JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

EMILE MATHIEU

Sur la généralisation du premier et du second potentiel

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 15 (1870), p. 117-132.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1870_2_15__117_0>

Sur la généralisation du premier et du second potentiel;

Par M. Émile MATHIEU.

Dans un Mémoire inséré dans le volume précédent de ce Journal, j'ai étudié la solution générale de l'équation $\Delta\Delta u = 0$, dans laquelle le signe Δu représente

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2},$$

et j'ai montré comment cette solution dépendait du premier et du second potentiel.

Le premier et le second potentiel par rapport à un point (x, y, z) d'une masse renfermée sous un volume Π sont donnés par les formules

$$v = \int\int\int \frac{\varphi(a, b, c)}{r} da\,db\,dc, \tag{1}$$

$$w = \int\int\int r\varphi(a, b, c)\, da\,db\,dc, \tag{2}$$

où r a pour valeur

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}; \tag{3}$$

les intégrales triples s'étendent à tous les éléments $da\,db\,dc$ du volume Π, et $\varphi(a, b, c)$ est la densité de la masse au point (a, b, c).

Après la publication de l'extrait de mon Mémoire dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, M. de Saint-Venant me fit observer que si l'on prend encore pour v et w les expressions (1) et (2), mais en adoptant pour r l'expression plus générale où A, B, C sont positifs

$$r = \sqrt{\frac{(x-a)^2}{A} + \frac{(y-b)^2}{B} + \frac{(z-c)^2}{C}}, \tag{4}$$

v satisfait à l'équation

$$(5) \qquad A\frac{d^2 v}{dx^2} + B\frac{d^2 v}{dy^2} + C\frac{d^2 v}{dz^2} = 0,$$

et w à cette autre

$$(6) \quad A^2\frac{d^4 w}{dx^4} + B^2\frac{d^4 w}{dy^4} + C^2\frac{d^4 w}{dz^4} + 2BC\frac{d^4 w}{dy^2 dz^2} + 2CA\frac{d^4 w}{dz^2 dx^2} + 2AB\frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} = 0$$

M. de Saint-Venant m'ayant engagé à examiner comment les propriétés des deux potentiels se généralisaient quand on substitue dans les formules (1) et (2) l'expression (4) au lieu de (3), j'ai été conduit à écrire la Note actuelle.

Suivant M. de Saint-Venant, la plupart des corps employés dans les arts ne peuvent être regardés comme isotropes; mais dans l'équilibre d'élasticité de ces corps les projections des déplacements moléculaires satisfont sensiblement à l'équation (6). (*Voyez* ce Journal, année 1863, p. 371.)

Nous allons reprendre rapidement les questions dans l'ordre où elles se présentent dans notre précédent Mémoire, en nous arrêtant seulement aux points qui exigent des modifications de quelque importance.

Du premier potentiel et de l'équilibre de température.

1. Le potentiel v généralisé d'une masse quelconque satisfait en dehors de cette masse à l'équation (5), que nous représenterons, pour abréger, par

$$\delta v = 0;$$

on sait aussi que, si l'on choisit convenablement les axes de coordonnées, la température d'équilibre d'un corps cristallisé satisfait à une équation de cette forme.

Désignons par $d\varpi$ l'élément de volume d'un corps et par $d\sigma$ l'élément de la surface σ qui le termine; si v et w sont deux fonctions continues quelconques de x, y, z, on a facilement en intégrant par partie la première des trois équations suivantes, et les deux autres s'en déduisent par analogie :

$$\int v \frac{d^2 w}{dx^2} d\varpi = \int v \frac{dw}{dx} \cos\xi \, d\sigma - \int \frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} d\varpi,$$
$$\int v \frac{d^2 w}{dy^2} d\varpi = \int v \frac{dw}{dy} \cos\eta \, d\sigma - \int \frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy} d\varpi,$$
$$\int v \frac{d^2 w}{dz^2} d\varpi = \int v \frac{dw}{dz} \cos\zeta \, d\sigma - \int \frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz} d\varpi,$$

ξ, η, ζ étant les angles de la normale à la surface avec les axes de coordonnées. Multiplions ces trois équations par A, B, C et ajoutons en remarquant qu'on a

$$A\frac{d^2 w}{dx^2} + B\frac{d^2 w}{dy^2} + C\frac{d^2 w}{dz^2} = \delta w;$$

nous aurons

$$\int v\,\delta w\, d\varpi - \int v\left(A\frac{dw}{dx}\cos\xi + B\frac{dw}{dy}\cos\eta + C\frac{dw}{dz}\cos\zeta\right)d\sigma$$
$$= -\int\left(A\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} + B\frac{dv}{dy}\frac{dw}{dy} + C\frac{dv}{dz}\frac{dw}{dz}\right)d\varpi,$$

et comme le second membre reste invariable par la permutation de v et w, on a

$$\int v\,\delta w\, d\varpi - \int v\left(A\frac{dw}{dx}\cos\xi + B\frac{dw}{dy}\cos\eta + C\frac{dw}{dz}\cos\zeta\right)d\sigma$$
$$= \int w\,\delta v\, d\varpi - \int w\left(A\frac{dv}{dx}\cos\xi + B\frac{dv}{dy}\cos\eta + C\frac{dv}{dz}\cos\zeta\right)d\sigma.$$

Nous écrirons cette équation sous une forme un peu plus simple. Posons

$$P = \sqrt{A^2\cos^2\xi + B^2\cos^2\eta + C^2\cos^2\zeta},$$
$$\cos\alpha = \frac{A\cos\xi}{P},\quad \cos\beta = \frac{B\cos\eta}{P},\quad \cos\gamma = \frac{C\cos\zeta}{P};$$

on aura

$$A\frac{dv}{dx}\cos\xi + B\frac{dv}{dy}\cos\eta + C\frac{dv}{dz}\cos\zeta = P\left(\frac{dv}{dx}\cos\alpha + \frac{dv}{dy}\cos\beta + \frac{dv}{dz}\cos\gamma\right).$$

Par le centre de l'élément $d\sigma$, menons une droite t dans la direction (α, β, γ) et prenons sur cette droite, à partir du centre, une longueur infiniment petite τ; soient v et v' les valeurs de v à la première et à la seconde extrémité de l'élément τ, la quantité précédente a pour valeur

$$P\frac{v'-v}{\tau},$$

et nous la représenterons par $\frac{Dv}{Dt}$. On a donc

$$(A)\qquad \int v\,\delta w\,d\varpi - \int w\,\delta v\,d\varpi = \int v\frac{Dw}{Dt}d\sigma - \int w\frac{Dv}{Dt}d\sigma.$$

2. Supposons que la fonction v satisfasse à l'équation $\delta v = 0$, qu'elle varie d'une manière continue en dedans et en dehors de la surface σ, qu'elle prenne à cette surface la même valeur à l'intérieur et à l'extérieur, et enfin qu'elle s'annule à l'infini; nous allons prouver qu'elle peut être considérée comme le potentiel d'une couche infiniment mince de matière distribuée sur la surface σ.

Faisons

$$w = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{\frac{(x_1-\alpha)^2}{A} + \frac{(y_1-\beta)^2}{B} + \frac{(z_1-\gamma)^2}{C}},$$

(x_1, y_1, z_1) étant un point fixe intérieur à la surface σ et (α, β, γ) un point de $d\varpi$; nous aurons

$$\delta w = 0,$$

et nous pourrons appliquer l'équation précédente au volume renfermé entre la surface σ et une sphère de rayon infiniment petit dont le centre est au point (x_1, y_1, z_1). L'intégrale

$$\int \frac{1}{r}\left(A\frac{dv}{dx}\cos\xi + B\frac{dv}{dy}\cos\eta + C\frac{dv}{dz}\cos\zeta\right)d\sigma$$

étendue à la sphère est un infiniment petit d'ordre r et dont on peut négliger la valeur. Cherchons ensuite ce que devient l'intégrale

$$\int v\left(A\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\xi + B\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\cos\eta + C\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\cos\zeta\right)$$

étendue à la même sphère.

Transportons l'origine des coordonnées au point (x_1, y_1, z_1); nous aurons, r étant la distance de ce point à un point quelconque (x, y, z) de la surface,

$$r^2 = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C},$$

$$\cos\xi = \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\eta = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\zeta = \frac{-z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

et par conséquent

$$A\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\cos\xi + B\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\cos\eta + C\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\cos\zeta = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{r^3}.$$

En désignant par R la distance de l'origine au point (x, y, z), par ψ sa longitude et par θ le complément de sa latitude, on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\quad d\sigma = R^2 \sin\theta\, d\psi\, d\theta.$$

Donc l'intégrale ci-dessus étendue à la sphère a pour valeur le produit de la valeur de v au point (x_1, y_1, z_1) par l'intégrale

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^3}{r^3} \sin\theta\, d\psi\, d\theta.$$

Désignons par K la valeur de cette intégrale définie, dont nous nous occuperons tout à l'heure, et que nous trouverons égale à $4\pi\sqrt{ABC}$; alors l'équation (A) deviendra

$$0 = \int v\frac{D\frac{1}{r}}{Dt}d\sigma - \int \frac{1}{r}\frac{Dv}{Dt}d\sigma + Kv,$$

ou

$$\mathrm{K}v = \int v \frac{\mathrm{D}\frac{1}{r}}{\mathrm{D}t'} d\sigma - \int \frac{1}{r} \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t'} d\sigma,$$

t' désignant la direction opposée à t.

Considérons ensuite le volume compris entre la surface σ et une autre surface σ' qui renferme la première; $\frac{1}{r}$ ne devenant pas infini dans cet intervalle, on peut appliquer l'équation (A) à tout ce volume, et l'on a, en supposant que la surface σ' aille à l'infini,

$$0 = \int v \frac{\mathrm{D}\frac{1}{r}}{\mathrm{D}t} d\sigma - \int \frac{1}{r} \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} d\sigma.$$

Ajoutant les deux équations obtenues, on a

$$v = -\frac{1}{\mathrm{K}} \int \frac{1}{r} \left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t'} \right) d\sigma;$$

donc v est le potentiel d'une couche dont la densité est

$$-\frac{1}{\mathrm{K}} \left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t'} \right).$$

3. Calculons maintenant la quantité K. Remplaçons, dans l'expression de R, les variables x, y, z par

$$x = \mathrm{R}\sin\theta\cos\psi, \quad y = \mathrm{R}\sin\theta\sin\psi, \quad z = \mathrm{R}\cos\theta,$$

et nous aurons pour l'expression de K

$$\mathrm{K} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\psi}{\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{\mathrm{A}} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{\mathrm{B}} + \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{C}} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Faisons $\cos\theta = x$, et nous aurons

$$\mathrm{K} = \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{dx\, d\psi}{(\mathrm{M}x^2 + \mathrm{P}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en posant

$$M = \frac{1}{C} - \frac{\cos^2\psi}{A} - \frac{\sin^2\psi}{B}, \quad P^2 = \frac{\cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\psi}{B}.$$

Or on a

$$\int \frac{dx}{(Mx^2 + P^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{P^2\sqrt{P^2 + Mx^2}},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(Mx^2 + P^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{P^2\sqrt{P^2 + M}} = \frac{2\sqrt{C}}{\frac{\cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\psi}{B}};$$

il en résulte

$$K = 2\sqrt{C}\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\frac{\cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\psi}{B}}.$$

Posons

$$\cos\psi = \frac{-2z}{1 + z^2},$$

et nous aurons

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\frac{\cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\psi}{B}} = 4B\int_{-1}^{1} \frac{(1 + z^2)\,dz}{1 + 2\left(\frac{2B}{A} - 1\right)z^2 + z^4}.$$

Les deux racines en z^2 de l'équation

$$z^4 + 2\left(\frac{2B}{A} - 1\right)z^2 + 1 = 0$$

sont

$$-\frac{2B}{A} + 1 \pm 2\sqrt{\frac{B}{A}\left(\frac{B}{A} - 1\right)},$$

et elles sont réelles si A est $<$ B, comme on peut le supposer. Reste à déterminer leur signe; or on a

$$4\frac{B}{A}\left(\frac{B}{A} - 1\right) < \left(-\frac{2B}{A} + 1\right)^2;$$

donc les deux racines auront toujours le même signe que $-\frac{2B}{A} + 1$

ou que $-2B+A$ et elles sont négatives. Désignons-les par $-\alpha^2$ et $-\alpha'^2$; nous aurons pour l'intégrale ci-dessus

$$\int \frac{(1-z^2)\,dz}{(z^2+\alpha^2)(z^2+\alpha'^2)} = \frac{1-\alpha^2}{\alpha(\alpha'^2-\alpha^2)} \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{\alpha} + \frac{\alpha'^2-1}{\alpha'(\alpha'^2-\alpha^2)} \operatorname{arc\,tang} \frac{z}{\alpha'}.$$

Donc on a

$$\begin{aligned} K &= 2\sqrt{C}\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\dfrac{\cos^2\psi}{A}+\dfrac{\sin^2\psi}{B}} \\ &= 16B\sqrt{C}\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha(\alpha'^2-\alpha^2)} \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha'^2-1}{\alpha'(\alpha'^2-\alpha^2)} \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{\alpha'}\right). \end{aligned}$$

Cette expression peut être beaucoup simplifiée; en effet, α et α' sont les racines positives de l'équation

$$\alpha^4 - 2\left(\frac{2B}{A}-1\right)\alpha^2 + 1 = 0$$

ou

$$\left(\alpha^2 - 2\sqrt{\frac{B}{A}}\,\alpha + 1\right)\left(\alpha^2 + 2\sqrt{\frac{B}{A}}\,\alpha + 1\right) = 0$$

et appartiennent au premier facteur; on a donc

$$\alpha\alpha' = 1, \quad \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2\sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Remplaçant α' par $\frac{1}{\alpha}$, on a

$$K = 16B\sqrt{C}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\alpha} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\alpha'}\right) = 16B\sqrt{C}\,\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\frac{\pi}{2};$$

on a aussi

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^2} = \frac{1}{\alpha+\dfrac{1}{\alpha}} = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{B}};$$

donc enfin

$$K = 4\pi\sqrt{ABC}.$$

4. Le n° 3 de notre Mémoire peut être facilement généralisé, et le théorème qui s'y trouve peut aussi être établi par la considération de l'équilibre de température d'un corps non plus isotrope, mais cristallisé.

5. Rappelons la formule qui donne le flux de chaleur qui traverse un élément plan dont la normale fait avec les axes des angles ξ, η, ζ. Cette formule est

$$U = U_x \cos\xi + U_y \cos\eta + U_z \cos\zeta,$$

U étant ce flux rapporté à l'unité de surface, et U_x, U_y, U_z les flux estimés de même qui traversent trois éléments plans perpendiculaires aux axes de coordonnées et passant en un même point avec le premier élément.

Si l'on choisit convenablement les axes de coordonnées, la température d'équilibre satisfait à l'équation

$$\delta v = A\frac{d^2v}{dx^2} + B\frac{d^2v}{dy^2} + C\frac{d^2v}{dz^2} = 0,$$

et pourvu que la propagation de la chaleur dans le milieu se fasse de la même manière dans deux directions opposées, U_x, U_y, U_z seront proportionnels à $A\frac{dv}{dx}$, $B\frac{dv}{dy}$, $C\frac{dv}{dz}$, et, par suite, si l'on a multiplié les coefficients de l'équation précédente par un nombre convenable, on a

$$U_x = A\frac{dv}{dx},\quad U_y = B\frac{dv}{dy},\quad U_z = C\frac{dv}{dz}$$

et

$$U = A\frac{dv}{dx}\cos\xi + B\frac{dv}{dy}\cos\eta + C\frac{dv}{dz}\cos\zeta.$$

En adoptant les notations du n° 1 de cette Note, nous avons donc

$$U = P\frac{v' - v}{\tau} \quad \text{ou} \quad U = \frac{Dv}{Dt}.$$

Ainsi l'expression que nous avons représentée par $\frac{Dv}{Dt}$ est celle du flux de chaleur qui traverse l'élément de surface dont la normale fait avec les axes les angles ξ, η, ζ, flux de chaleur qui peut être regardé comme ayant la ligne t pour direction.

Imaginons un corps cristallisé T en équilibre de température terminé par une surface σ, et dont la température est donnée en chaque point de cette surface.

Concevons autour du corps T un autre corps de nature identique qui remplisse tout l'espace restant; il est seulement séparé du corps T par un espace infiniment mince qui est le siége d'une source de chaleur; enfin la température est maintenue à zéro à l'infini. La température v à l'intérieur ou à l'extérieur de cette couche sera donnée par la formule

$$v = \frac{-1}{4\pi\sqrt{\mathrm{ABC}}}\int \frac{1}{r}\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t'}\right) d\sigma,$$

et la quantité

$$\left(\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t'}\right) d\sigma$$

représente le double du flux de chaleur provenant de la source qui traverse l'élément $d\sigma$.

Théorème sur l'expression $\delta\delta u$.

6. Continuons à poser

$$\mathrm{A}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{B}\frac{d^2u}{dy^2} + \mathrm{C}\frac{d^2u}{dz^2} = \delta u,$$

et le raisonnement qui a conduit à l'équation (2) du n° **7** de notre Mémoire nous donnera l'équation analogue

$$\begin{aligned}&\int u\,\delta\delta u'\,d\varpi - \int u'\,\delta\delta u\,d\varpi \\ &= \int\left(u\frac{\mathrm{D}\delta u'}{\mathrm{D}t} - u'\frac{\mathrm{D}\delta u}{\mathrm{D}t}\right)d\sigma + \int\left(\delta u\frac{\mathrm{D}u'}{\mathrm{D}t} - \delta u'\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t}\right)d\sigma,\end{aligned}$$

où u et u' sont des fonctions continues des coordonnées a, b, c d'un point quelconque du corps. De plus, leurs dérivées des trois premiers ordres doivent être supposées jouir de la même continuité.

Si l'on y fait

$$u' = r, \quad r = \sqrt{\frac{(x-a)^2}{A} + \frac{(y-b)^2}{B} + \frac{(z-c)^2}{C}},$$

on aura

$$\int r\delta\delta u\, d\varpi = \int\left(r\frac{D\delta u}{Dt} - \delta u\frac{Dr}{Dt}\right)d\sigma + 2\int\left(\frac{1}{r}\frac{Du}{Dt} - u\frac{D\frac{1}{r}}{Dt}\right)d\sigma,$$

pourvu que le point (x, y, z) soit extérieur à la surface σ.

Si le point (x, y, z) est situé à l'intérieur de la surface σ et qu'on fasse encore $u' = r$, on appliquera l'équation ci-dessus au volume compris entre la surface σ et celle d'une sphère dont le centre est au point (x, y, z); en faisant usage de l'expression obtenue au n° **3** pour K, on aura la formule

$$\int r\delta\delta u\, d\varpi = \int\left(r\frac{D\delta u}{Dt} - \delta u\frac{Dr}{Dt}\right)d\sigma$$
$$+ 2\int\left(\frac{1}{r}\frac{Du}{Dt} - u\frac{D\frac{1}{r}}{Dt}\right)d\sigma - 8\pi\sqrt{ABC}\,u,$$

où dans le dernier terme on remplace a, b, c par x, y, z.

Sur la valeur de δv à l'intérieur de la masse.

7. Soit le potentiel donné par l'intégrale triple

$$v = \int\int\int \frac{\varphi(a, b, c)}{r}\, da\, db\, dc,$$

qui est étendue à un volume Π et dans laquelle on a

$$r^2 = \frac{(x-a)^2}{A} + \frac{(y-b)^2}{B} + \frac{(z-c)^2}{C}.$$

Si l'on a $A = B = C = 1$, on sait que l'on a

$$\Delta v = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta v = -4\pi\varphi(x, y, z),$$

selon que le point (x, y, z) est situé en dehors ou en dedans de la masse. Dans le cas général où les nombres positifs A, B, C sont quelconques, on peut, selon la méthode du cas particulier, imaginer une sphère infiniment petite qui renferme le point (x, y, z). Si V et V_1 sont le potentiel de la sphère et celui de la partie du volume Π extérieure à la sphère, on aura $\delta V_1 = 0$, et δv sera égal à δV, qui sera seul à déterminer.

Le potentiel de la sphère homogène ne peut plus maintenant s'exprimer qu'à l'aide d'une intégrale définie simple, et il faut diriger la recherche avec soin pour obtenir δV sans calculs trop compliqués.

Le potentiel d'une sphère, dont la densité est l'unité, sera donné par l'intégrale triple

$$v = \int\int\int \frac{1}{r}\, da\, db\, dc,$$

tous les éléments $da\,db\,dc$ appartenant au volume de cette sphère; et l'on a

$$A\frac{dv}{dx} = -\int\int\int \frac{x-a}{r^3}\, da\, db\, bc.$$

Si donc nous posons

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

$A\dfrac{dv}{dx}$ représente la composante suivant l'axe des x d'une attraction dont la loi élémentaire a pour valeur $\frac{R}{r^3}$; point important à remarquer.

La sphère qui nous occupe peut être supposée avoir son centre à l'origine des coordonnées, et elle renferme le point $M(x, y, z)$; son équation sera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \varepsilon^2.$$

Soit $d\omega$ un angle solide élémentaire dont le sommet est en M et mené dans la direction du rayon R qui joint le point M au point (a, b, c). Dans cet angle solide, prenons l'élément de volume $R^2 d\omega dR$ limité par deux sphères dont le centre est en M et de rayon R et $R + dR$. L'attraction sur le point M de cet élément de volume, d'après la loi donnée ci-dessus, est

$$f\frac{\mathrm{R}}{r^3}\mathrm{R}^2 d\omega\, d\mathrm{R},$$

f étant un coefficient constant. Faisons la somme de tous les éléments de la sphère renfermés dans l'angle $d\omega$, nous aurons

$$fd\omega\int_0^{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}d\mathrm{R},$$

la limite supérieure R désignant la distance du point M au centre de la section de la sphère formée par l'angle solide.

Les trois composantes de cette attraction sont

$$fd\omega\cos\lambda\int_0^{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}d\mathrm{R},\quad fd\omega\cos\mu\int_0^{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}d\mathrm{R},\quad fd\omega\cos\nu\int_0^{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}d\mathrm{R}.$$

λ, μ, ν étant les angles de R avec les trois axes de coordonnées.

Pour les composantes de l'action du cône opposé par le sommet au premier, on aura

$$fd\omega\cos\lambda\int_{-\mathrm{R}'}^{0}\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}d\mathrm{R},\quad fd\omega\cos\mu\int_{-\mathrm{R}'}^{0}\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}d\mathrm{R},\quad fd\omega\cos\nu\int_{-\mathrm{R}'}^{0}\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}d\mathrm{R},$$

R' étant la distance du point M au centre de la base de ce cône.

Ajoutant, on a pour les composantes de la somme des deux attractions

$$fd\omega\cos\lambda\int_{-\mathrm{R}'}^{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}d\mathrm{R},\quad fd\omega\cos\mu\int_{-\mathrm{R}'}^{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}d\mathrm{R},\quad fd\omega\cos\nu\int_{-\mathrm{R}'}^{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{R}^3}{r^3}d\mathrm{R}.$$

Nous avons ensuite, R étant la distance de M à un point (α, β, γ) de la sphère,

$$\alpha - x = \mathrm{R}\cos\lambda,\quad \beta - y = \mathrm{R}\cos\mu,\quad \gamma - z = \mathrm{R}\cos\nu$$

et

$$r^2 = \mathrm{R}^2\left(\frac{\cos^2\lambda}{\mathrm{A}} + \frac{\cos^2\mu}{\mathrm{B}} + \frac{\cos^2\nu}{\mathrm{C}}\right).$$

Par suite, la première des trois composantes a pour valeur

$$\frac{f\,d\omega\cos\lambda}{\left(\frac{\cos^2\lambda}{A}+\frac{\cos^2\mu}{B}+\frac{\cos^2\nu}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}(R+R').$$

Dans l'équation de la sphère

$$X^2+Y^2+Z^2=\varepsilon^2,$$

faisons

$$X=x+R\cos\lambda,\quad Y=y+R\cos\mu,\quad Z=z+R\cos\nu,$$

il viendra

$$R^2+2(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)R=\varepsilon^2-x^2-y^2-z^2,$$

et on aura

$$R+R'=-2(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu).$$

On a donc pour la première composante

$$-2f\frac{\cos\lambda(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)}{\left(\frac{\cos^2\lambda}{A}+\frac{\cos^2\mu}{B}+\frac{\cos^2\nu}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}d\omega.$$

Intégrant tout autour du point M, et supprimant les termes multipliés par y et z dont les intégrales sont nulles séparément, on a pour la quantité $A\frac{dV}{dx}$

$$A\frac{dV}{dx}=-x\int\frac{\cos^2\lambda\,d\omega}{\left(\frac{\cos^2\lambda}{A}+\frac{\cos^2\mu}{B}+\frac{\cos^2\nu}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a deux expressions semblables pour $B\frac{dV}{dy}$, $C\frac{dV}{dz}$, et, par suite, on obtient

$$\delta V=A\frac{d^2V}{dx^2}+B\frac{d^2V}{dy^2}+C\frac{d^2V}{dz^2}=-\int\frac{d\omega}{\left(\frac{\cos^2\lambda}{A}+\frac{\cos^2\mu}{B}+\frac{\cos^2\nu}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Adoptant deux angles θ et ψ des coordonnées polaires, posons

$$\cos\xi = \sin\theta\cos\psi, \quad \cos\eta = \sin\theta\sin\psi, \quad \cos\zeta = \cos\theta,$$
$$d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

et nous aurons

$$\delta V = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta\, d\theta\, d\psi}{\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{A} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{B} + \frac{\cos^2\theta}{C}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette intégrale double est celle que nous avons désignée par K au nº **5**; nous avons donc

$$\delta V = -4\pi\sqrt{ABC}.$$

De là on conclut qu'au point (x, y, z) de la masse Π, où la densité est $\varphi(x, y, z)$, on a

$$\delta v = -4\pi\sqrt{ABC}\,\varphi(x, y, z).$$

8. La quantité que nous appelons *second potentiel* a pour valeur

$$w = \int\int\int r\varphi(a, b, c)\, da\, db\, dc;$$

on a

$$\delta w = 2v,$$

et par suite

$$\delta\delta w = 0$$

si le point (x, y, z) est extérieur au volume Π,

$$\delta\delta w = -8\pi\sqrt{ABC}\,\varphi(x, y, z)$$

s'il lui est intérieur.

Sur la solution générale de l'équation $\delta\delta u = 0$.

Dans ce qui précède, nous avons dû faire quelques modifications aux raisonnements de notre Mémoire pour leur donner l'extension que nous nous sommes proposée; mais, à partir de ce point, les démonstrations restent les mêmes, ou n'exigent que des changements insignifiants.

Ainsi, on a sur la solution de l'équation $\delta\delta u = 0$ les théorèmes suivants :

1° Toute fonction u qui satisfait, dans l'intérieur de la surface σ, à l'équation $\delta\delta u = 0$, et qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, est la somme du premier potentiel d'une couche qui recouvre la surface σ, et du second potentiel d'une autre couche mise sur la même surface.

[Il est entendu que les coefficients A, B, C qui entrent dans ce premier et ce second potentiel sont les mêmes que ceux qui figurent dans l'expression de $\delta\delta u$. Si l'on voulait indiquer les coefficients A, B, C, il conviendrait d'appeler ces quantités le premier et le second potentiel (A, B, C).]

2° Il existe une fonction, et une seule, qui satisfait à l'équation $\delta\delta u = 0$ dans l'intérieur de la surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres et pour laquelle u et δu, ou u et $\frac{Du}{Dt'}$, ont sur la surface σ des valeurs déterminées.

3° Soient un point (x, y, z) extérieur à la surface σ et un point (a, b, c) à l'intérieur; posons

$$R^2 = \frac{(x-a)^2}{A} + \frac{(y-b)^2}{B} + \frac{(z-c)^2}{C},$$

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta\cos\psi, \quad z = r\sin\theta\sin\psi;$$

si une fonction de (x, y, z) satisfait partout, à l'extérieur de σ, à l'équation $\delta\delta u = 0$, qu'elle soit continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et que, de plus, quand le point (x, y, z) s'éloigne à une très-grande distance de la surface σ, elle se réduise à la forme

$$MR + N\cos\theta + P\sin\theta\cos\psi + Q\sin\theta\sin\psi,$$

M, N, P, Q étant des constantes; cette fonction est alors la somme du premier et du second potentiel de deux couches qui recouvrent la surface.