

# *Astérisque*

V. POÉNARU

## **L'espace des courbes simples fermées sur une surface**

*Astérisque*, tome 66-67 (1979), p. 57-67

[http://www.numdam.org/item?id=AST\\_1979\\_\\_66-67\\_\\_57\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AST_1979__66-67__57_0)

© Société mathématique de France, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## EXPOSÉ 4

### L'ESPACE DES COURBES SIMPLES FERMÉES SUR UNE SURFACE

par V. POÉNARU

§ I . - La topologie faible

§ II . - L'espace  $\mathcal{L}^1$  des courbes multiples

§ III . - Paramétrisation explicite de l'espace des courbes multiples

Appendice (A. Fathi). - Double décomposition d'une surface en pantalons

#### § I . - LA TOPOLOGIE FAIBLE

Soit  $M$  une surface fermée orientable de genre  $g \geq 2$ . On note  $\mathcal{L}$  l'espace des classes d'isotopie (= d'homotopie) de courbes simples fermées non orientées, non homotopes à zéro dans  $M$ . On a déjà vu (exposé 3, § 3) que l'application composée :

$$\mathcal{L} \xrightarrow{i_*} \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}} - \{0\} \xrightarrow{\pi} P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}})$$

est injective. L'application  $i_*$  s'étend en une application qu'on va désigner par la même lettre

$$i_* : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{L}},$$

par la formule

$$i_*(\lambda, \alpha)(\beta) = \lambda i(\alpha, \beta), \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \alpha, \beta \in \mathcal{L}.$$

Remarque. Si  $\overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L})}$  désigne la fermeture de  $i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L})$  dans  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{L}}$ , on a :

$$\pi(\overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L})} - \{0\}) = \overline{\pi i_*(\mathcal{L})}.$$

Ceci est un fait général sur les cônes.

Proposition 1. Dans  $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}})$ , l'ensemble  $\pi_{i_*}(\mathcal{J})$  est relativement compact.

Pour la démonstration, on commence par choisir sur  $M$  une métrique  $\rho$  de courbure  $-1$  et on note  $\ell(\alpha)$  la  $\rho$ -longueur de l'unique géodésique appartenant à la classe de  $\alpha \in \mathcal{J}$ .

Lemme 2. Il existe une constante  $C = C(M, \rho)$ , telle que, pour tout  $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$ , on ait :

$$i(\alpha, \beta) \leq C \ell(\alpha) \ell(\beta).$$

Démonstration. Si  $\alpha = \beta$ , on a  $i(\alpha, \beta) = 0$  et l'inégalité est claire. Supposons donc  $\alpha \neq \beta$ . Soit  $\epsilon$  un nombre positif plus petit que le rayon d'injectivité de l'exponentielle. La géodésique  $g_\alpha$  de la classe d'isotopie  $\alpha$  peut être recouverte par moins de  $(\frac{\ell(\alpha)}{\epsilon} + 1)$  petits arcs contenus chacun dans un disque géodésique. Idem pour  $g_\beta$ . Un petit arc de  $g_\alpha$  coupe en au plus un point un petit arc de  $g_\beta$ , par définition du rayon d'injectivité ; donc, dans un petit arc de  $g_\alpha$ , il y a, au plus,  $(\frac{\ell(\beta)}{\epsilon} + 1)$  points d'intersection avec  $g_\beta$ . On trouve alors :

$$i(\alpha, \beta) = \text{card}(g_\alpha \cap g_\beta) \leq (\frac{\ell(\alpha)}{\epsilon} + 1) (\frac{\ell(\beta)}{\epsilon} + 1).$$

Comme  $\ell(\alpha) > \epsilon$ , l'inégalité cherchée est claire.  $\square$

Sur  $M$ , je considère maintenant le système d'éléments  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2g+1} \in \mathcal{J}$  représenté sur la figure 1. Dans l'exposé 3, § 4, on a vu qu'un tel système peut se réaliser par des géodésiques.

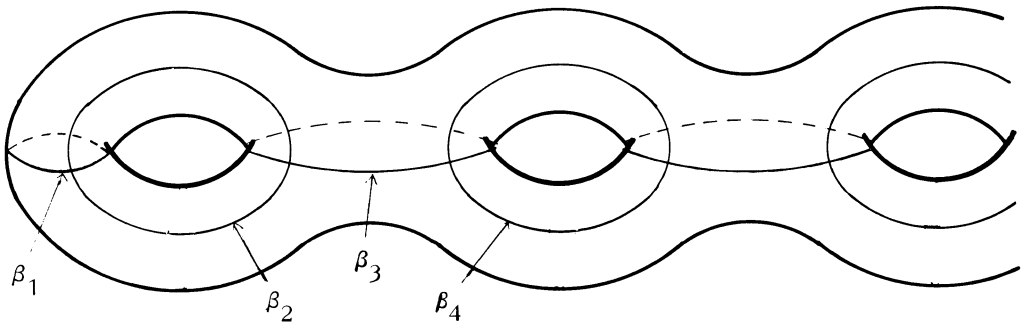


Figure 1

Lemme 3. Il existe une constante  $c$  telle que pour tout  $\alpha \in \mathcal{S}$ , on ait :

$$\sum_j i(\alpha, \beta_j) \geq c \ell(\alpha) .$$

Démonstration. Le système  $\{g_{\beta_j}\}$  décompose  $M$  en un nombre de régions simplement connexes. Dans chacune d'elles, la longueur d'un arc géodésique est bornée, disons par  $L$  ; donc, on a le résultat cherché en prenant  $c = 1/L$ .  $\square$

Démonstration de la Proposition 1. Pour une constante  $C$  fixée, je considère la partie  $S(C) \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$  définie par :

$$S(C) = \{f \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} \mid \forall \beta \in \mathcal{S}, f(\beta) \leq C \ell(\beta)\} .$$

Par le théorème de Tychonov,  $S(C)$  est compact. Maintenant  $C$  étant la constante du lemme 2, je considère  $S_0 \subset S(C)$ , qui est l'adhérence dans  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$  de l'ensemble des fonctionnelles du type  $i_{\ast}(\alpha)/\ell(\alpha)$ . D'après le lemme 3, on a  $S_0 \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}} - \{0\}$ . D'autre part,  $S_0$  est compact ; donc  $\pi(S_0)$  est compact. D'après le lemme 2, on a l'inclusion  $\pi i_{\ast}(\mathcal{S}) \subset \pi(S_0)$  ; il en résulte la compacité de  $\overline{\pi i_{\ast}(\mathcal{S})}$ .  $\square$

## § II . - L'ESPACE DES COURBES MULTIPLES

Comme  $\mathcal{S}$  est difficile à étudier, on introduit un espace plus grand et plus facile à étudier. Soit  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(M)$  l'espace des classes d'isotopie de sous-variétés fermées de dimension 1 (non orientées et non nécessairement connexes) dont aucune composante n'est homotope à zéro. Comme dans le cas des courbes simples, on définit  $i(\alpha, \beta)$  pour  $\alpha \in \mathcal{S}'$  et  $\beta \in \mathcal{S}$ , ainsi que  $i_{\ast} : \mathcal{S}' \rightarrow \mathbb{R}_+^{\mathcal{S}}$  et  $\pi i_{\ast} : \mathcal{S}' \rightarrow P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$ . L'intersection minimale d'une courbe multiple et d'une courbe simple est la somme des intersections minimales des différentes composantes.

Remarque. Selon le même raisonnement qu'au § 3 de l'exposé 3, on prouve que  $i_{\ast}$  est injectif et que deux éléments  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de  $\mathcal{S}'$  ont même image par  $\pi i_{\ast}$  si et seulement si ils sont multiples entiers d'un même  $\alpha_0 \in \mathcal{S}'$  [il y a en effet une opération naturelle  $\mathbb{N} \times \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ ].

Théorème 4. Dans  $P(\mathbb{R}_+^{\mathcal{S}})$ , on a :

$$\overline{\pi i_{\ast}(\mathcal{S})} = \overline{\pi i_{\ast}(\mathcal{S}')} .$$

En appliquant le Théorème 1, on obtient :

Corollaire 4 bis. Dans  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$ , on a :

$$i_{\times} \mathcal{J}^1 \subset \overline{i_{\times} (\mathbb{R}_+ \times \cdot)} .$$

Démonstration du théorème 4. Il s'agit de montrer que  $\pi i_{\times}(\mathcal{J})$  est dense dans  $\pi i_{\times}(\mathcal{J}^1)$ . Soit  $\alpha \in \mathcal{J}^1$  représenté par la réunion de courbes simples deux à deux disjointes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ . On peut choisir une courbe  $\gamma$ , simple et connexe, telle que  $\text{card}(\gamma \cap \alpha_j)$  soit égal à  $i(\gamma, \alpha_j)$  et non nul pour tout  $j$ . Soient  $n_1, n_2, \dots, n_k$  des entiers positifs. Je vais construire un élément  $\Gamma(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{J}$ . Chaque arc de  $\gamma$ , qui traverse un petit voisinage tubulaire de  $\alpha_j$ , est remplacé par un arc de mêmes extrémités faisant  $n_j$  tours positifs (voir Figure 2, pour  $n_j = 2$ ).

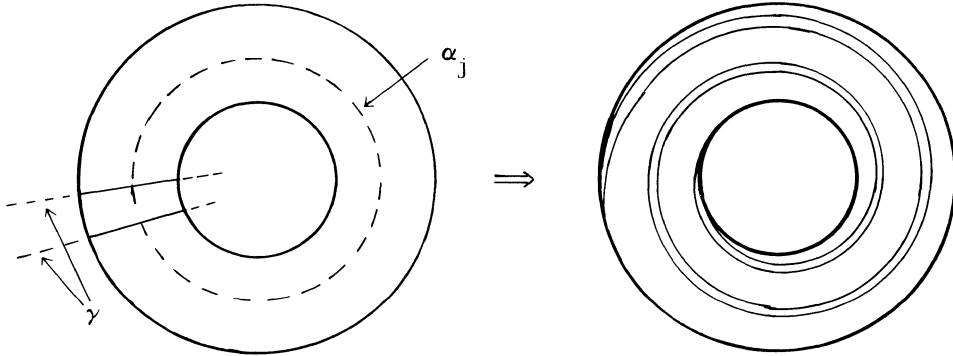


Figure 2

On obtient par cette construction une courbe  $\Gamma(n_1, \dots, n_k)$  bien définie à isotopie près. On prouve dans l'appendice que, pour  $\beta \in \mathcal{J}$ , on a l'inégalité :

$$|i(\Gamma(n_1, \dots, n_k), \beta) - \sum_j n_j i(\gamma, \alpha_j) i(\alpha_j, \beta)| \leq i(\gamma, \beta) .$$

Prenons  $n_j = n \prod_{\ell \neq j} i(\gamma, \alpha_\ell)$ . On obtient une courbe notée brièvement  $\Gamma(n)$ ; il vient :

$$|i(\Gamma(n), \beta) - n \prod_j i(\gamma, \alpha_j) [\sum_j i(\alpha_j, \beta)]| \leq i(\gamma, \beta) .$$

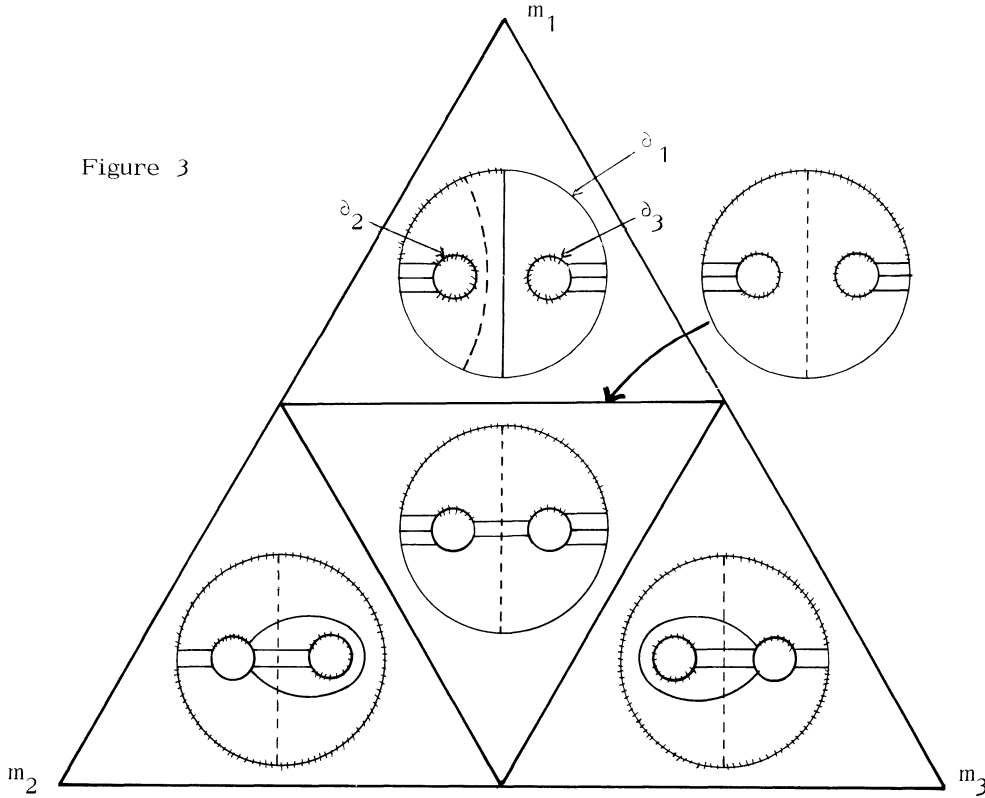
Autrement dit, lorsque l'on passe au projectif et que  $n$  tend vers l'infini, les contributions de  $\gamma$  aux intersections deviennent négligeables. Donc la suite  $\pi i_{\times}(\Gamma(n))$  tend vers  $\pi i_{\times}(\alpha)$ .  $\square$

§ III . - PARAMÉTRISATION EXPLICITE DE L'ESPACE DES COURBES MULTIPLES

Rappelons que  $P^2$  désigne le pantalon standard ; les courbes du bord sont numérotées  $\partial_1 P^2, \partial_2 P^2, \partial_3 P^2$ . Dans l'exposé 2, § III, on a classifié les arcs multiples de  $P^2$ . Un élément  $\tau$  de  $A^1(P^2)$ , espace des arcs multiples, est complètement caractérisé par les trois nombres entiers  $m_j = i(\tau, \partial_j P^2)$ ,  $j = 1, 2, 3$  ; un triplet d'entiers non tous nuls décrit un arc multiple dès que  $m_1 + m_2 + m_3$  est pair.

Dans chaque classe de  $A^1(P^2)$ , on choisit une fois pour toutes un représentant, dit canonique, celui dessiné sur la figure 3. Pour chaque  $\tau \in A^1(P^2)$  et chaque  $\partial_j P^2$ , je choisis un arc  $x_j$  composante connexe de  $\partial_j P^2 - \tau$ , comme dans la figure 3. Cette définition est univoque, vu que  $(P^2, \tau)$  n'admet pas d'automorphisme non trivial conservant l'orientation.

Figure 3



( en pointillés, les arcs "jaunes" ;  
les arcs  $x_j$  sont bâtonnés )

Pour chaque modèle  $\tau$ , on choisit un arc jaune  $J_1 = J_1(\tau)$  qui a les propriétés suivantes :

- 1°  $J_1$  est un arc simple joignant  $\partial_1 P^2$  à lui-même et qui coupe  $P^2$  en deux régions dont l'une contient  $\partial_2 P^2$  et l'autre  $\partial_3 P^2$  ;
- 2°  $J_1$  a une extrémité dans l'arc  $x_1(\tau)$  ;
- 3°  $J_1$  a une intersection minimale avec  $\tau$  .

On construit de même les arcs  $J_2$  et  $J_3$  .

Remarque. Dans l'exposé 6, on classifiera les feuilletages mesurés sur  $P^2$  . Les modèles de la figure 3 sont des "modèles discrets" pour ces feuilletages, où on ne voit que quelques unes des feuilles non singulières. D'ailleurs, pour les classifications des courbes multiples, on suit une démarche analogue à celle qui sera suivie pour la classification des feuilletages mesurés : par exemple la technique de l'arc jaune qui sert à repérer la façon de recoller les pantalons pour reconstituer la surface.

Pour paramétrer  $\mathcal{J}'$ , on fait un certain nombre de choix.

I) On choisit  $3g - 3$  courbes simples  $K_1, K_2, \dots, K_{3g-3}$ , mutuellement disjointes, coupant  $M$  en  $2g - 2$  régions diffeomorphes au pantalon. On prend les  $K_i$  à complémentaire connexe dans  $M$  ; ainsi, les pantalons  $R_j$  sont plongés dans  $M$ , ou encore chaque  $K_i$  adhère à deux pantalons distincts.

II) Pour chaque  $K_j$ , on choisit deux courbes simples  $K'_j$  et  $K''_j$  comme sur la figure 4 (cela est possible à cause de la condition précédente) ;  $K'_j$  et  $K''_j$  diffèrent par un twist de Dehn positif le long de  $K_j$  (cela ne dépend que de l'orientation de la surface et non de celle de  $K_j$ ) .

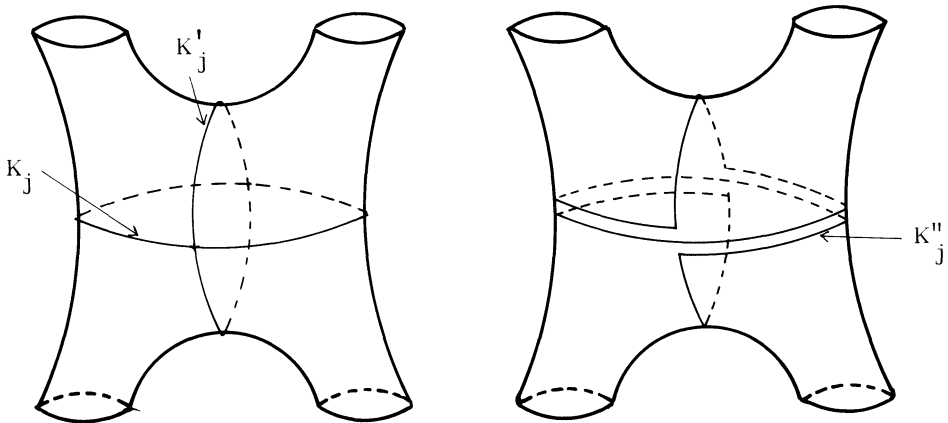


Figure 4

III) Pour chaque  $K_j$ , on se donne un voisinage tubulaire  $K_j \times [-1, +1]$ ; ils sont pris deux à deux disjoints; le complémentaire de leur réunion est un nombre de pantalons deux à deux disjoints,  $R'_1, \dots, R'_{2g-2}$ .

IV) Chaque  $R'_j$  est paramétré par  $P^2$ , via un difféomorphisme  $\varphi_j$ , bien fixé, (pas seulement à isotopie près).

On considère dans  $\mathbb{R}_+^{9g-9}$  le cône :

$$B = \{ (m_i, s_i, t_i) \mid i = 1, \dots, 3g-3, m_i, s_i, t_i \geq 0, (m_i, s_i, t_i) \in \partial(\leq \nabla) \} .$$

Il est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{6g-6}$  (le cône sur  $\partial(\leq \nabla)$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$ ). On va construire une application de classification  $\Phi : \mathcal{A}^1 \rightarrow B$ .

Soit  $\beta \in \mathcal{A}^1$ ; on commence par définir  $m_j(\beta) = i(\beta, K_j)$ . La connaissance de ces entiers déterminent des modèles dans les pantalons  $R'_k$ : le modèle respectif de  $P^2$  est transporté par le difféomorphisme  $\varphi_k$ . Si le représentant  $\beta_0$  de  $\beta$  est choisi d'intersection minimale avec le bord de tous les pantalons  $R'_k$ , alors  $\beta_0|_{R'_k}$  est isotope au modèle. On choisit donc  $\beta_0$  égal au modèle dans tous les pantalons  $R'_k$ ; on dira que ce représentant est en forme normale. Noter que si  $\beta_0$  a une composante isotope à  $K_j$ , celle-ci est contenue dans l'anneau  $K_j \times [-1, +1]$ .

Lemme 5. La forme normale de  $\beta$  est "unique". Précisément, si  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont deux représentants de  $\beta$  en forme normale, alors, pour tout  $j = 1, \dots, 2g-2$ ,  $\beta_0 \cap K_j \times [-1, +1]$  et  $\beta_1 \cap K_j \times [-1, +1]$  sont isotopes rel le bord.

Démonstration. Nous avons besoin d'une extension de la prop. 12 (exposé 3) au cas où l'une des courbes est multiple; la démonstration est analogue. Il s'agit de ceci: si  $\gamma_0$  est une composante de  $\beta_0$  et si  $\gamma_1$  est la composante correspondante de  $\beta_1$ , alors il existe une isotopie de  $M$  qui pousse  $\gamma_0$  en  $\gamma_1$  et qui laisse invariante toutes les courbes  $K_j \times \{-1\}$  et  $K_j \times \{+1\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 3g-3$ . En réalité, il ne manque à la démonstration de la proposition citée que le complément suivant: si  $\gamma_0 \cap K_j \times \{\pm 1\} = \gamma_1 \cap K_j \times \{\pm 1\} = \emptyset$ , alors  $\gamma_0$  est isotope à  $\gamma_1$  dans  $M - K_j \times \{\pm 1\}$ . Cette affirmation est vraie par les arguments "classiques" (lemme 13 de l'exposé 3), sauf éventuellement si  $\gamma_0$  est isotope à  $K_j$ ; mais alors, à cause de la "forme normale", il n'y a rien à démontrer.

Ceci étant, dans la discussion ci-dessus, on peut remplacer  $\gamma_0$  (resp.  $\gamma_1$ ) par le paquet  $\overline{\gamma_0}$  (resp.  $\overline{\gamma_1}$ ) de toutes les composantes de  $\beta_0$  (resp.  $\beta_1$ ) parallèle à  $\gamma_0$  (resp.  $\gamma_1$ ). On peut donc fabriquer une forme normale  $\beta_0^1$  avec les propriétés suivantes:



1°  $\beta_0^1$  et  $\beta_0$  sont isotopes par une isotopie respectant les courbes  $K_j \times \{\pm 1\}$  ;

2° Le paquet  $\overline{\gamma_0^1}$ , correspondant à  $\overline{\gamma_0}$ , coïncide avec  $\overline{\gamma_1}$ .

Soit maintenant  $\delta_0$  une courbe de  $\beta_0^1 - \overline{\gamma_1}$  et soit  $\delta_1$  la courbe correspondante de  $\beta_1 - \overline{\gamma_1}$ . Puisque  $\delta_0$  n'est pas parallèle à  $\overline{\gamma_1}$ ,  $\delta_0$  et  $\delta_1$  sont isotopes dans  $M - \overline{\gamma_1}$ . Toujours par les mêmes arguments, on trouve alors qu'il existe une isotopie de  $M$ , constante sur  $\overline{\gamma_1}$  et respectant les courbes  $K_j \times \{\pm 1\}$  qui pousse  $\delta_0$  en  $\delta_1$ . On continue ainsi de suite. Finalement,  $\beta_0$  et  $\beta_1$  sont isotopes, par une isotopie qui respecte toutes les courbes  $K_j \times \{\pm 1\}$ .

Maintenant, je dis que l'isotopie ci-dessus peut être choisie constante dans tous les petits pantalons  $R_j^1$ , ce qui démontre le lemme. C'est évident si  $\beta_0 \cap R_j^1$  est vide. Sinon, c'est dû au fait que les lacets de  $\text{Diff}(P^2, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$  sont tous homotopes à zéro (voir exposé 2).  $\square$

Ce lemme est essentiel pour la poursuite de la classification. Les modèles  $\beta_0 \cap R_j^1$  sont équipés de leurs "arcs jaunes". Considérons la courbe  $K_j$  et les deux pantalons adjacents  $R_1$  et  $R_2$ . Dans les petits pantalons  $R_1^1$  et  $R_2^1$ , on a les deux arcs jaunes  $J_1$  et  $J_2$  émanant des bords respectifs parallèles à  $K_j$ . Il existe dans  $K_j \times [-1, +1]$  des arcs simples  $S_j, S_j^1, T_j$  et  $T_j^1$  tels que  $J_1 \cup S_j \cup J_2 \cup S_j^1$  soit isotope à  $K_j^1$  et que  $J_1 \cup T_j \cup J_2 \cup T_j^1$  soit isotope à  $K_j^1$ . Si on impose  $\partial S_j = \partial T_j$  et  $\partial S_j^1 = \partial T_j^1$ ,  $S_j \cap S_j^1 = \emptyset$ ,  $T_j \cap T_j^1 = \emptyset$ , alors  $S_j \cup S_j^1$  (resp.  $T_j \cup T_j^1$ ) est unique à isotopie près rel. le bord. D'autre part,  $T_j \cup T_j^1$  se déduit de  $S_j \cup S_j^1$  par un twist de Dehn positif sur l'anneau.

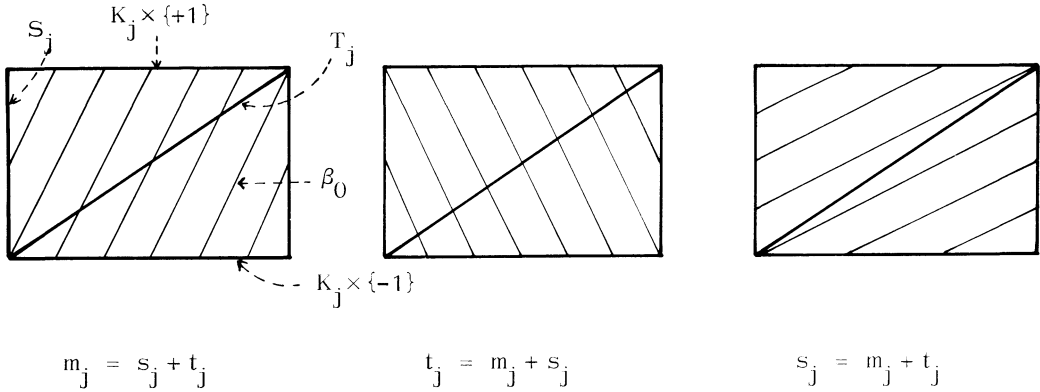
Puisque les extrémités de ces arcs ne sont pas sur  $\beta_0$ , cela a un sens de les mettre en position d'intersection minimale avec  $\beta_0$ . Ceci étant fait, on pose :

$$s_j(\beta) = \text{card}(\beta_0 \cap S_j)$$

$$t_j(\beta) = \text{card}(\beta_0 \cap T_j) .$$

**Lemme 6.** Pour tout  $j$ , le triplet  $(m_j(\beta), s_j(\beta), t_j(\beta))$  appartient au bord  $\partial(\leq 7)$  de l'inégalité du triangle. [ Comparer au théorème de classification de  $\mathcal{L}^1(T^2)$  dans l'exposé 1. ]

**Démonstration.** Elle tient dans la figure 5.  $\square$



(l'anneau  $K_j \times [-1, +1]$  est coupé le long de  $S_j$ )

Figure 5

Soit  $B_0 \subset B$  l'ensemble des points  $\neq 0$ , de coordonnées entières, vérifiant en plus la conditions suivante : si  $K_{j_1}, K_{j_2}, K_{j_3}$  sont au bord d'un même pantalon,  $m_{j_1} + m_{j_2} + m_{j_3}$  est pair.

Théorème 7. L'application  $\Phi : \mathcal{S}^1 \rightarrow B$  est une bijection de  $\mathcal{S}^1$  sur  $B_0$ .

Remarque. Par une procédure analogue, on aura une classification des feuilletages mesurés et des structures de Teichmüller. En réalité, comme on l'expliquera, le théorème 7 ci-dessus est strictement contenu dans le théorème de classification des feuilletages mesurés. Mais la simplicité des moyens mis en oeuvre ici vaut d'exposer ce cas particulier [en particulier, pour les feuilletages, on n'obtient l'unicité de la forme normale qu'après de longs détours].

Démonstration. L'image est évidemment contenue dans  $B_0$ . D'autre part, on a une recette pour fabriquer une courbe multiple  $\beta$  à partir d'un élément  $\{m_j, s_j, t_j \mid j = 1, \dots, 3g-3\}$  de  $B_0$ . D'après l'exposé 2, les coefficients  $m_j$  déterminent des arcs dans les petits pantalons  $R_k^1$ . Avec eux, viennent des arcs jaunes et donc, pour tout  $j$ , on a des arcs  $S_j$  et  $T_j$  dans l'anneau  $K_j \times [-1, +1]$ .

Si  $m_j = 0$ ,  $s_j = t_j$  indique le nombre de courbes de  $\beta$  parallèles à  $K_j$ . Si  $m_j \neq 0$ , on a déjà  $m_j$  points sur  $K_j \times \{-1\}$  et sur  $K_j \times \{+1\}$ ; les coefficients  $s_j$

et  $t_j$  déterminent complètement la façon de les joindre. Il reste à vérifier que la courbe multiple ainsi construite a la propriété d'avoir une intersection minimale avec chaque  $K_j$ , c'est-à-dire que  $i(\beta, K_j) = m_j$ ; on utilise pour cela le critère de la proposition 10 de l'exposé 3.

Une fois que  $S_j$  et  $T_j$  sont fixés,  $\beta_0 \cap K_j \times [-1, +1]$  est déterminé, à isotopie rel. le bord près, par  $s_j$  et  $t_j$ . L'injectivité de  $\Phi$  en découle.  $\square$

Remarque. Les membres du séminaire ne savent pas détecter quels sont les coefficients d'une courbe simple.

De toute évidence,  $\Phi$  est homogène (de degré 1) par rapport à la multiplication par un scalaire entier. On peut donc étendre  $\Phi$  par homogénéité à  $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \rightarrow B$ .

Corollaire 8. L'application  $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times \mathcal{J} \rightarrow B$  est injective.

Démonstration. Sinon, il existe  $\alpha_0$  et  $\alpha_1 \in \mathcal{J}$  et un scalaire  $\lambda > 0$ , tels que  $\Phi(\alpha_1) = \lambda \Phi(\alpha_0)$ . Il est très facile de voir que  $\lambda$  est rationnel. Donc, on a des entiers  $n_0$  et  $n_1$  tels que  $\Phi(n_0 \alpha_0) = \Phi(n_1 \alpha_1)$ . D'après le théorème 7, on a  $n_0 \alpha_0 = n_1 \alpha_1$ . D'où on déduit immédiatement  $\alpha_0 = \alpha_1$ .  $\square$

Problème. Montrer directement que  $\Phi(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J})$  est dense dans  $B$ . Cela est plausible puisque le cône (positif) sur  $B_0$  est dense dans  $B$ . Bien entendu, cela résulte du théorème suivant qui est la version "discrète" du théorème sur les feuilletages et qui ne sera démontré que dans l'exposé 6.

Théorème 9. Il existe un cône fermé  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}_+^{\mathcal{J}}$  et une application  $\theta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow B$ , continue, positivement homogène de degré 1 et rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}_+ \times \mathcal{J} \text{ (resp. } \mathcal{J}^1) & \xrightarrow{i_*} & \mathcal{C} \subset \mathbb{R}_+^{\mathcal{J}} \\
 & \searrow \Phi & \swarrow \theta_{\mathcal{C}} \\
 & & B
 \end{array}$$

De plus,  $\theta_{\mathcal{C}}$  induit un homéomorphisme de  $\overline{i_*(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J}^1)}$  sur  $B$ .

Conséquences. 1°  $\Phi(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{J})$  est dense dans  $B$ . (Utiliser le théorème 4 et le fait

que  $\Phi(\mathcal{R}^1)$  est un "réseau" ainsi que la continuité et l'homogénéité de  $\theta_c$  .

2° L'espace  $\overline{\pi i_{\ast}(\mathcal{R})}$  est homéomorphe à  $S^{6g-7}$  .

Remarque. L'existence de  $\theta_c$  signifie que les coefficients  $s_j(\beta)$  et  $t_j(\beta)$  sont donnés par des formules continues homogènes de degré 1 en fonction des  $i(\beta, \alpha)$  ,  $\alpha \in \mathcal{R}$  . On donnera ces formules explicites dans le cadre des feuilletages mesurés ; elles permettront d'interpoler des valeurs continues des variables .

D'autre part, comme  $\Phi$  est injective pour tout  $\alpha \in \mathcal{R}$  , il existe une application  $\psi_\alpha : B_0 \rightarrow \mathbb{N}$  telle que, pour tout  $\beta \in \mathcal{R}^1$  , on ait :

$$i(\beta, \alpha) = \psi_\alpha(\Phi(\beta)) .$$

Il paraît très difficile d'expliciter ces dernières formules .