

# *Astérisque*

A. FATHI

F. LAUDENBACH

**Comment Thurston compactifie l'espace de Teichmüller**

*Astérisque*, tome 66-67 (1979), p. 139-150

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_66-67\\_\\_139\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__139_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

COMMENT THURSTON COMPACTIFIE  
L'ESPACE DE TEICHMÜLLER

par A. FATHI et F. LAUDENBACH

§ I. - Préliminaires

§ II. - Le lemme fondamental

§ III. - La variété  $\mathfrak{T}$

Appendice (A. Fathi). - Estimations de distances hyperboliques

Dans l'espace des fonctionnelles  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ , on a plongé l'espace de Teichmüller  $\mathfrak{T}$  et l'espace des classes de Whitehead de feuilletages mesurés  $\mathfrak{m}\mathfrak{T}$  (exposés 6 et 7). Dans cet exposé, on identifie ces espaces à leurs images dans l'espace fonctionnel ; pour toute fonctionnelle  $f \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ , on note  $i(f, \alpha)$  la valeur de la fonctionnelle sur  $\alpha \in \mathcal{L}$ .

On rappelle que  $\pi : \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} - \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$  désigne la projection sur l'espace des rayons et que  $P\mathfrak{m}\mathfrak{T}$  est l'image de  $\mathfrak{m}\mathfrak{T}$ . D'ailleurs,  $\mathfrak{m}\mathfrak{T} = \pi^{-1}(P\mathfrak{m}\mathfrak{T})$ . On construit une topologie sur la réunion de  $\mathfrak{T}$  et de  $P\mathfrak{m}\mathfrak{T}$ . On prouve que c'est une topologie de variété à bord ; puisque l'intérieur est homéomorphe à une boule ouverte et que le bord est homéomorphe à une sphère, la variété à bord est homéomorphe à une boule fermée.

La clé est dans les inégalités du lemme fondamental dont la démonstration repose sur des estimations de longueur en géométrie hyperbolique qui ont été rassemblées en appendice de cet exposé.

§ 1. - PRÉLIMINAIRES

I.1. Proposition. Dans  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ , les espaces  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{m}\mathfrak{F}$  sont disjoints.

Démonstration. Si  $f$  appartient à  $\mathfrak{F}$ , comme on est sur une variété compacte, l'ensemble des nombres  $i(f, \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathcal{L}$ , est minoré par une constante strictement positive. On va prouver que, pour  $f \in \mathfrak{m}\mathfrak{F}$ , l'adhérence des nombres  $i(f, \alpha)$  contient 0.

Soit  $(\mathfrak{F}, \mu)$  un feuilletage mesuré représentant  $f$ ; soit  $\gamma$  un petit arc transversal à  $\mathfrak{F}$ , avec  $\mu(\gamma) \leq \epsilon$ , où  $\epsilon > 0$  est donné. D'après le théorème de récurrence de Poincaré (exposé 5, théorème 1.5), presque toute feuille partant d'un point de  $\gamma$  recoupe  $\gamma$ ; on obtient donc une courbe fermée simple  $\gamma'$ , formée d'un arc de  $\gamma$  et d'un arc porté par une feuille de  $\mathfrak{F}$ ; si  $\alpha$  est la classe d'isotopie de  $\gamma'$ , on a :

$$i(f, \alpha) \leq \mu(\gamma') \leq \mu(\gamma) \leq \epsilon . \quad \square$$

I.2. Construction d'une projection  $q: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{m}\mathfrak{F}$ .

Cette projection servira à donner les cartes de la variété à bord. Elle dépend du choix d'une famille  $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_k\}$  de courbes simples mutuellement disjointes découpant la surface en pantalons (plongés)  $R_1, \dots, R_{k'}$ ; si la surface est de genre  $g$  et sans bord,  $k = 3g - 3$  et  $k' = 2g - 2$ .

Soit  $m \in \mathfrak{F}$ ; on représente  $m$  par une métrique  $\bar{m}$ , de courbure  $-1$ , pour laquelle les courbes  $K_j$  sont géodésiques. Le feuilletage, qui représentera  $q(m)$ , sera transversal à chaque  $K_j$ ; on impose pour tout  $j$  :

$$i(q(m), K_j) = i(m, K_j) .$$

Soit  $R$  un des pantalons; disons que  $\partial R = K_1 \cup K_2 \cup K_3$  et posons  $2m_j = i(m, K_j)$ . Soit  $g_{jj}$ , la  $\bar{m}$ -géodésique simple de  $R$  orthogonale à  $K_j$  et à  $K_{j'}$ .

1er cas.  $(m_1, m_2, m_3) \in (\leq \nabla)$ , inégalité triangulaire.

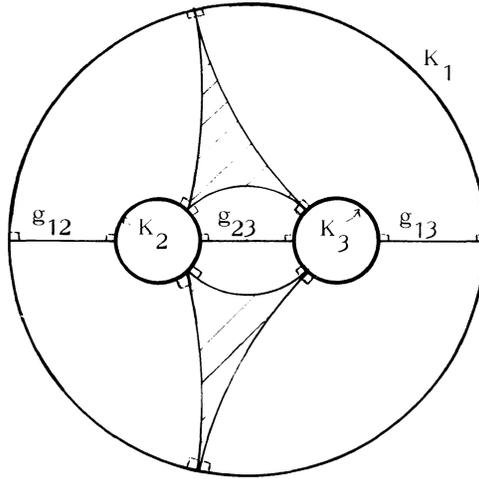
Soit  $T_{12}$  le tube géodésique (fermé) des points de  $R$  à une distance de  $g_{12}$  plus petite que  $\frac{m_1 + m_2 - m_3}{2}$ ; il est feuilleté par les lignes d'égales distances;

la distance entre deux feuilles donne la mesure transverse. On considère de la même façon les tubes feuilletés  $T_{23}$  et  $T_{13}$ . Les tubes n'ont, deux à deux, que deux points communs qui sont sur le bord; par exemple :

$$T_{12} \cap T_{13} = T_{12} \cap T_{13} \cap K_1 .$$

Cela tient au fait que  $K_1$  est l'unique perpendiculaire commune à  $g_{12}$  et  $g_{13}$  ; d'autre part, en additionnant les deux épaisseurs, on voit que  $K_1$  est totalement

Figure 1



recouvert ; de même pour  $K_2$  et  $K_3$  . On obtient ainsi un feuilletage mesuré "partiel" de  $R$  (figure 1) . On peut lui associer un vrai feuilletage mesuré en effondrant chaque triangle non feuilleté sur un tripode. En réalité, pour la suite, on a intérêt à garder le feuilletage partiel, dans lequel la mesure est directement donnée par la métrique.

2e cas.  $m_1 > m_2 + m_3$  .

Quitte à changer la numérotation, il n'y a pas d'autres cas. Ici  $T_{12}$  est le tube de rayon  $m_2$  et  $T_{13}$  est celui de rayon  $m_3$  . L'ensemble des points de  $K_1$ , qui ne sont à l'intérieur ni de  $T_{12}$  ni de  $T_{13}$ , forme deux arcs  $A$  et  $A'$  , symétriques l'un de l'autre par l'involution isométrique de  $R$  qui admet  $g_{12} \cup g_{13} \cup g_{23}$  pour lieu de points fixes (exposé 3, lemme 7) . Soit  $T_{11}$  la réunion des lignes d'égalité de distances à la géodésique  $g_{11}$  , issues de  $A$  (Attention !  $g_{11}$  peut ne pas être dans  $T_{11}$ ) . On voit que  $T_{11} \cap K_1 = A \cup A'$  . Ces trois tubes donnent un feuilletage "partiel" ayant l'allure de la figure 2 .

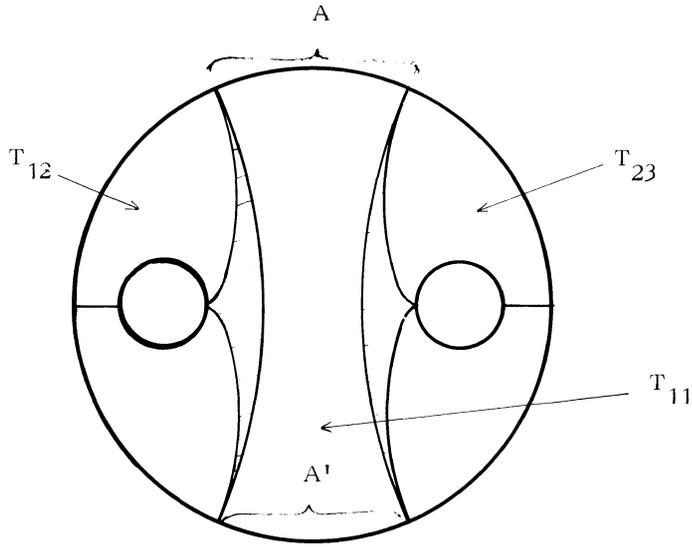


Figure 2

On remarque que, dans les deux cas, les feuilles sont perpendiculaires aux courbes du bord. Lorsqu'on recolle les pantalons, on obtient un feuilletage mesuré "partiel"  $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$ , qui représente  $q(m)$ ; les feuilles ne sont que  $C^1$  à la jonction de deux pantalons, mais cela n'a pas d'importance.

I.3. Proposition. L'application  $q$  est un homéomorphisme de  $\mathfrak{F}$  sur l'ouvert  $U(\mathcal{K})$  de  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ , formé des fonctionnelles prenant des valeurs non nulles sur chaque composante de  $\mathcal{K}$ .

Démonstration. 1° On construit l'inverse  $q^{-1}$  de la façon suivante. Un élément de  $U(\mathcal{K})$  se représente par un feuilletage mesuré  $(\mathfrak{F}, \mu)$ , transverse aux courbes de  $\mathcal{K}$ .

Dans le pantalon  $R$  (notation de I.2), on construit une métrique  $\bar{m}$  de courbure  $-1$  avec les propriétés ci-dessous :

- (i)  $\bar{m} \upharpoonright K_j = \mu \upharpoonright K_j$ , pour  $j = 1, 2, 3$  ;
- (ii) notant  $2m_j = \mu(K_j)$ , si  $(m_1, m_2, m_3) \in (\leq \nabla)$ , la feuille lisse, qui va de  $K_1$  à  $K_2$  (resp. à  $K_3$ ) et dont la  $\mu$ -distance aux singularités est  $\frac{m_1 + m_2 - m_3}{2}$  (resp.  $\frac{m_1 + m_3 - m_2}{2}$ ) est une géodésique de  $\bar{m}$  orthogonale au bord ;

(iii) si  $m_1 > m_2 + m_3$ , la feuille lisse, qui va de  $K_1$  à  $K_2$  (resp. à  $K_3$ ) et dont la  $\mu$ -distance à une singularité est  $m_2$  (resp.  $m_3$ ), est une géodésique de  $\bar{m}$  orthogonale au bord.

D'après la classification des métriques hyperboliques du pantalon (exposé 3), si deux métriques vérifient les conditions ci-dessus, alors elles sont conjuguées par un difféomorphisme isotope à l'identité, par une isotopie constante sur le bord. Donc lorsqu'on recolle tous les pantalons, on obtient une métrique hyperbolique, bien définie à isotopie près. D'après la classification des feuilletages mesurés dans le pantalon (exposé 6), on voit que l'application ainsi construite est l'inverse de  $q$ .

2° Pour la continuité, nous proposons le plan suivant.

On utilise le paramétrage  $\{m_j, s_j, t_j\}$  de  $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$  (voir exposé 6). La projection  $\{m_j, s_j, t_j\} \rightarrow \{m_j\}$ , restreinte à  $U(\kappa)$  est une fibration principale, dont le groupe structural est le groupe des twists le long de  $\kappa$ . En effet, on a une section évidente  $\sigma(\{m_j\}) = \{m_j, 0, m_j\}$ ; d'autre part, si on fait opérer un twist  $\alpha_j$  le long de  $K_j$  sur cette section, le couple  $(s_j, t_j)$  paramétrant le feuilletage twisté, est donné par des formules semi-linéaires (exercice) établissant, pour chaque  $m_j$ , un homéomorphisme de  $\mathbb{R}$  sur l'ensemble des  $(s_j, t_j)$  tels que  $(m_j, s_j, t_j)$  appartienne à  $\partial(\leq \varpi)$ ; puisque  $U(\kappa)$  est une variété, ces arguments suffisent à prouver la structure du fibré principal.

On rappelle aussi que  $\mathfrak{F}$  est fibré au-dessus de l'espace des longueurs des composantes de  $\kappa$  (exposé 7, proposition 3). Or, par construction, l'application  $q$  est équivariante vis-à-vis de ces deux structures de fibrations principales et elle recouvre l'identité de leur base commune.

La continuité de  $q$  équivaut à celle de  $q^{-1}$ , puisque la source et le but sont des variétés. Pour celle de  $q^{-1}$ , d'après ce qui précède, il suffit de la vérifier sur la section  $\sigma$ . Or, au-dessus du fermé  $(\leq \varpi) \cup \{m_1 \geq m_2 + m_3\}$ , la section  $\sigma$  se relève en une section  $\tilde{\sigma}$  à valeurs dans l'espace des feuilletages du pantalon  $R$ , dont les feuilles médianes (désignées en (ii) et (iii)) sont fixes. A partir de là, on peut construire  $\bar{m}$  continûment dans  $R$ , en appliquant le théorème 5 de l'exposé 3. On fait de même dans tous les pantalons.  $\square$

## § II. - LE LEMME FONDAMENTAL

II.1. Lemme. Soient  $\epsilon > 0$  et  $V(\kappa, \epsilon)$  l'ouvert de  $\mathfrak{F}$  défini par les métriques pour lesquelles chaque composante de  $\kappa$  est une géodésique de longueur  $> \epsilon$ . Pour

tout  $\alpha \in \mathcal{L}$ , il existe une constante  $C$  telle que, pour tout  $m \in V(\kappa, \varepsilon)$ , on ait :

$$i(q(m), \alpha) \leq i(m, \alpha) \leq i(q(m), \alpha) + C .$$

Démonstration. Prouvons :  $i(q(m), \alpha) \leq i(m, \alpha)$  .

Si  $\bar{m}$  est une métrique représentant  $m$ , la mesure transverse du feuilletage  $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$ , construit comme représentant de  $q(m)$ , est donnée par la métrique  $\bar{m}$  sur les géodésiques orthogonales aux feuilles. Donc, la  $\bar{m}$ -longueur d'un arc est plus grande que sa  $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$ -mesure. D'autre part, par définition de la fonctionnelle, la  $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$ -mesure d'une courbe fermée de la classe  $\alpha$  majore  $i(q(m), \alpha)$ , ce qui prouve la première inégalité.

$$\text{Prouvons : } i(m, \alpha) \leq i(q(m), \alpha) + C .$$

On se contente de la prouver sur l'ensemble dense de  $V(\kappa, \varepsilon)$ , formé des  $m$  pour lesquelles le feuilletage  $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$  est à singularités simples (tripode) sans liaison entre les singularités ; de telles classes de métriques seront dites génériques.

D'après la proposition II.6 de l'exposé 5, si  $m$  est générique,  $\alpha$  est représentable par une courbe simple  $\alpha'$  transversale au feuilletage  $\mathfrak{F}_{\bar{m}}$  ; sa mesure  $\mathfrak{F}_{\bar{m}}(\alpha')$  vaut  $i(q(m), \alpha)$ . On peut, en plus, choisir  $\alpha'$  pour que, pour tout  $j$  :

$$\text{card}(K_j \cap \alpha') = i([K_j], \alpha) .$$

En effet, si ce n'est pas déjà le cas, on a un disque (à bord anguleux) dont le bord est formé d'un arc de  $\alpha'$  et d'un arc de  $K_j$ . Chacun d'eux étant transversal au feuilletage, le disque est feuilleté comme sur la figure 3 et l'affirmation est claire.

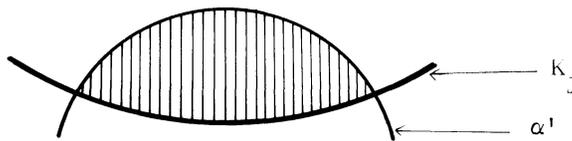


Figure 3

Ceci étant, deux courbes isotopes et en position d'intersection minimale avec  $\kappa$  sont isotopes par une isotopie laissant  $\kappa$  invariant (proposition 12 de l'exposé 3). Donc  $\alpha'$  est découpé par  $\kappa$  en  $n$  arcs, où  $n$  ne dépend que de  $\alpha$  :

$$\alpha' = \alpha'_1 \cup \alpha'_2 \cup \dots \cup \alpha'_n ,$$

chaque  $\alpha'_j$  étant un arc essentiel d'un des pantalons de la décomposition, transversal au feuilletage. L'inégalité résulte donc de celle prouvée ci-dessous.  $\square$

II. 2. Lemme. Soit  $\epsilon > 0$ . Il existe une constante  $C'$  ayant la propriété suivante. Pour toute métrique hyperbolique  $\bar{m}$  sur le pantalon  $P^2$ , telle que chaque composante du bord soit une géodésique de longueur  $\geq \epsilon$ , et pour tout arc simple  $\beta$  de  $P^2$ , allant du bord au bord transversalement au feuilletage  $\mathcal{F}_{\bar{m}}$ , il existe un arc  $\gamma$ , homotope à  $\beta$  à extrémités fixes, tel que la  $\bar{m}$ -longueur de  $\gamma$  soit inférieure ou égale à  $\mathcal{F}_{\bar{m}}(\beta) + C'$ .

Démonstration. On regarde séparément chaque type de feuilletage (figures 1 et 2) et on prend la plus grande des constantes. Faisons d'abord le raisonnement pour le feuilletage de l'inégalité triangulaire.

On remplace  $\beta$  par l'arc immergé  $\beta'$ , ayant les mêmes extrémités, en appliquant les deux processus figurés sur la figure 4.

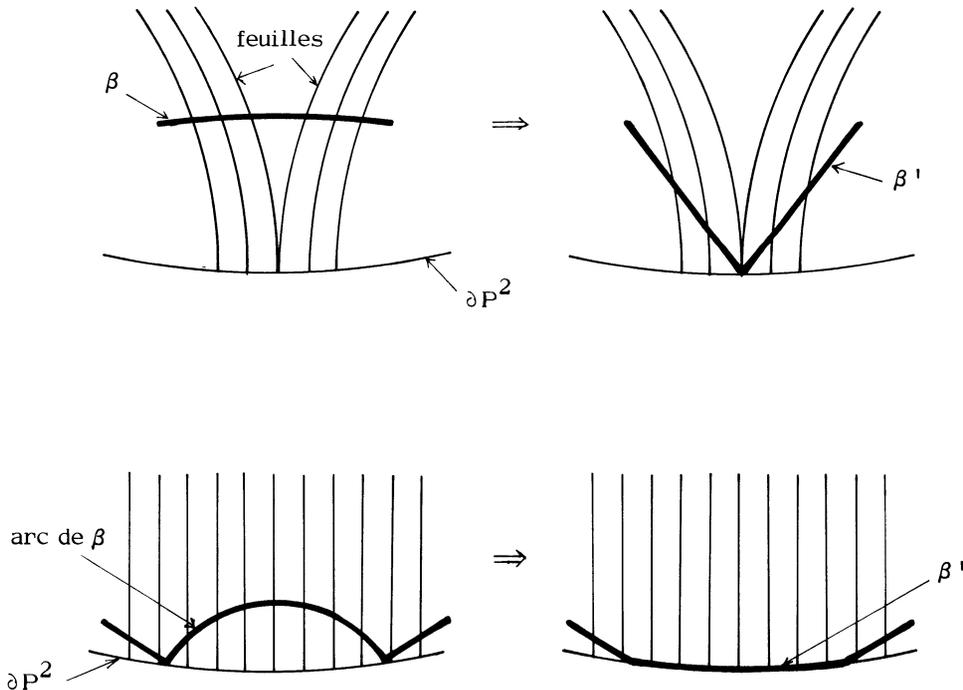
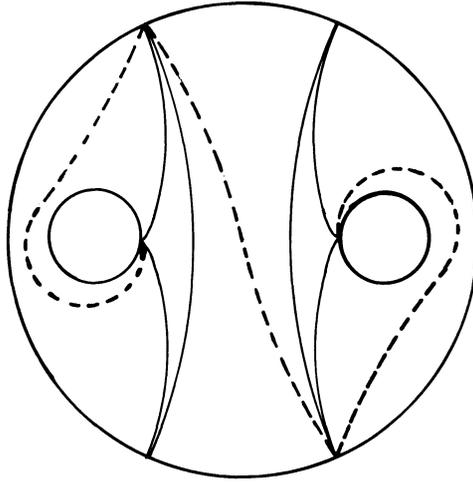


Figure 4



Figure 6



II.3. Corollaire. Soit  $x_n$  une suite de  $V(\mathcal{K}, \epsilon)$  tendant vers l'infini dans  $\mathfrak{J}$ . Alors  $\pi(x_n)$  converge si et seulement si  $\pi \circ q(x_n)$  converge, et dans ce cas les deux suites ont la même limite.

Démonstration. Dire que  $\pi(x_n)$  converge, c'est dire qu'il existe une suite de scalaires  $\lambda_n > 0$ , telle que la suite  $\lambda_n x_n$  converge. Puisque la topologie de  $\mathfrak{J}$  est définie par un nombre fini de courbes  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , on a :  $\sum_j i(x_n, \gamma_j) \rightarrow +\infty$  et

$\sum_j \lambda_n i(x_n, \gamma_j)$  converge. Donc  $\lambda_n \rightarrow 0$ .

D'après II.1, pour tout  $\alpha \in \mathcal{J}$ ,

$$|i(\lambda_n x_n, \alpha) - i(\lambda_n q(x_n), \alpha)| \rightarrow 0.$$

donc  $\pi \circ q(x_n)$  converge vers la même limite que  $\pi(x_n)$ . La réciproque est analogue.

□

### § III. - LA VARIÉTÉ $\mathfrak{J}$

III.1. Topologie. Sur la réunion disjointe  $\mathfrak{J} \cup \text{Pm}\mathfrak{J}$ , on prend comme base d'ouverts, les ouverts de  $\mathfrak{J}$  (ouverts du type 1), et les ensembles de la forme  $(\mathfrak{J} \cap \pi^{-1}(U)) \cup U$  ( $\text{Pm}\mathfrak{J} \cap U$ ), où  $U$  est un ouvert du projectif (ouverts du type 2). Comme  $\pi^{-1}(U) \cap \mathfrak{J}$  est un ouvert de  $\mathfrak{J}$ , l'intersection d'un ouvert du type 1 et d'un ouvert du type 2

est un ouvert du type 1. On vérifie donc facilement les axiomes d'une topologie. Cet espace topologique est noté  $\bar{\mathfrak{F}}$ .

Il est muni d'une application continue dans le projectif qui est une injection ; en effet,  $\pi$  injecte  $\mathfrak{F}$  (proposition 6 de l'exposé 7) et  $\pi(\mathfrak{F})$  évite  $P\infty$  d'après I.1. En particulier,  $\bar{\mathfrak{F}}$  est un espace séparé. La topologie de  $\bar{\mathfrak{F}}$  est à base dénombrable.

### III.2. Carte au voisinage d'un feuilletage.

Soit  $f \in P\infty$ . D'après le lemme 1 de V.4 de l'exposé 6, il existe une décomposition de la surface en pantalons le long d'un système  $\kappa$  de courbes  $K_1, \dots, K_k$  telles que  $i(\bar{f}, [K_j]) \neq 0$  pour tout  $j$ , où  $\bar{f}$  désigne un quelconque relèvement de  $f$  dans  $\mathbb{R}_+^{\delta}$  (la non nullité est une propriété projective). Soit  $\{K_j^I, K_j^{II}\}$  un système de courbes servant à paramétrer  $\mathfrak{F}$  avec les  $\{K_j\}$  (proposition 5 de l'exposé 7).

Soit  $\varepsilon > 0$  arbitraire. On considère l'ouvert  $V(\kappa, \varepsilon)$  de  $\mathfrak{F}$  (voir II.1) et l'ouvert  $W$  de  $P\infty$  des fonctionnelles "projectives" non nulles sur les composantes de  $\kappa$  ; on a  $\pi^{-1}(W) = U(\kappa)$  (voir I.3) et  $\pi \circ q(V(\kappa, \varepsilon)) = W$ . On définit :

$$\varphi : W \cup V(\kappa, \varepsilon) \rightarrow W \times [0, +1]$$

par :  $\varphi(x) = (x, 0)$ , si  $x \in W$ ,

$$\varphi(x) = (\pi \circ q(x), e^{-\sum \{i(q(x), K_j^I) + i(q(x), K_j^{II})\}}) \quad \text{si } x \in V(\kappa, \varepsilon).$$

Lemme. 1°  $W \cup V(\kappa, \varepsilon)$  est un ouvert de  $\bar{\mathfrak{F}}$ .

2°  $\varphi$  est un homéomorphisme sur un ouvert de  $W \times [0, +1)$ .

#### Démonstration.

1° Soit  $x \in W$ . Supposons que l'ensemble désigné ne soit pas un voisinage de  $x$  dans  $\bar{\mathfrak{F}}$ . Alors il existe une suite  $x_n$  de  $\mathfrak{F}$ ,  $x_n \notin V(\kappa, \varepsilon)$ , telle que  $\pi(x_n)$  tende vers  $x$ . Quitte à changer la numérotation et à extraire une sous-suite, on peut dire que  $i(x_n, K_1) \leq \varepsilon$ .

La suite  $x_n$  n'a pas de sous-suite convergente vers un point de  $\mathfrak{F}$  à cause de I.1. Donc  $x_n$  tend vers l'infini. Mais, par ailleurs, il existe une suite de scalaires  $\lambda_n > 0$ , telle que  $\lambda_n x_n$  converge vers un feuilletage mesuré  $f$  au-dessus de  $x$ . On en déduit que  $\lambda_n \rightarrow 0$ . Mais alors  $i(f, K_1) = 0$ , ce qui contredit  $x \in W$ .

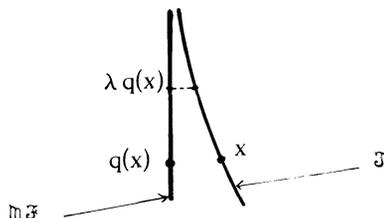
2° L'application  $\varphi$  est continue en  $x \in W$ . On vient de voir que si  $x_n \in \mathfrak{F}$  converge vers  $x$  dans  $\bar{\mathfrak{F}}$ , alors  $x_n$  tend vers l'infini de  $\mathfrak{F}$ . Comme  $x_n$  appartient à  $V(\kappa, \varepsilon)$ , d'après le corollaire II.3, la première composante est aussi continue.

Pour la même raison,  $\sum_j \{i(q(x_n), K_j) + i(q(x_n), K_j^I) + i(q(x_n), K_j^{II})\}$  tend vers  $+\infty$ .

Donc la seconde composante de  $\varphi(x_n)$  tend vers 0.

L'application  $\varphi$  est injective. A priori, le seul défaut d'injectivité ne peut venir que de deux éléments  $x$  et  $y$  de  $\mathfrak{F}$ . Si  $q(x) = \lambda q(y)$ , l'égalité des secondes composantes impose  $\lambda = 1$ . Mais  $q$  est injectif.

Remarquons que si  $\varphi(x) = (z, t)$ , alors  $\varphi(q^{-1}(\lambda q(x))) = (z, t^\lambda)$ .



Il existe une section continue  $\sigma : W \rightarrow m\mathfrak{F}$  de  $\pi$ . Quitte à la multiplier par un scalaire, on peut la prendre à valeurs dans  $q(V(K, \epsilon))$ . La variété  $\varphi \circ q^{-1} \circ \sigma(W)$  est le graphe, dans  $W \times [0, +1]$ , d'une fonction strictement positive définie sur  $W$ . Le voisinage de  $W \times \{0\}$  limité par ce graphe est sûrement dans l'image de  $\varphi$  d'après la remarque précédente.

L'inverse de  $\varphi$  est continue sur ce voisinage. Vérifions seulement que si  $(z_n, t_n) \rightarrow (z, 0)$ , alors  $\pi \circ \varphi^{-1}(z_n, t_n)$  converge vers  $z$  dans le projectif. Comme  $t_n$  tend vers 0,  $q \circ \varphi^{-1}(z_n, t_n)$  tend vers l'infini. D'après II.1,  $\varphi^{-1}(z_n, t_n)$  tend vers l'infini dans  $\mathfrak{F}$ . On sait que  $z_n = \pi \circ q \circ \varphi^{-1}(z_n, t_n)$  converge vers  $z$ ; donc  $\pi \circ \varphi^{-1}(z_n, t_n)$  a la même limite d'après II.3.  $\square$

III.3. On savait déjà que  $\mathfrak{F}$  est une variété; on vient de voir que  $\bar{\mathfrak{F}}$  est une variété à bord, bordée par  $Pm\mathfrak{F}$ . En particulier  $\bar{\mathfrak{F}}$  est localement compacte et, comme la topologie est à base dénombrable, elle est paracompacte. Alors, le bord admet un voisinage collier (théorème de M. Brown, voir [1], chapitre 1, théorème 17.4, page 40). Comme  $Pm\mathfrak{F}$  est homéomorphe à une sphère, le bord intérieur du voisinage collier est une sphère plongée dans l'intérieur de  $\mathfrak{F}$ , donc dans un espace euclidien; alors, d'après le théorème de Schönflies, généralisé par Mazur et Brown ([1], ch. 1, théorème 18.2, page 48) cette sphère borde une boule. Finalement,  $\bar{\mathfrak{F}}$  est homéomorphe à une boule. En particulier, c'est un compact; d'après la proposition 6 de l'exposé 7 et la proposition I.1 de l'exposé 8, la projection  $\pi : \mathbb{R}_+^{\mathfrak{F}} - \{0\} \rightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathfrak{F}})$  induit une injection continue de  $\bar{\mathfrak{F}}$  dans  $P(\mathbb{R}_+^{\mathfrak{F}})$ , qui est donc un homéomorphisme

sur son image. On a finalement prouvé le théorème suivant.

Théorème. L'espace  $\bar{\mathcal{F}} = P\mathbb{R}^n \bar{\mathcal{F}} \cup \bar{\mathcal{F}}$ , muni de la topologie induite par  $P(\mathbb{R}^n_+)$  est une variété compacte à bord, homéomorphe à une boule et bordée par  $P\mathbb{R}^n \bar{\mathcal{F}}$ .

Si la surface est fermée et de genre  $g > 1$ ,  $\bar{\mathcal{F}}$  est homéomorphe à  $D^{6g-6}$ .

Le groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes de la surface agit continûment sur  $\bar{\mathcal{F}}$ , par l'action transposée de l'action image directe sur  $\mathcal{A}$ .

Remarque. L'action décrite ainsi est l'opposée de celle utilisée habituellement sur les feuilletages mesurés, qui consiste à prendre l'image directe des mesures.

### RÉFÉRENCE

- [1] T.B. RUSHING, Topological embeddings, Academic Press, New York & London, 1973.