JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-M.-C. DUHAMEL

Intégration d'une équation aux différences

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 222-224.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__222_0>

Intégration d'une Équation aux Différences;

Par M. J.-M.-C. DUHAMEL.

Dans l'un des derniers numéros de ce Journal, M. Binet a donné, par la considération des fonctions génératrices, une intégrale de l'équation

$$(1)\qquad T_n = T_{n-1} + T_{n-2}T_1 + T_{n-3}T_2 + \ldots + T_{n-1},$$

mais dans le cas seulement où l'on a $T_1 = 1$, circonstance qui avait lieu dans le problème de Géométrie qui conduisait à cette équation.

Lorsque M. Binet exposa sa solution à la Société Philomatique, je fis remarquer qu'il pourrait être utile de ne pas s'astreindre à la condition $T_1 = 1$; et l'auteur ne s'étant pas occupé de cette généralisation, je donnai, à la séance suivante, la formule que je vais faire connaître, et à laquelle j'avais été conduit en suivant la même marche que M. Binet.

Posons

$$(2)\qquad Z = 1 + T_1x + T_2x^2 + \ldots + T_mx \ + \text{etc} \ldots$$

et supposons x assez petit pour que cette série soit convergente.

En la multipliant par elle-même et ordonnant par rapport à x, on aura une série convergente, dont la somme sera égale à Z^2; ce qui donne

$$Z^2 = 1 + (T_1 + T_1)x + (T_2 + T_1T_1 + T_2)x^2 + \ldots + (T_m + T_mT_1 + \ldots + T_m)x^m + \text{etc.}, \ldots$$

ou, d'après l'équation (1),

$$Z^2 = 1 + T_2x + T_3x^2 + \ldots + T_{m+1}x^m + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$Z^2x = x + Z - 1 - T_1 x,$$

ou

$$Z^2 - \frac{1}{x}Z - 1 + T_1 + \frac{1}{x} = 0,$$

ce qui donne pour la valeur de la série Z, l'une de celles qui sont renfermées dans la formule

$$Z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x - 4(T_1 - 1)x^2}}{2x}.$$

Or, le signe supérieur du radical donnerait $Z = \infty$ pour $x = 0$, tandis que l'on doit trouver dans ce cas $Z = 1$. Donc la valeur de Z qui exprime la série (2), est

$$Z = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x - 4(T_1 - 1)x^2}}{2x}.$$

Développons le radical de la manière suivante

$$\sqrt{1 - 4x - 4x^2(T_1 - 1)} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \text{etc.}\ldots$$

et substituons ce développement dans la valeur de Z: le coefficient de x^n sera $-\frac{A_{n+1}}{2}$, et l'on aura par conséquent

$$(3) \qquad T_n = -\frac{A_{n+1}}{2}.$$

Or on a en général,

$$(1 + ax + bx^2)^{\frac{1}{2}} = [1 + x(a + bx)]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x(a + bx) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - p + 1\right)}{1.2\ldots\ldots p} x^p (a + bx)^p + \text{etc.}.$$

Les termes du second membre qui concourront à former le coefficient total de x^n, commenceront à la valeur de p, telle que l'on ait $2p = n$, ou $2p > n$, et se termineront à $p = n$. En réunissant les coefficients de x^n provenant de ces différents termes, et faisant $a = -4$, $b = -4(T_1 - 1)$, on connaîtra A_n, et par suite T_{n-1}, en vertu de l'équation (3). Remplaçant $n - 1$ par m, on aura la formule suivante, dans laquelle on a représenté $T_1 - 1$ par C,

$$
{}_m = \frac{1}{2}\left\{
\begin{array}{l}
\frac{1.1.3.5\ldots(2m-1)}{2.4.6.8\ldots(2m+2)}.4^{m+1} + \frac{1.1.3\ldots(2m-3)}{2.4.6\ldots.2m}.4^m.\frac{m}{1}C + \frac{1.1.3\ldots(2m-5)}{2.4.6\ldots 2m-2}4^{m-1}.\frac{(m-1)(m-2)}{1\;.\;2}C \\
\qquad\qquad + \frac{1.1.3\ldots(m-2)}{2.4.6\ldots.(m+1)}.4^{\frac{m+1}{2}}C^{\frac{m+1}{2}}, \text{ si } m \text{ est impair,} \\
\qquad \text{et} \quad + \frac{1.1.3\ldots.(m-1)}{2.4.6\ldots.(m+2)}4^{\frac{m+2}{2}}.\frac{m+2}{2}C^{\frac{m}{2}}, \text{ si } m \text{ est pair.}
\end{array}
\right.
$$

Telle est la valeur générale de T_m qui se déduit de l'équation (1), sans aucune hypothèse particulière. La constante C est tout-à-fait indéterminée ; et si l'on fait $m = 1$ dans l'équation (4), on retrouve

$$T_1 = C + 1.$$

T_1 peut donc être choisi arbitrairement ; mais c'est la seule indéterminée qui entre dans la valeur générale de T_m.

Si l'on suppose

$$T_1 = 1, \quad \text{on a} \quad C = 0,$$

et, en supprimant les facteurs communs égaux à 2 :

$$T_m = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{1.2.3\ldots(m+1)}.2^m;$$

c'est la valeur trouvée par M. Binet.