JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES HUMBERT

Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 6 (1890), p. 423-444.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1890_4_6__423_0>

Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

1. L'équation d'une quartique, ou courbe du quatrième ordre, rapportée au triangle xyz formé par trois de ses tangentes doubles, dont les six points de contact ne sont pas sur une conique, est de la forme

$$(1)\quad p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2-2pqxy-2przx-2qryz=txyz,$$

p, q, r, t désignant des fonctions linéaires de x, y, z.

La classe remarquable de quartiques, dont nous allons faire connaître de nombreuses propriétés, est celle que représente l'équation générale précédente, en supposant que p, q, r soient les dérivées partielles, par rapport à x, y, z, d'une même fonction $f(x, y, z)$ du second ordre.

Avant d'aborder cette étude, nous rappellerons quelques propositions générales relatives aux quartiques.

2. On sait qu'une quartique sans point double admet soixante-trois systèmes de coniques inscrites, c'est-à-dire de coniques quadruplement tangentes; l'équation générale des coniques d'un système dépendant d'un paramètre qui y figure au second ordre, ces coniques font partie d'un réseau ponctuel. Il en résulte que les six cordes com-

munes à deux d'entre elles touchent une courbe de troisième classe, la cayleyenne du réseau, et que les trois sommets de chacun des trois couples de ces cordes sont sur la jacobienne du réseau, courbe du troisième ordre.

En particulier, les six droites qui joignent deux à deux les quatre points de contact d'une des coniques avec la quartique touchent la cayleyenne, et les trois sommets des trois couples formés par ces droites sont sur la jacobienne.

On sait aussi que les huit points de contact de deux coniques du même système sont sur une conique.

Chacun des soixante-trois systèmes de coniques inscrites comprend six couples de droites, qui sont des bitangentes de la quartique; il est clair, d'ailleurs, que le système est déterminé quand on se donne un de ces couples de bitangentes.

Deux systèmes de coniques inscrites ont en commun quatre ou six bitangentes : dans le premier cas, les huit points de contact des quatre bitangentes communes sont sur une conique. Dans le second, les six bitangentes de chacun des deux systèmes, non communes à l'autre, appartiennent à un troisième système. L'ensemble des bitangentes appartenant à ces trois systèmes se compose donc seulement de dix-huit droites; on peut les répartir en six triangles et faire correspondre entre eux les sommets et les côtés de ces triangles, de telle sorte que les douze côtés issus de six sommets homologues appartiennent à un même système.

La figure formée par les six triangles et les deux points de contact de chacun de leurs côtés avec la quartique jouit de propriétés géométriques nombreuses. Désignons les sommets d'un triangle par les lettres a_i, b_i, c_i, les lettres a s'appliquant à six sommets homologues, et de même les lettres b et c. Considérons trois quelconques des triangles; supprimons dans l'un le côté opposé au sommet a, dans le deuxième, le côté opposé au sommet b, dans le troisième, le côté opposé au sommet c; convenons de dire que, dans la figure qui subsiste, et qui se compose de trois angles, un côté *aboutit* au sommet de l'angle auquel il appartient, et qu'il est *issu* du sommet situé à son autre extrémité.

Les douze points de contact avec la quartique des six côtés considérés sont sur une cubique; deux côtés aboutissant à un sommet a (ou b, ou c) et un côté issu d'un sommet a (ou b, ou c) ont leurs six points de contact sur une conique; deux côtés issus d'un sommet a, deux côtés issus d'un sommet b, deux côtés issus d'un sommet c forment trois couples, dont les sommets sont en ligne droite (¹).

3. Cela posé, revenons à l'équation (1), et supposons que l'on ait

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad r = \frac{df}{dz}.$$

On peut écrire

$$p = x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z},$$

et de même pour q et r.

L'équation (1) s'écrit alors

$$x^2\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)^2 + \ldots = txyz.$$

En développant, on voit que les termes qui contiennent, au premier membre, le cube d'une des variables disparaissent; il ne subsiste que des termes en x^4, y^4, z^4, x^2y^2, y^2z^2, x^2z^2, et des termes en xyz que l'on peut faire passer au second membre.

Effectuant les calculs, il reste

$$(2)\quad x^4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + y^4\left(\frac{\partial^2 f}{dy^2}\right)^2 + z^4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)^2 - 2x^2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{dy^2} - \ldots = u_1 xyz,$$

u_1 étant linéaire en x, y, z.

Posons

$$x\sqrt{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} = \mathrm{X}, \qquad y\sqrt{\frac{\partial^2 f}{dy^2}} = \mathrm{Y}, \qquad z\sqrt{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} = \mathrm{Z},$$

(¹) Ces propositions sont démontrées dans le *Traité des courbes planes*, de Salmon, ou se déduisent aisément des résultats établis dans ce Traité (trad. O. Chemin, pages 320 et suivantes). *Cf.* aussi STEINER, *Journal de Crelle*, t. 49, p. 265.

il vient

$$(3) \qquad X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 = 4uXYZ.$$

Telle est la forme canonique à laquelle on peut ramener l'équation des quartiques dont nous nous occupons; il ne subsiste, dans u, que trois paramètres arbitraires, et l'on voit que l'équation générale de ces courbes dépend de onze paramètres, quand le triangle de référence est quelconque.

4. *Remarque.* — Nous avons supposé implicitement que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ne sont pas nuls. Si l'on avait, par exemple,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial^2 f}{dy^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \gtrless 0,$$

l'équation (2) deviendrait, en y introduisant Y et Z comme plus haut,

$$(4) \qquad Y^4 + Z^4 - 2Y^2Z^2 = 4uXYZ,$$

et la courbe aurait un point double, $Y = 0$, $Z = 0$, cas que nous excluons ici.

5. L'équation (3) peut se mettre sous la forme

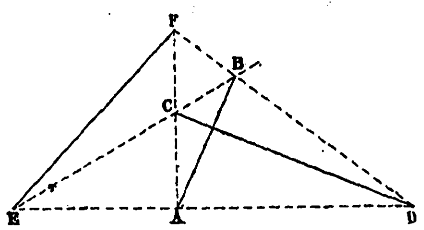
$$(5) \quad (X+Y+Z)(X+Y-Z)(X-Y+Z)(X-Y-Z) = 4uXYZ.$$

Cette forme met en évidence une propriété importante des trois tangentes doubles $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$: c'est que les six points de contact avec la quartique de ces trois droites sont répartis trois à trois sur les quatre droites $X + Y + Z = 0$, $X + Y - Z = 0$, $X - Y + Z = 0$, $X - Y - Z = 0$, ou encore que *les trois bitangentes sont les diagonales d'un quadrilatère complet dont les six sommets sont leurs points de contact avec la quartique.*

Ainsi, dans la figure ci-dessous, AB, CD, EF sont les trois bitangentes et les points A, B, C, D, E, F sont leurs points de contact.

Inversement, si les trois bitangentes x, y, z jouissent de cette propriété, l'équation (3) de la quartique se met sous la forme (1), où p,

q, r sont les dérivées partielles d'une même fonction : on vérifie sans difficulté qu'on peut le faire d'une infinité de manières.



6. Nous savons, en nous reportant aux généralités rappelées plus haut, que les trois bitangentes $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, associées deux à deux, déterminent trois systèmes de coniques inscrites, et que l'ensemble des bitangentes appartenant à ces trois systèmes se compose de dix-huit droites, réparties en six triangles homologues, dont le triangle XYZ est l'un. Il est extrêmement curieux de voir que *la propriété précédente du triangle* XYZ *appartient également à chacun des cinq autres triangles.*

Considérons, en effet, le système déterminé par les bitangentes AB et CD : la cayleyenne de ce système, d'après ce qui a été rappelé, touche les droites AB, CD, et les droites obtenues en joignant deux à deux leurs points de contact avec la quartique, c'est-à-dire les droites AC, BD, BC, DA. De même, la cayleyenne du système déterminé par les bitangentes AB, EF touche ces deux droites, et les droites AC, BD, BC, DA. Ces deux cayleyennes ont donc déjà cinq tangentes communes, AB, AC, BD, BC, DA. Si nous considérons maintenant, dans chacun des cinq autres triangles, le côté qui est commun aux deux systèmes définis par AB, CD et AB, EF, nous avons cinq nouvelles droites, tangentes à chacune des deux cayleyennes, et qui sont évidemment distinctes des premières tangentes communes. Les deux cayleyennes, étant de troisième classe, ne peuvent avoir dix tangentes communes sans coïncider; de même la cayleyenne du système défini par CD, EF coïncide avec les deux premières, et par suite *les trois systèmes de coniques inscrites, définis par les côtés du triangle* XYZ, *associés deux à deux, ont une seule et même cayleyenne.*

Cela posé, soit un second triangle, analogue à XYZ, dont nous désignerons les côtés par A′B′, C′D′, E′F′; les points de contact avec la quartique étant A′, B′; C′, D′; E′, F′; il s'agit de montrer qu'il jouit de la même propriété que le triangle XYZ.

Or, les droites A′B′, A′D′, A′E′, A′C′, A′F′ sont tangentes à la cayleyenne commune aux trois systèmes; comme cette courbe est de troisième classe, il faut qu'elles se réduisent à trois au plus, et l'on en conclut que les points A′, C′, F′ et A′, D′, E′ sont en ligne droite. En poursuivant le raisonnement pour les tangentes issues des points B′, C′, ..., F′, on voit que les trois tangentes doivent être nécessairement les diagonales d'un quadrilatère complet dont les sommets sont leurs points de contact.

7. Le calcul vérifie et complète ces résultats.

En premier lieu, si l'on écrit l'équation de la quartique sous la forme

$$(5)\qquad X^4+Y^4+Z^4-2X^2Y^2-2X^2Z^2-2Y^2Z^2=4uXYZ,$$

on peut mettre les équations des trois systèmes de coniques inscrites définis par les couples de bitangentes YZ, ZX, XY sous la forme

$$(6)\qquad \alpha^2 YZ+2\alpha(Y^2+Z^2-X^2)+4YZ+4uX=0,$$

$$(7)\qquad \beta^2 ZX+2\beta(Z^2+X^2-Y^2)+4ZX+4uY=0,$$

$$(8)\qquad \gamma^2 XY+2\beta(X^2+Y^2-Z^2)+4XY+4uZ=0,$$

α, β, γ étant des paramètres variables. L'enveloppe des coniques (6), par exemple, est bien la courbe (5), comme on le voit aisément, et l'une de ces coniques est bien le couple YZ.

La cayleyenne du système (6) est évidemment celle du réseau

$$\lambda_1 YZ+\lambda_2(Y^2+Z^2-X^2)+\lambda_3 uX=0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant des paramètres variables; l'équation de cette cayleyenne, calculée d'après les formules générales connues, est, en coordonnées tangentielles ([1]),

$$u'_x\xi(\zeta^2-\eta^2)+u'_y\eta(\xi^2-\zeta^2)+u'_z\zeta(\eta^2-\xi^2)=0,$$

([1]) *Cf.* Salmon, *Sections coniques*. L'équation d'une droite est supposée de la forme $\xi X+\eta Y+\zeta Z=0$.

et la symétrie montre qu'on obtient la même équation pour les systèmes (7) et (8).

8. En second lieu, je dis qu'on peut mettre l'équation (5) sous la forme

$$(9)\quad X^2\varphi_X'^2 + Y^2\varphi_Y'^2 + Z^2\varphi_Z'^2 - 2XY\varphi_X'\varphi_Y' - 2XZ\varphi_X'\varphi_Z' - 2YZ\varphi_Y'\varphi_Z' = 0,$$

φ étant une fonction du second ordre en X, Y, Z. C'est la même forme que (1), mais il n'y a pas de second membre.

Soit, en effet,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_X' &= X + \nu Y + \mu Z,\\ \varphi_Y' &= \nu X + Y + \lambda Z,\\ \varphi_Z' &= \mu X + \lambda Y + Z.\end{aligned}\right.$$

L'équation (9) développée peut s'écrire, en remarquant que les termes qui contiennent le cube d'une des variables disparaissent,

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2\\ &\quad = 4XYZ[(\mu\nu + \lambda)X + (\nu\lambda + \mu)Y + (\lambda\mu + \nu)Z].\end{aligned}\right.$$

Cette équation sera identique à l'équation (5) si l'on a

$$\begin{aligned} u_x' &= \mu\nu + \lambda,\\ u_y' &= \nu\lambda + \mu,\\ u_z' &= \lambda\mu + \nu.\end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que ces trois relations donnent pour λ, μ, ν cinq systèmes de valeurs non infinies; il y a donc cinq fonctions φ répondant à la question.

Soit φ l'une d'elles; l'équation (9) montre que les droites $\varphi_X' = 0$, $\varphi_Y' = 0$, $\varphi_Z' = 0$ sont des bitangentes de la quartique; si nous prenons ces droites pour côtés du triangle de référence, $X_1 Y_1 Z_1$, l'équation (9) pourra évidemment s'écrire

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &X_1^2\psi_{X_1}'^2 + Y_1^2\psi_{Y_1}'^2 + Z_1^2\psi_{Z_1}'^2\\ &\quad - 2X_1Y_1\psi_{X_1}'\psi_{Y_1}' - 2X_1Z_1\psi_{X_1}'\psi_{Z_1}' - 2Y_1Z_1\psi_{Y_1}'\psi_{Z_1}' = 0,\end{aligned}\right.$$

ψ étant une fonction du second ordre, car X, Y, Z sont aussi, d'après (10), les dérivées par rapport à φ'_X, φ'_Y, φ'_Z d'une même fonction de ces trois quantités.

En développant cette équation, on voit disparaître les termes qui contiennent le cube d'une des variables, et l'on met le résultat sous la forme

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 X_1^4 + \mu_1^2 Y_1^4 + \nu_1^2 Z_1^4 \\ - 2\lambda_1\mu_1 X_1^2 Y_1^2 - 2\lambda_1\nu_1 X_1^2 Z_1^2 - 2\mu_1\nu_1 Y_1^2 Z_1^2 = 4\nu X_1 Y_1 Z_1;\end{aligned}$$

ce qui montre bien que le triangle $X_1Y_1Z_1$ jouit de la même propriété que le triangle XYZ.

De plus, on voit que *deux quelconques des six triangles sont polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à une conique,* car XYZ étant l'un d'eux, un des autres a pour côtés les droites $\varphi'_X = 0$, $\varphi'_Y = 0$, $\varphi'_Z = 0$.

9. *Propriétés d'un des triangles.* — D'après ce qui a été dit plus haut, les trois côtés d'un des triangles et les quatre côtés du quadrilatère complet correspondant touchent la cayleyenne commune des trois systèmes de coniques inscrites, définis par les côtés du triangle, pris deux à deux. Cette cayleyenne étant une courbe de troisième classe, on peut associer à chacune de ses tangentes un argument elliptique, de telle sorte que les arguments de trois tangentes issues d'un point aient une somme nulle à des périodes près, et réciproquement.

Cela posé, soient α, β, γ les arguments des trois côtés AB, CD, EF d'un triangle; a, b, c, d ceux des quatre côtés AC, AD, BC, BD du quadrilatère.

On a, en écrivant que les arguments des tangentes issues des points A, B, C, D, F, E ont une somme nulle,

$$\begin{aligned}\alpha + a + b &\equiv 0, \qquad & \alpha + c + d &\equiv 0,\\ \beta + a + c &\equiv 0, & \beta + b + d &\equiv 0,\\ \gamma + a + d &\equiv 0, & \gamma + b + c &\equiv 0.\end{aligned}$$

Les seconds membres ne sont nuls qu'à des multiples près des périodes

ω_1, ω_2. On tire de là

$$2a \equiv 2b \equiv 2c \equiv 2d \qquad (\mathrm{mod}\, \omega_1, \omega_2),$$

et, par suite, on peut écrire, θ désignant un nouvel argument,

$$a = -\theta, \qquad b = -\theta + \frac{\omega_1}{2}, \qquad c = -\theta + \frac{\omega_2}{2}, \qquad d = -\theta + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2};$$

d'où

$$\alpha = 2\theta + \frac{\omega_1}{2},$$

$$\beta = 2\theta + \frac{\omega_2}{2},$$

$$\gamma = 2\theta + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Il en résulte immédiatement que les quatre tangentes d'arguments a, b, c, d ont leurs quatre points de contact avec la cayleyenne sur une même tangente à cette courbe, qui correspond à l'argument 2θ; les tangentes d'arguments α, β, γ et la tangente d'argument 2θ ont de même leurs quatre points de contact sur une même tangente, d'argument -4θ.

La figure formée par le quadrilatère complet et ses diagonales est déterminée dès qu'on se donne la tangente d'argument 2θ, que nous appellerons *droite associée* au triangle ou au quadrilatère : en effet, cette droite, en dehors de son point de contact, coupe la cayleyenne (qui est d'ordre six) en quatre points, et les quatre côtés du quadrilatère sont les tangentes menées à la courbe en ces points.

En transformant la figure par polaires réciproques, on a, au lieu de la cayleyenne une courbe du troisième ordre; à la droite associée correspond un point de la courbe, aux quatre côtés du quadrilatère les quatre points de contact des tangentes issues de ce point, et aux trois côtés du triangle les sommets des trois couples de droites qui passent par ces quatre points.

On voit également que deux côtés du quadrilatère forment un couple steinérien de tangentes à la cayleyenne; les deux autres côtés forment un couple steinérien de même espèce.

De même, deux côtés du triangle, et le troisième côté combiné à la droite associée, forment deux couples steinériens de même espèce.

La *droite associée* à un quadrilatère a, par rapport à la quartique elle-même, une signification intéressante.

La quartique étant, en effet,

$$X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 = 4uXYZ,$$

nous savons qu'en posant

$$u = AX + BY + CZ,$$

la cayleyenne dont il s'agit a pour équation tangentielle

$$F(\xi, \eta, \zeta) = A\xi(\zeta^2 - \eta^2) + B\eta(\xi^2 - \zeta^2) + C\zeta(\eta^2 - \xi^2) = 0.$$

Le point où une droite $\xi X + \eta Y + \zeta Z = 0$, dont les coefficients vérifient cette équation, touche la cayleyenne, est défini par les relations

$$\frac{X}{F'_\xi} = \frac{Y}{F'_\eta} = \frac{Z}{F'_\zeta}.$$

S'il s'agit d'un des côtés du quadrilatère, $X \pm Y \pm Z = 0$, on aura, en faisant $\xi^2 = \eta^2 = \zeta^2$,

$$\frac{X}{(B\eta - C\zeta)\xi} = \frac{Y}{(-A\xi + C\zeta)\eta} = \frac{Z}{(A\xi - B\eta)\zeta}$$

et l'on voit que les coordonnées X, Y, Z de *chacun* des quatre points de contact des quatre côtés vérifient la relation

$$AX + BY + CZ = 0.$$

En d'autres termes, la droite $u = 0$ passe par les quatre points de contact de ces côtés; c'est donc la droite associée au quadrilatère. Ainsi :

La droite associée à un quadrilatère est celle qui joint les quatre points, distincts des six sommets de ce quadrilatère, où les quatre *côtés coupent de nouveau la quartique. C'est en ces points que les quatre côtés touchent respectivement la cayleyenne.*

10. *Propriétés de deux triangles.* — Deux triangles étant polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à une conique, les trois droites qui joignent les sommets homologues se coupent en un même point, et les trois points d'intersection des trois couples de côtés homologues sont en ligne droite.

Ce dernier résultat peut se démontrer et se compléter à l'aide de la considération des arguments elliptiques.

En effet, les arguments qui correspondent aux côtés de chacun des triangles étant $2\theta + \frac{\omega_1}{2}$, $2\theta + \frac{\omega_2}{2}$, $2\theta + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$; et $2\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_2}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ les couples de droites $2\theta + \frac{\omega_1}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$; $2\theta + \frac{\omega_2}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_2}{2}$; $2\theta + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, se coupent respectivement sur la tangente d'argument $-2(\theta + \theta_1)$, sur laquelle se coupent aussi les deux droites d'arguments 2θ et $2\theta_1$, associées aux deux triangles.

Deux côtés du premier triangle et les côtés homologues du second forment deux couples steinériens de même espèce; par suite, les droites qui joignent en croix les quatre points d'intersection des deux couples touchent la cayleyenne; la proposition subsiste si l'on remplace deux côtés homologues par les droites associées correspondantes.

Si l'on combine d'une autre manière les côtés des deux triangles, en considérant par exemple les deux couples $2\theta + \frac{\omega_1}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_2}{2}$, et $2\theta + \frac{\omega_2}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$, on voit qu'ils se coupent sur la tangente $-2(\theta + \theta_1) + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, sur laquelle se coupent aussi les couples 2θ, $2\theta_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ et $2\theta + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, 2θ. En d'autres termes, les seize points d'intersection des trois côtés et de la droite associée du premier triangle, avec les trois côtés et la droite associée du second, sont situés quatre à quatre sur quatre nouvelles droites; ces droites touchent la cayleyenne, et, leurs arguments étant de la forme θ', $\theta' + \frac{\omega_1}{2}$, $\theta' + \frac{\omega_2}{2}$,

$\theta' + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, leurs quatre points de contact sont sur une nouvelle tangente de la courbe.

On a une proposition analogue pour les seize points communs aux côtés de deux quadrilatères.

Deux côtés du premier quadrilatère, tels que ceux d'arguments $-\theta_1$ et $-\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$, concourant sur le côté $2\theta + \frac{\omega_1}{2}$ du premier triangle, et deux côtés du second quadrilatère tels que $-\theta$ et $-\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$ ou $-\theta_1 + \frac{\omega_2}{2}$ et $-\theta_1 + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$, concourant sur le côté homologue, $2\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$, du second triangle, forment deux couples steinériens de même espèce : les deux droites qui joignent en croix les quatre points d'intersection de ces deux couples touchent donc la cayleyenne.

Six tangentes de la cayleyenne touchent une conique quand leurs arguments ont une somme nulle à des multiples près des périodes; il en résulte que toute conique touchant deux côtés du premier quadrilatère et un des côtés du premier triangle, ainsi que deux côtés du second quadrilatère, touchera nécessairement un des côtés du second triangle, ou la droite associée à ce triangle.

11. *Propriétés de l'ensemble des six triangles.* — Si nous nous reportons au n° **8**, nous voyons que les cinq côtés homologues du côté $X = 0$ du premier triangle sont donnés par l'équation

$$X + \nu Y + \mu Z = 0,$$

où μ et ν sont déterminés par les équations

$$(13) \qquad A = \mu\nu + \lambda, \qquad B = \nu\lambda + \mu, \qquad C = \lambda\mu + \nu,$$

c'est-à-dire, en éliminant λ,

$$B = \mu + \nu(A - \mu\nu), \qquad C = \nu + \mu(A - \mu\nu);$$

d'où l'on tire

$$B\mu - C\nu = \mu^2 - \nu^2.$$

Cette relation, du second degré en μ et ν, montre que les cinq droites considérées touchent la conique dont l'équation tangentielle est

$$\xi(B\zeta - C\eta) = \zeta^2 - \eta^2.$$

Cette conique touche aussi la droite $\eta = 0$, $\zeta = 0$, c'est-à-dire le côté $X = 0$ du premier triangle; donc six côtés homologues des six triangles touchent une conique. On obtient ainsi trois coniques ayant pour équations

$$\begin{aligned}\xi(B\zeta - C\eta) &= \zeta^2 - \eta^2,\\ \eta(C\xi - A\zeta) &= \xi^2 - \zeta^2,\\ \zeta(A\eta - B\xi) &= \eta^2 - \xi^2.\end{aligned}$$

En additionnant membre à membre ces trois équations, on trouve un résultat nul; les trois coniques sont donc inscrites à un même quadrilatère.

Les six droites associées aux six triangles touchent aussi une conique; en effet, on voit aisément, en partant des formules du n° **8**, que les droites associées aux cinq derniers triangles sont données par l'équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$

où λ, μ, ν vérifient les relations (13). En cherchant à former une équation homogène et du second ordre entre λ, μ, ν, à l'aide de ces relations, on trouve sans difficulté

$$\begin{vmatrix} A\mu\nu + \lambda^2 & B\lambda\nu + \mu^2 & C\lambda\mu + \nu^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La conique représentée par cette équation, où λ, μ, ν désignent des coordonnées tangentielles, touche les cinq droites associées aux cinq derniers triangles; elle touche aussi la droite

$$AX + BY + CZ = 0,$$

associée au premier, puisque son équation est évidemment vérifiée pour $\lambda = A$, $\mu = B$, $\nu = C$: les six droites associées aux six triangles touchent donc une conique.

Il en résulte que leurs arguments ont une somme nulle; on a donc, à des multiples près de ω_1, ω_2 : $2\theta + 2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + 2\theta_4 + 2\theta_5 = 0$, et par suite $\theta + \theta_1 + \ldots + \theta_5$ est égal à zéro, ou à une des trois demi-périodes. On en conclut que si l'on considère un côté dans chacun des cinq premiers quadrilatères, la conique qui touche ces cinq droites touche aussi un des côtés du dernier quadrilatère, car les arguments de ces côtés sont de la forme $-\theta_i$, à une demi-période près. Il y a ainsi 4^5, c'est-à-dire mille vingt-quatre coniques, dont chacune touche un côté de chaque quadrilatère.

Il y a de même 1024 coniques touchant chacune un côté ou la droite associée de chacun des six triangles; parmi ces coniques, 183 touchent chacune un côté de chaque triangle. Pour obtenir ces 183 coniques, on prend un côté dans chaque triangle, de manière que, dans la combinaison, le nombre des côtés homologues entre eux soit toujours pair.

12. On peut donner d'autres propositions, sur les sommets et les côtés des six quadrilatères; elles résultent sans difficulté des principes généraux rappelés au n° **2**, et nous nous bornerons à les énoncer, en les réunissant à celles établies tout à l'heure, pour donner un Tableau résumé des curieuses propriétés de nos courbes.

Si trois bitangentes d'une quartique sont les diagonales d'un quadrilatère complet dont les six sommets sont leurs points de contact avec la quartique, il existe cinq autres groupes de trois bitangentes jouissant de la même propriété.

Ces six triangles se correspondent de telle sorte que les six couples de côtés issus de six sommets homologues appartiennent à un même système de coniques inscrites à la quartique; les trois sys-

tèmes de coniques ainsi définis ont une seule et même cayleyenne, C, *qui est une courbe de troisième classe et du sixième ordre.*

Les dix-huit côtés des six triangles et les vingt-quatre côtés des six quadrilatères correspondants touchent la courbe C.

Les quatre points où les côtés d'un quadrilatère touchent C *sont sur une droite* D, *qui touche elle-même la courbe* C; *ces points coïncident avec les points, distincts des six sommets, où les côtés du quadrilatère coupent la quartique. La droite* D *est dite la droite* associée *du quadrilatère ou du triangle correspondant.*

Les quatre points où les côtés et la droite associée d'un triangle touchent la courbe C *sont sur une même tangente de cette courbe.*

Les trois droites qui joignent les sommets homologues de deux des triangles se coupent en un même point.

Les trois points d'intersection des côtés homologues de deux triangles et le point d'intersection des droites associées à ces triangles sont sur une même tangente de la courbe C.

Les seize points d'intersection des trois côtés et de la droite associée d'un triangle avec les trois côtés et la droite associée d'un autre triangle sont situés quatre à quatre sur quatre nouvelles droites; ces droites touchent la courbe C *en quatre points, situés eux-mêmes sur une tangente à cette courbe.*

Les seize points d'intersection des quatre côtés d'un des quadrilatères avec les quatre côtés d'un autre quadrilatère sont quatre à quatre sur quatre nouvelles droites; ces droites touchent la courbe C *en quatre points situés eux-mêmes sur une tangente à cette courbe.*

Six côtés homologues des six triangles touchent une même conique; les trois coniques ainsi définies ont quatre tangentes communes.

Il existe 180 *autres coniques dont chacune touche un côté de chacun des six triangles; on les obtient en prenant un côté dans chaque triangle, de manière que, dans cette combinaison, le nombre des côtés homologues entre eux soit toujours pair.*

Les six droites associées aux six triangles touchent une même conique.

Il existe 1024 *coniques, dont chacune touche un côté de chacun des six quadrilatères.*

Les six couples de côtés issus de six sommets homologues des six triangles déterminent, sur un quelconque des six autres côtés, des couples de points en involution; les points doubles de l'involution sont les points de contact du côté considéré avec la quartique.

Six sommets homologues des six triangles et les douze points de contact des six côtés opposés sont sur une courbe du troisième ordre; cette courbe est la jacobienne du système de coniques inscrites auquel appartiennent les couples de côtés issus des six sommets considérés.

A chaque système de six sommets (ou de six côtés) homologues correspond ainsi une courbe du troisième ordre; chacune des trois courbes définies de cette manière touche en neuf points la courbe C.

Les deux points de contact avec la quartique de l'un des côtés d'un triangle forment, sur la jacobienne correspondante, un couple steinérien; par suite :

Si l'on joint en croix les points de contact de deux côtés homologues de deux triangles, les droites de jonction se coupent en deux nouveaux points, qui sont situés sur la jacobienne correspondante; les six côtés homologues donnent ainsi trente points de la jacobienne.

Par chacun des points de contact de l'un des côtés d'un triangle on peut faire passer une conique, inscrite à la quartique, et ayant deux de ses quatre contacts confondus en ce point.

Le remarquable système de dix-huit tangentes doubles que nous étudions jouit, en outre, des propriétés générales rappelées au n° **2** et qui appartiennent à toutes les quartiques; sans insister davantage sur ces propriétés, nous indiquerons comment on peut construire, indépendamment de toute courbe du quatrième ordre, un pareil système de six triangles et quadrilatères.

13. Soit une courbe quelconque de troisième classe et du sixième degré C; prenons une de ses tangentes, t_1; les tangentes menées à C aux quatre nouveaux points où t_1 coupe la courbe formeront les côtés d'un quadrilatère, dont t_1 sera la droite associée.

Mais ce premier quadrilatère ne suffit pas pour déterminer les autres : en effet, les diagonales du quadrilatère étant prises pour côtés du triangle de référence, $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, et ces diagonales elles-mêmes étant représentées par les équations $X\pm Y\pm Z=0$, la quartique correspondante sera

$$X^4+Y^4+Z^4-2X^2Y^2-2X^2Z^2-2Y^2Z^2$$
$$=4(AX+BY+CZ)XYZ.$$

La tangente t_1 a pour équation $AX+BY+CZ=0$; mais, si l'on se donne cette droite, A, B, C ne sont connus qu'à un facteur près, et, par suite, il reste encore un coefficient arbitraire dans l'équation de la quartique. On peut donc choisir arbitrairement une seconde tangente, t_2, à la courbe C, pour droite associée du second quadrilatère.

Rappelons-nous maintenant que les six droites associées aux six quadrilatères touchent (n° **11**) la conique

$$\begin{vmatrix} A\mu\nu+\lambda^2 & B\lambda\nu+\mu^2 & C\lambda\mu+\nu^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix}=0,$$

où λ, μ, ν désignent des coordonnées tangentielles.

Cette conique touche les tangentes communes aux deux coniques

$$(14)\quad \begin{vmatrix} \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix}=0 \qquad \text{et} \qquad (15)\quad \begin{vmatrix} A\mu\nu & B\lambda\nu & C\lambda\mu \\ 1 & 1 & 1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix}=0;$$

Le première de ces deux coniques touche les côtés du quadrilatère et la droite t_1, puisque son équation est vérifiée pour $\lambda=1$, $\mu=\pm 1$, $\nu=\pm 1$, et $\lambda=A$, $\mu=B$, $\nu=C$. Elle est donc déterminée.

La seconde conique touche les diagonales $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ du quadrilatère, la droite t_1 et la droite $\frac{X}{A}+\frac{Y}{B}+\frac{Z}{C}=0$. Cette dernière droite jouit de la propriété évidente que son point d'intersection avec une des diagonales du quadrilatère est conjugué harmonique, par rapport aux extrémités de cette diagonale, du point où la même diagonale coupe la droite $AX + BY + CZ = 0$.

Si donc on considère le faisceau tangentiel défini par les deux coniques (14) et (15), et si l'on construit la conique du faisceau qui touche la droite t_2, on n'aura qu'à mener les six tangentes communes à cette conique et à la courbe C pour avoir les six droites $t_1, t_2, \ldots, t_6$ associées aux six quadrilatères.

En d'autres termes :

Le système des six quadrilatères peut se construire comme il suit :

Soit une courbe de troisième classe et du sixième degré, C ; *une quelconque de ses tangentes,* t_1, *la coupe en quatre nouveaux points, et les tangentes en ces points déterminent un premier quadrilatère.*

On considère maintenant deux coniques : la première touchant les quatre côtés du quadrilatère et la droite t_1 ; *la seconde touchant les trois diagonales du quadrilatère, la droite* t_1, *et la droite telle que son point d'intersection et celui de* t_1 *avec chaque diagonale soient conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de cette diagonale.*

Ces deux coniques déterminent un faisceau tangentiel; les six tangentes communes à C *et à une quelconque des coniques de ce faisceau sont les droites* $t_1, t_2, \ldots, t_6$, *associées aux six quadrilatères cherchés, dont chacun se déduit de sa droite associée comme le premier a été déduit de la droite* t_1.

14. Il existe une *surface remarquable du quatrième ordre*, dont toutes les sections planes sont des courbes de la classe que nous venons d'étudier : cette surface est la réciproque de la surface des centres de courbure d'un ellipsoïde, ou plutôt la transformée homographique d'une telle réciproque.

On sait que la surface des centres de courbure, quand on la rapporte aux axes de l'ellipsoïde, a pour équation tangentielle

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right)(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 1).$$

En remplaçant ξ, η, ζ par $\lambda\xi$, $\mu\eta$, $\nu\zeta$, on peut choisir les constantes λ, μ, ν, de manière à ramener cette équation à la forme connue

$$(a^2-b^2)(\xi^2\eta^2+\zeta^2)+(b^2-c^2)(\eta^2\zeta^2+\xi^2) \\ +(c^2-a^2)(\xi^2\zeta^2-\eta^2)=0.$$

La surface du quatrième ordre que nous avons en vue a pour équation, le tétraèdre de référence, $xyzt$, étant quelconque,

$$\alpha(x^2y^2+z^2t^2)+\beta(y^2z^2+x^2t^2)+\gamma(x^2z^2+y^2t^2)=0,$$

avec

$$\alpha+\beta+\gamma=0.$$

Nous reviendrons ailleurs sur cette surface, déjà signalée par M. Cayley, qui admet les douze points doubles $(0,0,0,1)$, $(0,0,1,0)$, $(0,1,0,0)$, $(1,0,0,0)$, $(1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, et les seize droites

$$x=\pm y=\pm z, \qquad y=\pm z=\pm t,$$
$$z=\pm t=\pm x, \qquad t=\pm x=\pm y,$$

sur chacune desquelles sont situés trois points singuliers.

Nous nous bornerons ici à démontrer la propriété que nous avons énoncée tout à l'heure.

15. Écrivons l'équation de la surface sous la forme

$$\sin^2\varphi(x^2y^2+z^2t^2)+\cos^2\varphi(x^2z^2+y^2t^2)=(x^2t^2+y^2z^2).$$

On peut la mettre encore sous une des trois formes équivalentes

$$\sin^2\varphi(xy+zt)^2+\cos^2\varphi(xz+yt)^2=(xt+yz)^2,$$
$$\sin^2\varphi(xy-zt)^2+\cos^2\varphi(xz-yt)^2=(xt-yz)^2,$$

$$(x^2-t^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi \\ =(x^2\cos^2\varphi+t^2\sin^2\varphi-y^2)(x^2\sin^2\varphi+t^2\cos^2\varphi-z^2).$$

Chacun de ces types présentant l'équation sous la forme $ST=R^2$

met en évidence une série de quadriques inscrites dans la surface $\lambda^2 S + 2\lambda R + T = 0$, λ étant un paramètre variable. On trouve ainsi, conformément à la théorie générale donnée par Kummer pour les surfaces du quatrième ordre à douze points doubles, les trois systèmes de quadriques inscrites

$$xt + yz + \sin\omega \sin\varphi(xy + zt) + \cos\omega \cos\varphi(yt + xz) = 0,$$
$$xt - yz + \sin\rho \sin\varphi(xy - zt) + \cos\rho \cos\varphi(yt - xz) = 0,$$
$$x^2 \sin^2(\sigma + \varphi) + t^2 \cos^2(\sigma + \varphi) - y^2 \sin^2\sigma - z^2 \cos^2\sigma = 0,$$

ω, ρ, σ désignant des paramètres arbitraires.

Il est aisé de trouver maintenant les équations des congruences formées par les génératrices de ces quadriques.

On peut écrire les quadriques du premier système

$$\begin{aligned}(x + z\sin\omega \sin\varphi + y\cos\omega \cos\varphi)&(t + y\sin\omega \sin\varphi + z\cos\omega \cos\varphi)\\ = (y\cos\omega \cos\varphi - z\sin\omega \sin\varphi)&(y\sin\omega \cos\varphi - z\cos\omega \sin\varphi),\end{aligned}$$

ce qui donne pour les deux systèmes de génératrices, θ et θ' étant des paramètres variables, les équations

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x\sin(\theta + \varphi) + y\cos\omega \sin\theta + z\sin\omega \cos\theta = 0, \\ t\cos(\theta + \varphi) - y\sin\omega \sin\theta + z\cos\omega \cos\theta = 0; \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} x\sin(\theta' + \omega) + y\cos\varphi \sin\theta' + z\sin\varphi \cos\theta' = 0, \\ t\cos(\theta' + \omega) - y\sin\varphi \sin\theta' + z\cos\varphi \cos\theta' = 0, \end{cases}$$

De même on aurait, pour les génératrices des quadriques du second système les deux congruences

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} x\sin(\theta_1 + \varphi) + y\cos\rho \sin\theta_1 - z\sin\rho \cos\theta_1 = 0, \\ t\cos(\theta_1 + \varphi) - y\sin\rho \sin\theta_1 - z\cos\rho \cos\theta_1 = 0; \end{cases}$$

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} x\sin(\theta'_1 + \rho) + y\cos\varphi \sin\theta'_1 - z\sin\varphi \cos\theta'_1 = 0, \\ t\cos(\theta'_1 + \rho) - y\sin\varphi \sin\theta'_1 - z\cos\varphi \cos\theta'_1 = 0; \end{cases}$$

et pour les génératrices des quadriques du troisième système

$$(\mathrm{E})\quad \begin{cases} x\sin(\sigma+\varphi)+y\sin\sigma\cos\theta_2-z\cos\sigma\sin\theta_2=0, \\ t\cos(\sigma+\varphi)-y\sin\sigma\sin\theta_2-z\cos\sigma\cos\theta_2=0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{F})\quad \begin{cases} x\sin(\sigma+\varphi)+y\sin\sigma\cos\theta'_2+z\cos\sigma\sin\theta'_2=0, \\ t\cos(\sigma+\varphi)-y\sin\sigma\sin\theta'_2+z\cos\sigma\cos\theta'_2=0. \end{cases}$$

Les congruences (A) et (F) sont identiques; il suffit de remplacer dans (F) les paramètres variables σ et θ'_2 par θ et ω pour rendre les équations de (F) identiques à celles de (A).

De même les congruences (C) et (E); (B) et (D) sont identiques. Ces résultats sont conformes à la théorie de Kummer.

16. Cela posé, observons que si l'on coupe la surface par un plan P quelconque, on obtient une quartique Q, et que les trois systèmes (S) de coniques, communes à P et aux trois systèmes de quadriques inscrites, sont inscrites à la courbe Q.

Il est clair que dans un système de quadriques $\lambda^2 S + 2\lambda R + T = 0$, six surfaces sont tangentes à un plan quelconque; il y a donc dix-huit quadriques inscrites à la surface et tangentes au plan P.

Les trente-six droites suivant lesquelles P coupe ces quadriques se réduisent, d'après ce qui a été démontré sur les congruences des génératrices, à dix-huit droites, dont chacune est une tangente double de Q et appartient à deux systèmes de quadriques. Il en résulte que les trois systèmes (S) de coniques inscrites à Q ont deux à deux six bitangentes communes, et par suite les dix-huit droites se répartissent en six triangles, jouissant des propriétés générales rappelées au n° **2**. Pour démontrer que la quartique Q est une de nos courbes spéciales, il suffit (**6**) d'établir que les trois systèmes (S) de coniques inscrites ont une même cayleyenne. Or nous savons que la cayleyenne d'un système touche les douze bitangentes de ce système; si les trois cayleyennes coïncident, les dix-huit bitangentes toucheront une même courbe de troisième classe, et réciproquement. On peut démontrer que les trois congruences (A), (B), (C) font partie d'un même complexe, que l'on obtient en supposant φ variable dans (A); les droites de ce complexe sont représentées par les équations

$$\begin{cases} x\sin(\theta+\varphi)+y\cos\omega\sin\theta+z\sin\omega\cos\theta=0, \\ t\cos(\theta+\varphi)-y\sin\omega\sin\theta+z\cos\omega\cos\theta=0, \end{cases}$$

où θ, φ, ω sont des paramètres variables. Remplaçant $\theta+\varphi$ par ψ, on a le complexe

$$\begin{cases} x\sin\psi+y\cos\omega\sin\theta+z\sin\omega\cos\theta=0, \\ t\cos\psi-y\sin\omega\sin\theta+z\cos\omega\cos\theta=0, \end{cases}$$

et l'on voit de suite que les congruences (B) et (C) en font partie. En introduisant les coordonnées de droites p, q, r, p', q', r', on a pour l'équation du complexe

$$p(rq'+r'q)+p'(rq+r'q')=0.$$

Le complexe est donc de troisième ordre, et par suite, dans le plan P, la courbe du complexe est de troisième classe. Cette courbe touche, d'après ce qui précède, les droites des congruences (A), (B), (C), situées dans le plan, c'est-à-dire les dix-huit tangentes doubles considérées plus haut. Ces dix-huit droites touchant ainsi une même courbe de troisième classe, le théorème est démontré. Par conséquent :

La surface réciproque du lieu des centres de courbure d'une quadrique, ainsi que toute surface homographique, est coupée par un plan quelconque suivant une courbe du quatrième ordre appartenant à la classe remarquable étudiée dans ce Mémoire.

Dans un prochain travail nous ferons application de ces résultats à la théorie des normales aux quadriques.