarrow (G,\varepsilon) \supset B\,(G, \varepsilon_n) \ni f_n$.

donc $\forall \varepsilon > 0$, $W_\xi(B(G,\varepsilon)) \leq 1$.

2. Résultats de convergence.

Les résultats restent vrais pour les boules centrées sur les lignes polygonales.

Lemme. Soit $f \in \Gamma$, telle que f' prenne ses valeurs dans l'intérieur du domaine de définition de h_ξ. Pour expliciter cette contrainte, on rappelle que l'intérieur de ce domaine est l'intérieur de l'enveloppe convexe du support de ξ (voir [6]).

$$\overline{\lim_n} \ \frac{1}{n} \operatorname{Log} P\ (s_n(.) \quad B(f,\varepsilon)) \leq -W_\xi\ [B(f, \varepsilon+\delta)]\ ,\ \forall\, \delta > 0.$$

$$\underline{\lim_n} \ \frac{1}{n} \operatorname{Log} P\ (s_n(.) \in B(f,\varepsilon)) \geq -w_\xi(f)$$

Démonstration.

La majoration utilise seulement le théorème de grandes déviations sur R^k et donc seulement l'existence de φ_ξ au voisinage de 0.

Pour la minoration nous tronquons les variables aléatoires ξ de sorte que leur transformée de Laplace existe partout et nous pouvons alors utiliser les résultats précédents.

$$P\ (s_n(.) \in B(f,\varepsilon)) \geq P(s_n(.) \in B(f,\varepsilon) \mid \rho(\xi_i) \leq M,\ _i).\ P(\rho(\xi) \leq M)^n$$

donc $\frac{1}{n} \operatorname{Log} P(s_n(.) \in B(f,\varepsilon)) \geq \frac{1}{n} \operatorname{Log} P\ (s_n(.) \in B(f,\varepsilon) \mid \rho(\xi_i) \leq M,\ _i) +$

$\operatorname{Log} P(\rho(\xi) \leq M).$

Si on note $w_{\xi,M}$ la fonctionnelle w correspondant à la variable aléatoire ξ tronquée par $\rho(\xi) \leq M$, les résultats précédents donnent :

$$\forall M,\ \underline{\lim_n} \ \frac{1}{n} \operatorname{Log} P\ (s_n \in B(f,\varepsilon)) \geq -w_{\xi,M}(f) + \operatorname{Log} P\ [\rho(\xi) \leq M].$$

Lorsque $M \to \infty$, $w_{\xi,M}(f) \to w(f)$ (cf[6]) et $P(\rho\ (\xi) \leq M) \to 1$ ce qui permet d'en déduire immédiatement le :

Théorème.

Si φ_ξ existe dans un voisinage de 0, on a :

$$\forall G \text{ borélien de } \mathcal{C}_k[0,1],\ \underline{\lim} \ \frac{1}{n} \operatorname{Log} P(s_n(.) \in G) \geq -W_\xi(\mathring{G})$$

$$\forall G \ \ \varepsilon\text{-précompact},\ \forall \delta > \varepsilon,\ \overline{\lim} \ \frac{1}{n} \operatorname{Log} P\ (s_n(.) \in G) \leq -W_\xi[B(G,\delta)].$$

Démonstration.

$$P(s_n(.) \in G) \geq P(s_n(.) \in \overset{\circ}{G})$$
$$\geq P(s_n(.) \in B(f,\varepsilon)), \forall f \in \overset{\circ}{G} \cap \Gamma, \quad \varepsilon \text{ déterminé de sorte que } B(f,\varepsilon) \subset \overset{\circ}{G}.$$

. Si f est tel que f' prend ses valeurs dans l'intérieur domaine de définition de h_ξ, alors d'après le lemme précédent $\underline{\lim}\, \frac{1}{n} \operatorname{Log} P\,(s_n(.) \in G) \geq -\, w_\xi(f)$

. D'autre part si f' prend des valeurs sur la frontière du domaine de définition de h_ξ, il suffit de remarquer qu'il existe $\eta > 0$ et f_1 polygonale telle que f'_1 prend toutes ses valeurs à l'intérieur du domaine de h_ξ et $B(f_1,\eta) \subset B(f,\varepsilon)$ et $w_\xi(f_1) \leq w_\xi(f)$. (Convexité du domaine de définition de h_ξ).

Il semble par ailleurs, qu'on ne puisse limiter l'agitation de $s_n(.)$ comme dans le paragraphe précédent, les queues de ξ n'étant plus suffisamment petites. (C'est du moins, ce que donne à penser la non-compacité des ensembles A_K).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] - J. BRETAGNOLLE : Séminaire 1977-78 d'ORSAY. chap. III

[2] - A.A. BOROVKOV : "Boundary value problems for random walks and large déviations". Theory of Probability and applications (1967).

[3] - A.A. MOGULSKII : "Large deviations for trajectories of multi dimensional random walks" Theory of Probability and applications (1976).

[4] - W. FELLER : "An introduction to probability theory and its applications" Wiley - tome II - chapitre 16.

[5] - BILLIGNSLEY : "Convergence of probability measures" Wiley, page 69.

[6] - P. BARTFAI : "Connections between the convex analysis and the theory of large deviations". Preprint of the Mathematical Institute of Hungarian academy of sciences. n° 2/ 1977.

[7] - R. AZENCOTT : "Grandes déviations : théorèmes à la Cramer-Chernoff et petites perturbations de systèmes dynamiques" Cours de l'Ecole d'Eté de Saint-Flour, 1978 (à paraître).

Jean DESHAYES
Dominique PICARD

Mathématiques - Bât. 425
ERA CNRS 532 "Statistique Appliquée"
Université Paris-Sud
91405 ORSAY