JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES HUMBERT

Sur la surface desmique du quatrième ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 7 (1891), p. 353-398.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1891_4_7__353_0>

Sur la surface desmique du quatrième ordre;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

1. On dit que trois tétraèdres forment un système desmique lorsque les trois surfaces du quatrième ordre, formées respectivement par leurs faces, appartiennent à un même faisceau ponctuel, c'est-à-dire ont seize droites communes [1], et l'on appelle *surface desmique du quatrième ordre* toute surface de ce faisceau, c'est-à-dire, toute surface de degré quatre passant par les seize droites [2].

En choisissant convenablement les plans de référence, on peut mettre les équations des faces de chacun des tétraèdres sous la forme

$$(1)\quad \begin{cases} x-y=0, & x+y=0, & z-t=0, & z+t=0,\\ x-z=0, & x+z=0, & y-t=0, & y+t=0,\\ x-t=0, & x+t=0, & y-z=0, & y+z=0. \end{cases}$$

Nous désignerons ces douze plans sous le nom de *plans desmiques*.

Il est aisé de voir qu'on a identiquement

$$(x^2-y^2)(z^2-t^2)+(x^2-t^2)(y^2-z^2)+(x^2-z^2)(t^2-y^2)=0,$$

---

(1) C. STEPHANOS, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. III, 2e série; 1879.

(2) Cette surface et sa réciproque ont été étudiées par M. Stahl, dans le t. 101 du *Journal de Crelle*, et M. Waelsch, dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Vienne; 1887 et 1888.

ce qui montre bien que les trois tétraèdres forment un système desmique.

L'équation générale des surfaces desmiques du faisceau est

$$(x^2 - y^2)(z^2 - t^2) + k(x^2 - z^2)(y^2 - t^2) = 0,$$

ou, si l'on veut, sous une forme plus symétrique,

$$(2) \quad \lambda(x^2y^2 + z^2t^2) + \mu(x^2z^2 + y^2t^2) + \nu(x^2t^2 + y^2z^2) = 0.$$

λ, μ, ν étant trois paramètres liés par la relation

$$\lambda + \mu + \nu = 0.$$

Sous cette forme, on voit, en se reportant à des résultats bien connus, que la surface desmique est la transformée homographique de la réciproque du lieu des centres de courbure d'une quadrique.

La surface desmique a, quels que soient λ, μ, ν, douze points doubles, qu'on peut répartir comme il suit en trois groupes de quatre :

$$\begin{array}{llllll}
\text{I.} & (0\ 0\ 0\ \ 1), & (0\ 0\ \ 1\ \ 0), & (0\ \ 1\ 0\ \ 0), & (\ 1\ \ 0\ \ 0\ 0), \\
\text{II.} & (1\ 1\ 1\ \ 1), & (1\ 1 - 1 - 1), & (1 - 1\ 1 - 1), & (\ 1 - 1 - 1\ 1), \\
\text{III.} & (1\ 1\ 1 - 1), & (1\ 1 - 1\ \ 1), & (1 - 1\ 1\ \ 1), & (-1\ \ 1\ \ 1\ 1),
\end{array}$$

et que nous appellerons *points desmiques*. Ils sont situés trois à trois sur les seize droites qui forment la base du faisceau.

2. Le présent travail a pour but d'exposer des propriétés nouvelles de la surface desmique; il est divisé en quatre Parties.

Dans la première, exclusivement géométrique et fort courte, on établira quelques propositions simples et presque élémentaires, dont il sera fait un grand usage par la suite.

Dans la seconde, après avoir exposé un mode de représentation de la surface à l'aide des fonctions σ, on fera voir que certaines courbes tracées sur la surface desmique jouissent des propriétés angulaires des droites tracées sur le plan, et on en déduira une géométrie de la surface tout à fait analogue à la géométrie euclidienne du plan.

La troisième Partie est consacrée à l'étude des sections planes de la surface : dans un Mémoire, inséré au Tome VI (4^e série) de ce Journal, nous avons montré que la section plane d'une surface desmique n'est pas la courbe générale du quatrième ordre, et nous avons fait connaître de nombreuses propriétés de cette quartique particulière. Nous compléterons nos résultats antérieurs, et nous étudierons spécialement la section de la surface par un de ses plans tangents.

Enfin, dans la dernière Partie, nous rattacherons les surfaces desmiques à la surface générale du troisième ordre, par l'intermédiaire d'une proposition remarquable due à M. Cremona, et nous ferons connaître une dégénérescence intéressante de ces surfaces.

PREMIÈRE PARTIE.

3. Les douze points desmiques dont nous avons écrit plus haut les coordonnées, en les divisant en trois groupes, jouissent de propriétés intéressantes les uns par rapport aux autres. Nous n'en retiendrons ici qu'une seule; c'est que les huit points de deux quelconques des trois groupes sont les points fixes d'un réseau ponctuel de quadriques, et que chacun de ces réseaux comprend six couples de plans formés par des plans desmiques.

Prenons, par exemple, les huit points des groupes II et III; on vérifie aisément qu'ils sont les points fixes du réseau auquel appartiennent les six couples de plans :

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-z=0, \\ x+z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x-t=0, \\ x+t=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-z=0, \\ y+z=0, \end{cases} \quad \begin{cases} y-t=0, \\ y+t=0, \end{cases} \quad \begin{cases} z-t=0. \\ z+t=0. \end{cases}$$

Cela posé, considérons le complexe formé par les génératrices des quadriques de ce réseau.

Ce complexe est d'ordre trois, comme dans le cas général d'un réseau de quadriques, et, de plus, toute droite passant par un des huit points de base en fait partie.

Observons maintenant, en nous reportant à l'expression des coordonnées des points desmiques, que toute droite joignant un point du groupe I à un point du groupe II, passe toujours par un point du groupe III.

Il résulte de là que, parmi les quadriques qui passent par les points des groupes II et III, figureront tous les cônes ayant pour sommet un point quelconque du groupe I, et passant par les quatre droites qui joignent ce point aux points du groupe II. Comme on peut assujettir un de ces cônes à passer par une droite arbitraire issue de son sommet, on voit que le complexe des génératrices des quadriques menées par les points des groupes II et III comprendra toutes les droites issues d'un quelconque des points du groupe I. Il comprend déjà, comme on l'a dit, toutes les droites issues des points des deux autres groupes, d'où cette conséquence :

Les droites qui joignent un point quelconque de l'espace aux douze points desmiques sont sur un cône du troisième ordre.

De plus

Le complexe des génératrices des quadriques qui passent par les huit points desmiques de deux groupes ne change pas quand on permute l'un ou l'autre de ces groupes avec le troisième.

Car ce complexe est défini par le cône du troisième ordre dont l'existence vient d'être établie.

D'après ce qui a été dit sur les couples de plans desmiques qui font partie des réseaux considérés, on voit aussi que

Le complexe précédent comprend toutes les droites des douze plans desmiques (1).

4. Soit maintenant une surface desmique; elle admet les douze points desmiques pour points doubles.

---

(1) *Voir*, sur ce complexe, les Mémoires cités plus haut de MM. Stahl et Waelsch et aussi un très intéressant travail de M. Waelsch, publié au t. LII des *Nova acta* de l'Académie Leop.-Carol. de Halle.

Je dis que toute quadrique menée par les huit points desmiques de deux groupes coupe la surface suivant deux biquadratiques.

Soit en effet Q une telle quadrique, et C sa courbe d'intersection avec la surface : c'est une courbe d'ordre huit, ayant huit points doubles aux huit points desmiques considérés. Par ces huit points et par un neuvième point quelconque de l'espace on peut faire passer un faisceau de quadriques, car les huit points sont les points de base d'un réseau; si le neuvième point est sur C, on voit que les quadriques du faisceau coupent C en dix-sept points, et par suite passent toutes par C ou par une portion de C. Il en résulte aisément que C se décompose en deux biquadratiques, passant toutes deux par les huit points considérés.

Ainsi toute quadrique menée par ces huit points coupe la surface suivant deux biquadratiques, et réciproquement deux de ces biquadratiques sont sur une quadrique. Il existe donc sur la surface une série, simplement infinie, de biquadratiques passant par les points doubles de deux groupes; en combinant les trois groupes deux à deux, on obtient ainsi *trois séries de biquadratiques* tracées sur la surface.

La quadrique qui passe par deux biquadratiques d'une même série infiniment voisines est, à la limite, inscrite à la surface; il existe donc trois séries de quadriques inscrites à la surface le long de biquadratiques.

Nous dirons que les biquadratiques qui passent par les points doubles des groupes I et II, ainsi que les quadriques inscrites correspondantes, appartiennent au système (I, II); il y aura de même des biquadratiques et des quadriques inscrites des systèmes (I, III) et (II, III).

Il est clair que, par un point de la surface, passe une seule biquadratique de chaque série.

5. Revenons maintenant au complexe du troisième ordre défini plus haut.

Soit δ une droite quelconque de ce complexe, coupant la surface desmique aux points a_1, a_2, a_3, a_4. La droite δ étant, comme on sait, une génératrice d'une quadrique menée par les points doubles des groupes I et II, deux des points a, a_1 et a_2 par exemple, seront sur une même biquadratique du système (I, II); de même a_3 et a_4 seront sur une autre biquadratique de ce système. Mais δ est aussi génératrice d'une quadrique passant par les points doubles des groupes I et III, d'après les propriétés démontrées du complexe; donc les couples a_1 et a_3, a_2 et a_4 seront respectivement sur une même biquadratique (I, III). Enfin les couples a_1 et a_4, a_2 et a_3 sont respectivement sur une même biquadratique (II, III).

Il résulte également de là que le complexe considéré du troisième ordre est formé par les cordes des biquadratiques tracées sur la surface.

Dans le cas particulier où δ est génératrice d'une quadrique inscrite, du système (I, II) par exemple, elle touche la surface desmique en deux points, situés sur une biquadratique de ce système. Il en résulte que a_1 coïncide avec a_3, et a_2 avec a_4, ou que a_1 coïncide avec a_4 et a_2 avec a_3. Dans le premier cas, les points de contact sont a_1 et a_4; comme ils sont, d'après ce qui précède sur une biquadratique du système (II, III), on voit que la droite δ est aussi génératrice de la quadrique du système (II, III) inscrite le long de cette biquadratique. De plus, les points a_1 et a_3 étant sur une biquadratique (I, III), la droite δ touche en a_1 la biquadratique de ce système qui passe par a_1; elle touche de même en a_4 la biquadratique (I, III) qui passe par a_4. Dans le second cas, on a des résultats semblables, les systèmes (I, III) et (II, III) étant permutés.

Il résulte aisément de ces considérations que les génératrices d'une série des quadriques inscrites du système (I, II) sont aussi génératrices des quadriques inscrites (I, III), tandis que leurs génératrices de l'autre série appartiennent aux quadriques inscrites (II, III).

En d'autres termes, les génératrices rectilignes des trois systèmes de quadriques inscrites forment trois congruences, et, dans chaque système, les génératrices appartiennent à deux de ces congruences.

De plus, les trois congruences sont identiques à celles que forment les tangentes aux trois séries de biquadratiques de la surface.

Nous avons ainsi établi géométriquement, avec un certain nombre de résultats nouveaux, les propriétés démontrées analytiquement à la fin du Mémoire précité, et qui nous avaient permis d'établir la propriété fondamentale des sections planes de la surface desmique. Ces propriétés nous seront utiles dans la deuxième et dans la troisième Partie de ce Mémoire, en venant au secours de l'Analyse algébrique et en nous permettant d'arriver simplement à des formules de la théorie des fonctions elliptiques.

DEUXIÈME PARTIE.

6. Désignons par σu la fonction connue de M. Weierstrass, qui se rattache à la fonction pu définie par la relation

$$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3);$$

soient $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ les fonctions connues, dérivées de σu.

Considérons la surface définie, en fonction des deux paramètres, u et v, par les relations

$$(3) \qquad \rho x = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_1 v}, \qquad \rho y = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_2 v}; \qquad \rho z = \frac{\sigma_3 u}{\sigma_3 v}, \qquad \rho t = \frac{\sigma u}{\sigma v},$$

où ρ est le facteur de proportionnalité. Cherchons son équation.

Des relations

$$(4) \qquad \sigma_1^2 + e_1\sigma^2 = \sigma_2^2 + e_2\sigma^2 = \sigma_3^2 + e_3\sigma^2,$$

on déduit d'abord, en tirant de (3) $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ et σu,

$$x^2\sigma_1^2 v + e_1 t^2\sigma^2 v = y^2\sigma_2^2 v + e_2 t^2\sigma^2 v = z^2\sigma_3^2 v + e_3 t^2\sigma^2 v:$$

égalant ces quantités à θ, tirant σ_1^2, σ_2^2, σ_3^2 en fonction de σ^2 et θ et portant dans (4), il vient

$$\frac{1}{x^2}(\theta - e_1 t^2\sigma^2 v) + e_1\sigma^2 v = \frac{1}{y^2}(\theta - e_2 t^2\sigma^2 v) + e_2\sigma^2 v$$
$$= \frac{1}{z^2}(\theta - e_3 t^2\sigma^2 v) + e_3\sigma^2 v,$$

d'où, en éliminant θ et $\sigma^2 v$

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & e_1(x^2 - t^2) \\ 1 & y^2 & e_2(y^2 - t^2) \\ 1 & z^2 & e_3(z^2 - t^2) \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$(e_1 - e_3)(x^2y^2 + z^2t^2) + (e_2 - e_1)(x^2z^2 + y^2t^2) \\ + (e_3 - e_2)(x^2t^2 + y^2z^2) = 0.$$

On reconnaît là l'équation (2) de la surface desmique.

Par suite, les coordonnées d'un point de cette surface sont définies par les équations (3).

Étudions ce mode de représentation.

On voit aisément, en désignant par 2ω et $2\omega'$ les périodes de pu, que les quotients deux à deux de x, y, z, t ne changent pas si l'on augmente u ou v de multiples de 4ω et $4\omega'$, ou si l'on change simultanément u et v de signe, ou si l'on augmente simultanément u et v de 2ω ou $2\omega'$. Ainsi à un point de la surface correspondent une infinité d'arguments compris dans les formules

$$(5) \qquad \begin{cases} \varepsilon u + 2k\omega + 2k'\omega' + 4h\omega + 4h'\omega', \\ \varepsilon v + 2k\omega + 2k'\omega' + 4h_1\omega + 4h'_1\omega', \end{cases}$$

ε désignant ± 1 et $k, k', h, \ldots, h'_1$ des entiers quelconques.

Les douze points doubles de la surface desmique s'obtiennent comme il suit :

Ceux du groupe I correspondent aux valeurs

$$0, \quad \omega, \quad \omega', \quad \omega + \omega'$$

de v, quel que soit u.

Ceux du groupe II s'obtiennent en posant

$$u = v, \qquad u = v + \omega, \qquad u = v + \omega', \qquad u = v + \omega + \omega'.$$

Ceux du groupe III en posant

$$u = -v, \qquad u = -v + \omega, \qquad u = -v + \omega', \qquad u = -v + \omega + \omega'.$$

Les seize droites de la surface correspondent aux équations

$$\begin{cases} u = 0, \\ v = 2k\omega + 2k'\omega', \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \omega, \\ v = \omega + 2k\omega + 2k'\omega', \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \omega', \\ v = \omega' + 2k\omega + 2k'\omega', \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \omega + \omega', \\ v = \omega + \omega' + 2k\omega + 2k'\omega', \end{cases}$$

où k, k' peuvent prendre les valeurs 0, 1.

7. Cherchons maintenant, en u et v, les équations des trois systèmes de biquadratiques de la surface.

Il est clair d'abord qu'en posant $v =$ const. on obtient des biquadratiques en vertu des équations (4); ces courbes passent par les points doubles des groupes II et III, que l'on obtient en donnant à u les valeurs $\pm v + h\omega + h'\omega'$; ce sont donc les biquadratiques (II, III).

Si l'on pose ensuite $u = v + \alpha$, α étant une constante, on obtient la courbe

$$\rho x = \sigma_1(v+\alpha)\sigma_2 v \sigma_3 v \sigma v,$$
$$\rho y = \sigma_1 v \sigma_2(v+\alpha)\sigma_3 v \sigma v,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les quotients de x, y, z, t deux à deux sont des fonctions doublement périodiques de v, aux périodes 2ω et $2\omega'$; comme x, y, z, t s'annulent quatre fois dans le parallélogramme 2ω, $2\omega'$, la courbe est du quatrième ordre : c'est par suite une biquadratique, puisqu'elle est de genre un.

Elle passe par les points doubles des groupes I et III, puisque l'équation $u = v + \alpha$ est compatible avec l'une et l'autre des équations $v = h\omega + h'\omega'$ et $u + v = h\omega + h'\omega'$: c'est donc une biquadratique (I, III).

De même on voit que les biquadratiques (I, II) ont pour équation $u + v = \alpha$.

Ainsi les trois systèmes de biquadratiques sont

$$v = \alpha, \qquad (\text{II}, \text{III})$$

$$u - v = \alpha, \qquad (\text{I}, \text{III})$$

$$u + v = \alpha. \qquad (\text{I}, \text{II})$$

D'après ce qui a été dit plus haut, la courbe $v = \alpha$ est identique à

$$v = \pm\alpha + 2h\omega + 2h'\omega';$$

de même $u - v = \alpha$ est identique à

$$u - v = \pm\alpha + 4h\omega + 4h'\omega';$$

etc.

8. On comprend aisément quel intérêt il y aurait à trouver les relations qui doivent lier les arguments de quatre points de la surface pour que ces quatre points soient sur une même droite. Il ne semble pas que ce problème comporte de solution simple dans le cas général; mais il est possible de le résoudre aisément dans le cas où la droite appartient au complexe du troisième ordre formé par les cordes des biquadratiques (n° 5).

Soit δ une droite de ce complexe; désignons, comme au n° 5, par a_1, a_2, a_3, a_4 ses points d'intersection avec la surface, et par u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3; u_4, v_4 leurs couples d'arguments respectifs, définis à des multiples près de 4ω, $4\omega'$. Nous savons que a_2 et a_3 sont sur une même biquadratique du système (II, III), ainsi que a_1 et a_4; on a donc (n° **7**)

$$v_2 = \pm v_3 + 2h\omega + 2h'\omega';$$

mais, comme on peut *simultanément* changer les signes de u_3 et v_3 et augmenter u_3 et v_3 des mêmes multiples de 2ω, $2\omega'$, on peut poser

$$(a) \qquad \left\{\begin{array}{l} v_3 = v_2 \\ \quad \text{et de même} \\ v_4 = v_1. \end{array}\right.$$

Les points a_1 et a_3 sont sur une biquadratique (I, III); on peut donc écrire

$$(b) \qquad u_1 - v_1 = u_3 - v_3.$$

De même a_2 et a_4 sont sur une biquadratique (I, III); mais nous n'avons plus le droit d'écrire $u_2 - v_2 = u_4 - v_4$, parce que les équations qui précèdent ont fixé les signes de u_2, v_2; u_3, v_3; u_4, v_4; nous aurons donc

$$(b_1) \qquad u_2 - v_2 = \varepsilon(u_4 - v_4),$$

ε étant ± 1.

De même a_1 et a_2, a_3 et a_4 étant sur une biquadratique (I, II), on a

$$(c) \qquad \begin{cases} u_1 + v_1 = \varepsilon'(u_2 + v_2), \\ u_3 + v_3 = \varepsilon''(u_4 + v_4). \end{cases}$$

On en tire, en posant $u_1 - v_1 = u_3 - v_3 = \lambda$, et remplaçant u_1 et u_3 dans (c), en tenant compte de (a),

$$2v_1 + \lambda = \varepsilon'(u_2 + v_3),$$
$$2v_3 + \lambda = \varepsilon''(u_4 + v_1).$$

Résolvant par rapport à u_2, u_4 et portant dans (b_1), il vient enfin

$$\varepsilon'(2v_1 + \lambda) - 2v_3 = \varepsilon[\varepsilon''(2v_3 + \lambda) - 2v_1]$$

ou

$$(d) \qquad 2v_1(\varepsilon' + \varepsilon) + 2v_3(-\varepsilon\varepsilon'' - 1) + \lambda(\varepsilon' - \varepsilon\varepsilon'') = 0.$$

Or cette relation doit être une identité : la droite δ, en effet, dépend de trois paramètres, et, par suite, les arguments de ses quatre points d'intersection avec la surface desmique doivent pouvoir s'exprimer en fonction de trois indéterminées. Si donc (d) n'était pas une identité, on pourrait en tirer λ en fonction de v_1 et v_3, par exemple, et les équations (a), (b), (b_1), (c) permettraient d'exprimer tous les u et tous les v en fonction des deux paramètres v_1 et v_3, ce qui est impossible.

Donc (d) est une identité, et l'on a

$$\varepsilon' + \varepsilon = 0, \qquad \varepsilon\varepsilon'' + 1 = 0, \qquad \varepsilon' - \varepsilon\varepsilon'' = 0,$$

d'où

$$\varepsilon = 1, \qquad \varepsilon' = -1, \qquad \varepsilon'' = -1.$$

On a ainsi

$$v_3 = v_2, \qquad u_1 - v_1 = u_3 - v_3, \qquad u_4 + v_4 = -(u_2 + v_2).$$
$$v_4 = v_1, \qquad u_2 - v_2 = u_4 - v_4, \qquad u_3 + v_3 = -(u_1 + v_1).$$

Posons, pour la symétrie,

$$v_1 = \alpha, \qquad v_3 = -\beta,$$
$$v_1 + v_3 + \lambda = \mu,$$

il vient, en exprimant les u et les v en fonction de α, β, μ,

$$u_1 = \mu + \beta, \qquad u_4 = -\mu + \beta, \qquad u_2 = -\alpha - \mu, \qquad u_3 = \mu - \alpha.$$

et, par suite, on obtient pour les coordonnées des quatre points, en changeant simultanément les signes de u_1, v_1 ; u_2, v_2,

$$u_1 = \beta + \mu, \qquad u_4 = \beta - \mu, \qquad u_2 = \alpha + \mu, \qquad u_3 = \alpha - \mu.$$
$$v_1 = \alpha, \qquad v_4 = \alpha, \qquad v_2 = \beta, \qquad v_3 = \beta.$$

Telle est la forme, remarquablement simple, sous laquelle on peut mettre les arguments des quatre points communs à la surface desmique et à une droite du complexe; on en déduit de nombreuses et importantes conséquences, ainsi que nous le verrons dans la troisième Partie.

Pour le moment, nous nous bornerons à examiner quelques cas particuliers.

9. Nous savons que les droites du complexe, bitangentes à la surface, forment trois congruences; gardant les notations employées jusqu'ici, on obtiendra ces congruences en supposant que le point a_1 coïncide successivement avec l'un des points a_2, a_3, a_4, les deux autres points coïncidant également.

Pour que a_1 coïncide avec a_2 et a_3 avec a_4, il faut et il suffit qu'on ait

$$\alpha = \beta.$$

Les arguments des deux points de contact sont alors

$$\begin{cases} \alpha + \mu, \\ \alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha - \mu, \\ \alpha, \end{cases}$$

ou, si l'on veut, les deux points d'arguments (u, v) et $(2v - u, v)$, sont les points de contact d'une même bitangente de la surface.

De même, en faisant coïncider a_1 avec a_3 et a_2 avec a_4, on voit que les points (u, v) et $(-2v - u, v)$ sont sur une bitangente.

Enfin, si a_1 coïncide avec a_4 et a_2 avec a_3, on trouve comme arguments des deux points de contact (u, v) et (v, u).

D'après cela, en joignant successivement le point (u, v) aux points $(2v - u, v)$, $(-2v - u, v)$, (v, u), on obtient trois bitangentes de la surface.

Nous dirons que :

Les bitangentes qui touchent la surface aux points (u, v) *et* (v, u) *sont du premier système;*

Celles qui touchent la surface aux points (u, v), $(-2v - u, v)$ *sont du second système;*

Celles qui touchent la surface aux points (u, v), $(2v - u, v)$ *sont du troisième système.*

Il est clair que ces propositions fournissent des formules de la théorie des fonctions elliptiques, qu'il serait peut-être difficile de démontrer directement.

10. Lorsque a_2 et a_3, a_1 et a_4 coïncident, la droite δ touche en a_2 et a_1 les biquadratiques (II, III) qui passent respectivement par ces points; la bitangente δ appartenant alors au premier système, ses points de contact sont (u, v) et (v, u); soit alors $v = \alpha$ une biquadratique (II, III); sa tangente au point (u, α) touche de nouveau la surface au point (α, u), d'après ce qui précède; donc, lorsque le premier point de contact décrit la courbe $v = \alpha$, le second décrit la courbe $u = \alpha$.

Il résulte de là que la développable, qui a pour arête de rebroussement une biquadratique, $v = \alpha$, touche la surface desmique le long d'une courbe ayant pour équation $u = \alpha$; et, en vertu d'un théorème bien connu, *les deux séries de courbes, $u =$ const., $v =$ const. tracent sur la surface un réseau conjugué.*

De même, aux biquadratiques $u - v = \alpha$ correspondent les courbes conjuguées $3v + u = -\alpha$; et aux biquadratiques $u + v = \alpha$, les courbes conjuguées $3v - u = \alpha$.

Il est aisé de voir que les courbes $u = \alpha$ sont d'ordre douze et qu'elles passent par les douze points doubles de la surface.

Il en est de même des courbes $3v + u = \alpha$; $3v - u = \alpha$.

11. Nous connaissons sur la surface desmique trois réseaux conjugués; il est aisé d'en déduire l'équation différentielle des lignes asymptotiques.

Soit (u, v) un point de la surface; nous savons que les déplacements $du = 0$ et $dv = 0$; $du - dv = 0$ et $3dv + du = 0$ donnent respectivement deux directions conjuguées.

Par suite, on obtiendra les directions asymptotiques en prenant les rayons doubles de l'involution déterminée par les couples $du = 0$ et $dv = 0$; $du - dv = 0$ et $3\,dv + du = 0$.

Soient dU et dV; dU_1 et dV_1 les déplacements qui correspondent à deux directions conjuguées quelconques; ils seront liés par une relation involutive

$$dU\,dU_1 + p(dU\,dV_1 + dU_1\,dV) + q\,dV\,dV_1 = 0.$$

Écrivons que cette relation est vérifiée pour $dU = 0$ et $dV_1 = 0$; puis pour $dU = dV$ et $3dV_1 + dU_1 = 0$; nous déterminerons p et q et nous trouverons

$$p = 0, \qquad q = 3.$$

La relation involutive est donc

$$dU\,dU_1 + 3\,dV\,dV_1 = 0. \tag{8}$$

Les directions asymptotiques s'obtiennent en faisant $dU = dU_1$ et $dV = dV_1$; on a ainsi

$$dU^2 + 3\,dV^2 = 0,$$

ce qui donne pour l'équation des asymptotiques

$$u + v\sqrt{-3} = \text{const.},$$
$$u - v\sqrt{-3} = \text{const.}$$

12. Remarquons ici que toutes les courbes que nous avons obtenues sur la surface desmique ont une équation de la forme

$$gu + hv = \alpha, \tag{9}$$

g, h, α étant des constantes.

Les courbes représentées d'une manière générale par cette équation jouissent de propriétés remarquables.

Observons d'abord qu'elles sont algébriques lorsque le rapport $\frac{g}{h}$ est commensurable; en ce cas, elles sont même de genre un. En effet, admettons que g et h soient entiers; comme on a, pour tout point de la surface

$$\frac{x}{t} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_1 v}\,\frac{\sigma v}{\sigma u},$$

il vient, pour un point de la courbe, en posant $u = hU$,

$$\frac{x}{t} = \frac{\sigma_1(hU)}{\sigma(hU)}\,\frac{\sigma\left(\frac{\alpha}{h} - gU\right)}{\sigma_1\left(\frac{\alpha}{h} - gU\right)}$$

et des expressions analogues pour $\frac{y}{t}$ et $\frac{z}{t}$. Il résulte de là que la courbe est de genre un, en général; elle pourra devenir unicursale dans certains cas particuliers, par exemple si α est nul.

Si $\frac{g}{h}$ n'est pas commensurable, la courbe est généralement transcendante; mais on a toujours une expression simple des coordonnées de ses points à l'aide des fonctions elliptiques.

En général, les courbes $gu + hv = \alpha$ passent par tous les points doubles de la surface desmique; les biquadratiques seules font exception.

On peut donner de ces courbes un mode de génération intéressant et fondamental pour nos recherches.

Cherchons, en effet, sur la surface *les courbes telles qu'en chacun de leurs points la tangente forme, avec les tangentes aux trois biquadratiques passant par ce point, un faisceau de rapport anharmonique donné.*

Les tangentes aux biquadratiques correspondent aux déplacements $du = 0$; $du - dv = 0$; $du + dv = 0$; les coefficients de $\frac{du}{dv}$ dans ces équations sont 0, 1 et -1; la valeur de $\frac{du}{dv}$ qui correspond à la courbe cherchée est donc donnée par l'équation

$$\frac{\frac{du}{dv} - 1}{\frac{du}{dv} + 1} : \frac{-1}{1} = \text{const.},$$

d'où l'on tire

$$\frac{du}{dv} = \text{const.},$$

et, par suite, la courbe a pour équation

$$(9) \qquad gu + hv = \alpha,$$

g, h, α étant des constantes, et $\frac{g}{h}$ dépendant du rapport anharmonique donné.

Si donc nous appelons *courbes linéaires* les courbes de la surface dont l'équation (9) est linéaire en u et v, nous pouvons dire que :

En chaque point d'une même courbe linéaire, la tangente forme, avec les tangentes aux trois biquadratiques passant par ce point, un faisceau de rapport anharmonique constant.

Pour des motifs qui seront expliqués plus loin, nous appellerons le rapport $\frac{g}{h}$ *coefficient angulaire desmique* de la courbe linéaire $gu + hv = \alpha$.

13. Il est clair que si g, h, α (ou leurs rapports) sont donnés, la courbe linéaire est définie sans ambiguïté sur la surface. Inversement, si la courbe linéaire est donnée sur la surface, $\frac{g}{h}$ est bien déterminé en vertu de la propriété qui précède, mais $\frac{\alpha}{h}$ ne l'est pas.

En effet, d'après ce qui a été dit au n° **6**, une équation en u et v ne cesse pas de représenter, sur la surface desmique, la même courbe si l'on y remplace u et v respectivement par

$$\varepsilon[u + 2k\omega + 2k'\omega' + 4q\omega + 4q'\omega'],$$
$$\varepsilon[v + 2k\omega + 2k'\omega' + 4q_1\omega + 4q'_1\omega'].$$

Il en résulte que la courbe $gu + hv = \alpha$ est identique à la courbe

$$(10)\quad \begin{cases} gu + hv = \pm\alpha + (2k\omega + 2k'\omega')(g + h) \\ \qquad\qquad + 4g(q\omega + q'\omega') + 4h(q_1\omega + q'_1\omega'). \end{cases}$$

On voit ainsi que $\frac{\alpha}{h}$ peut prendre une infinité de valeurs.

Pour trouver l'intersection de deux courbes linéaires

$$gu + hv = \alpha, \qquad g_1 u + h_1 v = \alpha_1,$$

on combinera la dernière équation avec la série infinie des équations (10), où les entiers $k, \ldots, q'_1$ prennent toutes les valeurs entières. Il en résulte que deux courbes linéaires, dont l'une au moins est transcendante, ont une infinité de points communs.

Nous savons que deux directions $\frac{dU}{dV}$ et $\frac{dU_1}{dV_1}$ sont conjuguées en un point lorsqu'on a

$$(8)\qquad dU\,dU_1 + 3\,dV\,dV_1 = 0.$$

Il en résulte qu'en un *quelconque* de leurs points communs les deux courbes

$$gu + hv = \alpha,$$
$$g_1 u + h_1 v = \alpha$$

sont conjuguées par rapport à l'indicatrice de ce point, si l'on a

$$3gg_1 + hh_1 = 0,$$

ou encore :

Les courbes $gu + hv = \alpha$, où α est seul variable, sont conjuguées en chaque point de la surface des courbes $hu - 3gv = \beta$.

Nous connaissons ainsi sur la surface une infinité de systèmes conjugués, transcendants ou algébriques, formés de courbes linéaires et, fait remarquable, deux courbes appartenant respectivement à deux systèmes conjugués sont conjuguées *en tous leurs points de rencontre*.

Ces propriétés permettent d'établir une liaison entre la théorie des droites dans le plan et celle des courbes linéaires sur la surface desmique. Avant de développer ce sujet, il importe de présenter quelques remarques.

14. Par un point de la surface desmique, on peut faire passer une et une seule courbe linéaire de coefficient angulaire desmique donné. Soit, en effet, u_0, v_0 ce point, la courbe linéaire demandée sera

$$gu + hv = gu_0 + hv_0,$$

et reste la même d'après (10) si l'on substitue à u_0 et v_0 les couples de valeurs équivalents.

Mais, par deux points de la surface desmique, u_0, v_0 et u_1, v_1, on peut faire passer une infinité de courbes linéaires. Le coefficient $\frac{g}{h}$ correspondant est, en effet, égal à

$$-\frac{v_1 - v_0}{u_1 - u_0};$$

il peut prendre une infinité de valeurs quand on augmente l'un des u ou des v de multiples de 4ω ou $4\omega'$; toutes les courbes linéaires ainsi obtenues sont différentes puisque les valeurs de $\frac{g}{h}$ le sont.

15. Cela posé, considérons un plan et deux axes de coordonnées rectangulaires dans ce plan.

A une droite $g\sqrt{3}x + hy = \alpha$ du plan, faisons correspondre, sur la surface desmique, la courbe linéaire $gu + hv = \alpha$.

On voit, d'après ce qui précède, que :

1° *A une droite correspond une et une seule courbe linéaire; à une courbe linéaire correspondent des droites parallèles entre elles, en nombre infini;*

2° *A une série de droites parallèles correspond une série de courbes linéaires de même coefficient angulaire desmique;*

3° *Aux deux séries de droites isotropes correspondent les deux séries de lignes asymptotiques de la surface;*

4° *A deux droites rectangulaires correspondent deux courbes linéaires conjuguées en tous leurs points de rencontre;*

5° *A quatre droites concourantes correspondent quatre courbes linéaires ayant un point commun et telles que le rapport anharmonique de leurs tangentes en ce point soit égal à celui du faisceau des quatre droites.*

D'après cela, si ρ est le rapport anharmonique du faisceau formé par les tangentes à deux courbes linéaires passant en un point, et par les directions asymptotiques de la surface au même point, et si l'on pose

$$\rho = e^{2i\theta},$$

θ sera l'angle des droites qui correspondent aux courbes linéaires considérées. Appelons *angle desmique* de deux courbes en un point la quantité θ ainsi définie; nous avons cette première propriété :

Deux courbes linéaires se coupent sous le même angle desmique en tous leurs points de rencontre.

Nous dirons, pour abréger, que des *courbes linéaires* sont *parallèles* si elles ont même valeur de $\frac{g}{h}$.

Il est évident maintenant que toute propriété angulaire euclidienne des droites d'un plan donnera une propriété correspondante sur la surface desmique, en remplaçant le mot *droite* par le mot *courbe linéaire;* le mot *angle* par *angle desmique;* les mots *droites rectangulaires* par *courbes linéaires conjuguées.*

Ainsi :

Deux angles desmiques sont égaux, ou ont pour somme π, lorsque leurs côtés sont respectivement parallèles.

Deux angles desmiques sont égaux, ou ont pour somme π, lorsque les côtés de l'un sont respectivement conjugués des côtés de l'autre.

Pour transformer les propriétés des triangles plans, il faut observer que trois courbes linéaires

$$gu + hv = \alpha, \qquad g_1 u + h_1 v = \alpha_1, \qquad g_2 u + h_2 v = \alpha_2$$

forment un *triangle desmique* dont les sommets ont pour arguments les valeurs de u et v tirées des trois équations précédentes, combinées deux à deux. En général, trois courbes linéaires forment une infinité de triangles; la règle précédente indique ce qu'on doit entendre par sommets d'un de ces triangles.

Cela posé, on peut dire que :

La somme des trois angles desmiques d'un triangle desmique est égale à π.

Si, par chaque sommet d'un triangle desmique, on mène la courbe linéaire conjuguée du côté opposé, ces trois conjuguées sont concourantes.

Le lieu du sommet mobile d'un triangle desmique dont la base est fixe et dont les deux angles desmiques à la base sont égaux, est une courbe linéaire, conjuguée de la base.

Si l'on mène les trois conjuguées qui correspondent respectivement aux trois côtés d'un triangle pris ainsi successivement pour base, ces conjuguées sont concourantes.

Appelons bissectrice desmique *d'un angle desmique la courbe linéaire passant par le sommet de l'angle, qui le partage en deux* *angles desmiques égaux : les bissectrices de deux angles desmiques adjacents sont conjuguées.*

Les six bissectrices desmiques des angles desmiques d'un triangle et des angles adjacents se coupent trois à trois en quatre points.

Il serait aisé de donner d'autres exemples et, en particulier, d'étudier la courbe qui correspond à la circonférence; cette courbe est malheureusement toujours transcendante.

Nous nous bornerons aux propositions suivantes, déduites de la considération du cercle plan de rayon nul, auquel correspond un couple de lignes asymptotiques.

Soient A *et* B *deux points situés sur une même asymptotique de la surface; on mène par* A *une courbe linéaire quelconque et par* B *la courbe linéaire conjuguée de celle-ci : chacun des points d'intersection de ces deux courbes décrit une ligne asymptotique.*

Il en est de même si les deux courbes linéaires issues de A et B, au lieu d'être conjuguées, comprennent entre elles un angle desmique constant.

16. Nous avons trouvé, au nº **8**, pour expression des arguments de quatre points de la surface, situés sur une droite du complexe formé par les cordes des biquadratiques, les valeurs

$$\begin{matrix} \beta+\mu, & \beta-\mu, & \alpha+\mu, & \alpha-\mu, \\ \alpha, & \alpha, & \beta, & \beta. \end{matrix}$$

De la forme de ces arguments dérivent immédiatement quelques propositions géométriques simples.

En premier lieu, nous voyons que, si α et μ sont donnés, la droite est une corde de la biquadratique $v = \alpha$ et sécante simple des deux conjuguées de cette biquadratique $u = \alpha + \mu$ et $u = \alpha - \mu$. Donc :

Si une corde d'une biquadratique donnée se déplace en s'ap-

puyant sur une des conjuguées de cette courbe, elle rencontre constamment une seconde conjuguée.

Les deux extrémités de la corde, sur la biquadratique, ont pour arguments $\beta + \mu$ et $\beta - \mu$, quantités dont la différence est la constante 2μ. Or on sait qu'une corde d'une biquadratique, dont les arguments elliptiques ont une différence constante, décrit une surface réglée d'ordre huit, *admettant la biquadratique pour ligne double*; on peut donc dire aussi que :

Le lieu des cordes d'une biquadratique donnée qui s'appuient sur une conjuguée de cette courbe est une surface d'ordre huit, passant par une seconde conjuguée.

Plus généralement, on voit, en raison de la forme linéaire en α, β, μ des arguments des quatre points, que, si une droite du complexe s'appuie sur deux courbes linéaires de la surface, ses deux autres points d'intersection avec la surface décrivent deux autres courbes linéaires.

Supposons, par exemple, que les deux premiers points, d'arguments $(\beta + \mu, \alpha)$ et $(\beta - \mu, \alpha)$, décrivent respectivement les deux courbes linéaires

$$gu + hv = \lambda \qquad \text{et} \qquad g_1 u + h_1 v = \lambda_1.$$

Soient u, v et U, V les coordonnées des deux autres points; on a

$$u = \alpha + \mu, \qquad U = \alpha - \mu,$$
$$v = \beta, \qquad V = \beta.$$

Des relations

$$g(\beta + \mu) + h\alpha = \lambda,$$
$$g_1(\beta - \mu) + h_1\alpha = \lambda_1,$$

on déduit, en exprimant α et β en fonction de u, v, μ ou en fonction de U, V, μ, les équations

$$gv + hu + \mu(g - h) - \lambda = 0,$$
$$g_1 v - h_1 u - \mu(g_1 + h_1) - \lambda_1 = 0$$

et

$$g\,V + h\,U + \mu(\ \ g + h\ ) - \lambda = 0,$$
$$g_1 V + h_1 U + \mu(-g_1 + h_1) - \lambda_1 = 0.$$

D'où l'on tire, en éliminant μ, les équations des lieux décrits par les points u, v et U, V :

$$(12)\quad \begin{cases} u(hg_1 + h_1 g) + v(2gg_1 + gh_1 - g_1 h) \\ \qquad = \lambda(g_1 + h_1) + \lambda_1(g - h), \\ U(hg_1 + h_1 g) + V(2gg_1 - gh_1 + g_1 h) \\ \qquad = \lambda(g_1 - h_1) + \lambda_1(g + h). \end{cases}$$

Ce sont deux courbes linéaires, dont les coefficients angulaires desmiques dépendent seulement des coefficients angulaires desmiques, $\frac{g}{h}$ et $\frac{g_1}{h_1}$ des deux premières courbes.

Si les deux premières courbes sont parallèles, les deux nouvelles le sont également.

Observons maintenant que λ et λ_1, d'après (10), peuvent prendre une infinité de valeurs; il est aisé de voir que ces valeurs, portées dans les équations (12), donnent généralement des couples de courbes, différentes de celles obtenues d'abord, mais restant toujours parallèles à celles-ci.

De cette analyse résultent les théorèmes suivants :

Soient deux courbes linéaires, A *et* B, *de la surface desmique; on les coupe par une biquadratique de la surface, appartenant à une série donnée, et l'on joint les points d'intersection situés sur la première aux points d'intersection situés sur la seconde; les droites ainsi obtenues engendrent, quand la biquadratique varie, une surface réglée, dont l'intersection avec la surface desmique, en dehors des courbes* A *et* B, *se décompose en couples de courbes linéaires* C *et* D, C_1 *et* D_1, ...

Les courbes linéaires d'un de ces couples sont respectivement parallèles aux courbes des autres couples; ainsi les courbes C, C_1, ... *sont parallèles entre elles; de même les courbes* D, D_1, ...

Si les courbes primitives, A et B, sont parallèles entre elles, toutes les courbes C et D sont parallèles entre elles.

Les deux courbes A et B peuvent coïncider :

Si l'on coupe une courbe linéaire de la surface desmique par une biquadratique d'une série donnée et si l'on joint deux à deux les points d'intersection, les droites ainsi obtenues engendrent, lorsque la biquadratique varie, une surface réglée dont l'intersection avec la surface desmique, en dehors de la courbe linéaire primitive, se décompose en une série de courbes linéaires, toutes parallèles entre elles.

17. La théorie des bitangentes nous a fait connaître trois transformations de la surface en elle-même : chacune de ces transformations fait correspondre à un point de la surface le second point de contact d'une bitangente issue de ce point. Nous avons ainsi trois transformations univoques et réciproques, dont nous connaissons l'expression analytique : en effet, d'après les résultats du n° **9**, à un point (u, v) correspondent, par les trois transformations, les points

$$(v, u), \quad (-2v-u, v), \quad (2v-u, v).$$

En combinant d'une manière quelconque ces transformations, on obtient de nouvelles transformations linéaires univoques, formant un groupe *continu*.

La théorie de ce groupe revient à celle des lignes brisées qui sont à la fois inscrites et doublement circonscrites à la surface et sur lesquelles on pourrait énoncer de nombreuses propositions. Nous n'entreprendrons pas ici cette étude; nous nous bornerons à faire observer que toutes les transformations du groupe font correspondre à une courbe linéaire une autre courbe linéaire.

Plus généralement, il en est de même des transformations qui remplacent u et v par $\lambda u + \mu v$ et $\lambda' u + \mu' v$.

Parmi ces transformations, il en est qui conservent les angles desmiques : en se reportant à la représentation géométrique plane des courbes linéaires, on voit qu'elles correspondent aux substitutions orthogonales et qu'elles sont de la forme

$$U = bu - 3av,$$
$$V = au + bv.$$

Si a et b sont entiers, cette transformation fait correspondre à un point (u, v) un seul point U, V; inversement à (U, V) correspondent, en général, plusieurs points (u, v) en nombre fini.

Un cas particulier est à signaler, en raison de propriétés importantes, liées à une autre théorie que nous rencontrerons plus loin; c'est le suivant :

Proposons-nous de déterminer a et b de telle façon que, le point (u, v) décrivant une courbe linéaire quelconque, le point (U, V) décrive une courbe linéaire conjuguée.

Si l'on a

$$gu + hv = \alpha,$$

il vient pour la courbe du point (U, V)

$$g(bU + 3aV) + h[bV - aU] = \alpha[b^2 + 3a^2],$$

et les deux courbes seront conjuguées si l'on a (**15**)

$$3g[bg - ah] + h[3ag + bh] = 0,$$

c'est-à-dire,

$$b[3g^2 + h^2] = 0.$$

La courbe $gu + hv - \alpha = 0$ devant être quelconque, il faut et il suffit qu'on ait $b = 0$ et la transformation devient

$$U = -3av, \qquad V = au.$$

Le cas le plus simple est celui où $a = 1$; il vient alors

$$U = -3v, \qquad V = u.$$

Pour des motifs que l'on comprendra plus tard, nous dirons que le point $(-3v, u)$ est *le tangentiel* du point (u, v).

Un point a un seul tangentiel, mais il est clair qu'à un tangentiel donné correspondent *neuf* points. On voit aisément que :

Si un point se meut sur une asymptotique, son tangentiel décrit une asymptotique de la même série;

et, plus généralement, d'après ce qui précède :

Quand un point décrit une courbe linéaire, son tangentiel décrit une courbe linéaire conjuguée de la première.

TROISIÈME PARTIE.

18. Après les courbes linéaires, il est intéressant d'étudier les sections planes de la surface desmique; elles jouissent, comme nous l'avons fait voir ailleurs, de propriétés remarquables, qui en font une classe spéciale parmi les courbes du quatrième ordre. Nous ne reviendrons pas ici sur les propriétés que nous avons établies; nous nous bornerons à les compléter, en ce qui concerne la section par un plan quelconque; nous étudierons ensuite la section de la surface par un plan tangent.

Il est clair, tout d'abord, que la section de toute surface desmique d'ordre quatre par un plan quelconque est une *courbe desmique*, c'est-à-dire appartient à un faisceau de quartiques comprenant trois systèmes de quatre droites : ces systèmes de quatre droites sont les sections, par le plan, des faces des trois tétraèdres desmiques. Il est remarquable que la section plane de la surface desmique peut être regardée d'une infinité de manières comme une courbe desmique. Les considérations suivantes vont mettre ce point en évidence.

Soient, en effet, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des quantités quelconques et soient, sur la surface desmique, les seize points dont les arguments u et v sont inscrits au Tableau ci-dessous :

$\beta+\gamma+\delta,\ \alpha$	$\beta-\gamma-\delta,\ \alpha$	$\alpha+\gamma+\delta,\ \beta$	$\alpha-\gamma-\delta,\ \beta$
$\gamma-\delta-\beta,\ \alpha$	$\delta-\gamma-\beta,\ \alpha$	$\delta-\alpha-\gamma,\ \beta$	$\gamma-\delta-\alpha,\ \beta$
$\alpha+\beta+\delta,\ \gamma$	$\delta-\alpha-\beta,\ \gamma$	$\alpha+\beta+\gamma,\ \delta$	$\gamma-\alpha-\beta,\ \delta$
$\alpha-\beta-\delta,\ \gamma$	$\beta-\delta-\alpha,\ \gamma$	$\beta-\gamma-\alpha,\ \delta$	$\alpha-\beta-\gamma,\ \delta$

Désignons ces points par $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{44}$, selon la notation usuelle des déterminants, le premier indice désignant la ligne et le second la colonne.

En se reportant à l'expression des arguments des quatre points situés sur une corde de biquadratique, à savoir :

$$\begin{array}{lcccc} (u) & a+\mu, & a-\mu, & b+\mu, & b-\mu, \\ (v) & b, & b, & a, & a, \end{array}$$

on voit immédiatement que :

1° Les quatre points dont les arguments sont sur une même ligne du Tableau, $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}$, sont sur une même droite; cette droite appartient au complexe du troisième ordre formé par les cordes des biquadratiques.

2° Il en est de même des quatre points dont les arguments sont sur une même colonne du Tableau.

3° Il en est de même, enfin, des groupes de quatre points :

$$\begin{array}{cccc} a_{14}, & a_{23}, & a_{32}, & a_{41}, \\ a_{13}, & a_{24}, & a_{31}, & a_{42}, \\ a_{12}, & a_{21}, & a_{34}, & a_{43}, \\ a_{11}, & a_{22}, & a_{33}, & a_{44}. \end{array}$$

Observons maintenant que les quatre points

$$a_{11}, \quad a_{12}, \quad a_{21}, \quad a_{22}$$

sont dans un même plan : ils sont en effet sur une même biquadratique $v = \alpha$, et leurs arguments u ont une somme nulle.

On conclut de là, en s'appuyant sur les propriétés qui précèdent, que les seize points considérés sont dans un même plan; ils sont à l'intersection d'un premier système de quatre droites avec un deuxième système de quatre droites, et sont aussi situés, quatre à quatre, sur quatre nouvelles droites.

Cette remarque fournit une propriété de toute section plane de la surface desmique : en effet, étant donnés un plan quelconque et une biquadratique $v=\alpha$, on désignera par $\beta+\gamma+\delta$, $\beta-\gamma-\delta$, $\gamma-\delta-\beta$, $\delta-\gamma-\beta$, les arguments u, dont la somme est nulle, des quatre points d'intersection de ce plan avec la biquadratique; β, γ, δ sont alors déterminés, ainsi que α, et par suite, on a les arguments des seize points. A chaque biquadratique $v=\alpha$ correspond ainsi un système de seize points dans le plan. Donc :

Les points de la section plane d'une surface desmique se répartissent en une infinité simple de groupes de seize points, tels que par les seize points de chaque groupe passent trois systèmes de quatre droites.

Les douze droites qui correspondent ainsi à un système de seize points appartiennent au complexe du troisième ordre formé par les cordes des biquadratiques; elles touchent donc une courbe de troisième classe. Par suite :

Ces droites ont pour enveloppe une courbe de troisième classe.

Cette courbe est celle que nous avons étudiée, sous le nom de *cayléenne*, dans notre Mémoire souvent cité.

Pour former, sur la section plane, les groupes de seize points dont nous venons d'établir l'existence, il suffit, d'après ce qui précède, de prendre les quatre points d'intersection de la courbe avec une biquadratique $v=\alpha$, et de mener les six droites qui joignent les quatre points deux à deux; ces droites coupent de nouveau la quartique en douze points, qui, joints aux quatre premiers, forment un des groupes cherchés.

Or les quatre points où un plan coupe une biquadratique sont sur une conique, section de la quadrique inscrite à la surface desmique le long de la biquadratique (4) et qui, par suite, touche la quartique en ces quatre points. Si l'on se reporte au Mémoire précité, on voit ainsi que :

Les seize points d'un groupe sont à l'intersection de la quartique avec les six droites qui joignent deux à deux les quatre points de *contact de la courbe et d'une conique appartenant à l'un des trois systèmes remarquables de coniques quadritangentes.*

19. Les trois systèmes de quatre droites passant par les seize points d'un groupe jouissent, par rapport à leur enveloppe, de propriétés intéressantes.

Cette enveloppe, que nous appellerons C, étant une courbe de troisième classe, on peut faire correspondre à chacune de ses tangentes un argument elliptique, de telle sorte que les arguments des trois tangentes issues d'un même point aient une somme nulle, à des multiples près des périodes Ω, Ω'.

Cela posé, considérons un de nos groupes de seize points; et soient a_1, a_2, a_3, a_4 les arguments elliptiques des droites qui correspondent aux lignes du Tableau du n° **18**; b_1, b_2, b_3, b_4 ceux des droites qui correspondent aux colonnes; c_1, c_2, c_3, c_4 ceux des quatre autres droites qui passent par les seize points, dans l'ordre où elles ont été énumérées plus haut. Écrivons maintenant que les arguments des trois droites qui passent par le point a_{11}, puis par les points $a_{12}, \ldots, a_{44}$, ont une somme nulle, on a

$$\begin{aligned} &a_1 + b_1 + c_4 \equiv 0, \quad \bmod(\Omega, \Omega')\\ &a_1 + b_2 + c_3 \equiv 0,\\ &a_1 + b_3 + c_2 \equiv 0,\\ &a_1 + b_4 + c_1 \equiv 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{array}{lll} a_2 + b_1 + c_3 \equiv 0, & a_3 + b_1 + c_2 \equiv 0, & a_4 + b_1 + c_1 \equiv 0,\\ a_2 + b_2 + c_4 \equiv 0, & a_3 + b_2 + c_1 \equiv 0, & a_4 + b_2 + c_2 \equiv 0,\\ a_2 + b_3 + c_1 \equiv 0, & a_3 + b_3 + c_4 \equiv 0, & a_4 + b_3 + c_3 \equiv 0,\\ a_2 + b_4 + c_2 \equiv 0, & a_3 + b_4 + c_3 \equiv 0, & a_4 + b_4 + c_4 \equiv 0. \end{array}$$

On déduit de ces relations

$$\begin{aligned} 2a_1 &\equiv 2a_2 \equiv 2a_3 \equiv 2a_4,\\ 2b_1 &\equiv 2b_2 \equiv 2b_3 \equiv 2b_4,\\ 2c_1 &\equiv 2c_2 \equiv 2c_3 \equiv 2c_4. \end{aligned}$$

On peut donc poser, a étant un nouvel argument,

$$a_1 = -a, \qquad a_2 = -a + \frac{\Omega}{2}, \qquad a_3 = -a + \frac{\Omega'}{2}, \qquad a_4 = -a + \frac{\Omega + \Omega'}{2},$$

et, en combinant ces relations avec les premières, on trouve, en désignant par b et c deux nouveaux arguments,

$$b_1 = -b, \qquad b_2 = -b + \frac{\Omega}{2}, \qquad b_3 = -b + \frac{\Omega'}{2}, \qquad b_4 = -b + \frac{\Omega + \Omega'}{2},$$

$$c_1 = -c + \frac{\Omega'}{2}, \qquad c_2 = -c + \frac{\Omega + \Omega'}{2}, \qquad c_3 = -c, \qquad c_4 = -c + \frac{\Omega}{2},$$

avec la condition

$$a + b + c = 0. \tag{13}$$

On déduit de là que les quatre droites d'arguments a_1, a_2, a_3, a_4 touchent leur enveloppe en quatre points situés sur une nouvelle tangente à l'enveloppe, et d'argument $2a$; de même pour les deux autres systèmes de quatre droites. De plus, d'après (13), les trois tangentes d'arguments $2a$, $2b$, $2c$ sont concourantes. Ainsi :

Les trois systèmes de quatre droites qui passent par les seize points d'un groupe jouissent de la propriété suivante.

Soit C la courbe de troisième classe à laquelle ces droites sont toutes tangentes : les quatre points de contact avec C des quatre droites d'un même système sont sur une même tangente à cette courbe, et les trois nouvelles tangentes ainsi définies sont concourantes.

20. La configuration remarquable formée par seize points situés sur trois systèmes de quatre droites est bien connue : c'est la réciproque de la configuration dite *de Hesse* que M. Schröter, en particulier, a étudiée dans des Mémoires d'un haut intérêt et spécialement dans un Mémoire inséré au tome CVIII du *Journal de Crelle*.

Les propriétés de cette configuration permettent de retrouver, d'une manière nouvelle, les résultats que nous venons d'obtenir, et quelques-uns de ceux que nous avons établis dans notre travail du tome VI (4ᵉ série) de ce Journal.

Considérons trois systèmes de quatre droites, en relation desmique, c'est-à-dire appartenant à un même faisceau ponctuel de quartiques planes; appelons *courbe desmique* du quatrième ordre toute quartique du faisceau.

D'après M. Schröter, les douze droites des trois systèmes touchent une même courbe de troisième classe et les raisonnements du n° **19** montrent qu'on peut faire correspondre à un point du plan une configuration desmique par la construction suivante :

D'un point M du plan de la courbe de troisième classe et du sixième degré C, on mène à cette courbe les trois tangentes, dont chacune coupe encore C en quatre points; les tangentes à C en ces douze nouveaux points forment une configuration desmique, c'est-à-dire se rencontrent trois à trois en seize points m.

Si M décrit une droite, les points correspondants m décrivent une courbe d'ordre μ. Deux de ces courbes, correspondant à deux droites décrites par M, ne peuvent se couper qu'en seize points, qui sont les points m de la configuration déduite du point commun aux deux droites: on a donc $\mu^2 = 16$ et, par suite, $\mu = 4$; le lieu est une quartique.

Réciproquement, toute quartique, passant par seize points m_0 d'une configuration, c'est-à-dire toute courbe desmique, peut être engendrée de cette manière. Car soit M_0 le point du plan qui correspond aux seize points m_0 de la configuration; on peut, évidemment, mener par M_0 une droite telle que la quartique qui se déduit de cette droite ait un nouveau point commun avec la courbe desmique considérée, qu'elle coupe dès lors en dix-sept points. Les deux courbes coïncident donc et la proposition est établie.

De là résulte cette proposition :

Toute courbe desmique du quatrième ordre est desmique d'une infinité de manières;

et ce mode de génération des courbes desmiques :

Étant donnée une courbe de troisième classe et du sixième ordre C, *on lui mène, par un point* M *de son plan, trois tangentes, dont chacune coupe encore* C *en quatre points.*

Les tangentes à la courbe en ces nouveaux points forment un système desmique et se coupent, par suite, trois à trois, en seize points m : lorsque M décrit une droite, les seize points m correspondants décrivent une courbe desmique du quatrième ordre.

21. Ce mode de génération met en évidence une propriété fondamentale des courbes desmiques, rencontrée par nous dans notre Mémoire déjà cité. Soit, en effet, Δ la droite décrite par M : si M coïncide avec un des six points communs à Δ et à C, les tangentes issues de ce point sont d'abord la tangente T en M, comptée deux fois, et une autre tangente, coupant en outre la courbe aux points M, N, P, Q. Soient G, H, I, K les points où la tangente en M coupe encore la courbe. D'après une propriété connue des courbes de troisième classe, facile d'ailleurs à établir à l'aide des fonctions elliptiques, les tangentes à C aux points N, P, Q sont les diagonales du quadrilatère formé par les tangentes aux points G, H, I, K. Les seize points m, qui correspondent à M, étant à l'intersection des tangentes en M, N, P, Q avec les tangentes en G, H, I, K, on voit que les diagonales du quadrilatère précédent sont des bitangentes de la courbe desmique qui correspond à la droite Δ, et que leurs points de contact sont les sommets de ce quadrilatère. On trouve, pour chacun des six points de C situés sur Δ, un système analogue de bitangentes.

Donc :

Toute courbe desmique a dix-huit bitangentes remarquables, qui peuvent être groupés en six triangles jouissant de la propriété suivante : les trois bitangentes de chaque triangle sont les diagonales d'un quadrilatère complet dont les six sommets sont les points de contact de ces bitangentes.

Cette proposition montre que les courbes desmiques, et, par suite, les sections planes de la surface desmique (qui sont, d'ailleurs, comme on le voit aisément, des courbes desmiques générales) coïncident avec les quartiques que nous avons étudiées dans notre Mémoire antérieur, et dont l'équation peut être mise sous la forme

$$(14)\quad x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=4(ax+by+cz)xyz.$$

22. Arrivons maintenant à l'étude des sections de la surface desmique par ses plans tangents.

Il est clair qu'on pourrait trouver leur équation générale et leurs propriétés en partant de l'équation (14) et en exprimant qu'elle représente une courbe à un point double.

De même que la courbe (14) possède six systèmes de trois bitangentes jouissant de la propriété énoncée tout à l'heure, on verrait que la courbe à point double possède quatre de ces systèmes; les deux autres systèmes sont confondus et formés par trois bitangentes issues du point double ([1]).

Mais cette marche ne conduit pas directement aux propriétés fondamentales; il est plus simple de s'appuyer sur des propositions obtenues dans la seconde Partie de ce Mémoire et de former *a priori* l'équation des courbes à étudier.

Les courbes desmiques à point double jouissent de deux propriétés caractéristiques qui entraînent toutes les autres.

La première s'énonce ainsi :

Par le point double on peut mener six tangentes à la courbe; trois de ces tangentes ont leurs points de contact en ligne droite; il en est de même des trois autres.

Soit en effet (u, v) le point de contact d'un plan tangent à la surface desmique; par ce point nous savons mener trois bitangentes de la surface, dont les seconds points de contact ont respectivement pour arguments

$$v,\quad u;\qquad -2v-u,\quad v;\qquad 2v-u,\quad v.$$

Ces trois points sont en ligne droite. En effet, la droite qui joint les points $(-2v-u, v)$ et $(2v-u, v)$ coupe en outre la surface desmique, d'après les formules du n° **8**, aux deux points (v, u) et $(-3v, u)$.

Le dernier de ces deux points est précisément *le tangentiel* du point de contact (u, v) (n° **17**).

([1]) Dans le mode de génération indiqué plus haut, on obtient la courbe desmique à point double en supposant que la droite Δ passe par un des points de rebroussement de la courbe C.

Nous pouvons énoncer ainsi la proposition suivante :

Par un point A de la surface desmique, on mène les tangentes aux trois biquadratiques qui passent par ce point; chacune de ces trois droites touche la surface en un second point, et ces trois nouveaux points de contact sont sur une droite qui coupe en outre la surface au point tangentiel du point A.

Il résulte bien de là que, si l'on considère la section de la surface par le plan tangent en A, trois des tangentes issues de A ont leurs points de contact en ligne droite. Or on sait que les six points de contact des tangentes menées à une quartique par son point double sont sur une conique; on en déduit aisément que les trois autres tangentes issues de A ont aussi leurs points de contact en ligne droite.

La seconde propriété est celle-ci (¹) :

Considérons les trois tangentes menées à la courbe desmique par son point double, et qui touchent les trois biquadratiques de la surface desmique passant par ce point. Soit $T = 0$ *leur équation, le point double étant pris pour origine des coordonnées; l'équation des tangentes à la courbe en ce point s'obtiendra en égalant à zéro le hessien de la forme* T.

Cette proposition est évidente, si l'on se reporte à la théorie des courbes linéaires sur la surface et à la correspondance établie entre ces courbes et les droites d'un plan.

Aux trois systèmes de biquadratiques, $v = \alpha$; $u + v = \alpha$; $u - v = \alpha$, correspondent en effet sur le plan les systèmes de droites

$$y = \alpha; \qquad y + x\sqrt{3} = \alpha; \qquad y - x\sqrt{3} = \alpha,$$

qui forment un triangle équilatéral. Par suite, si l'on prend le hessien de la forme

$$f = y(y + x\sqrt{3})(y - x\sqrt{3}),$$

(¹) Elle est due à M. Waelsch (*loc. cit.*).

on obtiendra le premier membre de l'équation d'un cercle de rayon nul. On le vérifie d'ailleurs directement; le covariant hessien est, en effet,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 36(x^2+y^2).$$

Revenant maintenant du plan à la surface, nous voyons, puisque la propriété précédente est au fond une propriété de rapports anharmoniques, qu'on obtiendra les directions asymptotiques en un point de la surface desmique en formant l'équation des tangentes aux trois biquadratiques qui passent par ce point et en égalant à zéro le hessien de cette équation (on suppose qu'on forme les équations dans le plan tangent au point considéré, pris lui-même pour origine).

23. Les deux propriétés qu'on vient d'établir permettent de former directement l'équation des courbes desmiques à point double.

En effet, le point double étant à l'origine, nous pouvons mettre sous la forme $x^3+y^3=0$ l'équation de trois tangentes menées de ce point à la courbe; le hessien de la forme x^3+y^3 est, à un facteur près, égal à xy.

Prenons maintenant pour troisième côté, $z=0$, du triangle de référence la droite qui joint les points de contact des trois tangentes $x^3+y^3=0$; l'équation de la courbe sera de la forme

$$(x^3+y^3)(ax+by+cz)+Cz^2=0,$$

$C=0$ étant l'équation d'une conique. La courbe ayant un point double à l'origine et pour tangentes en ce point les droites $x=0$, $y=0$, on a

$$C=xy,$$

et, par suite, l'équation cherchée devient

$$(x^3+y^3)(ax+by+cz)+xyz^2=0.$$

Cette équation met en évidence une nouvelle propriété. Les droites $x=0, y=0$, qui touchent la courbe au point double, la coupent respectivement en un nouveau point; la droite qui joint les deux points ainsi définis est

$$ax + by + cz = 0,$$

et touche la courbe en un point situé sur $z = 0$.

De plus, les tangentes issues du point double, autres que les droites $x^2 + y^2 = 0$, ont pour équation

$$c^2(x^2 + y^2) - 4xy(ax + by) = 0.$$

La droite qui joint leurs points de contact s'obtient aisément.

On peut écrire l'équation de la courbe sous la forme

$$[c^2(x^2 + y^2) - 4xy(ax + by)](ax + by + cz) + 4xy\left(ax + by + \frac{c}{2}z\right)^2 = 0.$$

La droite cherchée a donc pour équation

$$ax + by + \frac{c}{2}z = 0;$$

elle passe par le point commun à $z = 0$ et $ax + by + cz = 0$.

Donc :

Par le point double d'une courbe desmique on peut mener à cette courbe six tangentes; trois de ces tangentes ont leurs points de contact sur une droite D, *les trois autres ont leurs points de contact sur une droite* D'; *les droites* D *et* D' *se coupent en un point situé sur la courbe. La tangente en ce point rencontre la courbe en deux nouveaux points, qui sont situés chacun sur une des tangentes au point double.*

Relativement à la surface desmique, on peut dire que :

Les tangentes asymptotiques en un point A *de la surface desmique coupent chacune la surface en un nouveau point; la droite qui joint ces points passe par le point tangentiel de* A *et y touche la surface.*

Il est aisé de vérifier, sur l'équation de la courbe desmique, le théorème suivant :

Toute droite issue du point double de la courbe desmique coupe cette courbe en deux nouveaux points; ces points sont conjugués harmoniques des deux points où la droite rencontre les droites fixes D *et* D′ *du théorème précédent.*

24. Nous venons de trouver deux nouvelles propriétés du point que nous avons rencontré dans une autre théorie et que nous avons nommé *tangentiel* pour des raisons qu'on comprend maintenant. Le tangentiel $(-3v, u)$ d'un point (u, v) est dans le plan tangent à la surface au point (u, v), et sur la droite qui joint les points d'intersection avec la surface des tangentes asymptotiques en ce point.

Inversement, étant donné le tangentiel $(-3v_0, u_0)$, il correspond à ce point neuf points, dont les arguments sont compris dans la formule

$$u_0, \quad v_0 + \frac{4h\omega + 4h'\omega'}{3} \qquad (h, h' = 0, 1, 2).$$

Cette formule donne lieu aux remarques suivantes.

Les neuf points sont sur la courbe $u = u_0$; ils sont aussi sur les courbes

$$3v + u = 3v_0 + u_0; \qquad 3v - u = 3v_0 - u_0;$$

ces courbes sont les courbes de contact de la surface avec les développables qui ont respectivement pour arêtes de rebroussement les biquadratiques (nº **10**)

$$v = u_0, \qquad u + v = -3v_0 + u_0, \qquad u - v = -(3v_0 + u_0),$$

biquadratiques qui passent par le point $u = -3v_0$, $v = u_0$.

De là résulte cette proposition :

Soit B *un point de la surface desmique; les développables qui ont pour arêtes de rebroussement les trois biquadratiques passant par* B *touchent la surface desmique suivant trois courbes qui ont neuf points communs; le point* B *est le tangentiel de chacun de ces neuf points.*

On peut présenter autrement ces résultats.

Les trois biquadratiques passant par un point B de la surface sont sur un même cône du troisième ordre du sommet B, car les cordes de toutes les biquadratiques font partie d'un même complexe du troisième ordre. Les plans osculateurs menés par B à une des biquadratiques passant par ce point sont les plans tangents d'inflexion du cône; ils sont donc osculateurs aux deux autres biquadratiques, et les trois points d'osculation d'un même plan sont sur une génératrice d'inflexion du cône. De plus, nous savons que le plan osculateur en un point (u_0, v_0) à la biquadratique $v = v_0$, qui passe par ce point, touche la surface desmique au point (v_0, u_0) (**10**). Or par le point $(-3v_0, u_0)$ menons un plan osculateur à la biquadratique $v = u_0$ qui psase par ce point; le point d'osculation aura son argument v égal à u_0; son argument u sera tel que $3u - 3v_0$ soit égal à une période. Ce point sera donc

$$v_0 + \frac{4h\omega + 4h'\omega'}{3}, \quad u_0,$$

et, d'après ce qui vient d'être rappelé, il touchera la surface au point

$$u_0, \quad v_0 + \frac{4h\omega + 4h'\omega'}{3},$$

c'est-à-dire en un point qui a pour tangentiel $(-3v_0, u_0)$.

Donc :

Les trois biquadratiques menées par un même point B *de la surface desmique ont neuf plans osculateurs communs passant par* B ; *les trois points d'osculation de chacun de ces plans sont en ligne droite entre eux et avec le point* B; *les neuf droites ainsi définies sont les génératrices d'inflexion d'un cône du troisième ordre.*

Les neuf plans osculateurs communs touchent la surface desmique en neuf points, de chacun desquels le point **B** *est le tangentiel.*

QUATRIÈME PARTIE.

25. Une génération et des propriétés intéressantes de la surface desmique résultent d'un beau théorème de M. Cremona.

Ce géomètre, dans son Mémoire couronné sur les surfaces du troisième ordre, s'est proposé le problème suivant :

Soit un plan coupant une surface S, *d'ordre trois, suivant trois droites,* a_1, b_2, c_{12}; *trois coniques de la surface dont les plans passent respectivement par* a_1, b_2, c_{12} *sont toujours sur une quadrique : chercher le lieu des sommets de celles de ces quadriques qui dégénèrent en cônes.*

M. Cremona a démontré que le lieu est une surface du quatrième ordre, admettant trois séries de quadriques inscrites; par chaque point de l'espace passent deux quadriques de chaque série.

Les quadriques d'une série ont donc, d'après ces résultats, une équation de la forme

$$\lambda^2 A + 2\lambda B + C = 0,$$

et la surface enveloppe, $B^2 - AC = 0$, a pour points doubles les huit points communs aux surfaces $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$.

Or il est aisé de reconnaître, en lisant le Mémoire de M. Cremona, que la surface admet ainsi douze points doubles, qui sont les points de contact avec la surface cubique des plans tangents (autres que le plan $a_1 b_2 c_{12}$) qu'on peut lui mener par les droites a_1, b_2, c_{12}.

Ces résultats qui, nous le répétons, se déduisent sans aucun effort du travail de M. Cremona, peuvent être établis très simplement par le calcul.

Soient, en effet, $t = 0$ le plan $a_1 b_2 c_{12}$ et, dans ce plan, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, les équations des trois droites a_1, b_2, c_{12}.

La surface cubique qui passe par ces droites a une équation de la forme

$$ft + xyz = 0,$$

f étant du second ordre en x, y, z, t.

Trois coniques de la surface dont les plans passent respectivement par a_1, b_2, c_{12} ont pour équations

$$\begin{aligned} f + \alpha yz &= 0, & x &= \alpha t, \\ f + \beta zx &= 0, & y &= \beta t, \\ f + \gamma yx &= 0, & z &= \gamma t. \end{aligned}$$

La quadrique qui passe par ces coniques est

$$f + \alpha yz + \beta zx + \gamma yx - \alpha\beta zt - \alpha\gamma yt - \beta\gamma xt + \alpha\beta\gamma t^2 = 0.$$

Le lieu des sommets des cônes compris dans cette formule s'obtient en éliminant α, β, γ entre les équations

$$\begin{aligned} f'_x + \beta z + \gamma y - \beta\gamma t &= 0, \\ f'_y + \alpha z + \gamma x - \alpha\gamma t &= 0, \\ f'_z + \beta x + \alpha y - \alpha\beta t &= 0, \\ f'_t - \alpha\beta z - \alpha\gamma y - \beta\gamma x + 2\alpha\beta\gamma t &= 0. \end{aligned}$$

Effectuant les calculs, on trouve le lieu du quatrième ordre

$$f^2 - f'_y f'_z yz - f'_x f'_z xz - f'_x f'_y xy - t f'_x f'_y f'_z + xyz f'_t = 0.$$

Soit Σ le premier membre de cette équation; posons

$$S = ft + xyz,$$

$S = 0$ étant l'équation de la surface cubique; on a identiquement

$$S^2 - S'_x S'_y S'_z = \Sigma t^2.$$

Cette identité montre bien que la surface $\Sigma = 0$ admet comme points doubles les points de contact des plans tangents menés à $S = 0$ par les droites $t = 0$, $x = 0$; $t = 0$, $y = 0$; $t = 0$, $z = 0$, pourvu toutefois que ces points ne soient pas dans le plan $t = 0$.

Or, par une droite d'une surface cubique, passent cinq plans tritangents de cette surface; les trois droites considérées étant dans un même plan tritangent, $t=0$, on pourra mener par chacune d'elles quatre plans tritangents autres que $t=0$, et, par suite, la surface du quatrième degré $\Sigma = 0$ aura douze points doubles.

26. Nous allons prouver maintenant que Σ est une surface desmique; il suffit, pour cela, de vérifier que les douze points doubles forment un système desmique, c'est-à-dire sont situés trois à trois sur seize droites par lesquelles on peut mener trois systèmes de quatre plans.

Or cette propriété résulte aisément des relations entre les vingt-sept droites d'une surface cubique.

Considérons ces vingt-sept droites et employons, pour les désigner, les notations de M. Cremona, à savoir :

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,$$
$$c_{12},\ c_{13},\ c_{14},\ c_{15},\ c_{16},\ c_{23},\ c_{24},\ c_{25},\ c_{26},\ c_{34},\ c_{35},\ c_{36},\ c_{45},\ c_{46},\ c_{56}.$$

On sait qu'une droite a_i et une droite b_k se rencontrent, si i est différent de k; qu'une droite c_{ik} rencontre les droites a_i et b_k; enfin que deux droites c_{ik} et c_{lm} se rencontrent si les indices i, k, l, m sont différents. Il est aisé, d'après cela, de trouver les points de contact des plans tritangents menés par les droites a_1, b_2, c_{12}, et les relations de position entre ces points.

Nous désignerons, dans ce qui suit, par les symboles de deux droites, le point d'intersection de ces droites; ainsi $(b_3 c_{13})$ sera le point d'intersection de b_3 et de c_{13}.

Les points de contact des plans tritangents menés par a_1, b_2, c_{12} et non situés dans le plan $a_1 b_2 c_{12}$ sont :

Plans tritangents par a_1 ...	$(b_3 c_{13})$	$(b_4 c_{14})$	$(b_5 c_{15})$	$(b_6 c_{16})$
» b_2 ...	$(a_3 c_{23})$	$(a_4 c_{24})$	$(a_5 c_{25})$	$(a_6 c_{26})$
» c_{12} ...	$(a_2 b_1)$	$(c_{34} c_{56})$	$(c_{35} c_{46})$	$(c_{36} c_{45})$

Cela posé, considérons deux plans tritangents, par exemple $a_2 b_3 c_{23}$ et $a_3 b_1 c_{13}$: ils se coupent suivant une droite. Or la droite a_2 du premier rencontre la droite b_1 du second; de même, b_3 rencontre c_{13} et

a_3 rencontre c_{23}; il en résulte que les trois points

$$(a_2 b_1), \quad (a_3 c_{23}) \quad (b_3 c_{13})$$

sont en ligne droite. En considérant successivement d'autres couples de plans tritangents, on arrive à former le Tableau suivant, où les trois points de chaque colonne sont sur une même droite.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$(a_2 b_1)$	$(a_2 b_1)$	$(a_2 b_1)$	$(a_2 b_1)$	$(a_3 c_{23})$	$(a_3 c_{23})$	$(a_3 c_{23})$	$(a_4 c_{24})$
$(a_3 c_{23})$	$(a_4 c_{24})$	$(a_5 c_{25})$	$(a_6 c_{26})$	$(b_4 c_{14})$	$(b_5 c_{15})$	$(b_6 c_{16})$	$(b_3 c_{13})$
$(b_3 c_{13})$	$(b_4 c_{14})$	$(b_5 c_{15})$	$(b_6 c_{16})$	$(c_{24} c_{56})$	$(c_{25} c_{46})$	$(c_{26} c_{45})$	$(c_{34} c_{56})$

9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
$(a_4 c_{24})$	$(a_4 c_{24})$	$(a_5 c_{25})$	$(a_5 c_{25})$	$(a_5 c_{25})$	$(a_6 c_{26})$	$(a_6 c_{26})$	$(a_6 c_{26})$
$(b_5 c_{15})$	$(b_6 c_{16})$	$(b_3 c_{13})$	$(b_4 c_{14})$	$(b_6 c_{16})$	$(b_3 c_{13})$	$(b_4 c_{14})$	$(b_5 c_{15})$
$(c_{45} c_{36})$	$(c_{46} c_{35})$	$(c_{35} c_{46})$	$(c_{45} c_{36})$	$(c_{56} c_{34})$	$(c_{36} c_{45})$	$(c_{46} c_{35})$	$(c_{56} c_{34})$

Il résulte de l'examen de ce Tableau que les douze points doubles considérés sont trois à trois sur seize droites; ces seize droites sont dès lors situées sur la surface Σ.

Montrons maintenant que les seize droites appartiennent à trois systèmes de quatre plans; à cet effet, numérotons-les de 1 à 16, en suivant l'ordre des colonnes du Tableau précédent.

Il résulte de l'examen de ce Tableau que les droites 1, 2, 5, 8 sont dans un même plan, car 1 et 2 se coupent au point $(a_2 b_1)$; 1 et 5 au point $(a_3 c_{23})$; 1 et 8 au point $(b_3 c_{13})$, et ainsi de suite. On forme ainsi le Tableau suivant où les quatre droites d'une même ligne sont dans un plan, ainsi que les quatre droites d'une même colonne.

1	2	5	8
3	4	13	16
6	10	7	9
11	15	12	14

Enfin les droites 1, 4, 7, 14 sont dans un même plan, et, de même, les droites 11, 10, 13, 8; les droites 3, 2, 12, 9 et les droites 5, 16, 6, 15.

Les seize droites appartiennent donc à trois systèmes de quatre plans, et, par suite, Σ est une surface desmique du quatrième ordre.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant données, sur une surface cubique, trois droites situées dans un même plan tritangent, P, le lieu des sommets des cônes du second ordre qui coupent la surface cubique suivant trois coniques dont les plans passent respectivement par les trois droites données est une surface desmique du quatrième ordre. Les douze points doubles de cette surface sont les points de contact, non situés dans le plan P, des plans tritangents qu'on peut mener à la surface cubique par les trois droites primitivement considérées.

27. L'identité

$$S^2 - S'_x S'_y S'_z = \Sigma t^2$$

montre que la surface $\Sigma t^2 = 0$ coupe $S = 0$ suivant trois courbes distinctes.

L'une d'elles est

$$S = 0, \qquad S'_x = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} f\,t + xyz = 0, \\ f'_x t + yz = 0. \end{cases}$$

Cette courbe comprend d'abord les deux droites $t = 0$, $y = 0$ et $t = 0$ et $z = 0$, qui ne sont pas situées sur Σ, mais sur $t^2 = 0$; il reste la courbe

$$\begin{aligned} f'_x t + yz &= 0, \\ f - x f'_x &= 0, \end{aligned}$$

qui est une biquadratique.

Les surfaces $S = 0$ et Σ se coupent donc suivant trois biquadratiques; il est aisé de voir qu'elles appartiennent sur Σ à trois systèmes différents.

Inversement, on démontre sans difficulté que :

Sur une surface desmique, trois biquadratiques quelconques de *systèmes différents appartiennent à une même surface cubique, sur laquelle les points doubles de la surface desmique sont les points de contact de plans tritangents.*

On pourrait indiquer d'autres relations entre la surface desmique et les surfaces cubiques menées par trois biquadratiques; nous n'insisterons pas davantage sur cette théorie, dont le principal intérêt est dans le complément qu'elle apporte à un beau résultat de M. Cremona.

28. Nous avons défini analytiquement la surface desmique par les relations

$$\rho x = \frac{\sigma_1 u}{\sigma_1 v}, \qquad \rho y = \frac{\sigma_2 u}{\sigma_2 v}, \qquad \rho z = \frac{\sigma_3 u}{\sigma_3 v}, \qquad \rho t = \frac{\sigma u}{\sigma v},$$

étant posés

$$\left[\frac{\sigma_1 u}{\sigma u}\right]^2 = pu - e_1$$

et

$$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3).$$

Cherchons ce que devient la surface quand les fonctions elliptiques se ramènent aux fonctions circulaires, en faisant, par exemple, $e_1 = e_2$.

On sait que les fonctions $\sqrt{pu - e_1}$, $\sqrt{pu - e_2}$, $\sqrt{pu - e_3}$ sont égales, à un facteur constant près, à $\operatorname{sn} U$, $\operatorname{cn} U$, $\operatorname{dn} U$; U étant égal à u, multiplié par une constante, et le module k de $\operatorname{sn} U$ étant $\sqrt{\frac{e_2 - e_1}{e_3 - e_1}}$.

Il résulte de là qu'en désignant par ξ, η, ζ de nouvelles coordonnées, proportionnelles à $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$, la surface desmique peut être définie par les relations

$$\xi = \frac{\operatorname{sn} U}{\operatorname{sn} V}, \qquad \eta = \frac{\operatorname{cn} U}{\operatorname{cn} V}, \qquad \zeta = \frac{\operatorname{dn} U}{\operatorname{dn} V}.$$

Faisons tendre e_2 vers e_1, c'est-à-dire le module k vers zéro. Les fonctions $\operatorname{sn} U$ et $\operatorname{cn} U$ deviennent $\sin U$ et $\cos U$; $\operatorname{dn} U$ tend vers 1. On aurait alors $\zeta = 1$. Pour échapper à cette conclusion, qui ne donne rien d'intéressant, on peut, à la place de ζ, introduire la coordonnée

$$\zeta' = 2\,\frac{\zeta - 1}{k^2};$$

à la limite on a, pour $k = 0$,

$$\zeta' = \lim\left[\sqrt{\frac{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 U}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 V}} - 1\right]\frac{2}{k^2} = (\operatorname{sn}^2 V - \operatorname{sn}^2 U),$$

c'est-à-dire

$$\zeta' = (\sin^2 V - \sin^2 U) = \sin(U + V)\sin(V - U).$$

La surface nouvelle est donc définie par

$$\xi = \frac{\sin U}{\sin V}, \qquad \eta = \frac{\cos U}{\cos V}, \qquad \zeta' = \sin(U + V)\sin(V - U),$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$\begin{aligned}
\rho x &= \sin U \cos V,\\
\rho y &= \cos U \sin V,\\
\rho z &= \sin(V + U)\sin(V - U)\sin V \cos V,\\
\rho t &= \sin V \cos V.
\end{aligned}$$

Posant

$$x + y = X, \qquad y - x = Y, \qquad 2z = -T, \qquad 2t = +Z,$$

et introduisant à la place de U et V les quantités α, β, γ, définies par

$$\alpha = U + V, \qquad \beta = V - U, \qquad \gamma = -2V,$$

ce qui entraîne la condition $\alpha + \beta + \gamma = 0$, il vient enfin pour expression des coordonnées d'un point de la surface

$$\left.\begin{aligned}
\rho X &= \sin\alpha,\\
\rho Y &= \sin\beta,\\
\rho Z &= \sin\gamma,\\
\rho T &= \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma
\end{aligned}\right\} \text{avec la condition } \alpha + \beta + \gamma = 0.$$

L'équation cartésienne de cette surface s'obtient aisément; on a, en effet, entre les sinus des trois angles α, β, γ, en vertu de la relation $\alpha + \beta + \gamma = 0$, la condition

$$\sin^4\alpha + \sin^4\beta + \sin^4\gamma - 2\sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\sin^2\alpha\sin^2\gamma \\ - 2\sin^2\beta\sin^2\gamma + 4\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma = 0.$$

Par suite, la surface a pour équation

$$X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 + 4TXYZ = 0.$$

Elle jouit de propriétés analogues à celles de la surface desmique générale; on voit, en particulier, que ses sections par un plan quelconque sont des courbes du type déjà rencontré (**14**).

Cette surface mériterait une étude spéciale à laquelle nous aurons occasion de revenir.