JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. LAMÉ

Mémoire sur les axes des surfaces isothermes du second degré, considérés comme des fonctions de la température

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 100-125.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__100_0>

MÉMOIRE

Sur les axes des surfaces isothermes du second degré, considérés comme des fonctions de la température;

PAR G. LAMÉ,

Professeur à l'École Polytechnique.

§ I.

L'utilité des transcendantes elliptiques s'est déjà fait sentir dans plusieurs questions de Physique mathématique; et tout porte à penser que leurs fonctions périodiques joueront un rôle au moins aussi important que les sinus d'arcs variables, dans l'intégration complète des équations aux différences partielles. Il est à désirer d'après cela que l'étude de ces expressions analytiques nouvelles soit basée sur une représentation, empruntée à la Géométrie ou à la Physique, et qui soit à la fois simple et naturelle. Or tel n'est pas, je crois, le caractère de la notation adoptée aujourd'hui.

Les trois fonctions principales d'une transcendante elliptique, de première espèce, sont représentées par $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$, et la transcendante elle-même par $\varphi = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$; θ est l'amplitude, k le module. Cette notation était commode et utile, quand il s'agissait de réduire en série les transcendantes elliptiques et leurs fonctions, afin d'obtenir leurs valeurs numériques, et de construire des tables; car pour cette recherche importante, établir un rapprochement avec les fonctions circulaires, si connues et si complétement étudiées, c'était trouver le seul moyen d'atteindre le but.

Les travaux d'Euler, de Lagrange, de Legendre, d'Abel et de

M. Jacobi, ont fait connaître les relations qui existent entre les fonctions elliptiques et celles trigonométriques ou exponentielles. Ces géomètres ont en outre donné des méthodes pour évaluer les nouvelles transcendantes. Et aujourd'hui qu'il s'agit d'utiliser cette conquête analytique, on peut se demander si la notation adoptée possède bien la simplicité et la symétrie indispensables, si elle se présente naturellement lors de l'intégration des équations aux différences partielles, le but le plus utile de toutes les fonctions transcendantes.

Or cette notation n'est ni naturelle, ni simple; car l'amplitude θ qui apparaît dans les expressions $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$, est une fonction très implicite de la transcendante qu'on veut surtout désigner, et qui est $\varphi=\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$. Cette amplitude n'est qu'un intermédiaire obligé pour rattacher la transcendante, qui se cache, aux arcs de cercle et à leurs lignes trigonométriques, qu'on est bien aise de retrouver. Cette notation n'est pas symétrique; car elle sépare complétement la fonction $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$ des deux autres, $\sin\theta$, $\cos\theta$, quoiqu'elle doive jouer un rôle analogue, et qu'elle possède des propriétés semblables.

Enfin, cette notation se présente péniblement à l'intégration des équations différentielles, où elle ne peut être employée qu'en exigeant des transformations de variables, qui détruisent toute symétrie dans les calculs. En effet, les équations aux différences partielles que l'on peut intégrer au moyen des transcendantes elliptiques, demandent à la fois pour coordonnées leurs trois variétés; et en exprimant ces coordonnées, à l'aide des formes qui n'appartiennent qu'à une seule, on introduit des imaginaires ou des dénominateurs qui bannissent toute élégance, et rendent le calcul pénible, sinon impossible, par l'absence de ses guides naturels, la symétrie et l'homogénéité.

Abel avait compris que la notation en usage, masquait les propriétés les plus importantes des fonctions qu'elle représentait; c'est surtout en écartant cet obstacle, par l'emploi d'une notation nouvelle et plus symétrique, qu'il put signaler la double périodicité, et qu'il fit les découvertes qui le placent au rang des grands géomètres. Enrichie par ses travaux et par ceux de M. Jacobi, la théorie des transcendantes elliptiques ne doit plus avoir la marche timide et incertaine qu'elle devait à l'ignorance de ses plus belles propriétés, et aux formes factices dont elle était revêtue. Il faut se décider maintenant à l'employer, comme celle des arcs de cercle ou des exponentielles, dans le calcul des phénomènes naturels. Mais il est indispensable, avant tout, de lui rendre la symétrie et l'homogénéité, sans lesquelles les progrès de ses applications seraient lents et imparfaits. Tel est le but que je me suis proposé d'atteindre dans ce Mémoire.

Dans mes recherches sur les surfaces isothermes, j'ai été conduit à une notation pour les transcendantes elliptiques, qui indique à l'analyse les coordonnées qu'il faut choisir, pour représenter l'équilibre et le mouvement de la chaleur, dans les corps solides terminés par des surfaces du second degré, et probablement aussi pour étudier tout autre phénomène physique dans les mêmes corps. Je vais faire voir que cette notation permet de démontrer, d'une manière élémentaire, les propriétés principales des trois variétés de transcendantes elliptiques de première espèce; et qu'elle donne des définitions physiques ou géométriques, des variables et des fonctions introduites, aussi simples, mais plus symétriques, et même plus naturelles que celles des lignes empruntées à la Trigonométrie.

Cette vérification et ces définitions, jointes à l'origine physico-mathématique de la notation dont il s'agit, lui donnent des avantages, qui, je l'espère, la feront prévaloir. D'ailleurs la solution complète d'un des cas généraux de l'équilibre de la chaleur dans un corps solide de forme ellipsoïdale, que je donnerai dans un autre Mémoire, prouvera jusqu'à l'évidence que cette notation est la seule forme que les transcendantes elliptiques puissent affecter dans les questions de physique mathématique.

§ II.

Les ellipsoïdes, au paramètre ρ plus grand que b et c, compris dans l'équation

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

forment un système de surfaces isothermes. C'est-à-dire que dans une enveloppe solide terminée par deux de ces surfaces, parois soumises à des foyers constants, qui entretiennent une température uniforme sur chacune d'elles, les surfaces d'égale température seront aussi comprises dans l'équation (1). Si l'on désigne par ε l'intégrale

$$(2)\qquad \int_c^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}} = \varepsilon,$$

la température V, variable dans l'intérieur de l'enveloppe, sera représentée par la formule

$$(3)\qquad V = \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{\varepsilon'' - \varepsilon'};$$

ε' étant la valeur de l'intégrale (2) correspondant au paramètre ρ' de la paroi intérieure, dont la température fixe est prise pour zéro; ε'' étant la valeur de la même intégrale pour le paramètre ρ'' de la paroi extérieure, dont la température pareillement fixe est prise pour l'unité.

Si l'on suppose que l'espace solide soit infini et plein, que la température zéro soit celle de la plaque elliptique dont le paramètre $\rho = c$, et que l'unité soit celle de la sphère de rayon infini qui correspond au paramètre $\rho = \infty$, on aura simplement

$$(4)\qquad V = \frac{\varepsilon}{\varpi},\quad \left(\varpi = \int_c^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}\right).$$

L'intégrale complète ϖ étant supposée connue, la transcendante ε (2), sera égale à cette constante, multipliée par la température qui existe sur l'ellipsoïde au paramètre ρ, dans l'espace solide qui vient d'être caractérisé; elle est donc proportionnelle à cette température, dont elle peut conséquemment partager la définition physique.

Les trois demi-axes ρ, $\sqrt{\rho^2-b^2}$, $\sqrt{\rho^2-c^2}$, de l'ellipsoïde, sont des fonctions de la température $\frac{\varepsilon}{\varpi}$ qui appartient à cette surface; nous les représenterons par $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$. Les sections principales correspondantes des ellipsoïdes isothermes ont toutes les mêmes foyers; $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2-b^2}$, sont les intervalles de ces foyers pour les ellipses dont les axes sont 2A et 2B, 2C et 2A, 2B et 2C; nous supposerons b moindre que c, ainsi A est le demi-grand axe, B le demi-axe moyen, et C le demi-petit axe de l'ellipsoïde isotherme sur lequel la température est $\frac{\varepsilon}{\varpi}$. Telle est la définition, physique et géométrique à la fois, des trois fonctions $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$.

L'équation (2) donne aisément

$$(5)\quad \frac{d\rho}{d\varepsilon} = \sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2},\quad \frac{d\sqrt{\rho^2-b^2}}{d\varepsilon} = \rho\sqrt{\rho^2-c^2},\quad \frac{d\sqrt{\rho^2-c^2}}{d\varepsilon} = \rho\sqrt{\rho^2-b^2},$$

et, en employant la notation précédente,

$$(6)\qquad \frac{dA(\varepsilon)}{d\varepsilon} = B(\varepsilon)C(\varepsilon),\quad \frac{dB(\varepsilon)}{d\varepsilon} = C(\varepsilon)A(\varepsilon),\quad \frac{dC(\varepsilon)}{d\varepsilon} = A(\varepsilon)B(\varepsilon).$$

Ainsi la variation de chacune des trois fonctions $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$, prise par rapport à la variable, est égale au produit des deux autres. On a de plus les équations

$$(7)\quad A^2(\varepsilon) - B^2(\varepsilon) = b^2,\quad A^2(\varepsilon) - C^2(\varepsilon) = c^2,\quad B^2(\varepsilon) - C^2(\varepsilon) = c^2 - b^2,$$

c'est-à-dire que la différence des carrés de deux quelconques des trois fonctions $A(\varepsilon)$, $B(\varepsilon)$, $C(\varepsilon)$ est constante.

§ III.

Les hyperboloïdes à une nappe, au paramètre ρ_1 plus grand que b et moindre que c, compris dans l'équation

$$(8)\qquad \frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_1^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \rho_1^2} = 1,$$

composent un système de surfaces isothermes: c'est-à-dire que dans une enveloppe solide indéfinie, formée par deux de ces surfaces, parois entretenues à des températures uniformes, les surfaces d'égale température seraient aussi comprises dans l'équation (8). Si l'on désigne par ε_1 l'intégrale

$$(9)\qquad \int_b^{\rho_1} \frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} = \varepsilon_1,$$

la température V_1 dans l'intérieur de l'enveloppe sera donnée par la formule

$$(10) \qquad V_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_1'}{\varepsilon_1'' - \varepsilon_1'},$$

ε_1' et ε_1'' étant les deux valeurs de l'intégrale (9), pour les parois intérieure et extérieure, ayant pour paramètres ρ_1', ρ_1'', et sur lesquelles on suppose que les températures soient zéro, et l'unité.

Si l'on suppose que l'espace solide soit infini et plein, que la température zéro appartienne à la plaque indéfinie, à vide elliptique, dont le paramètre est $\rho_1 = b$, et que la température 1 soit celle de la plaque hyperbolique à une nappe, dont le paramètre est $\rho_1 = c$, on aura simplement

$$(11) \qquad V_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varpi_1}, \quad \left(\varpi_1 = \int_b \frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}}\right).$$

L'intégrale complète ϖ_1 étant supposée connue, la transcendante ε_1 sera égale à cette constante, multipliée par la température qui existe sur l'hyperboloïde à une nappe, au paramètre ρ_1, dans l'espace solide qui vient d'être défini; elle croît donc comme cette température qui en est la définition physique.

Les trois demi-axes ρ_1, $\sqrt{\rho_1^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \rho_1^2}$, d'un hyperboloïde isotherme, desquels un seul est transverse, sont des fonctions de la température $\frac{\varepsilon_1}{\varpi_1}$, qui existe sur cette surface; nous les représenterons par $A_1(\varepsilon_1)$, $B_1(\varepsilon_1)$, $C_1(\varepsilon_1)$. Les sections principales correspondantes des hyperboloïdes (7) ont toutes les mêmes foyers; $2b$ est l'intervalle focal pour les ellipses dont les axes sont $2A_1$, $2B_1$; $2c$ et $2\sqrt{c^2 - b^2}$ sont les intervalles des foyers pour les hyperboles principales dont les axes sont $2C_1$ et $2A_1$, $2B_1$ et $2C_1$. Telle est la définition géométrique des fonctions A_1, B_1, C_1, dont nous étudierons plus loin les propriétés.

De l'équation (9), et de la notation qui précède, on déduit aisément :

$$(12) \quad \frac{dA_1(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = B_1(\varepsilon_1)C_1(\varepsilon_1), \quad \frac{dB_1(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = C_1(\varepsilon_1)A_1(\varepsilon_1), \quad \frac{dC_1(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = -A_1(\varepsilon_1)B_1(\varepsilon_1),$$

$$(13) \quad A_1^2(\varepsilon_1) - B_1^2(\varepsilon_1) = b^2, \quad A_1^2(\varepsilon_1) + C_1^2(\varepsilon_1) = c^2, \quad B_1^2(\varepsilon_1) + C_1^2(\varepsilon_1) = c^2 - b^2.$$

Ainsi la variation de l'une quelconque des trois fonctions A_1, B_1, C_1, par rapport à la variable, est égale au produit des deux autres, pris positivement pour A_1 et B_1, négativement pour C_1. La différence des carrés des deux fonctions A_1 et B_1 est constante; la somme des carrés de A_1 et C_1, de B_1 et C_1, est pareillement constante.

§ V.

Les hyperboloïdes à deux nappes, au paramètre ρ_2 moindre que b, compris dans l'équation

$$(14) \qquad \frac{x^2}{\rho_2^2} - \frac{y^2}{b^2-\rho_2^2} - \frac{z^2}{c^2-\rho_2^2} = 1,$$

forment un autre système de surfaces isothermes. Si l'on désigne par ϵ_2 l'intégrale

$$(15) \qquad \int_0^{\rho_2} \frac{d\rho_2}{\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}} = \epsilon_2,$$

la température V_2, dans l'enveloppe solide, aura pour valeur

$$(16) \qquad V_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_2'}{\epsilon_2'' - \epsilon_2'};$$

ϵ_2' et ϵ_2'' représentant les valeurs de l'intégrale (15) sur les deux parois, dont les températures fixes sont prises pour zéro et l'unité. Si l'on suppose que la température zéro appartienne au plan des yz, compris dans les surfaces (14) sous le paramètre $\rho_2 = 0$, et que celle prise pour unité existe sur la plaque hyperbolique à deux nappes, qui correspond à $\rho_2 = b$, on aura plus simplement:

$$(17) \qquad V_2 = \frac{\epsilon_2}{\varpi_2}, \quad \left(\varpi_2 = \int_0^b \frac{d\rho_2}{\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}\right).$$

La transcendante ϵ_2 sera proportionnelle à la température qui existe sur l'hyperboloïde au paramètre ρ_2, dans l'espace solide qui vient d'être caractérisé, et cette température pourra lui servir de définition. Les trois demi-axes ρ_2, $\sqrt{b^2-\rho_2^2}$, $\sqrt{c^2-\rho_2^2}$, d'un hyperboloïde isotherme (14), desquels les deux derniers sont transverses, sont des fonctions de la température qui existe sur cette surface; nous les représenterons par $A_2(\varepsilon_2)$, $B_2(\varepsilon_2)$, $C_2(\varepsilon_2)$, fonctions qui seront ainsi définies géométriquement.

De l'équation (15), et de la notation qui précède, on déduit facilement

$$(18)\quad \frac{dA_2(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}=B_2(\varepsilon_2)C_2(\varepsilon_2),\quad \frac{dB_2(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}=-C_2(\varepsilon_2)A_2(\varepsilon_2),\quad \frac{dC_2(\varepsilon_2)}{d\varepsilon_2}=-A_2(\varepsilon_2)B_2(\varepsilon_2),$$
$$(19)\quad A_2^2(\varepsilon_2)+B_2^2(\varepsilon_2)=b^2,\quad A_2^2(\varepsilon_2)+C_2^2(\varepsilon_2)=c^2,\quad B_2^2(\varepsilon_2)-C_2^2(\varepsilon_2)=c^2-b^2.$$

Ainsi la variation de l'une quelconque des trois fonctions A_2, B_2, C_2, par rapport à la variable, est égale au produit des deux autres, pris positivement pour A_2, négativement pour B_2 et C_2. La somme des carrés des fonctions A_2 et B_2, ou A_2 et C_2 est constante; la différence des carrés des fonctions B_2 et C_2 est pareillement constante.

§ V.

Il s'agit d'étudier les propriétés des fonctions A, B, C; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; des trois transcendantes ε, ε_1, ε_2, ou celles des axes des trois genres de surfaces isothermes du second degré, sur lesquelles existent les températures $\frac{\varepsilon}{\varpi}$, $\frac{\varepsilon_1}{\varpi_1}$, $\frac{\varepsilon_2}{\varpi_2}$. Nous commencerons par le dernier genre, auquel se rattache plus directement les transcendantes elliptiques définies dans le paragraphe préliminaire, ou qui était seul représenté par l'ancienne notation. Pour cela soit pris la fraction

$$(20)\qquad z=bc\,\frac{x\sqrt{b^2-y^2}\sqrt{c^2-y^2}\pm y\sqrt{b^2-x^2}\sqrt{c^2-x^2}}{b^2c^2-x^2y^2},$$

ou, en posant

$$b^2c^2=p,\quad b^2+c^2=q,\quad \sqrt{x^4-qx^2+p}=X,\quad \sqrt{y^4-qy^2+p}=Y,$$

plus simplement

$$(20)\ bis\qquad z=bc\,\frac{xY\pm yX}{p-x^2y^2}.$$

On aura

$$b^2 - z^2 = b^2 \frac{(p - x^2y^2)^2 - c^2(x^2\mathrm{Y}^2 + y^2\mathrm{X}^2 \pm 2xy\mathrm{XY})}{(p - x^2y^2)^2};$$

mais on a

$$x^2\mathrm{Y}^2 + y^2\mathrm{X}^2 = (p + x^2y^2)(x^2 + y^2) - 2qx^2y^2, \quad c^2q - p = c^4,$$

il viendra donc, en développant et remplaçant XY par sa valeur :

$$b^2 - z^2 = b^2 \frac{c^4[b^4 - b^2(x^2 + y^2) + x^2y^2] + x^2y^2[c^4 - c^2(x^2 + y^2) + x^2y^2] \mp 2c^2xy\mathrm{XY}}{(p - x^2y^2)^2},$$

et puisque les parenthèses des deux premiers termes du numérateur ne sont autres que les produits $(b^2 - x^2)(b^2 - y^2)$, $(c^2 - x^2)(c^2 - y^2)$, on conclut, directement pour $\sqrt{b^2 - z^2}$, et par symétrie pour $\sqrt{c^2 - z^2}$:

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{b^2 - z^2} &= b \frac{c^2\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{b^2 - y^2} \mp xy\sqrt{c^2 - x^2}\sqrt{c^2 - y^2}}{b^2c^2 - x^2y^2}, \\ \sqrt{c^2 - z^2} &= c \frac{b^2\sqrt{c^2 - x^2}\sqrt{c^2 - y^2} \mp xy\sqrt{b^2 - x^2}\sqrt{b^2 - y^2}}{b^2c^2 - x^2y^2}. \end{aligned} \right.$$

L'équation (20 *bis*) différentiée donne

$$\begin{aligned} dz = {} & bc \frac{(p + x^2y^2)\mathrm{XY} \pm yx[(p - x^2y^2)(2x^2 - q) + 2y^2\mathrm{X}^2]}{(p - x^2y^2)^2} \frac{dx}{\mathrm{X}} \\ & \pm bc \frac{(p + x^2y^2)\mathrm{XY} \pm yx[(p - x^2y^2)(2y^2 - q) + 2x^2\mathrm{Y}^2]}{(p - x^2y^2)^2} \frac{dy}{\mathrm{Y}}, \end{aligned}$$

on remarquera que, d'après les valeurs de X et de Y, on a

$$(p - x^2y^2)(2x^2 - q) + 2y^2\mathrm{X}^2 = (p - x^2y^2)(2y^2 - q) + 2x^2\mathrm{Y}^2 = 2p(x^2 + y^2) - q(p + x^2y^2),$$

ce qui réduit la différentielle dz à l'expression plus simple :

$$dz = bc \frac{(p + x^2y^2)\mathrm{XY} \mp xy[q(p + x^2y^2) - 2p(x^2 + y^2)]}{(p - x^2y^2)^2} \left(\frac{dx}{\mathrm{X}} \pm \frac{dy}{\mathrm{Y}}\right),$$

Or il est facile de voir que le facteur de la parenthèse du second membre, n'est autre chose que le produit des deux valeurs (21); on a donc

$$(22)\qquad \frac{dz}{\sqrt{b^2-z^2}\,\sqrt{c^2-z^2}} = \frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}\,\sqrt{c^2-x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}\,\sqrt{c^2-y^2}}.$$

Si l'on désigne par ζ, ξ, η, les intégrales

$$(23)\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{b^2-z^2}\sqrt{b^2-z^2}}=\zeta,\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}\sqrt{c^2-x^2}}=\xi,\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{b^2-y^2}\sqrt{c^2\ y^2}}=\eta,$$

et si l'on observe que pour $x=0$, $y=0$, la fonction ζ (20) est aussi nulle, on pourra mettre l'intégrale de l'équation (22) sous la forme

$$(24)\qquad \zeta = \xi \pm \eta.$$

Ainsi lorsque les limites supérieures des intégrales (23) sont liees entre elles par l'équation (20), ces intégrales elles-mêmes satisfont à la relation (24). Cette propriété remarquable, découverte par Euler, est l'origine de la théorie des transcendantes elliptiques; prise comme lemme préliminaire, elle peut aussi servir à étudier les propriétés des surfaces isothermes du second degré, ou plutôt celles de leurs axes, considérés comme des fonctions de la température.

§ VI.

La notation du § IV, les relations (23) et (24), permettent d'écrire les équations (20) et (21) ainsi qu'il suit :

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} A_2(\xi\pm\eta) &= bc\,\frac{A_2(\xi)B_2(\eta)C_2(\eta)\pm A_2(\eta)B_2(\xi)C_2(\xi)}{b^2c^2-A_2^2(\xi)\,A_2^2(\eta)},\\ B_2(\xi\pm\eta) &= b\,\frac{c^2B_2(\eta)B_2(\xi)\mp A_2(\eta)A_2(\xi)C_2(\eta)C_2(\xi)}{b^2c^2-A_2^2(\xi)A_2^2(\eta)},\\ C_2(\xi\pm\eta) &= c\,\frac{b^2C_2(\eta)C_2(\xi)\pm A_2(\eta)A_2(\xi)B_2(\eta)B_2(\xi)}{b^2c^2-A_2^2(\xi)A_2^2(\eta)};\end{aligned}\right.$$

formules qui donnent les axes de l'hyperboloïde à deux nappes, dont la température est la somme ou la différence des températures de deux autres surfaces isothermes du même groupe (14), en fonction des axes supposés connus de ces deux dernières surfaces.

A l'aide de ces formules, et de la définition (17) de ϖ_2. on forme aisément le tableau suivant

$$
(26)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
A_2(0) = 0, & B_2(0) = b, & C_2(0) = c, \\
A_2(\varpi_2) = b, & B_2(\varpi_2) = 0, & C_2(\varpi_2) = \sqrt{c^2-b^2}, \\
A_2(\pm\varepsilon) = \pm A_2(\varepsilon), & B_2(\pm\varepsilon) = B_2(\varepsilon), & C_2(\pm\varepsilon) = C_2(\varepsilon), \\
A_2(2\varpi_2) = 0, & B_2(2\varpi_2) = -b, & C_2(2\varpi_2) = c, \\
A_2(3\varpi_2) = -b, & B_2(3\varpi_2) = 0, & C_2(3\varpi_2) = \sqrt{c^2-b^2}, \\
A_2(4\varpi_2) = 0, & B_2(4\varpi_2) = b, & C_2(4\varpi_2) = c,
\end{array}
\right.
$$

d'où l'on tire les conclusions suivantes. Les fonctions A_2, B_2, C_2, sont périodiques. A_2 est nul au commencement, au milieu, et à la fin de la période $4\varpi_2$; positif dans la première moitié, négatif dans la seconde, il atteint sa plus grande valeur absolue b, au milieu même de ces moitiés; en un mot la fonction A_2 est analogue au sinus. La fonction B_2 est analogue au cosinus, et passe par les mêmes variations de signe. Quant à la fonction C_2, elle ne change pas de signe, et a pour valeurs positives extrêmes c et $\sqrt{c^2-b^2}$; la période qui lui correspond est $2\varpi_2$. Il résulte de ces périodicités que

$$
(27)\quad A_2(4i\varpi_2+\varepsilon_2) = A_2(\varepsilon_2),\quad B_2(4i\varpi_2+\varepsilon_2) = B_2(\varepsilon_2),\quad C_2(2i\varpi_2+\varepsilon_2) = C_2(\varepsilon_2),
$$

quel que soit le nombre entier i. La troisième ligne du tableau (26), indique que la seule des trois fonctions qui change de signe avec la variable est A_2; et c'est aussi la seule qui s'évanouisse quand la variable est nulle.

§ VII.

On obtiendra les formules relatives aux axes des surfaces isothermes du § III, en faisant subir aux équations (20), (21) et (22), la transformation suivante : désignant par u l'une quelconque des trois variables z, x ou y, on posera

$$
(28)\quad u = \sqrt{c^2-u'^2},\ \text{d'où}\ \sqrt{b^2-u^2} = \sqrt{u'^2-(c^2-b^2)},\quad \sqrt{c^2-u^2} = u',
$$

u' représentant la nouvelle variable z', x' ou y', comprise nécessairement entre $\sqrt{c^2-b^2}$ et c; d'où l'on conclut :

$$(29)\qquad \frac{du}{\sqrt{b^2-u^2}\sqrt{c^2-u^2}} = -\frac{du'}{\sqrt{u'^2-(c^2-b^2)}\sqrt{c^2-u'^2}};$$

la substitution des valeurs (28) de x, y, z, en x', y', z', étant faite dans les équations (20), (21) et (22), on fera $\sqrt{c^2-b^2}=b'$, d'où $b=\sqrt{c^2-b'^2}$, puis on supprimera les accents.

On aura ainsi

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{c^2-z^2} &= c\sqrt{c^2-b^2}\,\frac{y\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{c^2-x^2}\pm x\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{c^2-y^2}}{c^2(c^2-b^2)-(c^2-x^2)(c^2-y^2)},\\
\sqrt{z^2-b^2} &= \sqrt{c^2-b^2}\,\frac{c^2\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{y^2-b^2}\mp xy\sqrt{c^2-x^2}\sqrt{c^2-y^2}}{c^2(c^2-b^2)-(c^2-x^2)(c^2-y^2)},\\
z &= c\,\frac{(c^2-b^2)xy\mp\sqrt{c^2-x^2}\sqrt{c^2-y^2}\sqrt{b^2-x^2}\sqrt{b^2-y^2}}{c^2(c^2-b^2)-(c^2-x^2)(c^2-y^2)},
\end{aligned}\right.$$

au lieu des équations (20) et (21); et celle (22) deviendra

$$(31)\qquad \frac{dz}{\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{c^2-z^2}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{c^2-x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{c^2-y^2}},$$

si l'on désigne maintenant par ζ, ξ, η, les trois intégrales,

$$(32)\quad \int_b^z \frac{dz}{\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{c^2-z^2}}=\zeta,\ \int_b^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{c^2-x^2}}=\xi,\ \int_b^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{c^2-y^2}}=\eta,$$

l'équation (31) intégrée donnera

$$\zeta = \xi \pm \eta + g,$$

g représentant une constante; or lorsqu'on fait $x=c$, $y=c$, dans la fonction z, donnée par la troisième des équations (30), on a aussi $z=c$; c'est-à-dire que les intégrales (32) atteignent en même temps leur plus grande valeur, laquelle n'est autre que ϖ_1 (11); on a donc alors pour déterminer g, l'équation $0=\pm\varpi_1+g$, d'où $g=\mp\varpi_1$, et enfin

$$(31)\qquad \zeta = \xi \pm \eta \mp \varpi_1$$

§ VIII.

La relation (31), les valeurs (32), et la notation du § III, permettent d'écrire ainsi les équations (30), en renversant leur ordre

$$
(33)\quad \begin{cases}
A_1(\xi \pm \eta \mp \varpi_1) = c\,\dfrac{(c^2 - b^2)A_1(\xi)A_1(\eta) \mp B_1(\xi)B_1(\eta)C_1(\xi)C_1(\eta)}{c^2(c^2 - b^2) - C_1^2(\xi)C_1^2(\eta)},\\[2ex]
B_1(\xi \pm \eta \mp \varpi_1) = \sqrt{c^2 - b^2}\,\dfrac{c^2B_1(\xi)B_1(\eta) \mp A_1(\xi)A_1(\eta)C_1(\xi)C_1(\eta)}{c^2(c^2 - b^2) - C_1^2(\xi)C_1^2(\eta)},\\[2ex]
C_1(\xi \pm \eta \mp \varpi_1) = c\sqrt{c^2 - b^2}\,\dfrac{C_1(\xi)A_1(\eta)B_1(\eta) \pm C_1(\eta)A_1(\xi)B_1(\xi)}{c^2(c^2 - b^2) - C_1^2(\xi)C_1^2(\eta)}.
\end{cases}
$$

Si l'on fait dans ces équations $\eta = 0$, d'où $A_1(\eta) = b$, $B_1(\eta) = 0$, $C_1(\eta) = \sqrt{c^2 - b^2}$, elles donnent, en ayant égard aux relations (13) :

$$
(34)\quad A_1(\xi \pm \varpi_1) = \frac{cb}{A_1(\xi)},\quad B_1(\xi \pm \varpi_1) = \pm b\,\frac{C_1(\xi)}{A_1(\xi)},\quad C_1(\xi \pm \varpi_1) = \mp c\,\frac{B_1(\xi)}{A_1(\xi)}.
$$

Si à l'aide de ces formules on change, dans les équations (33), ξ en $(\xi \pm \varpi_1)$, et qu'on ait égard aux relations (13), pour simplifier le dénominateur, on trouve

$$
(35)\quad \begin{cases}
A_1(\xi \pm \eta) = b\,\dfrac{(c^2 - b^2)A_1(\xi)A_1(\eta) \pm B_1(\xi)B_1(\eta)C_1(\xi)C_1(\eta)}{c^2(c^2 - b^2) + B_1^2(\xi)B_1^2(\eta)},\\[2ex]
B_1(\xi \pm \eta) = b\sqrt{c^2 - b^2}\,\dfrac{A_1(\eta)C_1(\eta)B_1(\xi) \pm A_1(\xi)C_1(\xi)B_1(\eta)}{b^2(c^2 - b^2) + B_1^2(\xi)B_1^2(\eta)},\\[2ex]
C_1(\xi \pm \eta) = \sqrt{c^2 - b^2}\,\dfrac{b^2C_1(\xi)C_1(\eta) \mp A_1(\xi)A_1(\eta)B_1(\xi)B_1(\eta)}{b^2(c^2 - b^2) + B_1^2(\xi)B_1^2(\eta)},
\end{cases}
$$

formules qui donnent les axes de l'hyperboloïde à une nappe, dont la température est la somme ou la différence des températures de deux autres surfaces isothermes du même groupe (8), en fonction des axes, supposés connus, de ces deux dernières surfaces.

Les formules (34) et (35) permettent de composer facilement le tableau suivant :

$$(36)\quad \left\{\begin{array}{lll} A_1(0) = b, & B_1(0) = 0, & C_1(0) = \sqrt{c^2-b^2}, \\ A_1(\varpi_1) = c, & B_1(\varpi_1) = \sqrt{c^2-b^2}, & C_1(\varpi_1) = 0, \\ A_1(\pm\eta) = A_1(\eta), & B_1(\pm\eta) = \pm B_1(\eta), & C_1(\pm\eta) = C_1(\eta), \\ A_1(2\varpi_1) = b, & B_1(2\varpi_1) = 0, & C_1(2\varpi_1) = -\sqrt{c^2-b^2}, \\ A_1(3\varpi_1) = c, & B_1(3\varpi_1) = -\sqrt{c^2-b^2}, & C_1(3\varpi_1) = 0, \\ A_1(4\varpi_1) = b, & B_1(4\varpi_1) = 0, & C_1(4\varpi_1) = \sqrt{c^2-b^2}, \end{array}\right.$$

D'où l'on conclut que les fonctions A_1, B_1, C_1, sont périodiques : A_1 est toujours positif, et sa valeur oscille entre c et b, b et c; la période qui lui correspond est $2\varpi_1$, celle pour B_1 et C_1 est double ou $4\varpi_1$; B_1 est analogue au sinus, B_1 au cosinus. On a enfin :

$$(37)\quad A_1(2i\varpi_1+\epsilon_1) = A_1(\epsilon_1),\quad B_1(4i\varpi_1+\epsilon_1) = B_1(\epsilon_1),\quad C_1(4i\varpi_1+\epsilon_1) = C_1(\epsilon_1),$$

quel que soit le nombre entier i. D'après la troisième ligne du tableau (36), B_1 est la seule des trois fonctions qui change de signe avec la variable, comme c'est aussi la seule qui s'évanouisse avec elle.

§ IX.

On obtiendra les formules relatives aux axes des ellipsoïdes isothermes, en faisant subir aux équations (20), (21) et (22), la transformation suivante : u désignant l'une quelconque des variables z, x, y, on posera

$$(38)\quad u = \frac{bc}{u'},\ \text{d'où}\ \sqrt{b^2-u^2} = b\,\frac{\sqrt{u'^2-c^2}}{u'},\quad \sqrt{c^2-u^2} = c\,\frac{\sqrt{u'^2-b^2}}{u'},$$

u' étant la nouvelle variable correspondante z', x', ou y', nécessairement plus grande que c; d'où l'on conclut

$$(39)\qquad \frac{du}{\sqrt{b^2-u^2}\,\sqrt{c^2-u^2}} = -\,\frac{du'}{\sqrt{u'^2-b^2}\,\sqrt{u'^2-c^2}}.$$

On aura ainsi, au lieu des équations (20) et (21), en supprimant les accents :

$$(40)\left\{\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{x\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{y^2-c^2} \pm y\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}}{x^2y^2-b^2c^2},\\ \frac{\sqrt{z^2-c^2}}{z} &= \frac{xy\sqrt{x^2-c^2}\sqrt{y^2-c^2} \mp c^2\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{y^2-b^2}}{x^2y^2-b^2c^2},\\ \frac{\sqrt{z^2-b^2}}{z} &= \frac{xy\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{y^2-b^2} \mp b^2\sqrt{x^2-c^2}\sqrt{y^2-c^2}}{x^2y^2-b^2c^2},\end{aligned}\right.$$

si l'on observe que l'on a identiquement,

$$x^2(y^2-b^2)(y^2-c^2)-y^2(x^2-b^2)(x^2-c^2)=(y^2-x^2)(x^2y^2-b^2c^2).$$

La première des équations (40) donne facilement :

$$(41)\qquad z=\frac{x\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{y^2-c^2} \mp y\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}}{y^2-x^2};$$

et les deux autres équations (40), multipliées par cette dernière, donnent, en réduisant,

$$(42)\left\{\begin{aligned}\sqrt{z^2-b^2} &= \frac{y\sqrt{y^2-c^2}\sqrt{x^2-b^2} \mp x\sqrt{x^2-c^2}\sqrt{y^2-b^2}}{y^2-x^2},\\ \sqrt{z^2-c^2} &= \frac{y\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2} \mp y\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{y^2-c^2}}{y^2-x^2}.\end{aligned}\right.$$

Quant à l'équation (22), elle devient, par la formule de transformation (39), et après la suppression des accents,

$$(43)\quad \frac{dz}{\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2}}=\frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{y^2-c^2}}.$$

Si l'on désigne maintenant par ζ, ξ, η, les trois intégrales

$$(44)\int_c^z \frac{dz}{\sqrt{z^2-b^2}\sqrt{z^2-c^2}}=\zeta,\ \int_c^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-b^2}\sqrt{x^2-c^2}}=\xi,\ \int_c^y \frac{dy}{\sqrt{y^2-b^2}\sqrt{y^2-c^2}}=\eta,$$

l'équation (43) intégrée donnera

$$\zeta=\xi \pm \eta + g.$$

g étant une constante. Or lorsqu'on prend les signes supérieurs, la première des équations (40) indique que z devient infini, quand x et y sont tous les deux infinis, c'est-à-dire que les intégrales (44) atteignent ensemble leur valeur complète, laquelle n'est autre que ϖ (4); on a donc, dans ce cas, $g = -\varpi$. Lorsqu'on prend les signes inférieurs, la première équation (40) montre encore que pour $x = y$, quelle que soit d'ailleurs leur valeur commune, on a $z = \infty$, ou que $\zeta = \varpi$, quand $\xi = \eta$; on a donc alors $g = \varpi$. Donc en réunissant les deux cas

$$(45) \qquad \zeta = \xi \pm \eta \mp \varpi.$$

§ X.

La relation (45), les valeurs (44), et la notation du § II, permettent d'écrire ainsi les équations (41) et (42)

$$(46) \quad \begin{cases} A(\xi \pm \eta \mp \varpi) = \dfrac{A(\xi)\,B(\eta)\,C(\eta) \mp A(\eta)\,A(\xi)\,C(\xi)}{A^2(\eta) - A^2(\xi)}, \\ B(\xi \pm \eta \mp \varpi) = \dfrac{B(\xi)\,C(\eta)A(\eta) \mp B(\eta)\,C(\xi)\,B(\xi)}{A^2(\eta) - A^2(\xi)}, \\ C(\xi \pm \eta \mp \varpi) = \dfrac{C(\xi)\,A(\eta)\,B(\eta) \mp C(\eta)\,A(\xi)\,B(\xi)}{A^2(\eta) - A^2(\xi)}. \end{cases}$$

D'où l'on conclut, en faisant

$$\eta = 0,\ A(\eta) = c,\ B(\eta) = \sqrt{c^2 - b^2},\ C(\eta) = 0,$$

et ayant égard aux relations (7) :

$$(47)\ A(\xi \pm \varpi) = \mp c\frac{B(\xi)}{C(\xi)},\ B(\xi \pm \varpi) = \mp \sqrt{c^2 - b^2}\frac{A(\xi)}{C(\xi)},\ C(\xi \pm \varpi) = -c\frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{C(\xi)}.$$

Si, à l'aide de ces formules, on change dans les équations (46), ξ en $\xi \pm \varpi$, et que l'on simplifie le dénominateur par les relations (7), on trouve

$$(48) \quad \begin{cases} A(\xi \pm \eta) = c\dfrac{(c^2 - b^2)\,A(\xi)\,A(\eta) \pm B(\xi)\,B(\eta)\,C(\xi)\,C(\eta)}{c^2(c^2 - b^2) - C^2(\eta)\,C^2(\xi)}, \\ B(\xi \pm \eta) = \sqrt{c^2 - b^2}\dfrac{c^2B(\xi)\,B(\eta) \pm A(\xi)\,A(\eta)\,C(\xi)\,C(\eta)}{c^2(c^2 - b^2) - C^2(\eta)\,C^2(\xi)}, \\ C(\xi \pm \eta) = c\sqrt{c^2 - b^2}\dfrac{C(\xi)\,A(\eta)\,B(\eta) \pm C(\eta)\,A(\xi)\,B(\xi)}{c^2(c^2 - b^2) - C^2(\eta)\,C^2(\xi)}, \end{cases}$$

formules qui donnent les axes de l'ellipsoïde, dont la température est la somme ou la différence des températures de deux autres ellipsoïdes du même groupe (1), en fonction des axes supposés connus de ces deux dernières surfaces isothermes.

Les formules (48), (47), conduisent au tableau suivant :

$$
(49)\quad \left\{
\begin{array}{l}
A(0) = 0, \qquad B(0) = \sqrt{c^2 - b^2}, \qquad C(0) = 0, \\
\qquad A(\varpi) = B(\varpi) = C(\varpi) = \pm\,\infty, \\
A(\pm\,n) = A(n), \quad B(\pm\,n) = B(n), \qquad C(\pm\,n) = \pm\,C(n), \\
A(2\varpi) = -c, \quad B(2\varpi) = -\sqrt{c^2-b^2}, \quad C(2\varpi) = 0, \\
\qquad A(3\varpi) = B(3\varpi) = C(3\varpi) = \pm\,\infty, \\
A(4\varpi) = c, \qquad B(4\varpi) = \sqrt{c^2-b^2}, \quad C(4\varpi) = 0.
\end{array}
\right.
$$

D'où l'on conclut que les fonctions A, B, C, sont périodiques. A et B sont analogues à l'expression $\frac{1}{\cos\varphi}$, ou à séc φ, leur période 4ϖ correspondant à une circonférence entière; comme séc φ, ces fonctions passent du positif au négatif par l'infini. La fonction C passe du positif au négatif à la fois par zéro et l'infini, comme tang φ; sa période est seulement 2ϖ. On a donc

$$(50)\quad A(4i\varpi+\varepsilon) = A(\varepsilon), \quad B(4i\varpi+\varepsilon) = B(\varepsilon), \quad C(2i\varpi+\varepsilon) = C(\varepsilon),$$

quel que soit le nombre entier i. D'après la troisième ligne du tableau (49), C est la seule des trois fonctions qui change de signe avec la variable, et est aussi la seule qui s'évanouisse en même temps qu'elle.

§ XI.

Les intégrales définies ϖ, ϖ_1, ϖ_2, sont des fonctions des constantes b et c. Elles ont des relations très simples qu'il importe d'établir. Les formules de transformation (38) conduisent à l'équation différentielle (39) qui intégrée donne

$$(51)\quad \int_0^u \frac{du}{\sqrt{b^2-u^2}\sqrt{c^2-u^2}} + \int_c^{u'} \frac{du'}{\sqrt{u'^2-b^2}\sqrt{c^2-u'^2}} = g.$$

g étant une constante. Or lorsque $u' = c$, $u = b$ d'après les formules (38); c'est-à-dire que la seconde des intégrales disparaissant dans le premier membre de l'équation précédente, la première atteint sa valeur maxima, ou ϖ_2; on a donc $g = \varpi_2$. D'un autre côté, quand $u' = \infty$, $u = 0$ d'après les mêmes formules (38); c'est-à-dire que dans l'équation (51) la première intégrale s'évanouit, quand la seconde acquiert sa plus grande valeur, ou ϖ; on a donc aussi $g = \varpi$. Ainsi

$$(52)\quad \varpi_2 = \varpi = \int_0^b \frac{d\alpha}{\sqrt{b^2 - \alpha^2}\sqrt{c^2 - \alpha^2}} = \int_c^\infty \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 - b^2}\sqrt{\beta^2 - c^2}}.$$

Si l'on représente par φ et φ' les deux intégrales de l'équation (51), on aura

$$\varphi + \varphi' = \varpi, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi' = \varpi - \varphi.$$

Les formules (38) écrites en employant la notation des § II et IV, donneront donc

$$(53)\left\{\begin{aligned} &A_2(\varphi) = \frac{bc}{A(\varpi - \varphi)}, \quad B_2(\varphi) = b\frac{C(\varpi - \varphi)}{A(\varpi - \varphi)}, \quad C_2(\varphi) = c\frac{B(\varpi - \varphi)}{A(\varpi - \varphi)}, \\ &A(\varphi) = \frac{bc}{A_2(\varpi - \varphi)}, \quad B(\varphi) = b\frac{C_2(\varpi - \varphi)}{A_2(\varpi - \varphi)}, \quad C(\varphi) = c\frac{B_2(\varpi - \varphi)}{A_2(\varpi - \varphi)}. \end{aligned}\right.$$

Or les équations (47) donnent facilement

$$A(\varpi - \varphi) = c\frac{B(\varphi)}{C(\varphi)}, \quad B(\varpi - \varphi) = \sqrt{c^2 - b^2}\,\frac{A(\varphi)}{C(\varphi)}, \quad C(\varpi - \varphi) = c\,\frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{C(\varphi)};$$

Ces formules (53) deviennent alors

$$(54)\left\{\begin{aligned} &A_2(\varphi) = b\frac{C(\varphi)}{B(\varphi)}, \quad B_2(\varphi) = \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{B(\varphi)}, \quad C_2(\varphi) = \sqrt{c^2 - b^2}\,\frac{A(\varphi)}{B(\varphi)}, \\ &A(\varphi) = b\frac{C_2(\varphi)}{B_2(\varphi)}, \quad B(\varphi) = \frac{b\sqrt{c^2 - b^2}}{B_2(\varphi)}, \quad C(\varphi) = \sqrt{c^2 - b^2}\,\frac{A_2(\varphi)}{B_2(\varphi)}, \end{aligned}\right.$$

et comme $\varpi_2 = \varpi$, ces formules permettent de déduire des axes donnés d'un ellipsoïde isotherme (1), ceux de l'hyperboloïde à deux nappes (14), qui possède la même température, ou inversement.

§ XII.

Les formules de transformation (28) conduisent à l'équation différentielle (29) qui intégrée donne

$$(55)\qquad \int_0^u \frac{du}{\sqrt{b^2-u^2}\sqrt{c^2-u^2}} + \int_{\sqrt{c^2-b^2}}^{u'} \frac{du'}{\sqrt{u'^2-(c^2-b^2)}\sqrt{c^2-u'^2}} = g;$$

g étant une constante à déterminer.

La température exprimée au moyen de la seconde intégrale, se rapporte à un nouveau système de surfaces isothermes, qui diffère de celui que nous avons considéré, en ce que la constante b est remplacée par $\sqrt{c^2-b^2}$, et $\sqrt{c^2-b^2}$ par b; comme il est nécessaire, dans ce qui va suivre, d'employer simultanément ces deux systèmes, convenons d'affecter d'un accent supérieur, les constantes, les variables et les fonctions qui appartiennent au nouveau.

Cela posé, lorsque $u=b$, $u'=\sqrt{c^2-b^2}=b'$, d'après les formules (28), c'est-à-dire que la seconde intégrale, dans l'équation précédente, s'évanouit quand la première atteint sa plus grande valeur, ou ϖ_2; on a donc $g=\varpi_2$. D'un autre côté quand $u'=c$, $u=0$ d'après les mêmes formules (28); c'est-à-dire que la première intégrale disparaît lorsque la seconde acquiert sa valeur maxima, ou ϖ'_1; on a donc aussi $g=\varpi'_1$. Ainsi

$$(56)\qquad \varpi_2 = \varpi'_1 \quad \text{ou} \quad \varpi_1 = \varpi'_2.$$

Puisque $\varpi_2 = \varpi$ (52), on a $\varpi'_1 = \varpi$ ou $\varpi_1 = \varpi'$, convenons donc de ne conserver que les deux quantités ϖ et ϖ', qui sont

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned}
\varpi &= \int_0^b \frac{d\alpha}{\sqrt{b^2-\alpha^2}\sqrt{c^2-\alpha^2}} = \int_{\sqrt{c^2-b^2}}^c \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2-(c^2-b^2)}\sqrt{c^2-\beta^2}} \\
&= \int_c^\infty \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^2-b^2}\sqrt{\gamma^2-c^2}} = \varpi'_1 = \varpi_2, \\
\varpi' &= \int_0^{\sqrt{c^2-b^2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{c^2-b^2-\alpha^2}\sqrt{c^2-\alpha^2}} = \int_b^c \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2-b^2}\sqrt{c^2-\beta^2}} \\
&= \int_c^\infty \frac{d\gamma}{\sqrt{\gamma^2-(c^2-b^2)}\sqrt{\gamma^2-c^2}} = \varpi_1 = \varpi'_2.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on représente par φ et φ' les deux intégrales de l'équation (55), on aura $\varphi+\varphi'=\varpi$, $\varphi=\varpi-\varphi'$. Les formules (28) écrites en employant les notations des paragraphes 2 et 3, et ayant soin d'accentuer les fonctions du nouveau système, donneront donc

$$(58)\quad A'_1(\varphi')=C_2(\varpi-\varphi'),\quad B'_1(\varphi')=B_2(\varpi-\varphi'),\quad C'_1(\varphi')=A_2(\varpi-\varphi'),$$

formules qui lient les axes des deux systèmes généraux de surfaces isothermes, pour lesquels la constante b^2 a deux valeurs différentes dont la somme est c^2.

§ XIII.

Les liaisons établies par les formules (53), (54) et (58), entre les trois groupes de fonctions (A, B, C), (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), ne sont pas les seules ; lorsqu'on donne des valeurs imaginaires à leurs variables, on trouve d'autres relations qui conduisent à des conséquences remarquables.

Si dans l'intégrale (15) on pose successivement $\rho_2=\alpha\sqrt{-1}$, $\alpha=\sqrt{\beta^2-c^2}$, il vient

$$\varepsilon_2=\int_0^{\rho_2}\frac{d\rho_2}{\sqrt{b^2-\rho_2^2}\sqrt{c^2-\rho_2^2}}=\sqrt{-1}\int_0^{\alpha}\frac{d\alpha}{\sqrt{b^2+\alpha^2}\sqrt{c^2+\alpha^2}}$$
$$=\sqrt{-1}\int_{c}^{\beta}\frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2-c^2}\sqrt{\beta^2-(c^2-b^2)}},$$

de là on conclut que $\beta=\sqrt{c^2+\alpha^2}=\sqrt{c^2-\rho_2^2}=C_2(\varepsilon_2)$, est aussi égal à $A'(-\varepsilon_2\sqrt{-1})$; on a donc $A'(\eta)=C_2(\eta\sqrt{-1})$, en représentant $-\varepsilon_2\sqrt{-1}$ par η, et à l'aide des équations (7), on obtient le groupe suivant :

$$(59)\quad A'(\eta)=C_2(\eta\sqrt{-1}),\quad B'(\eta)=B_2(\eta\sqrt{-1}),\quad C'(\eta)=\sqrt{-1}\,A_2(\eta\sqrt{-1}).$$

Si dans l'intégrale (9) on pose successivement $\sqrt{\rho_1^2-b^2}=\alpha\sqrt{-1}$, $\sqrt{\alpha^2+(c^2-b^2)}=\beta$, il vient

$$\varepsilon_1 = \int_b^{\rho_1} \frac{d\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \rho_1^2}} = \sqrt{-1}\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{b^2 - \alpha^2}\sqrt{\alpha^2 + (c^2 - b^2)}}$$
$$= \sqrt{-1}\int_{\sqrt{c^2-b^2}}^{\beta} \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2 - (c^2 - b^2)}\sqrt{c^2 - \beta^2}};$$

Ainsi $\beta = \sqrt{c^2 + \alpha^2 - b^2} = \sqrt{c^2 - \rho_1^2} = C_1(\varepsilon_1)$, est en même temps égal à $A_1'(-\varepsilon\sqrt{-1})$, ou bien $A_1'(\eta) = C_1(\eta\sqrt{-1})$; et, à l'aide des équations (13) on obtient

$$(60)\quad A_1'(\eta) = C_1(\eta\sqrt{-1}),\quad B_1'(\eta) = \sqrt{-1}\,B_1(\eta\sqrt{-1}),\quad C_1'(\eta) = A_1(\eta\sqrt{-1}).$$

§ XIV.

Les formules (59) et (60) démontrent la double périodicité découverte par Abel. En effet, d'après les identités (50), dans les formules (59), les premiers membres $A'(\eta)$, $B'(\eta)$, $C'(\eta)$, ne changent pas lorsqu'on augmente η d'un multiple de $4\varpi'$ pour A' et B', de $2\varpi'$ pour C'; les seconds membres jouissent donc de la même propriété, c'est-à-dire que les fonctions A_1, B_1, C_1 ne changent pas quand on ajoute à leur variable un multiple de $2\varpi'\sqrt{-1}$ pour A_1, de $4\varpi'\sqrt{-1}$ pour B_1 et C_1.

Réciproquement, dans les mêmes formules (59), et d'après les identités (27), les seconds membres ne changeront pas si l'on retranche de $\eta\sqrt{-1}$ un multiple de 4ϖ pour A_1 et B_1, de 2ϖ pour C_1, ou si l'on y change η en $(\eta + 4n\varpi\sqrt{-1})$, $(\eta + 2n\varpi\sqrt{-1})$, n étant entier; les premiers membres doivent donc jouir de la même propriété, c'est-à-dire que les fonctions A', B', C', conservent les mêmes valeurs quand leur variable augmente d'un multiple de $2\varpi\sqrt{-1}$ pour A', de $4\varpi\sqrt{-1}$ pour B' et C'; ou enfin, les fonctions A, B, C, restent les mêmes lorsqu'on ajoute à leur variable $2n'\varpi'\sqrt{-1}$ dans A, $4n'\varpi'\sqrt{-1}$ dans B et C, n' étant un nombre entier.

Dans les formules (60), d'après les identités (37) où $\varpi_1 = \varpi'$, les premiers membres ne changeront pas si l'on augmente η d'un multiple 2ϖ pour A'_1, de 4ϖ pour B'_1 et C'_1 ; les seconds membres jouissent donc de la même propriété, c'est-à-dire que les fonctions A_1, B_1, C_1, conservent les mêmes valeurs lorsqu'on ajoute à leur variable un multiple de $4\varpi\sqrt{-1}$ pour A_1 et B_1, de $2\varpi\sqrt{-1}$ pour C_1.

Ces conséquences, rapprochées des équations (27), (37) et (50), conduisent aux identités suivantes :

$$
(61)\quad\left\{\begin{array}{l}
A(\eta+4n\varpi+2n'\varpi'\sqrt{-1})=A(\eta),\quad B(\eta+4n\varpi+4n'\varpi'\sqrt{-1})=B(\eta),\\
\qquad C(\eta+2n\varpi+4n'\varpi'\sqrt{-1})=C(\eta),\\
A_1(\eta+2n\varpi'+4n'\varpi\sqrt{-1})=A_1(\eta),\quad B_1(\eta+4n\varpi'+4n'\varpi\sqrt{-1})=B_1(\eta),\\
\qquad C_1(\eta+4n\varpi'+2n'\varpi\sqrt{-1})=C_1(\eta),\\
A_2(\eta+4n\varpi+2n'\varpi'\sqrt{-1})=A_2(\eta),\quad B_2(\eta+4n\varpi+4n'\varpi'\sqrt{-1})=B_2(\eta),\\
\qquad C_2(\eta+2n\varpi+4n'\varpi'\sqrt{-1})=C_2(\eta),
\end{array}\right.
$$

dans lesquelles n et n' représentent deux nombres entiers quelconques, positifs ou négatifs. Il y a donc, pour chacune des fonctions que nous étudions, une période réelle et une période imaginaire.

§ XV.

Parmi toutes les formules donnant les axes des sommes ou des différences de température, celles (46) sont les plus simples; car elles sont dégagées des constantes b et c, et les deux termes des fractions qui composent leurs seconds membres ont deux dimensions de moins que dans les autres. Or, on peut ramener à la même forme toutes les relations analogues de ce mémoire; cette généralisation nous paraît assez importante pour être démontrée.

Soit posé généralement, et pour simplifier :

$$
(62)\quad\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{A_i(\zeta)\,B_i(\eta)\,C_i(\eta)\pm A_i(\eta)\,B_i(\xi)\,C_i(\xi)}{A_i^2(\eta)-A_i^2(\xi)}=U_i(\eta,\pm\xi),\\[2ex]
\dfrac{B_i(\xi)\,C_i(\eta)\,A_i(\eta)\pm B_i(\eta)\,C_i(\xi)\,A_i(\xi)}{A_i^2(\eta)-A_i^2(\xi)}=V_i(\eta,\pm\xi),\\[2ex]
\dfrac{C_i(\xi)\,A_i(\eta)\,B_i(\eta)\pm C_i(\eta)\,A_i(\xi)\,B_i(\xi)}{A_i^2(\eta)-A_i^2(\xi)}=W_i(\eta,\pm\xi),
\end{array}\right.
$$

l'accent i devant être supprimé quand il s'agira des fonctions A, B, C, étant 1 pour celles A_1, B_1, C_1, et 2 pour celles A_2, B_2, C_2

La troisième ligne du tableau (49) permettra d'écrire ainsi les formules (46) :

$$(63)\quad \left\{\begin{array}{l} U(\eta, \mp \xi) = A[\varpi - (\eta \pm \xi)], \\ V(\eta, \mp \xi) = B[\varpi - (\eta \pm \xi)], \\ W(\eta, \mp \xi) = C[\varpi - (\eta \pm \xi)]. \end{array}\right.$$

Si l'on change b en $\sqrt{c^2 - b^2}$ dans les équations (63), ou par la convention établie, si l'on accentue ϖ et toutes les fonctions A', B', C', qui s'y trouvent, on pourra les remplacer ensuite par des fonctions A_2, B_2, C_2, d'après les relations (59), puis changer $\eta\sqrt{-1}$, $\xi\sqrt{-1}$ en η et ξ; ce qui donnera, puisque $C_2^2(\eta) - C_2^2(\xi) = A_2^2(\xi) - A_2^2(\eta)$ [formules (19)] :

$$(64)\quad \left\{\begin{array}{l} U_2(\eta, \mp \xi) = \pm A_2[\varpi'\sqrt{-1} - (\eta \pm \xi)], \\ V_2(\eta, \mp \xi) = \sqrt{-1}\, B_2[\varpi'\sqrt{-1} - (\eta \pm \xi)], \\ W_2(\eta, \mp \xi) = \sqrt{-1}\, C_2[\varpi'\sqrt{-1} - (\eta \pm \xi)]. \end{array}\right.$$

Si l'on change b en $\sqrt{b^2 - c^2}$ dans les formules (32), conséquemment $\varpi_1 = \varpi'$ en ϖ, et qu'on accentue toutes les fonctions A_1, B_1, C_1, on pourra ensuite remplacer les fonctions A_1', B_1', C_1', par des fonctions A_1, B_1, C_1, à l'aide des relations (60), puis changer $\eta\sqrt{-1}$, $\xi\sqrt{-1}$, en η et ξ, ce qui donnera d'abord :

$$A_1(\xi \pm \eta \mp \varpi\sqrt{-1}) = cb\sqrt{-1}\, \frac{A_1(\xi)B_1(\eta)C_1(\eta) \pm A_1(\eta)B_1(\xi)C_1(\xi)}{c^2b^2 - A_1^2(\xi)A_1^2(\eta)},$$

$$B_1(\xi \pm \eta \mp \varpi\sqrt{-1}) = b\sqrt{-1}\, \frac{c^2B_1(\xi)B_1(\eta) \pm A_1(\xi)A_1(\eta)C_1(\xi)C_1(\eta)}{c^2b^2 - A_1^2(\xi)A_1^2(\eta)},$$

$$C_1(\xi \pm \eta \mp \varpi\sqrt{-1}) = c\, \frac{b^2C_1(\xi)C_1(\eta) \pm A_1(\xi)A_1(\eta)B_1(\xi)B_1(\eta)}{c^2b^2 - A_1^2(\xi)A_1^2(\eta)},$$

et si l'on change dans ces équations η en $(\eta - \varpi')$, en remarquant que

$$A_1(\eta - \varpi') = \frac{cb}{A_1(\eta)}, \quad B_1(\eta - \varpi') = -b\,\frac{C_1(\eta)}{A_1(\eta)}, \quad C_1(\eta - \varpi') = c\,\frac{B_1(\eta)}{A_1(\eta)},$$

d'après les formules (32), il vient, toute réduction faite, et en faisant usage de la troisième ligne du tableau (36) :

$$(65)\quad \begin{cases} U_1(\eta, \mp\xi) = \sqrt{-1}\, A_1[\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\eta \pm \xi)], \\ V_1(\eta, \mp\xi) = \mp \sqrt{-1}\, B_1[\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\eta \pm \xi)], \\ W_1(\eta, \mp\xi) = C_1[\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - (\eta \pm \xi)]. \end{cases}$$

§ XVI.

Les formules (63), (64), (65), comme étant les plus simples dans chaque groupe de fonctions, indiquent une sorte de complément naturel pour leurs variables, mais qui diffère de l'une à l'autre : pour les fonctions A, B, C, le complément de la variable ε serait $(\varpi - \varepsilon)$; pour A_1, B_1, C_1, le complément de ε_1 serait $(\varpi' + \varpi\sqrt{-1} - \varepsilon_1)$, enfin pour A_2, B_2, C_2, le complément de ε_2 serait $(\varpi'\sqrt{-1} - \varepsilon_2)$.

Si l'on convient de désigner respectivement ces trois compléments par $D\varepsilon$, $D_1\varepsilon_1$, $D_2\varepsilon_2$, on déduira facilement des formules précédentes, en y faisant $\xi = 0$:

$$(66)\quad \begin{cases} A(D\eta) = c\,\dfrac{B(\eta)}{C(\eta)}, \quad B(D\eta) = \sqrt{c^2 - b^2}\,\dfrac{A(\eta)}{B(\eta)}, \quad C(D\eta) = \dfrac{c\sqrt{c^2-b^2}}{C(\eta)}, \\ A_1(D_1\eta) = \dfrac{b}{\sqrt{-1}}\,\dfrac{C_1(\eta)}{B_1(\eta)}, \quad B_1(D_1\eta) = \dfrac{b}{\sqrt{-1}}\,\dfrac{\sqrt{c^2-b^2}}{B_1(\eta)}, \quad C_1(D_1\eta) = \sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{A_1(\eta)}{B_1(\eta)}, \\ A_2(D_2\eta) = \dfrac{-bc}{A_2(\eta)}, \quad B_2(D_2\eta) = \dfrac{b}{\sqrt{-1}}\,\dfrac{C_2(\eta)}{A_2(\eta)}, \quad C_2(D_2\eta) = \dfrac{c}{\sqrt{-1}}\,\dfrac{B_2(\eta)}{A_2(\eta)}, \end{cases}$$

Les formules (53) rapprochées de la dernière ligne du tableau (66) démontrent aisément le groupe suivant

$$(67)\quad A(\varepsilon) = A_2(\varpi - \varpi'\sqrt{-1} - \varepsilon), \quad B(\varepsilon) = \sqrt{-1}\, B_2(\varpi - \varpi'\sqrt{-1} - \varepsilon),$$
$$C(\varepsilon) = \sqrt{-1}\, C_2(\varpi - \varpi'\sqrt{-1} - \varepsilon).$$

Les relations (58 et (59) donnent d'abord

$$A_1(\varepsilon_1) = C_2'(\varpi' - \varepsilon_1), \qquad B_1(\varepsilon_1) = B_2'(\varpi' - \varepsilon_1), \qquad C_1(\varepsilon_1) = A_2'(\varpi' - \varepsilon_1),$$

$$A_2'(\eta) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, C(-\eta\sqrt{-1}), \quad B_2'(\eta) = B(-\eta\sqrt{-1}), \quad C_2'(\eta) = A(-\eta\sqrt{-1}),$$

on en conclut aisément, en changeant dans la dernière ligne η en $(\varpi' - \varepsilon_1)$,

$$(68)\quad A_1(\varepsilon_1) = A(\varepsilon_1\sqrt{-1} - \varpi'\sqrt{-1}), \quad B_1(\varepsilon_1) = B(\varepsilon_1\sqrt{-1} - \varpi'\sqrt{-1}),$$
$$C_1(\varepsilon_1) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, C(\varepsilon_1\sqrt{-1} - \varpi'\sqrt{-1}).$$

Enfin un rapprochement facile des groupes (66) et (67) donne

$$(69)\quad A_1(\varepsilon_1)=A_2(\varpi-\varepsilon_1\sqrt{-1}),\ B_1(\varepsilon_1)=\sqrt{-1}\,B_2(\varpi-\varepsilon_1\sqrt{-1}),\ C_1(\varepsilon_1)=C_2(\varpi-\varepsilon_1\sqrt{-1}).$$

Ces formules (67), (68), (69) fournissent le moyen de remplacer les fonctions de l'un des trois systèmes partiels (A, B, C), (A_1, B_1, C_1), (A_2, B_2, C_2), par celles correspondantes d'un autre de ces systèmes.

§ XVII.

On peut écrire à la fois les trois groupes (63), (64) et (65) de la manière suivante

$$(70)\quad \begin{cases} U_i(\eta, \mp\xi)=A[D(\eta\pm\xi)], & \text{ou} =\sqrt{-1}\,A_1[D_1(\eta\pm\xi)], & \text{ou} =\pm A_2[D_2(\eta\pm\zeta)], \\ V_i(\eta, \mp\xi)=B[D(\eta\pm\xi)], & \text{ou} =\mp\sqrt{-1}\,B_1[D_1(\eta\pm\xi)], & \text{ou} =\sqrt{-1}\,B_2[D_2(\eta\pm\xi)], \\ W_i(\eta, \mp\xi)=\mp C[D(\eta\pm\xi)], & \text{ou} = C_1[D_1(\eta\pm\xi)], & \text{ou} =\sqrt{-1}\,C_2[D_2(\eta\pm\xi)], \end{cases}$$

suivant que i manque, ou $=0$, ou $=1$. Ou bien, d'après les valeurs (66) ;

$$(71)\quad \begin{cases} U_i(\eta, \mp\xi)= c\,\dfrac{B(\eta\pm\xi)}{C(\eta\pm\xi)}, & \text{ou} = b\,\dfrac{C_1(\eta\pm\xi)}{B_1(\eta\pm\xi)}, & \text{ou} =\pm\dfrac{bc}{A_2(\eta\pm\xi)} \\ V_i(\eta, \mp\xi)=\sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{A(\eta\pm\xi)}{C(\eta\pm\xi)}, & \text{ou} =\pm\dfrac{b\sqrt{c^2-b^2}}{B_1(\eta\pm\xi)}, & \text{ou} = b\,\dfrac{C_2(\eta\pm\xi)}{A_2(\eta\pm\xi)}, \\ W_i(\eta, \mp\xi)=\mp\dfrac{c\sqrt{c^2-b^2}}{C(\eta\pm\xi)}, & \text{ou} =\sqrt{c^2-b^2}\,\dfrac{A_1(\eta\pm\xi)}{B_1(\eta\pm\xi)}, & \text{ou} = c\,\dfrac{B_2(\eta\pm\xi)}{A_2(\eta\pm\xi)}, \end{cases}$$

équations dégagées d'imaginaires et de compléments.

On déduirait facilement des équations (71), par des éliminations très simples, les formules (48), (35) et (25), lesquelles peuvent d'ailleurs s'écrire ainsi qu'il suit, à l'aide des valeurs (66) :

$$(72)\quad \begin{cases} U_i(D_i\xi, \pm\eta) = A(\xi\pm\eta), & \text{ou} = \sqrt{-1}\,A_1(\xi\pm\eta), & \text{ou} = \mp A_2(\xi\pm\eta), \\ V_i(D_i\xi, \pm\eta) = B(\xi\pm\eta), & \text{ou} = \pm\sqrt{-1}\,B_1(\xi\pm\eta), & \text{ou} =\sqrt{-1}\,B_2(\xi\pm\eta), \\ W_i(D_i\xi, \pm\eta) =\pm C(\xi\pm\eta), & \text{ou} = C_1(\xi\pm\eta), & \text{ou} =\sqrt{-1}\,C_2(\xi\pm\eta), \end{cases}$$

Comme ces dernières formules peuvent se déduire facilement de celles (70), en y changeant ξ en η, et réciproquement, puis $D_i\xi$ en ξ et réciproquement, et enfin en intervertissant les doubles signes, on peut regarder le tableau (70) comme renfermant toutes les formules à transformer. Ce qui démontre la généralisation indiquée au commencement du § XV.

§ XVIII.

Les trois formes U, V, W, (62), peuvent être réunies sous une seule et même forme. En effet, il suit des groupes d'équations (6) et (7), (12) et (13), (18) et (19), que l'on a, dans tous les cas :

$$(73)\quad \left\{\begin{aligned} U_i(\eta, \pm \xi) &= \frac{\frac{dA_i(\eta)}{d\eta} A_i(\xi) \pm \frac{dA_i(\xi)}{d\xi} A_i(\eta)}{A_i^2(\eta) - A_i^2(\xi)}, \\ V_i(\eta, \pm \xi) &= \frac{\frac{dB_i(\eta)}{d\eta} B_i(\xi) \pm \frac{dB_i(\xi)}{d\xi} B_i(\eta)}{B_i^2(\eta) - B_i^2(\xi)}, \\ W_i(\eta, \pm \xi) &= \frac{\frac{dC_i(\eta)}{d\eta} \Gamma_i(\xi) \pm \frac{dC_i(\xi)}{d\xi} \Gamma_i(\eta)}{C_i^2(\eta) - C_i^2(\xi)}, \end{aligned}\right.$$

que i manque, ou $= 1$, ou $= 2$.

Il résulte de là, et du tableau (70), un caractère général, appartenant aux neuf fonctions que nous avons définies et étudiées : si F représente une quelconque de ces fonctions, η et ξ deux valeurs quelconques de la variable, on aura

$$(74)\qquad \frac{\frac{dF(\eta)}{d\eta} F(\xi) \mp \frac{dF(\xi)}{d\xi} F(\eta)}{F^2(\eta) - F^2(\xi)} = \mu F\,[G - (\eta \pm \xi)],$$

G étant une constante, qui est, ϖ pour F prise dans le système (A, B, C); $(\varpi' + \varpi\sqrt{-1})$ pour le système (A_1, B_1, C_1); $\varpi'\sqrt{-1}$ pour celui (A_2, B_2, C_2); et μ étant, suivant les cas, 1, $\sqrt{-1}$, ∓ 1, $\mp \sqrt{-1}$, ± 1. Ce théorème résume en quelque sorte toutes les formules établies dans ce Mémoire.