JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES HUMBERT

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie ; deuxième partie

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 6 (1890), p. 233-292.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1890_4_6__233_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie [suite ([1])];

R.F.

PAR M. GEORGES HUMBERT.

DEUXIÈME PARTIE ([2]).

58. Les théories analytiques exposées dans la première Partie de ce Mémoire donnent lieu à des applications géométriques nombreuses et variées. Parmi ces applications, celles qui reposent sur la considération d'intégrales abéliennes simples appartenant à une courbe plane ou gauche rentrent dans le même cadre que les questions traitées par nous dans un travail antérieur publié dans ce Journal ([3]); aussi n'avons-nous pas jugé utile d'y revenir.

C'est donc uniquement sur les problèmes où interviennent des inté-

---

([1]) Voir *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. V, p. 81.

([2]) A la fin du n° 30 de la première Partie de ce Mémoire, p. 121 du t. V du *Journal*, s'est glissée une erreur qu'il importe de rectifier. *Au lieu de :* « chaque élément de l'intégrale J $\dfrac{Q}{Sf'_z}\,dX\,dY$ figure multiplié par $(-1)^{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial z}\Delta}$ », *il faut lire :* « chaque élément de l'intégrale J $\left(\text{c'est-à-dire } \dfrac{Q}{Sf'_z}\,dX\,dY\right)$ figure avec le signe de $\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\dfrac{\partial\Psi}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial z}\Delta$ ».

([3]) Voir *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. III, p. 327.

grales abéliennes multiples que nous avons insisté : on trouvera, par exemple, dans le présent Mémoire, des propositions géométriques nouvelles sur les aires planes et sphériques, sur les volumes limités par des surfaces algébriques, et une série assez étendue de théorèmes sur les aires ellipsoïdales, théorèmes qui conduisent à une généralisation intéressante des résultats célèbres de Graves et Chasles sur les arcs d'ellipse. Les propriétés des aires sur l'ellipsoïde ont été jusqu'ici à peine effleurées par les géomètres; nous ne connaissons sur ce sujet, en dehors des travaux relatifs à l'aire totale de la surface, que les recherches de Jellett et de Lebesgue, qui ont donné l'expression, à l'aide des intégrales elliptiques, d'aires ellipsoïdales limitées par des courbes algébriques, d'ailleurs très particulières. Nous démontrons qu'on peut déterminer simplement sur l'ellipsoïde une infinité de courbes algébriques à deux boucles fermées, comprenant entre elles une aire réductible aux fonctions elliptiques et, sur une quadrique quelconque, une infinité d'aires dont la somme algébrique s'exprime à l'aide de fonctions rationnelles et logarithmiques. Ce sujet étant nouveau, nous avons cru devoir le développer assez longuement, et il constitue la partie principale du présent Mémoire. L'emploi des fonctions elliptiques nous a permis de pousser les calculs jusqu'au bout.

Le dernier Chapitre, qui est très court, est consacré à l'extension de quelques-unes de ces propriétés aux aires sur une surface algébrique quelconque.

I. — Aires planes et volumes.

59. Soient deux systèmes de courbes algébriques planes

$$\Phi(X, Y, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, v) = 0,$$

de degrés n et p.

Deux courbes voisines du premier système et deux courbes voisines du second comprennent entre elles np quadrilatères curvilignes infiniment petits; la somme algébrique de leurs aires se calcule d'après les formules du n° **50**, en partant de l'intégrale $\int\int dX\,dY$; elle a pour expression

$$du\,dv \sum \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{\Delta},$$

la somme s'étendant aux points communs aux courbes $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, et Δ étant le jacobien de Φ et de Ψ.

On en déduit, par l'application des raisonnements et des théorèmes des nos **34** et **35**, les propositions suivantes, dont quelques-unes ont été déjà démontrées par nous, à l'aide de considérations différentes [1].

La somme algébrique des aires planes comprises entre deux courbes asymptotes et deux courbes asymptotiques quelconques est nulle.

La somme algébrique des aires planes comprises entre deux courbes variables appartenant à un système algébrique

$$\Phi(X, Y, u) = 0,$$

et deux courbes également variables appartenant à un faisceau ponctuel de courbes asymptotes entre elles,

$$\Psi_1 + vt^2\Psi_2 = 0 \quad (^2),$$

est une fonction rationnelle et logarithmique de u, et une fonction entière, du premier degré, de v.

La somme algébrique des aires planes comprises entre deux courbes variables, appartenant à un système algébrique,

$$\Phi(X, Y, u) = 0,$$

et deux courbes également variables appartenant à un faisceau ponctuel de courbes asymptotiques, $\Psi_1 + vt\Psi_2 = 0$, *est une fonction*

---

(1) *Sur le théorème d'Abel* (*Journal de Mathématiques,* 4e série, t. III, p. 354).

(2) t désigne la variable d'homogénéité.

rationnelle et logarithmique de u, et une fonction entière, du second degré, de v.

La somme algébrique des aires planes comprises entre deux courbes variables, appartenant à un faisceau ponctuel de courbes asymptotiques, et deux courbes également variables, appartenant aussi à un faisceau analogue, est une fonction entière des paramètres des deux faisceaux.

Dans toutes ces propositions on suppose que les courbes d'un des systèmes n'ont pas de point fixe commun à l'infini avec les courbes de l'autre.

40. On a des théorèmes tout à fait analogues pour les *volumes* dans l'espace.

Soient trois systèmes de surfaces algébriques

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y, Z, u) &= 0, \\ \Psi(X, Y, Z, v) &= 0, \\ \Theta(X, Y, Z, w) &= 0; \end{aligned}$$

la somme algébrique des volumes compris entre trois de ces surfaces et trois surfaces respectivement voisines est

$$du\,dv\,dw \sum \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\frac{\partial \Psi}{\partial v}\,\frac{\partial \Theta}{\partial w}}{\Delta},$$

la somme s'etendant aux points communs aux surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $\Theta = 0$, et Δ étant le jacobien de Φ, Ψ, Θ.

On en conclut que :

La somme algébrique des volumes compris entre deux surfaces asymptotes, deux autres surfaces également asymptotes et deux surfaces quelconques de même degré est nulle.

De même, est nulle aussi la somme des volumes compris entre *deux surfaces asymptotiques, deux autres surfaces également asymptotiques et deux surfaces asymptotes quelconques, etc.* ([1]).

Nous entendons par *surfaces asymptotiques* des surfaces qui ont mêmes points à l'infini, et par *surfaces asymptotes* des surfaces qui ont mêmes plans tangents en tous les points à l'infini.

La somme des volumes compris entre deux surfaces fixes de même degré, deux autres surfaces fixes également de même degré et deux surfaces variables, appartenant à un faisceau ponctuel de surfaces asymptotes (asymptotiques), $\Phi + ut^h\Phi = 0$, *est une fonction entière, du premier (du troisième) degré en u* ($h = 2$ ou 1).

On suppose que les surfaces des trois systèmes n'ont pas constamment de point commun à l'infini.

41. Nous allons chercher, en revenant à la question des aires planes, comment varie la somme des aires découpées sur un plan qui se déplace parallèlement à lui-même, par le solide compris entre deux surfaces de même degré et deux autres surfaces également de même degré. Soient

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0$$

deux systèmes de surfaces, et un plan parallèle à XOY, $Z = h$. On a (n° **30**), pour la somme des aires découpées sur le plan par quatre surfaces u_0 et u, v_0 et v, l'expression

$$K = \int_{u_0}^{u} \int_{v_0}^{v} du\, dv \sum \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\frac{\partial \Psi}{\partial v}}{\Delta}.$$

([1]) On déduit de là que *la somme des volumes compris à l'intérieur d'un cylindre à base fermée, entre deux surfaces asymptotes, est nulle,* parce qu'on peut découper le cylindre en tranches infiniment petites comprises entre deux séries de plans, parallèles aux génératrices et respectivement parallèles entre eux dans chaque série. Les plans de chaque série forment en effet un système de surfaces asymptotiques. La courbe de base du cylindre peut être algébrique ou transcendante.

Or, d'après la formule (8) du n° **20**, où l'on doit faire $k = 3$, il vient

$$K = \int\int du\, dv \sum \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{(\zeta - h\theta)[\Phi'_\eta \Psi'_\zeta - \Phi'_\zeta \Psi'_\eta]}.$$

La somme du second membre s'étend cette fois aux points communs, à $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $\theta = 0$; η et ζ sont des fonctions de u, v, θ définies par $\Phi(1, \eta, \zeta, \theta, u) = 0$; $\Psi(1, \eta, \zeta, \theta, u) = 0$, et l'on doit faire finalement $\theta = 0$ (¹). On voit alors que h figurera au second degré au numérateur et disparaîtra au dénominateur de la quantité sous le signe $\int\int$; il en résulte que K est de la forme

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{N} h + \mathfrak{P} h^2.$$

Donc :

La somme des aires découpées sur un plan qui se déplace parallèlement à lui-même, par le solide compris entre deux surfaces de même degré, et deux autres surfaces également de même degré, est proportionnelle au produit des distances du plan mobile à deux plans fixes de même direction.

Si les surfaces $\Phi = 0$ forment un faisceau ponctuel de surfaces asymptotiques, on peut poser

$$\Phi = \Phi_1 + ut\Phi_2;$$

$\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ est alors égal à $t\Phi_2$, et, par suite, $k = 2$ (n° **20**). Il vient alors

$$K = \int\int du\, dv \sum \frac{d}{d\theta} \frac{\frac{\partial\Psi}{\partial v}\Phi_2}{(\zeta - h\theta)[\Phi'_\eta \Psi'_\zeta - \Phi'_\zeta \Psi'_\eta]},$$

et par suite K est du premier degré en h; si

$$\Phi = \Phi_1 + ut^2\Phi_2,$$

(¹) Rappelons que η, ζ, θ désignent respectivement $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $\frac{t}{x}$; x, y, z, t étant des variables d'homogénéité, telles que $Xt = x$; $Yt = Y$; $Zt = z$.

K est une constante en h. Il en est de même si

$$\Phi = \Phi_1 + ut\Phi_2 \quad \text{et} \quad \Psi = \Psi_1 + vt\Psi_2.$$

Ainsi :

La somme des aires découpées sur un plan qui se déplace parallèlement à lui-même par le solide compris entre deux surfaces asymptotes (asymptotiques) et deux surfaces de même degré quelconques (asymptotiques) est constante.

Si les deux premières surfaces sont asymptotiques, les deux dernières étant quelconques, la somme en question est proportionnelle à la distance du plan mobile à un plan fixe de même direction.

II. — Aires sphériques.

42. La somme des aires comprises sur la sphère S,

$$S = X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0,$$

entre deux surfaces d'un premier système

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0$$

et deux surfaces d'un second système

$$\Psi(X, Y, Z, v) = 0,$$

a pour expression

$$K = R \int\int du\, dv \sum \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\frac{\partial \Psi}{\partial v}}{\Delta},$$

on le voit en partant de l'intégrale qui donne l'aire sphérique

$$J = \int\int \frac{dX\, dY}{Z} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = R \int\int \frac{dX\, dY}{Z}.$$

Dans l'expression de K, la somme est étendue aux points communs aux surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $S = 0$, et Δ est le jacobien de Φ, Ψ, S.

Il est à remarquer ici que le dénominateur de l'expression sous le signe $\sum$ est de degré inférieur, en général, d'une unité seulement au numérateur, et non pas de deux unités comme dans le cas des aires planes, ou de trois comme dans celui des volumes; cela tient à ce que le radical $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ est une constante sur toute la sphère. Il en résulte les conséquences suivantes, toujours par l'application des théorèmes des nos **34** et **35**.

La somme des aires comprises sur une sphère entre deux surfaces quelconques de même degré et deux surfaces asymptotes est nulle.

La somme des aires comprises sur une sphère entre deux surfaces asymptotiques et deux autres surfaces également asymptotiques est nulle.

La somme des aires comprises sur une sphère entre deux surfaces variables appartenant à un système algébrique, $\Phi(X, Y, Z, u) = 0$ *et deux surfaces également variables appartenant à un faisceau ponctuel de surfaces asymptotiques,* $\Psi_1 + v t \Psi_2 = 0$, *est une fonction rationnelle et logarithmique de u, et une fonction entière du premier degré de v.*

On suppose que les surfaces des deux systèmes n'ont pas constamment de point commun sur le cercle à l'infini.

43. Il est intéressant d'étudier la forme sous laquelle les coefficients de l'équation de la sphère figurent dans les expressions précédentes.

On a, d'après la formule (8) du no **20**, en y faisant $k = 2$,

$$R \sum \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \Psi}{\partial v}}{\Delta} = R \sum \frac{d}{d\theta} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial \Psi}{\partial v}}{(1+\eta^2+\zeta^2-R^2\theta^2)[\Phi'_\eta \Psi'_\zeta - \Phi'_\zeta \Psi'_\eta]},$$

la somme du second membre s'étendant aux points communs à $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $\theta = 0$. Plus généralement, si la sphère a pour équation

$$(X-\alpha)^2 + (Y-\beta)^2 + (Z-\gamma)^2 - R^2 = 0,$$

on aura, au dénominateur, au lieu de $1+\eta^2+\zeta^2-R^2\theta^2$, l'expression

$$(1-\alpha\theta)^2 + (\eta-\beta\theta)^2 + (\zeta-\gamma\theta)^2 - R^2\theta^2.$$

Dans le second membre de la relation précédente, η et ζ sont des fonctions de u, v et θ définies par $\Phi(1, \eta, \zeta, \theta, u) = 0$, $\Psi(1, \eta, \zeta, \theta, v) = 0$ et l'on doit, dans le résultat final de la dérivation, faire $\theta = 0$. Il en résulte que l'expression à dériver par rapport à θ se compose de deux facteurs, l'un

$$\mathfrak{B} = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{\Phi'_\eta\Psi'_\zeta - \Phi'_\zeta\Psi'_\eta}$$

est indépendant des coefficients de la sphère; l'autre seul

$$\frac{1}{(1-\alpha\theta)^2 + (\eta - \beta\theta)^2 + (\zeta - \gamma\theta)^2 - R^2\theta^2}$$

dépend de α, β, γ, R. Par suite, le résultat de la dérivation, en y faisant $\theta = 0$, est de la forme

$$\frac{\mathfrak{A}}{1+\eta^2+\zeta^2} + \frac{2\mathfrak{B}}{(1+\eta^2+\zeta^2)^2}[\alpha + \eta(\beta - \eta'_\theta) + \zeta(\gamma - \zeta'_\theta)],$$

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ étant indépendants de α, β, γ, R, ainsi que η, ζ, η'_θ et ζ'_θ. Il en résulte que la somme des aires comprises sur la sphère entre deux surfaces fixes du premier système et deux surfaces fixes du second est de la forme

$$2R(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \varpi) \quad \text{ou} \quad 2R\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,\frac{\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \varpi}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}},$$

λ, μ, ν, ϖ étant fixes. En d'autres termes, on a ce théorème intéressant et très général, tout à fait analogue à une proposition que nous avons fait connaître au tome IV de ce Journal, pour les aires découpées sur une sphère par une surface conique ou une surface réglée [1]:

Soient deux surfaces quelconques de même degré p, et deux autres surfaces également de même degré q. La somme algébrique des 2pq aires que ce système découpe sur une sphère de rayon R *est égale à* $2\rho Rd$; ρ *étant un coefficient dépendant de la nature du système des surfaces primitives, et d désignant la distance du centre de la sphère à un plan, lié invariablement à ce système.*

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IV, p. 319.

44. La quantité que nous avons désignée par $\mathcal{V}$ s'annule en tous les points communs aux surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $\theta = 0$, si $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, par exemple, est divisible par θ; cela arrive en particulier lorsque les surfaces $\Phi = 0$ appartiennent à un faisceau ponctuel de surfaces asymptotiques $\Phi_1 + ut\Phi_2 = 0$, puisque alors $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \theta\, \Phi_2(1, \eta, \zeta, \theta)$: il faut toutefois que $1 + \eta^2 + \zeta^2$ reste fini, c'est-à-dire que les surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ n'aient aucun point commun sur le cercle à l'infini.

En excluant, comme plus haut, ce cas particulier, nous pouvons dire, puisque, si $\mathcal{V}$ est nul, α, β, γ disparaissent dans K, que :

Un système composé de deux surfaces de même degré et de deux surfaces asymptotiques découpe sur une sphère des aires dont la somme algébrique reste fixe, pour toute position de la sphère dans l'espace.

Cette somme est d'ailleurs proportionnelle au rayon.

Pour appliquer ce théorème et le précédent, on ne doit pas oublier qu'un certain nombre des aires considérées peuvent être imaginaires, et qu'elles sont en tout au nombre de $2pq$, p et q étant les degrés des systèmes de surfaces sécantes.

45. Exemples. — Imaginons qu'on déforme homographiquement un tore annulaire sous la condition que les sections normales à l'axe deviennent des couples d'ellipses situées dans des plans parallèles : on obtient une surface Σ, qui découpe sur une sphère quatre aires fermées dont la somme algébrique ne dépend pas de la position de la sphère.

Car on peut décomposer l'anneau obtenu en anneaux infiniment petits, compris respectivement entre deux des plans parallèles de la série considérée, et deux cylindres ayant pour bases sur ces plans des ellipses; le théorème étant vrai, par ce qui précède, pour un de ces anneaux, est vrai pour l'anneau total.

On obtient un système jouissant de la même propriété en considérant le solide limité par deux ellipsoïdes, dont l'un est intérieur à l'autre, et par deux plans parallèles; et, plus généralement, toute surface engendrée par une conique dont le plan reste parallèle à un plan fixe.

De même, on peut prendre le solide limité par deux ellipsoïdes homothétiques et deux plans quelconques.

46. Des propositions analogues s'obtiendraient pour les *surfaces de direction*, c'est-à-dire telles qu'en chacun de leurs points le radical $\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2}$ soit égal à une fonction rationnelle; nous nous réservons de revenir sur cette question dans un autre travail.

III. — Aires ellipsoidales.

Zones ellipsoïdales à bases planes.

47. Les formules démontrées dans la première Partie de ce Mémoire conduisent également à des résultats remarquables relatifs à certaines aires ellipsoïdales, limitées par des courbes algébriques; mais, avant d'aborder la question dans toute sa généralité, il nous sera utile d'établir directement le plus simple de ces résultats, en nous appuyant sur des considérations géométriques élémentaires.

La proposition que nous avons en vue est relative à l'aire comprise sur un ellipsoïde quelconque entre deux sections planes, le long desquelles on peut circonscrire à l'ellipsoïde un cône de révolution; on sait que les pôles de ces sections planes, c'est-à-dire les sommets des cônes de révolution circonscrits, ont pour lieu l'hyperbole focale.

Soit donc E l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (a > b > c); \tag{1}$$

l'hyperbole focale a pour équations

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1.$$

Le plan polaire P d'un point (x, z) de cette hyperbole a pour équation

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Zz}{c^2} - 1 = 0.$$

Proposons-nous d'évaluer l'aire de la zone ellipsoïdale comprise entre ce plan et le plan polaire P', d'un point $(x + dx, z + dz)$ infiniment voisin du premier sur l'hyperbole focale.

A cet effet, projetons la zone sur un plan normal à l'axe du cône de révolution de sommet (x, z) circonscrit à l'ellipsoïde E : il est clair que l'aire de la projection est égale à la différence des aires des projections, sur le même plan, des sections planes faites dans E par les plans P et P'. Or, en appelant $d\sigma$ l'aire de la zone, et θ l'angle que les plans tangents à l'ellipsoïde le long de la section P font avec l'axe du cône, on a pour la zone projetée la valeur $d\sigma \sin\theta$; d'autre part, en désignant par ω l'aire de la section P, par $\omega + d\omega$ celle de la section P', par λ et λ' les angles des plans P et P' avec l'axe du cône, il viendra

$$d\sigma \sin\theta = (\omega + d\omega)\sin\lambda' - \omega \sin\lambda.$$

L'axe du cône est, comme on sait, la tangente en (x, z) à l'hyperbole focale; ses équations sont donc

$$\mathrm{Y} = 0, \qquad \frac{\mathrm{X}x}{a^2 - b^2} - \frac{\mathrm{Z}z}{b^2 - c^2} = 1$$

et, par suite,

$$\sin\lambda = \frac{c^2(a^2 - b^2)xz + a^2(b^2 - c^2)xz}{\sqrt{(c^4x^2 + a^4z^2)[(a^2 - b^2)^2z^2 + (b^2 - c^2)^2x^2]}}$$

et

$$\sin\lambda' = \frac{c^2(a^2 - b^2)(x + dx)z + a^2(b^2 - c^2)(z + dz)x}{\sqrt{[c^4(x + dx)^2 + a^4(z + dz)^2][(a^2 - b^2)^2z^2 + (b^2 - c^2)^2x^2]}}.$$

Posons, pour abréger,

$$\mathrm{G} = (a^2 - b^2)^2z^2 + (b^2 - c^2)^2x^2,$$
$$\mathrm{H} = c^4x^2 + a^4z^2,$$

et développons $\sin\lambda'$ suivant les puissances croissantes de dx et dz; il vient

$$\sin\lambda' = \sin\lambda + \frac{c^2z(a^2 - b^2)\,dx}{\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} + \frac{a^2x(b^2 - c^2)\,dz}{\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^2(a^2 - c^2)}{\mathrm{G}^{\frac{1}{2}}\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}}xz(c^4x\,dx + a^4x\,dz).$$

$\sin\theta$ se calcule sans difficulté, et l'on trouve

$$\sin\theta = \frac{b}{G^{\frac{1}{2}}}(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On a donc $d\sigma$, au second ordre près, par la formule

$$\begin{aligned} & b(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} d\sigma \\ & \quad = b^2(a^2 - c^2)\frac{xz}{H^{\frac{1}{2}}}d\omega + \frac{\omega}{H^{\frac{1}{2}}}[c^2(a^2 - b^2)z\,dx + a^2(b^2 - c^2)x\,dz] \\ & \qquad - \frac{\omega}{H^{\frac{3}{2}}}b^2(a^2 - c^2)xz(c^4 x\,dx + a^4 z\,dz). \end{aligned}$$

L'aire ω de la section de l'ellipsoïde par le plan P a pour valeur

$$\omega = \pi\frac{bH^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{3}{2}}}E,$$

en posant

$$E = c^2x^2 + a^2z^2 - a^2c^2,$$
$$A = c^2x^2 + a^2z^2.$$

On en déduit

$$d\omega = \frac{\pi b}{H^{\frac{1}{2}}A^{\frac{5}{2}}}(AH.dA + \tfrac{1}{2}AE.dH - \tfrac{3}{2}EH.dA),$$

puisque $dE = dA$; on peut écrire, en introduisant ω,

$$d\omega = \frac{\omega}{AHE}(AH.dA + \tfrac{1}{2}AE.dH - \tfrac{3}{2}EH.dA).$$

Transportant cette valeur dans l'expression de $d\sigma$, il vient, en remarquant que la quantité $c^4x\,dx + a^4z\,dz$ est égale à $\frac{1}{2}dH$,

$$\begin{aligned} & b(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} d\sigma \\ & \quad = \frac{\omega}{H^{\frac{1}{2}}}[c^2(a^2 - b^2)z\,dx + a^2(b^2 - c^2)x\,dz] \\ & \qquad + \frac{\omega}{AEH^{\frac{3}{2}}}b^2(a^2 - c^2)xz(AH.dA - \tfrac{3}{2}EH.dA), \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}d\sigma$$
$$=\frac{\pi}{\mathrm{A}^{\frac{5}{2}}}[\mathrm{AE}c^2(a^2-b^2)z\,dx+\mathrm{AE}a^2(b^2-c^2)x\,dz$$
$$+\tfrac{1}{2}b^2(a^2-c^2)xz(3a^2c^2-\mathrm{A})d\mathrm{A}].$$

On peut exprimer $d\mathrm{A}$ en fonction de dx et dz, et ensuite dz en fonction de dx, puisque x et z sont liés par l'équation

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1;$$

il vient ainsi, après un calcul facile, en remarquant que $\mathrm{A}=\mathrm{E}+a^2c^2$,

$$\frac{d\sigma}{\pi}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}=a^2c^2\frac{dx}{z\mathrm{A}^{\frac{5}{2}}}[2\mathrm{A}^2-\mathrm{A}(b^4-3a^2b^2-3b^2c^2+5a^2c^2)$$
$$-3a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2].$$

48. On a donc, puisque x et z sont liés par la relation (2), une différentielle elliptique en x; il est aisé de la réduire.

Des identités

$$b^2\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}d\left(\frac{xz}{\mathrm{A}^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{dx}{z\mathrm{A}^{\frac{5}{2}}}[-\mathrm{A}^2-2\mathrm{A}(a^2b^2+b^2c^2-2a^2c^2)$$
$$+3a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)]$$

et

$$\frac{b^2}{a^2c^2}\,\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}d\left(\frac{xz}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{dx}{z\mathrm{A}^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\mathrm{A}^2}{a^2c^2}+(a^2-b^2)(b^2-c^2)\right],$$

on conclut

$$\frac{d\sigma}{\pi}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}+b^2\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}\left(a^2c^2\,d\frac{xz}{\mathrm{A}^{\frac{3}{2}}}-d\frac{xz}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{-dx}{z\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}(c^2x^2+a^2z^2-a^2c^2)$$

et, si l'on pose

$$(3)\qquad \mathrm{S}=\pi b^2\frac{a^2-c^2}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{xz}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}}-a^2c^2\frac{xz}{\mathrm{A}^{\frac{3}{2}}}\right),$$

il vient

$$(4) \qquad dS - d\sigma = \pi\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\,\frac{dx}{zA^{\frac{1}{2}}}(c^2x^2+a^2z^2-a^2c^2),$$

x et z étant liés par la relation $\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1$, et A étant égal à $c^2x^2+a^2z^2$. La différentielle elliptique qui figure au second membre est maintenant ramenée aux différentielles de première et de seconde espèce.

49. Avant de l'étudier de plus près, nous devons signaler une interprétation géométrique remarquable de la fonction désignée par S : cette fonction représente *l'aire du cône de sommet* (x, z) *circonscrit à l'ellipsoïde, l'aire étant prise entre le sommet et l'ellipse de contact.*

En effet, si l'on projette l'aire en question S et la conique de contact sur un plan normal à l'axe du cône, cône de révolution comme on sait, il vient, en gardant les notations employées plus haut,

$$S\sin\theta = \omega\sin\lambda,$$

d'où, en remplaçant ω, $\sin\theta$, $\sin\lambda$ par leurs valeurs, trouvées déjà,

$$S = \pi b\,\frac{EH^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{3}{2}}}\,\frac{b^2(a^2-c^2)\,xz}{H^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{b(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{\pi b^2(a^2-c^2)}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{xz}{A^{\frac{1}{2}}} - a^2c^2\,\frac{xz}{A^{\frac{3}{2}}}\right],$$

ce qui coïncide bien avec la valeur de la fonction S écrite plus haut.

50. Revenons maintenant à la relation

$$dS - d\sigma = \pi\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,\frac{dx}{zA^{\frac{1}{2}}}[c^2x^2+a^2z^2-a^2c^2],$$

et transformons le second membre en introduisant les fonctions elliptiques sous la forme moderne.

Posons à cet effet

$$(5)\qquad \begin{cases} e_1 = 1 - \dfrac{3b^2c^2}{\rho}, \\ e_2 = 1 - \dfrac{3a^2c^2}{\rho}, \\ e_3 = 1 - \dfrac{3a^2b^2}{\rho}, \end{cases}$$

$$\rho = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2.$$

On a $e_1 > e_2 > e_3$ et $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Si l'on considère la fonction pu, définie par la relation habituelle

$$p'^2 u = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3),$$

on peut poser

$$(6)\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{\rho}{3b^2}\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}(pu - e_3), \\ z^2 = \dfrac{\rho}{3b^2}\dfrac{b^2-c^2}{a^2-c^2}(pu - e_1); \end{cases}$$

on a bien, en effet,

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = \frac{\rho}{3b^2}\frac{e_1-e_3}{a^2-c^2} = 1.$$

On en conclut

$$(7)\qquad A = c^2x^2 + a^2z^2 = \frac{\rho}{3}(pu - e_2),$$

et

$$(8)\qquad E = A - a^2c^2 = \frac{\rho}{3}(pu - 1).$$

Les équations (6) donnent les expressions, en fonction d'un paramètre u, des coordonnées d'un point de l'hyperbole focale; à chaque point (x, z) de l'hyperbole correspondent, puisque pu est une fonction paire, deux valeurs de u égales et de signes contraires.

Si u varie de o à la demi-période réelle ω, pu varie de $+\infty$ à e_1, et il résulte des formules (6) qu'on obtient ainsi tous les points réels de l'hyperbole. Pour les points de l'hyperbole extérieurs à l'ellipsoïde, on a $E > 0$, c'est-à-dire $pu > 1$: soit u_0 la plus petite racine positive de l'équation $pu_0 - 1 = 0$; on peut dire que, si le point (x, z) part d'un ombilic de l'ellipsoïde et s'éloigne à l'infini sur la branche de l'hyperbole focale qui passe par cet ombilic, l'argument correspondant positif u décroît de u_0 à o [1].

Supposons, pour fixer les idées, que le point (x, z) décrive ainsi la branche de l'hyperbole focale située dans l'angle positif zOx; on a

$$2x\,dx = \frac{\rho}{3b^2}\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}p'u\,du.$$

D'après les hypothèses qu'on vient de faire, x et dx sont positifs, du est négatif : $p'u$ sera donc négatif et l'on devra écrire

$$p'u = -2\sqrt{(pu-e_1)(pu-e_2)(pu-e_3)}.$$

Il vient ainsi, en résolvant l'équation précédente par rapport à dx, et remplaçant x par sa valeur en u,

$$dx = -\sqrt{\frac{\rho}{3}\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\frac{1}{b}\sqrt{(pu-e_1)(pu-e_2)}\,du,$$

et, par suite, en portant dans l'expression (4) de $dS - d\sigma$ les valeurs en u de x, z, A, E, dx, on aura

$$dS - d\sigma = -\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(pu-1)\,du,$$

c'est-à-dire, en intégrant,

$$S - \sigma = -\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\int(pu-1)\,du.$$

---

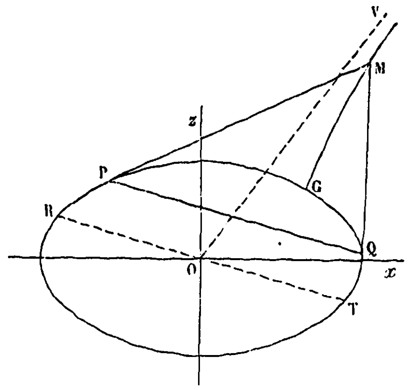
[1] Il est clair que l'équation $pu_0 - 1 = 0$ a des racines réelles, puisque e_1 est inférieur à 1.

Si l'on intègre entre u_0 et u, on aura, puisque S et σ sont évidemment nuls quand le point (x, z) est à l'ombilic,

$$(9) \qquad S - \sigma = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u - \zeta u_0 - u_0).$$

Dans cette formule, σ est l'aire de la calotte ellipsoïdale PGQ; S l'aire latérale du cône PMQ (*fig.* 1).

Fig. 1.



Si le point M, (x, z) s'éloigne à l'infini sur la branche d'hyperbole focale GM, son plan polaire, PQ, tend vers la position RT, le plan RT étant le plan diamétral conjugué de l'asymptote OV : S devient alors infini, ainsi que ζu, puisque u tend vers zéro, et les deux membres de la relation (9) sont infinis. Pour étudier la question de plus près, écrivons la valeur de S en fonction de u. On a trouvé

$$S = \pi b^2 \frac{a^2 - c^2}{(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} xz \frac{E}{A^{\frac{3}{2}}};$$

d'où

$$(10) \qquad S = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\wp u - 1)\frac{(\wp u - e_1)^{\frac{1}{2}}(\wp u - e_3)^{\frac{1}{2}}}{(\wp u - e_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lorsque u tend vers zéro, on a, en remplaçant $\wp u$ par $\frac{1}{u^2} + ku^2 + \ldots$,

$$S = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left(\frac{1}{u} + ku + \ldots\right).$$

L'aire σ tend vers l'aire de la calotte RGT, c'est-à-dire vers la moitié, Σ_0, de l'aire totale de l'ellipsoïde; enfin ζu est de la forme $\frac{1}{u} + k' u^3 + \ldots$. Portant ces valeurs dans (9), il vient

$$\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left(\frac{1}{u} + ku + \ldots\right) - \Sigma_0 = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left(\frac{1}{u} + u + k' u^3 + \ldots - \zeta u_0 - u_0\right).$$

Les termes infinis disparaissent, et, à la limite, u tendant vers zéro, il reste

$$\Sigma_0 = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u_0 + u_0). \tag{11}$$

On a donc finalement, en remplaçant $\zeta u_0 + u_0$ par sa valeur en fonction de Σ_0, dans (9),

$$S + \Sigma_0 - \sigma = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u). \tag{12}$$

51. Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Soit un cône de révolution circonscrit à un ellipsoïde, d'axes $2a$, $2b$, $2c$: l'excès de l'aire latérale de ce cône, limité à son sommet et à l'ellipse de contact, sur l'aire de la calotte ellipsoïdale comprise à son intérieur, a pour expression

$$\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u) - \Sigma_0,$$

Σ_0 étant l'aire du demi-ellipsoïde, u le plus petit argument positif défini, en fonction des coordonnées x et z du sommet du cône, par les relations compatibles

$$x^2 = \frac{\rho}{3b^2}\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}(\wp u - e_3),$$

$$z^2 = \frac{\rho}{3b^2}\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}(\wp u - e_1),$$

et étant posé

$$e_1 = 1 - \frac{3b^2c^2}{\rho}, \qquad e_2 = 1 - \frac{3a^2c^2}{\rho},$$

$$e_3 = 1 - \frac{3a^2b^2}{\rho}, \qquad \rho = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2;$$

S *est d'ailleurs donné, en fonction de* u, *par la formule*

$$S = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(pu - 1)\frac{(pu - e_1)^{\frac{1}{2}}(pu - e_3)^{\frac{1}{2}}}{(pu - e_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit que S est algébrique par rapport à pu, c'est-à-dire par rapport aux coordonnées du sommet du cône.

32. De cette formule on déduit immédiatement l'aire de la zone comprise entre les plans polaires de deux points de l'hyperbole focale, lorsque ces deux points sont sur une même branche de l'hyperbole et dans le même angle des axes Ox et Oz; on a, en désignant par u_1 et u_2 les arguments positifs correspondant à ces points, par S_1 et S_2 les aires des deux cônes circonscrits, et par Σ l'aire de la zone cherchée,

$$S_1 - S_2 + \Sigma = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u_1 - \zeta u_2 + u_1 - u_2).$$

Mais cette formule, à cause des hypothèses faites sur u, ne convient plus au cas de deux points non situés dans le même angle des axes.

Pour l'étendre à tous les cas, nous définirons l'argument de telle sorte qu'il varie d'une manière continue tout le long de l'hyperbole focale : remarquant à cet effet que $(pu - e_1)^{\frac{1}{2}}$ et $(pu - e_3)^{\frac{1}{2}}$ sont égaux à $\frac{\sigma_1}{\sigma}(u)$ et $\frac{\sigma_3}{\sigma}(u)$, nous poserons, (x, z) désignant toujours un point de l'hyperbole,

$$x = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\rho}{3}\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\frac{\sigma_3 v}{\sigma v}; \qquad z = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\rho}{3}\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\frac{\sigma_1 v}{\sigma v},$$

v étant un nouvel argument égal à $\pm u$, et les deux radicaux étant pris positivement. Si 2ω et $2\omega'$ désignent, comme d'habitude, les périodes réelle et imaginaire de pu, les périodes communes aux fonctions $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ et $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ seront 4ω et $4\omega'$, et à un point (x, z) de l'hyperbole focale correspondent, dans un parallélogramme 4ω, $4\omega'$, deux arguments de la forme v et $-v+2\omega+2\omega'$, dont le premier seul est réel; c'est cet argument réel bien défini que nous ferons correspondre à un point de l'hyperbole; nous le supposerons compris, ce qui est permis, entre -3ω et ω.

Cela fait, en posant

$$s = \pi\sqrt{\frac{p}{3}}\,\frac{\sigma v\,\sigma_1 v\,\sigma_3 v}{\sigma_2^3 v}\,(pv - 1)$$

et

$$\theta(v) = s + \Sigma_0 - \pi\sqrt{\frac{p}{3}}\,(\zeta v + v),$$

on démontre aisément que la zone ellipsoïdale Σ comprise entre les plans polaires de deux points, d'arguments v_1, v_2, de l'hyperbole focale a pour expression

$$\Sigma = \theta(v_1) - \theta(v_2)$$

lorsque les deux points sont dans un même angle des axes ou dans deux angles opposés. Si les deux points sont dans des angles adjacents des axes, il faut ajouter à Σ ou en retrancher de Σ la constante

$$2\pi\sqrt{\frac{p}{3}}\,(\eta + \omega),$$

η étant la constante $\zeta\omega$.

Dans tous les cas, on peut dire, puisque s est algébrique par rapport aux coordonnées des deux points, que Σ est égale, à une quantité algébrique près, à la fonction $\zeta v_2 - \zeta v_1 + v_2 - v_1$, et, par suite, les zones qui correspondent à des valeurs de v_2 et v_1 telles que $(v_2 - v_1)$ reste constant sont égales entre elles, à une fonction algébrique près, car $\zeta v_2 - \zeta v_1$ est égal à $\zeta(v_2 - v_1)$ augmenté d'une quantité algébrique en pv_2 et pv_1.

On a ainsi une propriété analytique, analogue à celle des arcs de conique et dont il est aisé de trouver une interprétation géométrique.

53. Les plans polaires des points (x, z) de l'hyperbole focale, par rapport à l'ellipsoïde E, enveloppent un cylindre hyperbolique; si X, Z désignent les coordonnées du point où le plan polaire de (x, z) touche la trace de ce cylindre sur le plan $x\mathrm{O}z$, on trouve aisément

$$X = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\frac{\sigma_3 v}{\sigma v}, \qquad Z = -\,\frac{c^2}{\sqrt{b^2-c^2}}\,\frac{\sigma_1 v}{\sigma v}.$$

Considérons maintenant l'hyperbole H_1, intersection du cylindre précédent par un plan mené par le grand axe, $\mathrm{O}x$, de E, et faisant avec le petit axe, $\mathrm{O}z$, un angle de cosinus égal à $\frac{c}{a}$: les cercles de ce plan se projettent sur le plan $z\mathrm{O}x$ selon des ellipses homothétiques à la section de E par $z\mathrm{O}x$. Les coordonnées d'un point X_1, Z_1 de l'hyperbole H_1, rapportée à son centre et à ses axes, auront pour expressions

$$X_1 = X = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\frac{\sigma_3 v}{\sigma v}; \qquad Z_1 = \frac{a}{c}\,Z = -\,\frac{ac}{\sqrt{b^2-c^2}}\,\frac{\sigma_1 v}{\sigma v}.$$

L'arc s de l'hyperbole H_1 a une expression remarquable; on a en effet

$$\frac{ds^2}{dv^2} = \frac{a^2b^2(a^2-c^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\left[\frac{\sigma_2 v}{\sigma v}\right]^2 = \frac{a^2b^2(a^2-c^2)}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}(\wp v - e_2)^2,$$

d'où

$$s = \mathrm{M}(\zeta v + e_2 v) + \mathrm{N},$$

M et N étant des constantes.

On voit ainsi que, si $v_2 - v_1$ reste constant, les arcs correspondants de l'hyperbole H_1 seront égaux entre eux, à une fonction algébrique près; en d'autres termes, deux zones ellipsoïdales auront une différence algébrique si les arcs correspondants de H_1 jouissent de la même propriété.

Or on sait que, si d'un point d'une hyperbole homofocale à H_1 on mène à cette dernière courbe deux tangentes, les arguments v_2 et v_1 des points de contact ont une différence constante : c'est l'expression analytique du théorème de Graves et Chasles. On peut dire aussi, d'après une propriété connue des coniques, que deux arcs de l'hyperbole H_1 ont une somme algébrique rectifiable lorsque les tangentes à leurs quatre extrémités touchent un même cercle; ces tangentes étant les traces sur le plan de H_1 des quatre plans qui limitent les deux zones correspondantes, il en résulte immédiatement la proposition suivante :

54. *Appelons* zone ellipsoïdale *la zone comprise sur l'ellipsoïde entre deux ellipses le long de chacune desquelles on peut circonscrire à cette surface un cône de révolution;*

Les aires de deux zones ellipsoïdales ont une somme ou une différence exprimable algébriquement lorsque les quatre plans qui limitent ces zones touchent un cercle situé dans un plan passant par le grand axe et faisant avec le petit axe un angle de cosinus égal à $\frac{c}{a}$.

Ou, si l'on veut, en vertu de la remarque faite sur la projection d'un tel cercle :

Les aires de deux zones ellipsoïdales ont une somme ou une différence exprimable algébriquement lorsque les quatre plans qui les limitent touchent un ellipsoïde homothétique à l'ellipsoïde primitif.

Zones de Lebesgue et de Jellett.

55. Les zones à bases planes qu'on vient d'étudier sont les aires ellipsoïdales les plus simples qu'on ait pu ramener jusqu'ici aux intégrales elliptiques; un autre exemple a été donné il y a longtemps par Jellett (1) et par Lebesgue (2).

Le lieu des points d'un ellipsoïde où la normale fait avec l'un des axes principaux de la surface un angle donné se compose de deux boucles fermées, symétriques par rapport au centre, et c'est l'aire comprise sur l'ellipsoïde à l'intérieur d'une de ces boucles que Jellett et Lebesgue ont calculée.

(1) *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. I, p. 57.

(2) *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XI, p. 331.

La méthode de Lebesgue est bien connue; si l'on désigne par Ω l'aire comprise à l'intérieur d'une des boucles correspondant à la valeurs φ de l'angle (l'axe choisi étant, par exemple, l'axe Oz), par ω la projection de cette aire sur le plan xOy, on aura

$$\Omega = \int_0^\varphi \frac{d\omega}{\cos\varphi} = \left(\frac{\omega}{\cos\varphi}\right)_0^\varphi - \int_0^\varphi \omega\, d\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right).$$

On obtient aisément ω, qui est l'aire de l'ellipse suivant laquelle la boucle considérée se projette sur le plan xOy :

$$\omega = \pi \frac{\tan^2\varphi}{c^2} ab \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\tan^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\tan^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

$$\Omega = \left| \frac{\pi abc \frac{\tan^2\varphi}{c^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{\tan^2\varphi}{c^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\tan^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\tan^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{\tan^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \right|_0^\varphi$$

$$- \pi abc \int_0^\varphi \frac{\frac{\tan^3\varphi}{c^3}\, d\frac{\tan\varphi}{c}}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\tan^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\tan^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{\tan^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'intégrale du second membre se ramène aux intégrales elliptiques en prenant $\frac{\tan^2\varphi}{c^2}$ pour variable, et l'on a ainsi l'expression annoncée de Ω.

Lebesgue déduit immédiatement de cette formule que trois zones, correspondant à des angles φ, φ', φ'' faits respectivement par les normales avec Oz, Oy et Ox, auront leurs différences deux à deux planifiables si l'on a $\frac{\tan\varphi}{c} = \frac{\tan\varphi'}{b} = \frac{\tan\varphi''}{a}$: l'intégrale elliptique qui figure dans l'expression de Ω est en effet la même pour les trois zones. C'est le premier, et jusqu'ici le seul exemple connu d'aires ellipsoïdales à différence algébrique; nous en avons fait connaître un second dans les paragraphes précédents.

56. Avant d'en donner un troisième, beaucoup plus général et plus important, nous écrirons la formule de Lebesgue en introduisant les fonctions elliptiques. Il suffit de poser, en gardant les notations des paragraphes précédents,

$$\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2} = \frac{\rho}{3a^2b^2c^2}(pu - 1),$$

pour trouver

$$\Omega = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left[\frac{(pu-1)(pu-e_3)^{\frac{1}{2}}}{(pu-e_1)^{\frac{1}{2}}(pu-e_2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{u_0}^{u} - \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\zeta u + u]_{u_0}^{u}.$$

Les fonctions elliptiques sont les mêmes que celles envisagées plus haut et de plus la partie transcendante de Ω est identique à celle qui figure dans l'expression de la zone ellipsoïdale.

Dans cette formule, u_0 est toujours la plus petite racine positive de l'équation $pu - 1 = 0$, qui correspond à $\varphi = 0$.

En observant que $\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u_0 + u_0)$ est la demi-aire Σ_0 de l'ellipsoïde, (11), il vient

$$\Omega = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\frac{(pu-1)(pu-e_3)^{\frac{1}{2}}}{(pu-e_1)^{\frac{1}{2}}(pu-e_2)^{\frac{1}{2}}} - \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u) + \Sigma_0,$$

expression tout à fait analogue à celle de la calotte à base plane. On peut dire aussi qu'à toute zone de Lebesgue est associée une calotte à base plane telle que la différence des deux aires soit planifiable, le plan de base de la calotte étant défini algébriquement en fonction des lignes trigonométriques de l'angle correspondant à la zone.

Nous n'insisterons pas davantage sur les courbes de Lebesgue, que nous allons retrouver comme cas particulier de courbes plus générales.

Aire d'un parallèle.

57. Appelons sur l'ellipsoïde, *parallèle*, d'axe D et d'angle φ, le lieu des points de la surface où la normale fait un angle φ avec une droite D issue du centre [1] : un parallèle se compose de deux boucles fermées, symétriques par rapport au centre; l'aire comprise sur l'ellipsoïde entre ces deux boucles sera l'*aire du parallèle*.

Les parallèles dont l'axe est un des axes de l'ellipsoïde sont précisément les courbes de Lebesgue.

C'est pour évaluer l'*aire d'un parallèle* que nous allons faire appel aux formules de la première Partie de ce Mémoire.

Soient

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipsoïde; l, m, n les paramètres directeurs de l'axe d'un parallèle; φ l'angle correspondant : la seconde équation du parallèle sera

$$\cos^2\varphi(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) = \frac{1}{l^2+m^2+n^2}(Alx + Bmy + Cnz)^2.$$

Nous l'écrirons

$$(2) \qquad A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - u^2(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(3) \quad Al = \alpha, \qquad Bm = \beta, \qquad Cn = \gamma, \qquad u^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi(l^2+m^2+n^2)}.$$

Supposons l, m, n, c'est-à-dire α, β, γ fixes, et $\cos\varphi$, ou u, variable; les parallèles envisagés auront le même axe, et soient deux de ces parallèles, correspondant aux valeurs u et $u + du$.

En coupant ces courbes par deux plans infiniment voisins,

$$(4) \qquad P + (v + dv)Q = 0, \qquad P + vQ = 0,$$

passant par une droite fixe, $P = 0$, $Q = 0$, menée par le centre de l'ellipsoïde, on détermine sur cette surface, entre les plans et les parallèles, quatre aires infiniment petites dont la somme s'évalue aisément.

---

(1) Cette définition est due à Lebesgue, *loc. cit.*

L'élément d'aire sur l'ellipsoïde a pour expression

$$d\sigma = dx\,dy\,\frac{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}{Cz}$$

ou, en prenant u et v pour variables (n° **30**),

$$d\sigma = du\,dv\,\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}\;\frac{4u(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 Q}{\Delta},$$

Δ étant le jacobien des premiers membres des équations (1), (2), (4). En chaque point des quatre aires infiniment petites considérées, on peut remplacer $\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}$ par $u(\alpha x+\beta y+\gamma z)$; d'après l'équation (2), il vient alors

$$d\sigma = du\,dv\,\frac{4u^2(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3 Q}{\Delta}.$$

Pour avoir la somme des quatre aires, on devra sommer l'expression $4u^2\frac{Q}{\Delta}(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3$ pour les quatre points communs aux surfaces (1), (2), (4); si de plus on suppose que la droite $P=0$, $Q=0$ rencontre l'ellipsoïde à l'intérieur des boucles fermées qui correspondent aux parallèles u_1 et u [1], on obtiendra l'aire comprise entre ces deux parallèles en intégrant la somme précédente entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ pour v; u_1 et u pour u. On a donc, en désignant l'aire comprise entre les deux parallèles par σ,

$$\sigma = \int_{u_1}^{u} 4u^2\,du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \sum \frac{Q(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3}{\Delta}. \tag{5}$$

La somme qui figure au second membre s'évalue à l'aide de la formule (8) du n° **20**; on a ici $k=3$, et il vient

$$\sum \frac{Q(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3}{\Delta} = \frac{1}{2}\sum \frac{d^2}{d\theta^2}\,\frac{Q(1,\eta,\zeta,\theta)\,[\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta]^3}{(P+vQ)\,[f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta]}. \tag{6}$$

[1] Cette condition, qu'on peut toujours supposer réalisée, est nécessaire pour que tous les éléments $d\sigma$ entrent positivement dans l'expression de σ : on le voit en appliquant la règle du n° 30, rectifiée par la note (2) de la première page de la deuxième Partie de ce Mémoire.

Pour appliquer cette formule, on a supposé

$$\psi = P + v Q,$$
$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1,$$
$$\varphi = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - u^2(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2;$$

on se rappelle que η, ζ, θ désignent $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $\frac{t}{x}$, t étant la variable d'homogénéité; la somme du second membre s'étend maintenant aux points communs aux surfaces $f(1, \eta, \zeta, \theta) = 0$, $\varphi(1, \eta, \zeta, \theta) = 0$, $\theta = 0$; et l'on y doit faire finalement θ nul.

Les coordonnées de ces quatre points sont indépendantes de v, et, par suite, dans l'équation

$$(7) \qquad \sigma = 2\int_{u_1}^{u} u^2\,du \sum \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{d\theta^2}\,\frac{Q(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^3}{(P + vQ)(f'_\eta \varphi'_\zeta - f'_\zeta \varphi'_\eta)}\,dv,$$

l'intégration par rapport à v pourra s'effectuer de suite. On peut écrire, si l'on veut, puisque u est indépendant de θ,

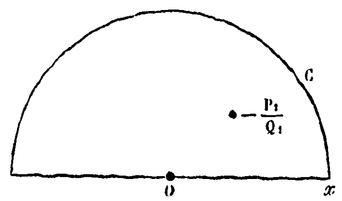
$$(8) \qquad \sigma = 2\sum \frac{d^2}{d\theta^2}\int_{u_1}^{u} u^2\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^3}{(P + vQ)(f'_\eta \varphi'_\zeta - f'_\zeta \varphi'_\eta)}\,dv,$$

et l'intégrale indéfinie par rapport à v est de la forme

$$\sum \mathfrak{M} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{P + vQ}.$$

Soient P_1 et Q_1 les valeurs des fonctions P et Q en l'un des quatre

Fig. 2.



points auxquels s'étend la somme; supposons que, dans le plan des quantités v, le point dont l'affixe est $-\frac{P_1}{Q_1}$ soit au-dessus de l'axe des x; en intégrant la fonction $\frac{1}{P+vQ}$ le long du contour ci-contre, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{P+vQ} + \int_C \frac{dv}{P+vQ} = 2\pi i r,$$

r étant le résidu, $\frac{1}{Q_1}$, relatif au pôle $-\frac{P_1}{Q_1}$. Quant à l'intégrale $\int_C$, on voit aisément, en supposant que le rayon du cercle C augmente indéfiniment, qu'elle est égale à $\frac{\pi i}{Q_1}$; on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{P+vQ} = +\frac{\pi i}{Q_1}.$$

Si le point d'affixe $-\frac{P_1}{Q_1}$ avait été au-dessous de Ox, on aurait trouvé

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{P+vQ} = -\frac{\pi i}{Q_1}.$$

Il vient donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta)^3}{(P+vQ)(f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta)}\,dv = \pm\pi i\,\frac{(\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta)^3}{f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta},$$

le signe à choisir étant celui du coefficient de i dans $-\frac{P_1}{Q_1}$; et, par suite,

$$(9) \qquad \sigma = 2\frac{d^2}{d\theta^2}\int_{u_1}^{u''} u^2\,du \sum \pm\pi i\,\frac{(\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta)^3}{f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta},$$

la somme étant toujours étendue aux quatre points communs aux surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\theta=0$. Il est à remarquer qu'on aura dans le second membre deux signes $+$ et deux signes $-$, car, les quatre points étant imaginaires conjugués deux à deux, les parties imaginaires des quatre valeurs de $-\frac{P}{Q}$ sont deux à deux égales et de signes contraires.

58. Pour calculer l'intégrale par rapport à u, faisons un changement de variable en posant

$$U = u(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta).$$

η et ζ sont des fonctions des variables u et θ définies par les relations

$$(10)\quad \begin{cases} f(\eta, \zeta) \quad = A + B\eta^2 + C\zeta^2 - \theta^2 = 0, \\ \varphi(\eta, \zeta, u) = A^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 - u^2(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^2 = 0, \end{cases}$$

θ est d'ailleurs une variable indépendante de u, qu'on doit faire finalement égale à zéro, après avoir effectué l'opération $\frac{d^2}{d\theta^2}$.

On tire de là, en supposant θ constant,

$$\begin{aligned} &f'_\eta\, d\eta \ + f'_\zeta\, d\zeta = 0, \\ &\varphi'_\eta\, d\eta \ + \varphi'_\zeta\, d\zeta = 2u\,du(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^2, \\ &B^2\eta d\eta + C^2\zeta d\zeta = U\, dU; \end{aligned}$$

d'où, en éliminant $d\eta$ et $d\zeta$,

$$\frac{u\,du(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^2}{f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta} = \frac{U\,dU}{4\eta\zeta BC(C - B)}.$$

Il vient ainsi

$$(11)\quad \sigma = \sum \pm \frac{\pi i}{2} \frac{d^2}{d\theta^2} \int \frac{U^2\, dU}{BC(C - B)\eta\zeta},$$

η et ζ étant des fonctions de U et θ définies par les relations

$$(12)\quad \begin{cases} A \ + B\eta^2 + C\zeta^2 = \theta^2, \\ A^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = U^2, \end{cases}$$

et la somme s'étendant aux quatre valeurs de η, ζ définies par ces équations, dans l'hypothèse de $\theta = 0$. Il ne faut pas oublier que U n'est pas indépendant de θ; on a

$$(12\ bis)\quad U = u(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta),$$

u étant indépendant de θ.

Soient U_1 et U les valeurs de U correspondant à u_1 et u; on a

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\int_{U_1}^{U}\frac{U^2\,dU}{\eta\zeta}=\int_{U_1}^{U}U^2\,dU\,\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\eta\zeta}\right)+\frac{d}{d\theta}\,\frac{U^2\dfrac{dU}{d\theta}}{\eta\zeta}.$$

Or on a, en différentiant par rapport à θ les relations (12) et (12 *bis*),

$$B\eta\,\frac{d\eta}{d\theta}+C\zeta\,\frac{d\zeta}{d\theta}=\theta=0,$$

$$B^2\eta\frac{d\eta}{d\theta}+C^2\zeta\frac{d\zeta}{d\theta}=U\,\frac{dU}{d\theta},$$

$$\beta u\,\frac{d\eta}{d\theta}+\gamma u\,\frac{d\zeta}{d\theta}=\frac{dU}{d\theta}.$$

On en conclut

$$\frac{d\eta}{d\theta}=\frac{d\zeta}{d\theta}=\frac{dU}{d\theta}=0$$

et, par suite,

$$\frac{d}{d\theta}\,\frac{U^2\dfrac{dU}{d\theta}}{\eta\zeta}=\frac{U^2}{\eta\zeta}\,\frac{d^2U}{d\theta^2}.$$

$\dfrac{d^2U}{d\theta^2}$ se calcule aisément; en différentiant deux fois par rapport à θ les relations (12) et (12 *bis*), on trouve

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} B\eta & C\zeta & 1\\ B^2\eta & C^2\zeta & U\dfrac{d^2U}{d\theta^2}\\ \beta u & \gamma u & \dfrac{d^2U}{d\theta^2}\end{vmatrix}=0.$$

Il vient ainsi

$$BC(C-B)\sigma=\sum\pm\frac{\pi i}{2}\left[\int U^2 dU\,\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\eta\zeta}\right)+\frac{U^2}{\eta\zeta}\,\frac{d^2U}{d\theta^2}\right]_{U_1}^{U}.$$

Or on a, en tirant η^2 et ζ^2 des relations (12),

$$(14)\qquad \begin{cases}\sqrt{B(C-B)}\,\eta=i\sqrt{U^2-C\theta^2+A(C-A)},\\ \sqrt{C(C-B)}\,\zeta=\sqrt{U^2-B\theta^2+A(B-A)}.\end{cases}$$

Posons, pour abréger,

$$\mathfrak{B} = U^2 + A(B - A),$$
$$\mathfrak{C} = U^2 + A(C - A),$$

on trouve, en effectuant l'opération $\frac{d^2}{d\theta^2}$ et faisant $\theta = 0$ dans le résultat final,

$$\frac{i}{\sqrt{BC}(C - B)} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\eta\zeta} = \frac{1}{\mathfrak{B}^{\frac{3}{2}} \mathfrak{C}^{\frac{3}{2}}} (\mathfrak{B} C + \mathfrak{C} B).$$

Effectuons un nouveau changement de variable en posant

$$\text{(14 } bis\text{)} \qquad U^2 - A^2 = A\lambda,$$

on a

$$\int \frac{U^2 dU (\mathfrak{B} C + \mathfrak{C} B)}{\mathfrak{B}^{\frac{3}{2}} \mathfrak{C}^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sqrt{A + \lambda}\,[\lambda(B + C) + 2BC]}{2\sqrt{A}(\lambda + B)^{\frac{3}{2}}(\lambda + C)^{\frac{3}{2}}} d\lambda$$
$$= \frac{\lambda\sqrt{A + \lambda}}{\sqrt{A}\sqrt{(\lambda + B)(\lambda + C)}} - \frac{1}{2\sqrt{A}} \int \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)}}.$$

Il vient donc finalement

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma &= \sum \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{ABC}} \left[\frac{\lambda\sqrt{A + \lambda}}{\sqrt{B + \lambda}\sqrt{C + \lambda}} - \frac{1}{2} \int \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)}} \right] \\ &\quad + \sum \pm \frac{\pi i}{2} \frac{U^2}{\eta\zeta} \left(\frac{d^2 U}{d\theta^2} \right). \end{aligned} \right.$$

La somme s'étend aux quatre systèmes de valeurs η, ζ, U, λ, définis, en fonction de u, par les relations (12), (12 *bis*) et (14 *bis*), où θ est nul.

59. Employons maintenant les fonctions elliptiques. Soient

$$A = \frac{1}{a^2}, \qquad B = \frac{1}{b^2}, \qquad C = \frac{1}{c^2};$$

$$e_1 = 1 - \frac{3b^2c^2}{\rho}, \qquad e_2 = 1 - \frac{3a^2c^2}{\rho}, \qquad e_3 = 1 - \frac{3a^2b^2}{\rho};$$

$$\rho = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2.$$

On peut poser, en introduisant la variable définitive, v,

$$\lambda = -\frac{1}{a^2} + \frac{\rho}{3a^2b^2c^2}\,\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pv-e_1},$$

d'où, en calculant U par la relation $U^2 - A^2 = A\lambda$ et η, ζ par les équations (14),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{A+\lambda} &= \frac{\sqrt{\frac{\rho}{3}}}{abc}\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma v}{\sigma_1 v},\\
\sqrt{B+\lambda} &= \frac{\sqrt{\frac{\rho}{3}}}{abc}\sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sigma_3 v}{\sigma_1 v},\\
\sqrt{C+\lambda} &= \frac{\sqrt{\frac{\rho}{3}}}{abc}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma_2 v}{\sigma_1 v},\\
U &= \frac{\sqrt{\frac{\rho}{3}}}{a^2bc}\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma v}{\sigma_1 v},\\
\eta &= \frac{ib}{a^2\sqrt{b^2-c^2}}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma_2 v}{\sigma_1 v},\\
\zeta &= \frac{c}{a^2\sqrt{b^2-c^2}}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sigma_3 v}{\sigma_1 v}.
\end{aligned}\right.$$

Posons également, pour la symétrie des notations ultérieures, l, m, n, désignant toujours les paramètres de l'axe du parallèle,

$$(16\ bis)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{l}{a\sqrt{l^2+m^2+n^2}} &= l_1\sqrt{\frac{\rho}{3}}(e_1-e_2)^{\frac12}(e_1-e_3)^{\frac12},\\
\frac{m}{b\sqrt{l^2+m^2+n^2}} &= l_2\sqrt{\frac{\rho}{3}}(e_2-e_1)^{\frac12}(e_2-e_3)^{\frac12},\\
\frac{n}{c\sqrt{l^2+m^2+n^2}} &= l_3\sqrt{\frac{\rho}{3}}(e_3-e_1)^{\frac12}(e_3-e_2)^{\frac12}.
\end{aligned}\right.$$

Les valeurs de η et ζ en fonction de v sont dépourvues d'ambiguïté; quant aux fonctions $\frac{\sigma_\alpha v}{\sigma v}$ et pv elles sont fonctions algébriques de η, ζ,

u et par suite d'après (12) et (12 *bis*) des paramètres du parallèle. Observons maintenant qu'aux quatre couples de valeurs η, ζ qui figurent dans l'expression (15) de σ, et qui vérifient l'équation

$$U = u(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta),$$

correspondent, en vertu de (16), quatre valeurs de v, vérifiant l'équation

$$\sqrt{\frac{p}{3}}\frac{1}{abcu}\,\sigma v = \frac{\alpha a}{(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}}\sigma_1 v,$$
$$+\frac{\beta b}{(e_2-e_1)^{\frac{1}{2}}(e_2-e_3)^{\frac{1}{2}}}\sigma_2 v + \frac{\gamma c}{(e_3-e_1)^{\frac{1}{2}}(e_3-e_2)^{\frac{1}{2}}}\sigma_3 v)$$

qui, en remplaçant α, β, γ, u par leurs valeurs (3) en l, m, n, $\cos\varphi$, et tenant compte de (16 *bis*), devient

$$(17) \qquad \frac{\cos\varphi}{abc}\,\sigma v = l_1\sigma_2 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v.$$

Observons que l_1 et l_3 sont réels et que l_2 est purement imaginaire, d'après (16 *bis*).

Portant les valeurs de λ, U, η, ζ dans (15), il vient

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \sigma = {}& \sum \pm \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}\left[e_1 - 1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pv - e_1}\right]\frac{\sigma_1 v\,\sigma v}{\sigma_2 v\,\sigma_3 v} \\ & + \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{p}{3}}\int\left[e_1 - 1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pv - e_1}\right]dv \\ & + \sum \pm \frac{\pi}{2}\,bc\,\frac{(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_2 v\,\sigma_3 v}\,\sigma^2 v\left(\frac{d^2U}{d\theta^2}\right). \end{aligned}\right.$$

60. Nous ne calculerons pas en ce moment $\frac{d^2U}{d\theta^2}$, qui, d'après (13), est algébrique par rapport à η, ζ et u, c'est-à-dire par rapport aux paramètres du parallèle; la dernière partie de σ est par suite une fonction algébrique de ces paramètres, quels que soient les signes à choisir; il en est de même de la première partie, et par conséquent l'aire σ s'exprime, à une fonction algébrique près par rapport aux éléments des deux parallèles qui la limitent, par l'expression

$$\sigma''_1 = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}} \int \left[e_1 - 1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p v - e_1} \right] dv;$$

or on a

$$p(v + \omega) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p v - e_1},$$

d'où

$$\sigma''_1 = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}} [-\zeta(v + \omega) - v].$$

La somme s'étend aux quatre racines, distinctes à des multiples près de 4ω, $4\omega'$, de l'équation (17).

On peut écrire

$$(19) \qquad \sigma''_1 = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}} \left(-\zeta v - \zeta \omega - \frac{1}{2}\frac{p' v}{p v - e_1} - v \right)$$

ou, en intégrant,

$$\sigma''_1 = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}} \left(-\zeta \omega - \frac{1}{2}\frac{p' v}{p v - e_1} \right) + \sigma'',$$

étant posé

$$(20) \qquad \sigma'' = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}} (-\zeta v - v).$$

Le premier terme de σ''_1 est encore algébrique, et la transcendante qui figure dans σ se réduit simplement à σ''.

Pour calculer l'aire d'un parallèle (n° **57**) correspondant à une valeur φ de l'angle, il faut faire varier φ de φ à $+\frac{\pi}{2}$, et, par suite, u de u à $+\infty$; l'aire de l'ellipsoïde s'obtiendra en faisant varier φ de o à $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons ainsi ramené σ à une fonction algébrique et à la somme de quatre expressions de la forme $\zeta v + v$; nous pouvons aller plus loin et donner, avant de développer l'expression trouvée, une interprétation géométrique de ces formules.

Interprétation géométrique de la formule de l'aire d'un parallèle.

60. Soit Π un parallèle d'axe $D(l, m, n)$ et d'angle φ, sur l'ellipsoïde (E); considérons la développable circonscrite à (E) le long du parallèle. Les plans tangents de cette développable sont parallèles aux plans tangents du cône de révolution dont l'axe est la droite D, et le demi-angle au sommet l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$; on peut donc dire que la développable est circonscrite à E et à la sphère de rayon infini inscrite au cône; cette sphère a pour centre le point kl, km, kn et pour rayon kr, k étant un paramètre très grand et r étant défini par la relation

$$r^2 = (l^2 + m^2 + n^2)\cos^2\varphi.$$

Or on sait que la développable circonscrite à une quadrique (E) et à une sphère a ses quatre coniques doubles sur quatre quadriques homofocales à (E) (Chasles); nous avons montré, dans un autre travail [1], que (E) étant la surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et la sphère ayant pour équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0,$$

on obtiendra les quatre quadriques homofocales par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\theta} + \frac{y^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} - 1 = 0,$$

où θ est une des quatre racines de l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2+\theta} + \frac{y_0^2}{b^2+\theta} + \frac{z_0^2}{c^2+\theta} - 1 = \frac{R^2}{\theta}.$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, p. 99.

Dans le cas actuel, en remplaçant x_0, y_0, z_0, R par kl, km, kn, kr et faisant k infini, on voit que l'équation en θ se réduit au troisième degré; ce fait pouvait se prévoir, car une des lignes doubles de la développable est à l'infini, les trois autres sont sur les quadriques

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1=0,$$

où θ est une des trois racines de l'équation

$$(21)\qquad \frac{l^2}{a^2+\theta}+\frac{m^2}{b^2+\theta}+\frac{n^2}{c^2+\theta}=\frac{l^2+m^2+n^2}{\theta}\cos^2\varphi.$$

Une et une seule de ces racines est positive, comme on le voit en substituant $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ et 0; les deux autres sont réelles et négatives, comprises respectivement entre $-a^2$ et $-b^2$, $-b^2$ et $-c^2$; en d'autres termes, les trois coniques doubles sont situées respectivement sur un hyperboloïde à deux nappes, sur un hyperboloïde à une nappe, et sur un ellipsoïde E_1, ce dernier étant homofocal et extérieur à l'ellipsoïde (E). Les plans des trois courbes passent d'ailleurs par le centre de E, et sont respectivement conjugués, par rapport à la quadrique homofocale correspondante, de la direction l, m, n (Chasles).

61. Inversement, si sur un ellipsoïde E_1

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1=0,\qquad \theta>0,$$

homofocal et extérieur à E, on prend une conique centrale quelconque, les plans tangents à cette conique et à E touchent E suivant un parallèle, d'axe l, m, n et d'angle φ; l, m, n est la direction conjuguée du plan de la conique dans l'ellipsoïde E_1, et φ est lié aux paramètres l, m, n par la relation (21).

62. Or on a cette propriété importante que, *pour tous les parallèles ainsi déterminés, l'ellipsoïde* E_1 *restant fixe, les racines de l'équation* (17) *en* v *ont deux à deux une somme constante, et inversement.*

Soit, en effet, une équation de la forme

$$(22)\qquad l_0.\sigma v + l_1.\sigma_1 v + l_2.\sigma_2 v + l_3.\sigma_3 v = 0,$$

où les l sont des constantes; cherchons la condition pour que deux des zéros, v_1 et v_2, aient une somme donnée h. On aura alors, v_3 et v_4 étant les deux autres zéros,

$$v_1 + v_2 = h, \qquad v_3 + v_4 = -h,$$

à des multiples près des périodes 4ω, $4\omega'$.

Si l'on considère la courbe définie par les équations

$$\frac{x}{\sigma v} = \frac{x_1}{\sigma_1 v} = \frac{x_2}{\sigma_2 v} = \frac{x_3}{\sigma_3 v},$$

c'est une courbe gauche du quatrième ordre, de genre un, et il est connu que la relation $v_1 + v_2 = h$ exprime que la corde dont les extrémités ont pour arguments v_1 et v_2 décrit une quadrique fixe passant par la courbe. En d'autres termes, le plan $l_0 x + l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$ est tangent à une telle quadrique fixe, et réciproquement.

Or des relations

$$\mathrm{p}v - e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha^2 v}{\sigma^2 v}$$

on tire

$$\sigma_1^2 v + e_1\sigma^2 v = \sigma_2^2 v + e_2\sigma^2 v = \sigma_3^2 v + e_3\sigma^2 v,$$

et l'équation de toute quadrique passant par la courbe sera

$$\mu_1(x_1^2 + e_1 x^2) + \mu_2(x_2^2 + e_2 x^2) + \mu_3(x_3^2 + e_3 x^2) = 0,$$

avec

$$(23)\qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Le plan $l_0 x + \ldots = 0$ sera tangent à cette quadrique si l'on a

$$(24)\qquad \frac{l_1^2}{\mu_1} + \frac{l_2^2}{\mu_2} + \frac{l_3^2}{\mu_3} + \frac{l_0^2}{e_1\mu_1 + e_2\mu_2 + e_3\mu_3} = 0.$$

La condition pour que deux racines de (17) aient une somme constante est donc, en tenant compte de (23), et en introduisant l, m, n, à la place de l_1, l_2, l_3,

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{l^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{1}{\mu_2}\frac{m^2}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}$$
$$+\frac{1}{\mu_3}\frac{n^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=\frac{\cos^2\varphi(l^2+m^2+n^2)}{b^2c^2\mu_1+a^2c^2\mu_2+a^2b^2\mu_3},$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant trois quantités de somme nulle, et le rapport de deux d'entre elles étant d'ailleurs fonction de la valeur de la somme constante.

Pour démontrer la proposition énoncée, il suffit de prouver qu'on peut toujours trouver une quantité θ, telle que cette relation soit identique à l'équation (21) qui lie l, m, n, φ dans le cas où l'ellipsoïde E_1 est fixe.

On montre aisément qu'il en est ainsi, la quantité θ étant définie par l'équation

$$(25)\qquad \theta=a^2b^2c^2\,\frac{\dfrac{\mu_1}{a^2}+\dfrac{\mu_2}{b^2}+\dfrac{\mu_3}{c^2}}{a^2\mu_1+b^2\mu_2+c^2\mu_3}.$$

63. Il résulte de là que, si les racines de l'équation (17) en v ont deux à deux une somme constante, la développable circonscrite à E le long du parallèle correspondant a une de ses lignes doubles sur une quadrique fixe, homofocale à E; pour que cette quadrique soit un ellipsoïde E_1, extérieur à E, il faut encore que la quantité θ soit positive.

Or il est aisé d'exprimer θ en fonction de la somme h, de deux racines v_1 et v_2.

D'après ce qui précède, l'équation

$$l_0.\sigma v+l_1.\sigma_1 v+l_2.\sigma_2 v+l_3.\sigma_3 v=0$$

a deux racines de somme constante, h, si les l sont liés par la relation

$$(24)\qquad \frac{l_1^2}{\mu_1}+\frac{l_2^2}{\mu_2}+\frac{l_3^2}{\mu_3}+\frac{l_0^2}{e_1\mu_1+e_2\mu_2+e_3\mu_3}=0,$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant trois quantités de somme nulle, dont les rapports sont fonctions de h : pour les calculer il suffit de considérer un cas particulier, et de supposer, par exemple, que l'équation en v a pour racines o et h.

On a ainsi

$$l_1 + l_2 + l_3 = 0,$$
$$l_0 . \sigma h + l_1 . \sigma_1 h + l_2 . \sigma_2 h + l_3 . \sigma_3 h = 0,$$

d'où l'on tire l_2 et l_3 en fonction de l_0 et l_1 ; portant ces valeurs dans (24) et écrivant que l'équation obtenue est satisfaite, quels que soient l_0 et l_1, on trouve

$$\frac{1}{\mu_1} = (\sigma_1 h - \sigma_2 h)(\sigma_1 h - \sigma_3 h),$$
$$\frac{1}{\mu_2} = (\sigma_2 h - \sigma_1 h)(\sigma_2 h - \sigma_3 h),$$
$$\frac{1}{\mu_3} = (\sigma_3 h - \sigma_2 h)(\sigma_3 h - \sigma_1 h),$$

et la valeur (25) de θ devient

$$-\frac{1}{\theta} = \frac{\rho}{3a^2b^2c^2}\left[1 - \frac{e_1(e_2 - e_3)\sigma_1 h + e_2(e_3 - e_1)\sigma_2 h + e_3(e_1 - e_2)\sigma_3 h}{(e_2 - e_3)\sigma_1 h + (e_3 - e_1)\sigma_2 h + (e_1 - e_2)\sigma_3 h}\right].$$

On démontre aisément que, h étant réel, la quantité entre crochets dans le second membre est égale à

$$\left(1 - \wp\frac{h}{2}\right)$$

et, par suite, on a

$$\frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho} = \wp\frac{h}{2} - 1. \tag{26}$$

Pour que θ soit positif, il faut et il suffit que $\wp\frac{h}{2}$ soit supérieur à 1; soit u_0 la plus petite racine positive de $\wp u - 1 = 0$, la quantité $\frac{h}{2}$ devra être comprise entre o et u_0, à des multiples près des périodes, et h entre o et $2u_0$: on peut toujours, en effet, supposer $h > 0$, puisque, si deux racines de l'équation en v ont une somme h, les deux autres ont la somme $-h$.

64. Cela posé, reprenons l'expression (20) de σ'' :

$$\sigma'' = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}(-\zeta v - v),$$

la somme s'étendant à quatre racines distinctes, aux périodes 4ω, $4\omega'$ près, de l'équation (17) en v,

$$(17) \qquad \frac{\cos\varphi}{abc}\sigma v = l_1 \sigma_1 v + l_2 \sigma_2 v + l_3 \sigma_3 v.$$

Il s'agit maintenant de savoir quel signe on doit faire correspondre à chacune des quatre racines de cette équation dans l'expression de σ''.

Supposons satisfaite la condition qui exprime que deux de ces racines ont h pour somme, et désignons ces racines par v_1, $h - v_1$, v_2, $-h - v_2$, h étant une quantité positive comprise entre o et $2u_0$.

Si, dans les fonctions $\frac{\sigma_1}{\sigma}v$, $\frac{\sigma_2}{\sigma}v$, $\frac{\sigma_3}{\sigma}v$, l'on remplace v par $2\omega + 2\omega' - v$, la première et la troisième ne changent pas, la seconde change de signe : on en conclut aisément, en se rappelant que le coefficient l_2 est purement imaginaire, que, si l'équation (17), en v, admet la racine $p + qi$, elle admet la racine $2\omega + 2\omega' - p + qi$, et, par suite, h étant une quantité réelle, les quatre racines de cette équation seront de la forme

$$p + qi, \quad h - p - qi,$$
$$2\omega + 2\omega' - p + qi, \quad -h - 2\omega - 2\omega' + p - qi.$$

On vérifie sans difficulté que la première et la troisième racines, substituées dans les valeurs (16) de η et ζ donnent des résultats imaginaires conjugués; de même la deuxième et la quatrième; par suite, d'après une remarque faite à la fin du n° 57, les signes qui, dans l'expression de σ'', correspondent à chacune de ces racines seront (ε, ε' désignant ± 1), respectivement,

$$\varepsilon, \quad \varepsilon', \quad -\varepsilon, \quad -\varepsilon'.$$

Cherchons d'abord les signes relatifs de ε et ε'; il n'y a à faire que deux hypothèses $\varepsilon = \varepsilon'$ et $\varepsilon = -\varepsilon'$. Si $\varepsilon = \varepsilon'$, il vient

$$\sigma'' = \varepsilon \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\zeta v_1 + \zeta(h - v_1) - \zeta v_2 - \zeta(-h - v_2) + 2h],$$

c'est-à-dire,

$$\sigma'' = \varepsilon\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta h + h) + \mathrm{R},$$

R étant algébrique en $p v_1$ et $p v_2$.

Si $\varepsilon = -\varepsilon'$, on a

$$\sigma'' = \varepsilon \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\zeta v_1 - \zeta(h - v_1) - \zeta v_2 + \zeta(-h - v_2) + 2(v_1 - v_2 - h)],$$

ou

$$\sigma'' = \varepsilon\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\zeta(v_1 - v_2 - h) + v_1 - v_2 - h] + \mathrm{R}'.$$

Or, pour avoir l'aire de l'ellipsoïde, il faut, l, m, n étant donnés, faire varier φ de o à $\frac{\pi}{2}$; aux variables $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, φ ou $\frac{l_2}{l_1}$, $\frac{l_3}{l_1}$, φ, on peut substituer les variables v_1, v_2, h, puisque l'équation (17) écrite deux fois en y remplaçant v par v_1 et v_2, et l'équation (21) déterminent $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, $\cos\varphi$ en fonction de v_1, v_2, θ et que (26) définit θ en fonction de h. Or, φ variant de o à $\frac{\pi}{2}$, l'équation (21) montre que θ varie de ∞ à o, et, par suite, d'après (26), h varie de $2u_0$ à o; il résulte de là que l'aire de l'ellipsoïde sera, dans l'hypothèse de $\varepsilon = \varepsilon'$, exprimée, à une fonction algébrique près, par la fonction *transcendante*

$$2\varepsilon\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u_0 + u_0),$$

qui est indépendante des valeurs de l, m, n, et dans l'hypothèse de $\varepsilon = -\varepsilon'$, par une fonction *transcendante* qui dépend de $v_1 - v_2$, c'est-à-dire, comme on le reconnaît aisément, qui dépend effectivement des valeurs de $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, résultat absurde, puisque l'on doit aboutir à la même expression pour l'aire de l'ellipsoïde, quel que soit l'axe des parallèles considérés [1].

Observons de plus que dans l'expression trouvée, pour le cas de $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, on reconnaît celle qui a été obtenue par une autre voie pour l'aire de la surface (nº **50**).

On a donc nécessairement $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, et

$$\sigma'' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}(2\zeta h + 2h) + \mathrm{R},$$

ce qu'on peut écrire, à une fonction algébrique près,

$$\sigma'' = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta\wp + \wp),$$

$\wp$, c'est-à-dire $2h$, étant défini par la relation (26)

$$\frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho} = p\wp - 1, \tag{27}$$

et θ étant la racine positive de l'équation

$$\frac{l^2}{a^2+\theta} + \frac{m^2}{b^2+\theta} + \frac{n^2}{c^2+\theta} = \frac{\cos^2\varphi(l^2+m^2+n^2)}{\theta}. \tag{21}$$

65. On a donc cette proposition :

L'aire d'un parallèle d'axe (l, m, n) et d'angle φ, est égale, à une fonction algébrique près, à l'expression

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta\wp + \wp),$$

où $\wp$ est la plus petite quantité positive définie par les relations (27) *et* (21).

---

[1] C'est ici qu'intervient expressément la condition que la quadrique considérée doit être un ellipsoïde; pour un hyperboloïde, le groupement des signes serait différent.

Géométriquement, d'après ce qui précède, on peut dire, puisque ϖ dépend seulement de la racine positive θ de (27), que :

Si sur un ellipsoïde, E_1, *homofocal et extérieur à un ellipsoïde* E, *on prend une conique centrale quelconque, et si l'on circonscrit à cette conique et à* E *une développable, l'aire comprise sur* E *entre les deux boucles de la courbe de contact demeure constante, à une fonction algébrique près, quand la conique centrale varie sur* E_1.

Généralisation du théorème de Graves et Chasles.

66. Pour compléter ces résultats, il nous reste à donner l'expression de cette fonction algébrique et son interprétation géométrique.

Introduisons à cet effet l'aire des deux nappes de la développable précédente, limitées à la conique centrale sur E_1, et à la courbe de contact sur E; nous allons faire voir que la fonction algébrique cherchée est précisément égale à cette aire.

Nous démontrerons auparavant une proposition auxiliaire intéressante par elle-même.

Soient C_1 la conique choisie sur E_1; l, m, n la direction conjuguée de son plan dans E_1; la courbe de contact sur E est un parallèle d'axe l, m, n, d'après ce qui a été dit (nº **60**); soit φ son angle.

Considérons une génératrice de la développable circonscrite à C_1 et à E, et suivons cette génératrice à partir de C_1, en nous dirigeant vers son point de contact avec E; ce point dépassé, on rencontre une conique double C_2 de la développable que nous appellerons la *deuxième conique double*, C_1 étant la première. Si nous limitons la développable aux coniques C_1 et C_2, on a cette proposition que :

L'aire de la développable circonscrite à E, *limitée aux coniques* C_1 *et* C_2, *est constante, quelle que soit sur l'ellipsoïde* E_1, *la conique centrale* C_1.

En effet, l'aire à évaluer est divisée en deux nappes par C_1; projetons l'aire d'une des deux nappes sur un plan normal à la direction l, m, n, avec laquelle les plans tangents à la développable font un même angle φ; si $\mathfrak{S}$ est l'aire des deux nappes, Ω_1 l'aire de la conique C_1, on aura

$$\mathfrak{S}\cos\varphi = 2\,\text{proj}.\Omega_1.$$

Or on trouve aisément, en désignant par $\frac{x^2}{a^2+\theta}+\ldots-1=0$ l'équation de E_1,

$$\text{proj}.\Omega_1 = \frac{\pi}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\sqrt{\frac{l^2}{a^2+\theta}+\frac{m^2}{b^2+\theta}+\frac{n^2}{c^2+\theta}}\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)},$$

et, d'après (21),

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\sqrt{\frac{l^2}{a^2+\theta}+\frac{m^2}{b^2+\theta}+\frac{n^2}{c^2+\theta}},$$

d'où

$$\mathfrak{S} = 2\pi\sqrt{\frac{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}{\theta}},$$

ce qui est bien indépendant de l, m, n.

67. Cela posé, considérons l'aire $S\frac{1}{2}$, comprise, sur une des nappes de la développable, entre la courbe de contact avec E et la conique C_2; cette portion de surface comprend à son intérieur, sur E, une calotte dont la base est une des boucles du parallèle (l, m, n, φ); projetons les deux aires $\frac{1}{2}S$, et les deux calottes qu'elles comprennent, sur un plan normal à l'axe du parallèle; il vient évidemment

$$S\cos\varphi = \text{proj. de l'aire des deux calottes.}$$

Or, si nous découpons les deux calottes à projeter en zones infiniment petites par des parallèles de même axe l, m, n, et d'angle variable, on aura, en revenant aux notations du n° **57**, pour l'élément de la projection

$$d\sigma' = dx\,dy\,\frac{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}{Cz}\,\frac{Alx+Bmy+Cnz}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}},$$

c'est-à-dire,

$$d\sigma' = \frac{dx\,dy}{Cz}\,\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

ou, en remplaçant, comme au n° **58** les variables x et y par les variables u et v,

$$d\sigma' = du\,dv \frac{4u(\alpha x + \beta y + \gamma z)^3 \dot{Q}}{\Delta} \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}};$$

on a donc, d'après l'expression (3) de $\cos\varphi$,

$$S = u \int\int 4u\,du\,dv \sum \frac{Q(\alpha x + \beta y + \gamma z)^3}{\Delta},$$

les variables et la somme $\sum$ étant les mêmes que dans l'équation (5).

En posant encore

$$U = (\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)u,$$

on trouve

$$S = u \sum \pm \frac{\pi i}{2} \frac{d^2}{d\theta^2} \int_{U_1}^{U} \frac{U\,dU(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)}{BC(C - B)\eta\zeta},$$

$\frac{S}{u}$ est identique à l'expression (11) de σ, où l'on aurait divisé par u la quantité sous le signe $\int$.

On en conclut, toujours comme au n° **58**,

$$BC(C - B)S = u \sum \pm \frac{\pi i}{2} \left[\int_{U_1}^{U} U(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)\,dU \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\eta\zeta}\right) + \frac{U^2}{u\eta\zeta}\left(\frac{d^2 U}{d\theta^2}\right) \right].$$

Si l'on pose encore $U^2 - A^2 = A\lambda$, il vient, en suivant toujours pas à pas les calculs faits plus haut,

$$S = u \sum \pm \frac{\pi}{2\sqrt{BC}} \int \frac{[\lambda(B + C) + 2BC]}{2A(\lambda + B)^{\frac{3}{2}}(\lambda + C)^{\frac{3}{2}}} \left[\alpha + \beta i \frac{\sqrt{C + \lambda}\sqrt{A}}{\sqrt{B(C - B)}} + \gamma \frac{\sqrt{B + \lambda}\sqrt{A}}{\sqrt{C(C - B)}} \right]$$
$$+ \sum \pm \frac{\pi i}{2} \frac{U^2}{\eta\zeta}\left(\frac{d^2 U}{d\theta^2}\right).$$

L'intégrale qui figure au second membre s'obtient de suite; il vient

$$S = \sum \pm \frac{\pi}{2} \left[\frac{\alpha}{2A\sqrt{BC}} \frac{\lambda}{\sqrt{(B + \lambda)(C + \lambda)}} - \frac{\beta i}{2\sqrt{AC}\sqrt{C - B}\sqrt{B + \lambda}} - \frac{\gamma}{2\sqrt{AB}\sqrt{C - B}\sqrt{C + \lambda}} \right]$$
$$+ \sum \pm \frac{\pi i}{2} \frac{U^2}{\eta\zeta}\left(\frac{d^2 U}{d\theta^2}\right).$$

68. Soit maintenant σ l'aire des deux calottes ellipsoïdales comprises à l'intérieur des deux portions de développable considérées; elle est donnée par la formule (15), les limites étant convenablement choisies, et d'ailleurs les mêmes que pour S. On voit alors que dans l'expression $S - \sigma$, les termes en $\left(\frac{d^2 U}{d\theta^2}\right)$ disparaissent, et il reste, en remplaçant u par $\frac{U}{\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta}$, ou par $\frac{\sqrt{A}\sqrt{A+\lambda}}{\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta}$,

$$\begin{aligned} S - \sigma = & \sum \pm \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{A}\sqrt{A+\lambda}\,(C-B)^{-\frac{1}{2}}}{\alpha + \beta\,\dfrac{i\sqrt{A}\sqrt{C+\lambda}}{\sqrt{B(C-B)}} + \gamma\,\dfrac{\sqrt{A}\sqrt{B+\lambda}}{\sqrt{C(C-B)}}} \\ & \times \left[\frac{\alpha\lambda\sqrt{C-B}}{2A\sqrt{BC}\sqrt{(B+\lambda)(C+\lambda)}} - \frac{\beta i}{2\sqrt{AC}\sqrt{B+\lambda}} - \frac{\gamma}{2\sqrt{AB}\sqrt{C+\lambda}}\right] \\ & - \sum \pm \frac{\pi}{2\sqrt{ABC}}\left[\frac{\lambda\sqrt{A+\lambda}}{\sqrt{(B+\lambda)(C+\lambda)}} - \frac{1}{2}\int \frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{(A+\lambda)(B+\lambda)(C+\lambda)}}\right]. \end{aligned}$$

Introduisons les fonctions elliptiques par les formules (16), il vient

$$\begin{aligned} S - \sigma = & \sum \pm \frac{\pi u}{2} \frac{abc}{(e_2 - e_3)^{\frac{1}{2}}}\left[\beta bi(e_1 - e_2)^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma_3}{\sigma} v + \gamma c(e_1 - e_3)^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} v\right] \\ & - \sum \pm \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\rho}{3}} \int \left[e_1 - 1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\mathrm{p}v - e_1}\right] dv. \end{aligned}$$

Les sommes s'étendent toujours aux quatre zéros distincts à des multiples près de 4ω, $4\omega'$, de l'équation (17) en v.

L'intégrale qui figure au second membre est

$$\sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,[-\zeta(v+\omega) - v];$$

et l'on a

$$\zeta(v+\omega) = \zeta v + \zeta\omega + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'v}{\mathrm{p}v - e_1}.$$

Les termes en $\zeta\omega$ se détruisent deux à deux, à cause du choix des signes (**64**); faisant passer le terme $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'v}{\mathrm{p}v - e_1}$ sous la première somme, il vient par un calcul facile, en remplaçant α, β, γ, u par leurs valeurs (3) en fonction de l, m, n, $\cos\varphi$, et tenant compte de (16 *bis*) et (17),

$$S - \sigma = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\sum \pm \frac{l_1\sigma_2 v\sigma_3 v + l_2\sigma_3 v\sigma_1 v + l_3\sigma_1 v\sigma_2 v}{(l_1\sigma_1 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v)\sigma v} - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\Sigma \pm (\zeta v + v).$$

Soient v_1, $h - v_1$; v_2, $-h - v_2$ les quatre racines de l'équation (17) en v; posons

$$\chi(v) = \frac{l_1\sigma_2 v\sigma_3 v + l_2\sigma_1 v\sigma_3 v + l_3\sigma_2 v\sigma_1 v}{(l_1\sigma_1 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v)\sigma v},$$

il vient, d'après ce qui a été dit sur le choix des signes,

$$\begin{aligned} S - \sigma = &\ \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\chi(v_1) + \chi(h - v_1) - \chi(v_2) - \chi(-h - v_2)] \\ &- \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\zeta v_1 + \zeta(h - v_1) - \zeta v_2 - \zeta(-h - v_2) + 2h]. \end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de $S - \sigma$, c'est-à-dire l'excès des deux portions de nappe considérées de la développable sur l'aire ellipsoïdale qu'elles comprennent, il faut faire varier φ de o à φ, et par suite, d'après (21) et (26), θ à partir de ∞, et h à partir de o.

69. Or de l'équation (17),

$$\frac{\cos\varphi}{abc}\sigma v = l_1\sigma_1 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v,$$

où l'on fait successivement $v = v_1, v_2, h - v_1$, on tire les valeurs proportionnelles de $\cos\varphi$, l_1, l_2, l_3, et en les portant dans la relation précédente, on voit sans difficulté que le second membre est indépendant de v_1 et v_2, parce qu'il ne peut devenir infini pour aucune valeur de v_1 et v_2. Ce second membre est donc seulement une fonction de h, ou de θ (26), et par suite $S - \sigma$ est constant quand la conique C_1 décrit l'ellipsoïde E_1.

En introduisant, au lieu de S, l'aire S_1 des deux nappes de la développable comprises entre C_1 et la courbe de contact sur E, et, au lieu de l'aire des deux calottes ellipsoïdales, l'aire du parallèle, on a, puisque

$S + S_1$ est constant, ainsi qu'on l'a démontré au n° **66**, le théorème suivant, tout à fait analogue à celui de Graves et Chasles sur les arcs de conique :

Sur un ellipsoïde E_1, *extérieur et homofocal à un ellipsoïde* E, *on prend une conique quelconque, dont le plan passe par le centre, et l'on circonscrit à cette conique et à* E *une développable : l'excès de l'aire de cette développable, limitée à la conique et à l'ellipsoïde* E, *sur l'aire ellipsoïdale comprise sur* E *à son intérieur, est constant.*

70. Le théorème de Lebesgue (n° **55**) est un cas particulier de cette proposition ; on l'obtient en supposant que la conique choisie est située dans un des plans principaux de E_1. Quant à la valeur de la constante, elle peut se déterminer en partant de ce qui précède, ou, plus simplement, en s'appuyant sur les formules données pour les zones de Lebesgue.

Si l'on suppose que la conique C_1 soit dans le plan $z = 0$, l'aire du parallèle correspondant sera, en gardant les notations du n° **55** et désignant par Σ_0 l'aire de l'ellipsoïde, $2(\Sigma_0 - \Omega)$; l'aire S_1 sera donnée par la formule

$$(28) \qquad S_1 \cos\varphi = 2 \,\text{aire}\, C_1 - 2\omega,$$

Ω et ω ayant les mêmes significations qu'au n° **55**.

On a trouvé

$$(29) \qquad \Omega = \frac{\omega}{\cos\varphi} - \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u) + \Sigma_0,$$

u étant défini par

$$(30) \qquad \frac{\tan^2\varphi}{c^2} = \frac{\rho}{3a^2b^2c^2}(pu - 1).$$

D'ailleurs on a

$$\text{aire}\, C_1 = \pi\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)},$$

et, par l'équation (21),

$$(31) \qquad \cos^2\varphi = \frac{\theta}{c^2+\theta}.$$

Il vient alors, pour la valeur de la constante cherchée, qui est égale à $S_1 - 2(\Sigma_0 - \Omega)$,

$$2\pi\frac{\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}}{\sqrt{\theta}} - 2\frac{\omega}{\cos\varphi} - 2\left[\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u) - \frac{\omega}{\cos\varphi}\right],$$

c'est-à-dire

$$2\pi\sqrt{\frac{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}{\theta}} - 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u).$$

Ainsi, l'on peut dire que *l'excès de l'aire de la développable sur celle du parallèle a pour valeur*

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left[\sqrt{\frac{3(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}{\theta\rho}} - \zeta w - w\right],$$

w étant la plus petite valeur positive définie en fonction de θ par la relation, déduite de (30) *et* (31),

$$\frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho} = \wp w - 1.$$

Expression complète de l'aire du parallèle.

71. En partant de la formule (18) et en calculant $\frac{d^2U}{d\theta^2}$ par la relation (13), on arrive, pour l'aire du parallèle d'axe l, m, n et d'angle φ, à l'expression suivante.

Soient θ la racine positive de l'équation

$$\frac{l^2}{a^2+\theta} + \frac{m^2}{b^2+\theta} + \frac{n^2}{c^2+\theta} = \frac{\cos^2\varphi(l^2+m^2+n^2)}{\theta},$$

et w le plus petit argument positif défini par la relation

$$\frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho} = \wp w - 1.$$

Posons, l_1, l_2, l_3 étant toujours définis en fonction de l, m, n par (16 *bis*),

$$\mathcal{F}(v) = \frac{l_1\sigma_1 v[\sigma_1^2 v + (1+2e_1)\sigma^2 v] + l_2\sigma_2 v[\sigma_2^2 v + (1+2e_2)\sigma^2 v] + l_3\sigma_3 v[\sigma_3^2 v + (1+2e_3)\sigma^2 v]}{(l_1\sigma_2 v\,\sigma_3 v + l_2\sigma_1 v\,\sigma_3 v + l_3\sigma_1 v\,\sigma_2 v)\,\sigma v}.$$

L'équation

$$(19)\qquad \frac{\cos\varphi}{abc}\,\sigma v = l_1\sigma_1 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v$$

a, dans un parallélogramme 4ω, $4\omega'$, quatre zéros, dont deux ont pour somme $2w$, et les deux autres $-2w$, à des multiples près de 4ω, $4\omega'$; soient v_1, $2w - v_1$, v_2, $-2w - v_2$ ces zéros. On aura, pour l'aire comprise entre deux parallèles,

$$\begin{aligned}\sigma = {} & \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\zeta v_1 + \zeta(2w - v_1) - \zeta v_2 - \zeta(-2w - v_2) + 4w] \\ & - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\mathcal{F}(v_1) + \mathcal{F}(2w - v_1) - \mathcal{F}(v_2) - \mathcal{F}(-2w - v_2)],\end{aligned}$$

le second membre étant pris entre les limites qui correspondent aux deux parallèles.

On voit bien que la partie transcendante est $2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta w + w)$.

Pour se rendre compte de la nature de la partie algébrique, on peut substituer à l'équation (17) une équation du quatrième ordre en $p\,v$, en remplaçant $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}$ par $\sqrt{p v - e_\alpha}$; et, si l'on désigne ses racines par P_1, P_2, P_3, P_4, la partie algébrique de σ est de la forme

$$\varphi(P_1) + \varphi(P_2) - \varphi(P_3) - \varphi(P_4),$$

φ étant une fonction rationnelle.

Pour avoir l'aire d'un parallèle, il faut prendre le second membre à partir des valeurs qui correspondent à $\cos\varphi = 0$, c'est-à-dire, comme on l'a dit déjà, à $w = 0$. En ce cas, ζ et $\mathcal{F}$ étant des fonctions impaires, le second membre s'annule pour la limite inférieure, et il suffit de substituer les valeurs qui correspondent au parallèle considéré.

Autres aires ellipsoïdales réductibles aux fonctions algébriques, elliptiques ou logarithmiques.

72. Soit toujours E un ellipsoïde; menons les plans tangents communs à E et à une sphère extérieure à cette surface. La courbe de contact sur E se compose de deux boucles fermées, et c'est l'aire comprise entre ces deux boucles que nous allons maintenant évaluer.

Désignons par l, m, n les coordonnées du centre de la sphère, par R son rayon: la courbe de contact a pour équations

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{32}$$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} - 1\right)^2. \tag{33}$$

Supposons que la sphère se déplace de telle façon que son centre reste sur une droite issue du centre de E, et que son rayon varie proportionnellement à la distance des deux centres; on aura ainsi, u étant un paramètre, α, β, γ, r, des quantités fixes,

$$\frac{l}{a^2} = \frac{\alpha}{u}, \qquad \frac{m}{b^2} = \frac{\beta}{u}, \qquad \frac{n}{c^2} = \frac{\gamma}{u}, \qquad R = \frac{r}{u},$$

et la deuxième équation devient

$$\varphi = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - \frac{1}{r^2}(\alpha x + \beta y + \gamma z - u)^2 = 0. \tag{34}$$

L'aire comprise entre les courbes de contact correspondant à deux de ces sphères, de paramètres u_1 et u, a pour expression, d'après les raisonnements faits au n° **57**, $P = 0$, $Q = 0$ désignant les équations de deux plans convenablement choisis,

$$s = 4\int_{u_1}^{u} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \sum \frac{Q(\alpha x + \beta y + \gamma z - u)^2}{\Delta},$$

Δ étant le jacobien des premiers membres des équations (32), (34), et $P + vQ = 0$, et la somme s'étendant aux points communs aux trois surfaces représentées par ces équations.

En appliquant la formule (8) du n° **20**, cette somme devient égale à cette autre,

$$\sum \frac{d}{d\theta} \frac{Q(1, \eta, \zeta, \theta)(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta - u\theta)^2}{(P + vQ)(f'_\eta \varphi'_\zeta - f'_\zeta \varphi'_\eta)},$$

étendue aux points communs à $f = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = 0$, et où l'on fait finalement θ nul. Soient η, ζ les coordonnées d'un de ces points. On a, par (32) et (33),

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 0,$$

$$\frac{1}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4} - \frac{1}{r^2}(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^2 = 0;$$

$$\frac{\eta}{b^2}\frac{d\eta}{d\theta} + \frac{\zeta}{c^2}\frac{d\zeta}{d\theta} = 0,$$

$$\frac{\eta}{b^4}\frac{d\eta}{d\theta} + \frac{\zeta}{c^4}\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{1}{r^2}(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)\left(\beta\frac{d\eta}{d\theta} + \gamma\frac{d\zeta}{d\theta} - u\right).$$

Il en résulte que η et ζ sont indépendants de u; que $\frac{d\eta}{d\theta}$ et $\frac{d\zeta}{d\theta}$ sont de la forme $\mathcal{A} + \mathcal{B}u$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant indépendants de u, et, par suite, $\mathcal{S}$ sera de la forme

$$\mathcal{S} = \int\int du\, dv \sum \left[\frac{\mathfrak{M}u + \mathfrak{N}}{P + vQ} + \frac{\mathfrak{M}_1 u + \mathfrak{N}_1 + v(\mathfrak{M}_2 u + \mathfrak{N}_2)}{(P + vQ)^2}\right],$$

les quantités $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, ... étant indépendantes de u et de v; ce qu'on peut écrire, en effectuant la somme,

$$\mathcal{S} = \int\int du\, dv [\mathcal{F}_0(v) + u\mathcal{F}_1(v)].$$

$\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ sont ici rationnels en v, l'intégrale double est par suite une fonction entière et du second ordre en u, et une fonction rationnelle et logarithmique de v. Si l'on fait varier v entre $-\infty$ et $+\infty$, on obtient l'aire annulaire cherchée, qui est dès lors une fonction entière et du second ordre de u. Or, pour $u = 0$, la courbe de contact se réduit à un parallèle d'axe l, m, n, et dont l'angle φ est défini par la relation

$$R = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\cos\varphi,$$

ainsi que le montre l'équation (34). On sait évaluer l'aire d'un parallèle; la formule précédente permet d'évaluer l'aire comprise entre le parallèle et la courbe de contact qui correspond à l'une des sphères considérées; il en résulte qu'on saura, par différence, évaluer l'aire comprise entre les deux boucles de cette dernière courbe. D'après ce qui précède, *cette aire ne différera de celle du parallèle correspondant que par une fonction algébrique.*

73. On peut résumer ces résultats de la manière suivante :

Soient deux sphères, C_0 *et* C, *inscrites à un même cône de révolution, concentrique à un ellipsoïde* E; *menons les plans tangents à* E *et à chacune des deux sphères, appelons* Γ_0 *et* Γ *les courbes de contact sur l'ellipsoïde, et faisons varier la sphère* C, *en la laissant toujours inscrite dans le cône.*

L'aire comprise sur l'ellipsoïde entre les boucles des deux courbes Γ_0 *et* Γ *est une fonction entière et du second ordre de l'inverse du rayon* R *de la sphère variable.*

La somme algébrique des quatre aires comprises entre les courbes Γ_0, Γ *et deux plans quelconques est aussi une fonction du second ordre de* $\frac{1}{R}$; *c'est de plus une fonction rationnelle et logarithmique des coefficients des deux plans.*

74. Quant à l'*aire* s *comprise entre les deux boucles de la courbe* Γ, elle est égale, à une fonction algébrique près, à la partie transcendante de l'aire du parallèle correspondant (n° **72**). Soient l, m, n les coordonnées du centre, R le rayon de la sphère; l'aire s *aura pour expression*

$$s = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(\zeta w + w) + \mathfrak{A},$$

$\mathfrak{A}$ étant algébrique, et w étant le plus petit argument positif défini par la relation

$$\frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho} = \mathrm{p}w - 1,$$

où θ désigne la racine positive de l'équation

$$(21) \qquad \frac{l^2}{a^2+\theta} + \frac{m^2}{b^2+\theta} + \frac{n^2}{c^2+\theta} = \frac{R^2}{\theta}.$$

Nous avons donc sur l'ellipsoïde une nouvelle série d'aires réductibles aux intégrales elliptiques; celles qui ont été considérées jusqu'ici en sont des cas particuliers, et, d'une manière générale, nous pouvons dire que :

L'aire ellipsoïdale limitée par une courbe à deux boucles, le long de laquelle les plans menés tangentiellement à l'ellipsoïde touchent une sphère extérieure à la surface, est exprimable par les fonctions elliptiques et algébriques.

Elle est équivalente, à une fonction algébrique près, à celle d'une zone ellipsoïdale à bases parallèles, les paramètres de la zone étant définis algébriquement en fonction de ceux de la sphère (n° **54**).

75. On peut donner à cette proposition une autre forme. Nous avons montré, dans un travail déjà rappelé, que la développable circonscrite à l'ellipsoïde et à la sphère C a ses quatre coniques doubles sur quatre quadriques homofocales à E,

$$\frac{x^2}{a^2+k} + \frac{y^2}{b^2+k} + \frac{z^2}{c^2+k} - 1 = 0,$$

les quatre valeurs de k étant les racines de l'équation

$$\frac{l^2}{a^2+k} + \frac{m^2}{b^2+k} + \frac{n^2}{c^2+k} - 1 = \frac{R^2}{k};$$

de plus, le plan de chaque conique est le plan polaire du centre de la sphère par rapport à la quadrique correspondante ([1]). Il en résulte aisément les conséquences suivantes :

Soit E_1 *un ellipsoïde extérieur et homofocal à l'ellipsoïde* E,

$$(E_1) \qquad \frac{x^2}{a^2+k} + \frac{y^2}{b^2+k} + \frac{z^2}{c^2+k} - 1 = 0;$$

([1]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, p. 99 et suiv.

considérons sur E_1 *la conique située dans le plan*

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \varpi = 0,$$

et circonscrivons à cette conique et à E *une développable; l'aire comprise sur* E *entre les deux boucles de la courbe de contact a une expression de la forme*

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(\zeta w + w) + \mathcal{A}',$$

$\mathcal{A}'$ *étant algébrique en* λ, μ, ν, ϖ, k, *et* w *désignant le plus petit argument positif défini par la relation*

$$pw - 1 = \frac{3a^2b^2c^2}{\theta_1\rho},$$

où θ_1 *est la racine positive de l'équation*

$$a^2\lambda^2\frac{a^2+k}{a^2+\theta_1} + b^2\mu^2\frac{b^2+k}{b^2+\theta_1} + c^2\nu^2\frac{c^2+k}{c^2+\theta_1} = \frac{k\varpi^2}{k-\theta_1}.$$

76. Dans le cas où la sphère C a son centre sur un des axes de l'ellipsoïde, Ox par exemple, l'aire ellipsoïdale comprise entre les deux boucles de la courbe de contact de la développable circonscrite à l'ellipsoïde et à la sphère a l'expression suivante, qu'on trouve en appliquant la méthode du n° **57**,

$$\begin{aligned} s = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(\zeta w + w) &- 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(pw - 1)\frac{\sigma_1 w\, \sigma w}{\sigma_2 w\, \sigma_3 w} \\ &- 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{\sigma_1 w\, \sigma w}{\sigma_2 w\, \sigma_3 w}\right)^3 [3e_1 pw + e_1^2 + 2e_2e_3], \end{aligned}$$

l désignant l'abscisse du centre, et w étant défini, en fonction de l et du rayon R, par la relation

$$3\,\frac{l^2 - R^2}{R^2}\,\frac{b^2c^2}{\rho} = pw - 1.$$

On doit supposer, pour appliquer cette formule, que la sphère est extérieure à l'ellipsoïde.

77. Soit toujours Γ la courbe de contact avec l'ellipsoïde E de la développable circonscrite à E et à la sphère C; si l'on coupe cette courbe par deux plans, on obtient sur l'ellipsoïde, entre la courbe et les deux plans, deux aires curvilignes dont la somme algébrique n'est généralement pas exprimable par les fonctions elliptiques ou algébriques; elle le devient si les deux plans sont parallèles.

Considérons, en effet, deux sphères concentriques, de centre l, m, n et de rayons infiniment voisins; soient u et $u + du$ les inverses de ces rayons; si nous menons les plans tangents à E et à chaque sphère, et si nous coupons les courbes de contact sur E par deux plans parallèles, $P + v = 0$; $P + v + dv = 0$, nous obtenons quatre aires ellipsoïdales infiniment petites, dont la somme algébrique a pour valeur

$$4\sum u^2 \frac{du\, dv\left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} - 1\right)^3}{\Delta},$$

Δ étant le jacobien des fonctions

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

$$\varphi = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - u^2\left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} - 1\right)^2,$$

et

$$P + v,$$

et la somme s'étendant aux points communs à $f = 0$, $\varphi = 0$, $P + v = 0$.

On en conclut (n° **20**) que l'on a, pour l'aire finie qui correspond aux sphères u_1 et u, et aux plans v_1 et v, l'expression

$$S = 4\int_{u_1}^{u} u^2 du \int_{v_1}^{v} dv \sum \frac{d}{d\theta} \frac{\left(\frac{l}{a^2} + \frac{m\eta}{b^2} + \frac{n\zeta}{c^2} - \theta\right)^3}{(P + v\theta)(f'_\eta \varphi'_\zeta - f'_\zeta \varphi'_\eta)},$$

la somme s'étendant aux points communs aux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = 0$. Il en résulte sans difficulté que l'intégrale double est une fonction entière et du second ordre en v, et une fonction rationnelle et logarithmique en u (n° **35**). Si l'on part de la sphère de centre l, m, n et de rayon nul, pour laquelle la courbe de contact sur E se réduit à la conique polaire du centre comptée deux fois, on voit aisément qu'on peut énoncer la proposition suivante :

La somme algébrique des deux aires ellipsoïdales limitées par deux plans parallèles et par une courbe à deux boucles, le long de laquelle les plans menés tangentiellement à l'ellipsoïde touchent une sphère, est une fonction algébrique et logarithmique des paramètres de la sphère; de plus, c'est une fonction entière et du second ordre du paramètre variable qui entre dans l'équation des plans.

Cette aire, en supposant la sphère fixe, est de la forme

$$s = \mathcal{A}(\nu^2 - \nu_1^2) + \mathcal{B}(\nu - \nu_1),$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant indépendants de ν et ν_1. On peut écrire

$$s = (\nu - \nu_1)[\mathcal{A}(\nu + \nu_1) + \mathcal{B}]$$

et, par suite,

La somme algébrique des deux aires ellipsoïdales précédentes est nulle si les deux plans parallèles varient en conservant leur direction et en restant équidistants d'un plan fixe, de même direction.

Cette proposition et la précédente s'appliquent à une quadrique quelconque; elles permettent de déterminer, sur une telle surface, une infinité d'aires, limitées par des courbes algébriques et exprimables par des fonctions rationnelles et logarithmiques.

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur les applications aux aires ellipsoïdales, et nous donnerons quelques propositions relatives aux aires sur une surface algébrique quelconque.

IV. — Aires sur une surface quelconque.

78. Soit $f(X, Y, Z) = 0$ l'équation d'une surface algébrique d'ordre m, en coordonnées rectangulaires; l'élément d'aire a pour expression

$$d\sigma = dX\, dY \frac{\sqrt{f_X'^2 + f_Y'^2 + f_Z'^2}}{f_Z'}.$$

On peut évaluer aisément, comme dans le cas des quadriques, la somme algébrique des aires comprises sur la surface $f = 0$, entre deux plans parallèles et deux courbes le long desquelles les plans tangents à la surface touchent respectivement deux sphères concentriques.

Soient, en effet, l, m, n les coordonnées du centre de deux sphères voisines, u et $u + du$ les inverses de leurs rayons; $P + v = 0$ et $P + v + dv = 0$ deux plans parallèles voisins : la somme des aires infiniment petites à évaluer est (n° **30**)

$$2\sum \frac{u\,du\,dv(lf'_X + mf'_Y + nf'_Z + f'_t)^2\sqrt{f'^2_X + f'^2_Y + f'^2_Z}}{\Delta},$$

Δ étant le jacobien des fonctions f, $P + v$, et φ, étant posé

$$\varphi = f'^2_X + f'^2_Y + f'^2_Z - u^2(lf'_X + mf'_Y + nf'_Z + f'_t)^2,$$

et la somme s'étendant aux points communs à $f = 0$, $\varphi = 0$, $P + v = 0$. On peut l'écrire aussi

$$2\sum \frac{u^2\,du\,dv}{\Delta}(lf'_X + mf'_Y + nf'_Z + f'_t)^3,$$

et, d'après la formule du n° **20**, déjà si souvent appliquée, l'aire finie qui correspond aux sphères u_1 et u, et aux plans v_1 et v, sera

$$S = 2\int_{u_1}^{u} u^2 du \int_{v_1}^{v} dv \sum \frac{d}{d\theta}\,\frac{(lf'_X + mf'_Y + nf'_Z + f'_t)^3}{(P + v\theta)(f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta)},$$

la somme s'étendant aux points communs à $f = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = 0$: on a remplacé X par 1, Y par η, Z par ζ et t par θ. Il résulte de là, comme dans le cas de l'ellipsoïde, que l'intégrale double est une fonction entière et du second ordre de v, et une fonction rationnelle et logarithmique de u. Donc :

Soient, sur une surface algébrique deux courbes, le long de chacune desquelles les plans tangents touchent respectivement deux sphères concentriques : la somme des aires comprises sur la surface entre ces deux courbes et deux plans parallèles est une fonction algébrique et logarithmique des paramètres des deux sphères, et *une fonction entière du second ordre du paramètre variable qui entre dans l'équation des plans.*

Elle est nulle si les deux plans parallèles varient en conservant leur direction et en restant équidistants d'un plan fixe, de même direction.

Le même raisonnement montre que *la proposition est vraie*, non seulement pour deux sphères concentriques, mais *pour deux sphères quelconques.*

79. *Plus généralement,* en remplaçant les plans parallèles par un système de surfaces asymptotiques, $\Phi_1 + vt\Phi_2 = 0$, on verrait de même que la somme des aires correspondantes est une fonction entière et du second ordre de v; si les surfaces étaient asymptotes, $\Phi_1 + vt^2\Phi_2 = 0$, elle serait du premier ordre en v, et si elles étaient osculatrices à l'infini, $\Phi_1 + vt^3\Phi_2 = 0$, la somme des aires serait nulle.

80. Soit, sur la surface $f = 0$, une série de courbes définies par une équation de la forme

$$f'^2_X + f'^2_Y + f'^2_Z = \varphi^2(X, Y, Z, u),$$

où φ est un polynôme entier, de degré $(m-1)$ au plus en X, Y, Z, et de degré quelconque en u.

On voit, par le même raisonnement, que *la somme des aires comprises sur la surface entre deux de ces courbes et deux plans parallèles est une fonction rationnelle et logarithmique du paramètre u, et une fonction entière, d'ordre deux, du paramètre qui entre dans l'équation des plans parallèles.*

Si φ était d'ordre $m-3$ en X, Y, Z, *la somme précédente serait toujours nulle.*

On a donc ainsi une infinité de manières de déterminer, sur une surface quelconque, des aires dont la somme algébrique soit exprimable par les fonctions élémentaires.