JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HAMY

Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 6 (1890), p. 69-143.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1890_4_6__69_0>

Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes;

PAR M. HAMY.

Les premières recherches réellement importantes sur la théorie mathématique de la figure des planètes, supposées fluides et hétérogènes, datent de l'année où Clairaut publia son admirable Livre sur la figure de la Terre (1743). Tous les efforts dépensés postérieurement par les géomètres, sur ce sujet, ont eu pour objet la vérification et l'extension des résultats établis dans l'Ouvrage de Clairaut. La connaissance du rapport des axes du globe est longtemps restée entourée d'une grande incertitude; aussi le célèbre analyste ne put-il soumettre ses travaux à un contrôle sérieux. Du temps de Laplace on attribuait à l'aplatissement la valeur $\frac{1}{335}$, en se fondant sur les opérations géodésiques entreprises en vue de l'établissement du mètre. Bessel admettait le nombre $\frac{1}{299}$. On est arrivé tout récemment à la fraction $\frac{1}{292}$ qui, d'après M. Faye, présenterait de grandes garanties : l'erreur commise sur le dénominateur ne dépasserait guère l'unité (1). En possession de données déterminées avec précision, il était important de faire subir un contrôle décisif aux idées de Clairaut. C'est ce qu'ont fait successivement M. Roche (2)

(1) FAYE, *Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique*, Ire Partie, p. 332.

(2) *Mémoire sur l'état intérieur du globe terrestre* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Montpellier*, t. X).

et M. Tisserand ([1]). L'examen des principales hypothèses proposées jusqu'ici pour la loi des densités à l'intérieur de la Terre a conduit M. Tisserand à des résultats du plus haut intérêt. Toutes ces hypothèses, très différentes les unes des autres, s'accordent entre elles pour faire prendre des valeurs voisines du nombre 1,988 à un certain rapport I, tandis que le phénomène de la précession des équinoxes, base d'une incontestable solidité, exigerait $I = 1,955$. Voici comment s'exprime M. Tisserand en présence de ce désaccord : « Il semble que les conditions imposées aient pour effet de resserrer la valeur de I entre deux limites très voisines : c'est ce que M. Roche paraît avoir remarqué le premier. Il reste donc à trouver une loi de densité donnant pour I la valeur observée, ou bien à prouver que, quelle que soit la loi de densité, on ne pourra établir l'accord cherché. » M. Radau ([2]), puis M. Poincaré ([3]) ont confirmé cette façon de penser. Il résulte de leurs travaux que I est compris entre des limites rapprochées, toutes deux notablement supérieures au nombre fourni par la précession. Au surplus, M. Callandreau ([4]) a montré dans un important Mémoire que le désaccord ne peut être mis sur le compte des termes négligés dans les approximations, et a étendu, dans une Note récente ([5]), les résultats obtenus par MM. Radau et Poincaré au cas où la densité des couches de Clairaut varierait d'une façon discontinue.

Cet ensemble de faits prouve que la constitution interne de la Terre, telle qu'elle a été envisagée par Clairaut, doit subir des modifications, puisque les mesures géodésiques établissent que notre globe est sensiblement limité par un ellipsoïde.

Dans ces conditions, j'ai pensé qu'il y avait lieu de mettre en lumière certains faits intimement liés à la nature de la surface qui limite les planètes et indépendants de toute conjecture sur leur constitution physique. Les résultats auxquels je suis arrivé auraient pu s'obtenir,

---

([1]) *Bulletin astronomique*, t. I, p. 417 et 521.

([2]) *Ibid.*, t. II.

([3]) *Ibid.*, t. VI.

([4]) *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX).

([5]) *Bulletin astronomique*, t. VI.

pour la plupart, en s'appuyant sur la théorie générale du potentiel et en faisant intervenir les résultats de Clairaut. J'ai procédé d'une façon différente, afin d'établir plusieurs formules utilisées à la fin du présent travail dans l'étude d'une question proposée par M. Poincaré ([1]).

Voici l'exposé sommaire des différents articles :

INTRODUCTION.

CHAPITRE I.

ELLIPSOIDE A TROIS AXES.

CHAPITRE II.

ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION APLATI.

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 1888, 1er semestre.

INTRODUCTION.

I. — Coordonnées elliptiques.

L'équation

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2 - b^2} + \frac{z^2}{t^2 - c^2} = 1, \tag{1'}$$

où b et c désignent deux constantes ($b < c$) et t un paramètre variable, définit toutes les surfaces du second ordre, homofocales entre elles. Ces surfaces passent au nombre de trois par tout point (x, y, z) de l'espace, où elles se rencontrent orthogonalement, lorsqu'on donne à t^2 des valeurs convenables qui sont les racines de l'équation (1'), du troisième degré en t^2, séparées comme il suit :

$$0 < \nu^2 < b^2 < \mu^2 < c^2 < \rho^2.$$

On appelle ρ, μ, ν les coordonnées elliptiques du point (x, y, z). Les relations entre les coefficients et les racines

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho^2 + \mu^2 + \nu^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2, \\ \rho^2\mu^2 + \rho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 &= (b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2, \\ \rho^2\mu^2\nu^2 &= b^2c^2x^2 \end{aligned} \right.$$

conduisent aux formules dont on se sert pour passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées elliptiques

$$\begin{aligned} bcx &= \rho\mu\nu, \\ b\sqrt{c^2 - b^2}\,y &= \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}, \\ c\sqrt{c^2 - b^2}\,z &= \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}; \end{aligned}$$

ρ et μ sont des quantités positives limitées comme il vient d'être dit; ν peut prendre toutes les valeurs comprises entre $-b$ et $+b$; les radicaux $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \mu^2}$, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$ sont tantôt positifs, tantôt négatifs.

Au paramètre ρ correspond un ellipsoïde, à μ un hyperboloïde à une nappe, à ν un hyperboloïde à deux nappes. Dans ce système de coordonnées, l'équation $\rho =$ const. définit un ellipsoïde, et tous les ellipsoïdes qui correspondent à des valeurs différentes de la constante sont homofocaux.

Considérons l'ellipsoïde de paramètre ρ

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

et un point $m(\rho, \mu, \nu)$, de cette surface. Liouville [1] donne les formules suivantes bien simples à établir.

La portion infiniment petite ds de la normale à l'ellipsoïde au point (ρ, μ, ν), comprise entre l'ellipsoïde (ρ) et l'ellipsoïde infiniment voisin $(\rho + d\rho)$, a pour valeur

$$(2) \qquad ds = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}\, d\rho.$$

La longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en m est

$$\mathrm{P} = \rho \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}.$$

Liouville pose

$$(3) \qquad \frac{\mathrm{P}}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}} = l$$

et donne, pour la valeur de l'élément $d\omega$ de surface au point m,

$$d\omega = d\mu\, d\nu \frac{(\mu^2 - \nu^2)\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}.$$

On voit que le produit $l\, d\omega$ est indépendant de ρ. Liouville fait remarquer que $l\, d\omega$ peut s'exprimer par un élément $d\sigma$ de surface sphérique de rayon 1 qui décrit toute la sphère lorsque l'élément $d\omega$ décrit l'ellipsoïde.

II. — Fonctions de Lamé.

Dans ses recherches sur l'équilibre de température d'un ellipsoïde, Lamé a considéré des fonctions $\mathrm{R}(\rho)$ de la forme suivante

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}_n, \qquad \mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 - c^2}\,\mathrm{P}_{n-1},$$
$$\mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 - b^2}\,\mathrm{P}'_{n-1}, \qquad \mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\,\mathrm{P}_{n-2},$$

[1] Première Lettre à Blanchet (*Journal de Mathématiques*, t. XI).

où P_n, P_{n-1}, P'_{n-1}, P_{n-2} désignent des polynômes entiers en ρ de degré n, $n-1$, $n-2$, formés de termes de même parité. Ces fonctions R vérifient l'équation

$$(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - b^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho(2\rho^2 - b^2 - c^2)\frac{dR}{d\rho} = [n(n+1)\rho^2 - B]R,$$

et c'est de là dont on part pour calculer de proche en proche les coefficients des polynômes P par identification; B est un paramètre constant, différent pour toutes les fonctions R relatives à un même entier n. Dans chaque cas particulier, cette constante est assujettie à vérifier les équations auxquelles on est conduit dans la recherche de la valeur des coefficients des polynômes P.

Lamé a montré qu'à chaque entier n correspondent $2n+1$ valeurs réelles de B et par suite $2n+1$ fonctions R ([1]). A la vérité, ces fonctions R ne sont ainsi déterminées qu'à un facteur constant près. On précise leur définition en convenant de prendre égal à l'unité le coefficient de la plus haute puissance de ρ dans chacun des polynômes P.

A la fonction R, Liouville (Mémoire déjà cité, p. 222) a joint une autre fonction de ρ qui satisfait à la même équation différentielle

$$S = (2n+1)R\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Pour toutes les valeurs de $\rho > c$ l'intégrale a un sens, l'équation $R = 0$ ayant toutes ses racines inférieures à c ([2]).

Nous modifierons légèrement la fonction de Liouville, afin de nous débarrasser du facteur $2n+1$. Nous prendrons pour définition de S

$$S = R\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}. \tag{4}$$

Outre la fonction R, Lamé a considéré deux autres fonctions M et N,

---

([1]) *Voir* à ce sujet le Mémoire de M. POINCARÉ, *Sur l'équilibre d'une masse fluide* (*Acta Mathematica*, t. VII, p. 301 et suiv.).

([2]) LIOUVILLE, deuxième Lettre à BLANCHET (*Journal de Mathématiques*, t. XI).

la première de μ et la seconde de ν. On les déduit de R par le changement respectif de

$$\rho, \quad \sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad \sqrt{\rho^2 - c^2}$$

en

$$\mu, \quad \sqrt{\mu^2 - b^2}, \quad \sqrt{c^2 - \mu^2} \quad \text{ou} \quad \nu, \quad \sqrt{b^2 - \nu^2}, \quad \sqrt{c^2 - \nu^2}.$$

Lamé a établi que le produit de R par les deux fonctions conjuguées M et N, $u = \text{RMN}$ vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \text{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \text{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \text{U}}{\partial z^2} = 0.$$

Le produit SMN de Liouville jouit de la même propriété. En outre, le produit RMN de trois fonctions conjuguées quelconques relatives à un entier n est exprimable en un polynôme entier en x, y, z de degré n.

Nous renvoyons pour la démonstration de tous ces résultats aux Mémoires de Liouville, pour ce qui regarde la fonction S; à ceux de Lamé insérés dans le t. IV du *Journal de Mathématiques* et au *Cours d'Analyse* de M. Jordan, IIIe Volume, où les travaux de Lamé sont résumés.

Nous ferons usage dans la suite de quelques propriétés des fonctions de Lamé.

Appelons Δ la distance de deux points $m(\rho, \mu, \nu)$ et $m'(\rho', \mu', \nu')$, $d\omega'$ un élément de surface de l'ellipsoïde (ρ') en m' et considérons comme appartenant au point m les fonctions S, R, M, N de ρ, μ, ν et au point m' les fonctions S', R', M', N' de ρ', μ', ν'; l' étant la quantité $\frac{1}{\sqrt{\rho'^2 - \mu'^2}\sqrt{\rho'^2 - \nu'^2}}$ définie plus haut, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} \displaystyle\iint_{(\rho')} \frac{l'\text{M}'\text{N}'}{\Delta}\, d\omega' = 4\pi\text{S}'\text{RMN}, & \text{si } \rho < \rho'; \\ \displaystyle\iint_{(\rho')} \frac{l'\text{M}'\text{N}'}{\Delta}\, d\omega' = 4\pi\text{R}'\text{SMN}, & \text{si } \rho > \rho'. \end{cases}$$

$(\text{M}'\text{N}')_1$, $(\text{M}'\text{N}')_2$ désignant deux produits M'N' quelconques, mais distincts, on a

$$\iint_{(\rho')} l'(M'N')_1 (M'N')_2 \, d\omega' = 0. \tag{6}$$

En particulier, si l'un des produits $M'N'$ a la valeur 1 correspondant à $n = 0$,

$$\iint_{(\rho')} l'M'N' \, d\omega' = 0, \quad \text{sauf pour } M'N' = 1. \tag{7}$$

L'intégrale $\iint_{(\rho')} l'(M'N')^2 \, d\omega'$ est positive et indépendante de ρ', le produit $l'\,d\omega'$ étant positif et indépendant de ρ'.

Les démonstrations de ces propriétés données dans le second Mémoire de Liouville déjà cité reposent sur un mode de raisonnement analogue à celui que l'on suit pour établir la formule de Green. L'emploi de cette formule permettrait, tout en conservant la marche générale adoptée par Liouville, de simplifier très notablement son analyse.

III.

Les résultats précédents ne peuvent être appliqués directement à l'ellipsoïde de révolution aplati ou allongé. Ce dernier ne présentant pas d'intérêt pour notre objet, nous nous occuperons seulement de l'ellipsoïde aplati qui correspond à $b = 0$. b et ν s'évanouissant simultanément, la position d'un point sur l'ellipsoïde n'est plus définie. Il faut donc modifier la définition de ν.

Avant de faire $b = 0$, posons

$$\nu = b\nu_1;$$

ν_1 varie entre -1 et $+1$. Nous prendrons comme troisième coordonnée elliptique la limite de ν_1 pour $b = 0$. Les formules liant $\rho\mu\nu_1$ à xyz sont

$$\left\{\begin{aligned} \rho^2 + \mu^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + c^2, \\ \rho^2\mu^2 &= c^2(x^2 + y^2), \\ \rho^2\mu^2\nu_1^2 &= c^2x^2. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Remplaçons de même ν par $b\nu_1$ dans la fonction générale N, supprimons autant de fois que possible le facteur b, faisons $b = 0$ et ramenons à l'unité le coefficient de la plus haute puissance de ν_1. La fonction de ν_1 ainsi obtenue sera notre nouvelle fonction N, dont les propriétés sont bien faciles à déduire de celles de la fonction générale.

Les expressions de R, M, N correspondant à un entier n sont connues dans le cas de l'ellipsoïde de révolution. Dans son second Mémoire, Liouville s'est occupé de l'ellipsoïde allongé. Un raisonnement parallèle au sien conduirait aux formules suivantes pour l'ellipsoïde de révolution aplati

$$R = \frac{(c^2+t^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{d^{i+n}(c^2+t^2)^n}{dt^{i+n}} \quad \text{où} \quad t = \sqrt{\rho^2 - c^2},$$

$$M = \frac{(c^2-q^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{d^{i+n}(c^2-q^2)^n}{dq^{i+n}} \quad \text{où} \quad q = \sqrt{c^2-\mu^2},$$

$$\left.\begin{aligned} 2^{i-1} N = {} & \nu_1^i - \frac{i(i-1)}{1.2} \nu_1^{i-2}(1-\nu_1^2) \\ & + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4} \nu_1^{i-4}(1-\nu_1^2)^2 - \ldots \end{aligned}\right\} \quad i > 0,$$

$$\left.\begin{aligned} 2^{i-1} N = \sqrt{1-\nu_1^2} \Big[& i\nu_1^{i-1} - \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} \nu_1^{i-3}(1-\nu_1^2) \\ & + \frac{i(i-1)\ldots(i-4)}{1.2.3.4.5} \nu_1^{i-5}(1-\nu_1^2)^2 \ldots \Big] \end{aligned}\right\} \quad i > 0,$$

et pour $i = 0$

$$N = 1.$$

i est un entier qui doit recevoir successivement les valeurs 0, 1, 2, ..., n. A chaque entier $i > 0$ correspond une fonction R, une fonction M et deux fonctions N; pour $i = 0$, on n'a qu'une seule valeur de N, égale à 1.

Les fonctions conjuguées répondant à la même valeur de i, on trouve $2n + 1$ produits MN différents (¹) pour chaque entier n.

(¹) Liouville pose $\nu = b\cos\psi$ et trouve, pour la fonction N, $N = \cos i\psi$ ou $\sin i\psi$ (i est défini dans le texte). Nous avons introduit ν_1 pour conserver plus d'homogénéité dans les notations. Ces formules générales ne seront d'ailleurs pas utilisées dans le cours du présent travail.

En terminant cet aperçu sommaire, nous rappellerons un important résultat.

Toute fonction continue ou discontinue de μ et de ν peut être développée en une série de produits MN de la forme ΣAMN, où A désigne un coefficient indépendant de μ et de ν.

Pour que deux séries de cette nature soient identiques, il faut que les coefficients des mêmes produits MN soient égaux.

IV. — Calcul de quelques fonctions de Lamé.

La fonction qui correspond à $n = 0$ est $R = 1$.

Il y a trois fonctions R correspondant à $n = 1$, de la forme P_1, $P_0\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $P_0\sqrt{\rho^2 - c^2}$; P_1, P_0 sont des polynômes formés de termes de même parité d'un degré égal à leur indice. Les fonctions du premier degré sont donc

$$R = \rho, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Il y a cinq fonctions R correspondant à $n = 2$. Elles sont de la forme

$$P_2, \quad P_1\sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad P_1\sqrt{\rho^2 - c^2}, \quad P_0\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Les trois dernières formes donnent de suite

$$R = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad R = \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2},$$

et la première

$$R = \rho^2 - A;$$

A étant une constante à déterminer à l'aide de l'équation qui doit devenir identique

$$(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - b^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho(2\rho^2 - b^2 - c^2)\frac{dR}{d\rho} = (6\rho^2 - B)R.$$

Substituant notre valeur de R,

$$2(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - b^2) + 2\rho^2(2\rho^2 - b^2 - c^2) = (6\rho^2 - B)(\rho^2 - A),$$

on est conduit à

$$-4(b^2 + c^2) = -B - 6A,$$
$$2b^2c^2 = BA.$$

Éliminant B,

$$(9) \qquad 3A^2 - 2(b^2 + c^2)A + b^2c^2 = 0.$$

Cette équation définit deux valeurs positives de A inférieures à c^2. Soient h^2 la plus grande; k^2 la plus petite. Les deux autres fonctions du second degré sont $\rho^2 - h^2$ et $\rho^2 - k^2$.

En résumé :

Pour $n = 0$,

$$R = 1, \qquad M = 1, \qquad N = 1;$$

Pour $n = 1$,

$$\begin{array}{lll} R = \rho, & M = \mu, & N = \nu, \\ R = \sqrt{\rho^2 - b^2}, & M = \sqrt{\mu^2 - b^2}, & N = \sqrt{b^2 - \nu^2}, \\ R = \sqrt{\rho^2 - c^2}, & M = \sqrt{c^2 - \mu^2}, & N = \sqrt{c^2 - \nu^2}; \end{array}$$

Pour $n = 2$,

$$\begin{array}{lll} R = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}, & M = \mu\sqrt{\mu^2 - b^2}, & N = \nu\sqrt{b^2 - \nu^2}, \\ R = \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}, & M = \mu\sqrt{c^2 - \mu^2}, & N = \nu\sqrt{c^2 - \nu^2}, \\ R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}, & M = \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}, & N = \sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}, \\ R = \rho^2 - h^2, & M = \mu^2 - h^2, & N = \nu^2 - h^2, \\ R = \rho^2 - k^2, & M = \mu^2 - k^2, & N = \nu^2 - k^2. \end{array}$$

En employant les formules qui lient x, y, z et ρ, μ, ν, on trouve que

$$
(10)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\text{pour } \mathrm{R} = 1, & \text{on a} & \mathrm{RMN} = 1; \\
\mathrm{R} = \rho, & & \mathrm{RMN} = bcx, \\
\mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 - b^2}, & & \mathrm{RMN} = b\sqrt{c^2 - b^2}\, y, \\
\mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 - c^2}, & & \mathrm{RMN} = c\sqrt{c^2 - b^2}\, z; \\
\mathrm{R} = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}, & & \mathrm{RMN} = b^2 c\sqrt{c^2 - b^2}\, xy, \\
\mathrm{R} = \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}, & & \mathrm{RMN} = bc^2\sqrt{c^2 - b^2}\, xz, \\
\mathrm{R} = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}, & & \mathrm{RMN} = bc(c^2 - b^2)\, yz, \\
\mathrm{R} = \rho^2 - h^2, & & \mathrm{RMN} = b^2c^2x^2 + h^4(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2) \\
 & & \qquad - h^2[(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2] - h^6, \\
\mathrm{R} = \rho^2 - k^2, & & \mathrm{RMN} = b^2c^2x^2 + k^4(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2) \\
 & & \qquad - k^2[(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2] - k^6.
\end{array}
\right.
$$

Ellipsoïde de révolution aplati.

On pourrait faire usage des formules générales données plus haut, mais il est tout aussi simple de partir des expressions qui viennent d'être établies. Nous remarquerons à cet effet que pour b petit

$$h^2 = \frac{2c^2}{3} + \text{des termes contenant } b^2 \text{ en facteur,}$$

$$k^2 = \frac{b^2}{2} + \text{des termes contenant } b^4 \text{ en facteur.}$$

Après avoir remplacé h^2 et k^2 par ces valeurs, ν par $b\nu_1$ et supprimé autant de fois qu'il s'y trouve le facteur b dans N, nous faisons $b = 0$ et ramenons le coefficient de la plus haute puissance de ν_1 à l'unité. On arrive ainsi à ce qui suit :

						Facteurs constants supprimés dans la fonction générale N.
(11)	$n=0$,	$R=1$,	$M=1$,	$N=1$,	$RMN=1$;	1.
	$n=1$,	$R=\rho$,	$M=\mu$,	$N=\nu_1$,	$RMN=cx$,	b.
		$R=\rho$,	$M=\mu$,	$N=\sqrt{1-\nu_1^2}$,	$RMN=cy$,	b.
		$R=\sqrt{\rho^2-c^2}$,	$M=\sqrt{c^2-\mu^2}$,	$N=1$,	$RMN=cz$:	c.
	$n=2$,	$R=\rho^2$,	$M=\mu^2$,	$N=\nu_1\sqrt{1-\nu_1^2}$,	$RMN=c^2xy$,	b^2.
		$R=\rho\sqrt{\rho^2-c^2}$,	$M=\mu\sqrt{c^2-\mu^2}$,	$N=\nu_1$,	$RMN=c^2xz$,	bc.
		$R=\rho\sqrt{\rho^2-c^2}$,	$M=\mu\sqrt{c^2-\mu^2}$,	$N=\sqrt{1-\nu_1^2}$,	$RMN=c^2yz$,	bc.
		$R=\rho^2-\frac{2c^2}{3}$,	$M=\mu^2-\frac{2c^2}{3}$,	$N=1$,	$RMN=-\frac{c^2}{3}\left[2z^2-(x^2+y^2)+\frac{2c^2}{3}\right]$,	$-\frac{2c^2}{3}$.
		$R=\rho^2$,	$M=\mu^2$,	$N=\nu_1^2-\frac{1}{2}$,	$RMN=\frac{c^2}{2}(x^2-y^2)$.	b^2.

CHAPITRE I.

POTENTIEL D'UN ELLIPSOÏDE HÉTÉROGÈNE POUR UN POINT EXTÉRIEUR.

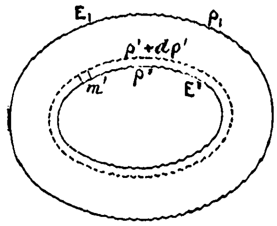
I.

Soit une masse hétérogène limitée par l'ellipsoïde E_1 (*fig.* 1), ayant pour équation

$$\frac{x^2}{\rho_1^2}+\frac{y^2}{\rho_1^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho_1^2-c^2}=1.$$

Considérons l'ellipsoïde homofocal E', de paramètre ρ', et désignons par ρ', μ', ν' les coordonnées elliptiques d'un point m', placé sur cette surface, par rapport à l'ellipsoïde E_1. Appelons M' et N' les fonctions conjuguées d'une fonction de Lamé quelconque R'.

Fig. 1.



Le long de E' la densité δ est une fonction de μ' et ν' qui peut être discontinue. On peut néanmoins la développer en une suite de produits $M'N'$, comme il suit

$$(12) \qquad \frac{\delta}{l'^2} = \sum \mathcal{A}' M' N',$$

où $\mathcal{A}'$ ne dépend que de ρ' et où l' est la quantité introduite par Liouville (3)

$$l' = \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 - \mu'^2}\sqrt{\rho'^2 - \nu'^2}}.$$

La portion infiniment petite ds' de la normale à l'élément $d\omega'$ de la surface E' au point m', comprise entre l'ellipsoïde (ρ') et l'ellipsoïde infiniment voisin $(\rho' + d\rho')$, a pour expression (2)

$$ds' = \frac{1}{l'} \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Il en résulte pour la masse $\delta\, d\omega'\, ds'$ du cylindre droit élémentaire, ayant pour base $d\omega'$ et pour hauteur ds', la valeur suivante :

$$(13) \qquad \frac{\delta}{l'^2} \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} l'\, d\omega'.$$

Enfin, Δ désignant la distance du point m' au point extérieur attiré

(ρ, μ, ν), le potentiel du même cylindre infinitésimal est

$$\frac{\delta}{l'^2} \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \frac{l'\,d\omega'}{\Delta}.$$

Le potentiel dV de la couche hétérogène, infiniment mince, renfermée entre les ellipsoïdes homofocaux (ρ') et $(\rho' + d\rho')$, s'en déduit par une intégration effectuée tout le long de (ρ')

$$dV = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \int\int_{(\rho')} \frac{\delta}{l'^2} \frac{l'\,d\omega'}{\Delta}.$$

Remplaçant $\frac{\delta}{l'^2}$ par son développement (12),

$$dV = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \mathcal{A}' \int\int_{(\rho')} \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'}{\Delta}\,d\omega'.$$

Le point attiré est extérieur à l'ellipsoïde d'intégration; nous avons rappelé que l'on a alors

$$\int\int \frac{l'\mathrm{M}'\mathrm{N}'}{\Delta}\,d\omega = 4\pi \mathrm{R}'\mathrm{SMN},$$

en posant

$$\mathrm{S} = \mathrm{R} \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho'}{\mathrm{R}'^2\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Ainsi

$$dV = 4\pi \sum \mathrm{SMN} \frac{\mathcal{A}'\mathrm{R}'\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

On suppose $b < c$; ρ' est donc compris entre c et ρ_1. Une nouvelle intégration par rapport à ρ' conduit finalement à l'expression générale suivante du potentiel :

$$\mathrm{V} = 4\pi \sum \mathrm{SMN} \int_{c}^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'\mathrm{R}'\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}. \tag{14}$$

II.

L'intégrale $\int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'R'\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}$, qui entre dans V, peut recevoir une autre forme.

Étendons à tout l'ellipsoïde l'intégrale $\int\int\int R'M'N'\,dm'$, où dm' représente un élément de masse au point dont les coordonnées elliptiques sont ρ', μ', ν', et les coordonnées rectangulaires x', y', z'.

Nous venons de voir que l'on a (13)

$$dm' = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}\,\frac{\delta}{l'^2}\,l'\,d\omega'.$$

Remplaçant $\frac{\delta}{l'^2}$ par son développement et intégrant, comme plus haut, d'abord le long de E', puis, en faisant varier ρ',

$$\int\int\int R'M'N'\,dm' = \int_c^{\rho_1} \frac{R'\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}\int\int_{(\rho')} l'M'N'd\omega'\sum \mathcal{A}'M'N'.$$

On sait (6) et (7) que l'intégrale $\int\int (M'N')_1(M'N')_2 l'\,d\omega'$ est nulle, à moins que les produits $(M'N')_1$ et $(M'N')_2$ ne soient identiques. De plus, l'intégrale $\int\int l'(M'N')^2\,d\omega'$ est une constante qui ne dépend que de b et de c, puisque le produit $l'\,d\omega'$ est indépendant de ρ'. On peut donc écrire

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\int\int R'M'N'\,dm' \\ &\quad = \int\int l'(M'N')^2\,d\omega' \times \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'R'\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}. \end{aligned}\right.$$

Telle est l'identité à laquelle nous voulions arriver.

La fonction $R'M'N'$ est un polynôme entier en $x'y'z'$; dm' peut être remplacé par $\delta\, dx'\, dy'\, dz'$, de sorte que l'on a

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\iiint R'M'N'\,\delta\, dx'\, dy'\, dz' \\ &\quad = \iint l'(M'N')^2\, d\omega' \times \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'R'\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \end{aligned}\right.$$

l'intégrale triple étant étendue à tout l'ellipsoïde E_1.

Nous ferons de suite l'application de cette formule au premier coefficient du développement de V pour lequel $R' = M' = N' = 1$. Notre identité devient, en appelant $\mathcal{A}'_0$ le premier coefficient du développement (12) de $\frac{\delta}{l'^2}$,

$$\iiint \delta\, dx'\, dy'\, dz' = \iint l'\, d\omega' \times \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_0\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Le premier membre est la masse $\mathfrak{M}$ de l'ellipsoïde; quant à l'intégrale double qui figure dans le second membre, sa valeur est 4π. Il suffit, pour le voir, de se rappeler que $l'\, d\omega'$ est un élément de surface sphérique, de rayon 1, qui décrit toute la sphère lorsque l'élément $d\omega'$ parcourt tout l'ellipsoïde. Ainsi l'on a

$$(17)\qquad \mathfrak{M} = 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_0\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

ce qui montre que le premier coefficient du développement de V n'est autre que la masse totale. On pourrait encore arriver à ce résultat en formant ρV et cherchant la limite pour $\rho = \infty$, limite que l'on sait être la masse totale. On reconnaîtrait facilement que tous les termes du développement de ρV, à part le premier, s'évanouissent.

III. — Potentiel d'un ellipsoïde homogène pour un point extérieur.

Nous commencerons par appliquer la formule générale du potentiel au cas de l'homogénéité. Tout d'abord il faut chercher le développement de $\frac{\delta}{l'^2}$ en produits M'N' ou, ici, puisque δ est constant, celui de $\frac{1}{l'^2}$. Il y a cinq fonctions de Lamé, pour lesquelles le produit RMN est un polynôme du second degré en xyz (10), et parmi elles, les deux suivantes qui joueront, dans la suite, un rôle important :

$$(18)\quad \left\{ \begin{array}{ll} R_1 = \rho^2 - h^2, & R_2 = \rho^2 - k^2. \\ \text{Les fonctions conjuguées sont} & \\ M_1 = \mu^2 - h^2, & M_2 = \mu^2 - k^2, \\ N_1 = \nu^2 - h^2, & N_2 = \nu^2 - k^2; \end{array} \right.$$

h^2 et k^2 sont les racines de l'équation du second degré

$$(18')\qquad 3\Lambda^2 - 2(b^2 + c^2)\Lambda + b^2c^2 = 0.$$

De là on déduit identiquement

$$\begin{aligned} \frac{1}{l'^2} &= (\rho'^2 - \mu'^2)(\rho'^2 - \nu'^2) \\ &= (R'_1 - M'_1)(R'_1 - N'_1) = (R'_2 - M'_2)(R'_2 - N'_2); \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{l'^2} = R'^2_1 - R'_1(M'_1 + N'_1) + M'_1N'_1,$$

$$\frac{1}{l'^2} = R'^2_2 - R'_2(M'_2 + N'_2) + M'_2N'_2.$$

Une combinaison bien simple de ces identités conduit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{l'^2}(R'_2 - R'_1) = R'_1R'_2(R'_1 - R'_2) - R'_1R'_2[(M'_1 - M'_2) + (N'_1 - N'_2)] \\ + R'_2M'_1N'_1 - R'_1M'_2N'_2 \end{aligned}$$

et, si l'on remarque que $R'_1 - R'_2 = M'_1 - M'_2 = N'_1 - N'_2 = k^2 - h^2$,

$$(19)\qquad \frac{1}{l'^2} = R'_1 R'_2 + \frac{R'_2}{h^2 - k^2} M'_1 N'_1 + \frac{R'_1}{k^2 - h^2} M'_2 N'_2.$$

Ainsi, l'on peut mettre $\frac{\delta}{l'^2}$ sous la forme

$$\frac{\delta}{l'^2} = \mathcal{A}'_0 + \mathcal{A}'_1 M'_1 N'_1 + \mathcal{A}'_2 M'_2 N'_2.$$

Dans le cas actuel, la formule générale

$$V = 4\pi \sum \mathrm{SMN} \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}' R' \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

se réduit donc à

$$(19')\qquad \left\{ \begin{aligned} V = {} & 4\pi S_0 M_0 N_0 \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_0 R'_0 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} && \text{où} \quad \mathcal{A}'_0 = \delta R'_1 R'_2, \\ & + 4\pi S_1 M_1 N_1 \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} && \phantom{\text{où}} \quad \mathcal{A}'_1 = \frac{\delta}{h^2 - k^2} R'_2, \\ & + 4\pi S_2 M_2 N_2 \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} && \phantom{\text{où}} \quad \mathcal{A}'_2 = \frac{\delta}{k^2 - h^2} R'_1; \end{aligned} \right.$$

en convenant d'affecter les fonctions S des mêmes indices que ceux des fonctions R dont elles dérivent et prenant $R_0 = M_0 = N_0 = 1$.

On peut encore écrire

$$V = \left(S_0 + \frac{S_1 M_1 N_1}{h^2 - k^2} + \frac{S_2 M_2 N_2}{k^2 - h^2}\right) 4\pi\delta \int_c^{\rho_1} \frac{R'_1 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

D'après une remarque faite à la fin du § II (17), le coefficient de S_0 doit se réduire à la masse. Ainsi

$$(20)\qquad V = \mathfrak{M}\left(S_0 + \frac{S_1 M_1 N_1}{h^2 - k^2} + \frac{S_2 M_2 N_2}{k^2 - h^2}\right).$$

Telle est l'expression du potentiel.

Il est d'ailleurs bien facile de voir directement que

$$\mathfrak{M} = 4\pi\delta \int_c^{\rho} \frac{R'_1 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

On a, en effet,

$$\frac{d}{d\rho'}\sqrt{\rho'^2(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)} = \frac{3\rho'^4 - 2(b^2 + c^2)\rho'^2 + b^2c^2}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}};$$

les racines du trinôme en ρ'^2, placé au numérateur du second membre, sont h^2 et k^2 (18'); on peut donc écrire

$$(21) \qquad \frac{d}{d\rho'}\sqrt{\rho'^2(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)} = \frac{3R'_1 R'_2}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho' - c^2}}.$$

Cette identité conduit de suite à

$$\mathfrak{M} = 4\pi\delta \int_c^{\rho_1} \frac{R'_1 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

IV.

Il ne peut y avoir de doute au sujet de la coïncidence de la formule

$$V = \mathfrak{M}\left(S_0 + \frac{S_1 M_1 N_1}{h^2 - k^2} + \frac{S_2 M_2 N_2}{k^2 - h^2}\right)$$

avec la formule de Dirichlet que l'on établit dans la théorie de l'attraction. Cependant, il n'est pas inutile de montrer comment on peut passer de l'une à l'autre expression. On est ainsi conduit à des identités qui présentent un certain intérêt.

Nous aurons besoin, dans ce qui va suivre, des développements de x^2, y^2, z^2 en produits MN. Les coordonnées rectangulaires et les coordonnées elliptiques d'un point sont liées par les équations (1)

$$b^2c^2x^2 = \rho^2\mu^2\nu^2,$$
$$b^2(c^2-b^2)y^2 = (\rho^2-b^2)[-\mu^2\nu^2+b^2(\mu^2+\nu^2)-b^4],$$
$$c^2(c^2-b^2)z^2 = (\rho^2-c^2)[\quad\mu^2\nu^2-c^2(\mu^2+\nu^2)+c^4].$$

$\mu^2\nu^2$ et $\mu^2+\nu^2$ sont facilement exprimables en produits MN. On a, en effet (18),

$$M_1N_1 = (\mu^2-h^2)(\nu^2-h^2) = \mu^2\nu^2-h^2(\mu^2+\nu^2)+h^4,$$
$$M_2N_2 = (\mu^2-k^2)(\nu^2-k^2) = \mu^2\nu^2-k^2(\mu^2+\nu^2)+k^4.$$

On tire de ces identités

$$\mu^2+\nu^2 = 2\frac{b^2+c^2}{3}+\frac{M_2N_2-M_1N_1}{h^2-k^2},$$
$$\mu^2\nu^2 = \frac{b^2c^2}{3}+\frac{h^2M_2N_2-k^2M_1N_1}{h^2-k^2};$$

d'où

$$x^2 = \frac{\rho^2}{b^2c^2}\left(\frac{b^2c^2}{3}+\frac{k^2}{k^2-h^2}M_1N_1+\frac{h^2}{h^2-k^2}M_2N_2\right),$$
$$y^2 = \frac{\rho^2-b^2}{b^2(c^2-b^2)}\left[\frac{b^2(c^2-b^2)}{3}+\frac{b^2-k^2}{k^2-h^2}M_1N_1+\frac{b^2-h^2}{h^2-k^2}M_2N_2\right],$$
$$z^2 = \frac{\rho^2-c^2}{c^2(b^2-c^2)}\left[\frac{c^2(b^2-c^2)}{3}+\frac{c^2-k^2}{k^2-h^2}M_1N_1+\frac{c^2-h^2}{h^2-k^2}M_2N_2\right].$$

Ces formules peuvent être simplifiées à l'aide des identités

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} b^2c^2 &= 3h^2k^2,\\ c^2(c^2-b^2) &= 3(c^2-h^2)(c^2-k^2),\\ b^2(b^2-c^2) &= 3(b^2-h^2)(b^2-k^2),\end{aligned}\right.$$

qui découlent de l'équation que vérifient h^2 et k^2. On trouve

$$(23)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{\rho^2}{3} + \dfrac{\rho^2}{3h^2}\dfrac{M_1N_1}{k^2-h^2} + \dfrac{\rho^2}{3k^2}\dfrac{M_2N_2}{h^2-k^2}, \\ y^2 = \dfrac{\rho^2-b^2}{3} + \dfrac{\rho^2-b^2}{3(h^2-b^2)}\dfrac{M_1N_1}{k^2-h^2} + \dfrac{\rho^2-b^2}{3(k^2-b^2)}\dfrac{M_2N_2}{h^2-k^2}, \\ z^2 = \dfrac{\rho^2-c^2}{3} + \dfrac{\rho^2-c^2}{3(h^2-c^2)}\dfrac{M_1N_1}{k^2-h^2} + \dfrac{\rho^2-c^2}{3(k^2-c^2)}\dfrac{M_2N_2}{h^2-k^2}. \end{cases}$$

Nous aurons aussi à employer les sommes x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2. On les déduit des expressions précédentes, et on les simplifie à l'aide des relations que l'on obtient en éliminant successivement h^2 et k^2 entre la première des identités qui précèdent et les deux autres,

$$(24)\quad \begin{cases} h^2(h^2-b^2) = (c^2-h^2)(2h^2-b^2), \\ h^2(h^2-c^2) = (b^2-h^2)(2h^2-c^2), \\ k^2(k^2-b^2) = (c^2-k^2)(2k^2-b^2), \\ k^2(k^2-c^2) = (b^2-k^2)(2k^2-c^2). \end{cases}$$

On obtient

$$(25)\quad \begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{2\rho^2-b^2}{3} + \dfrac{M_1N_1}{3(k^2-h^2)}\left(\dfrac{\rho^2-h^2}{c^2-h^2}+2\right) + \dfrac{M_2N_2}{3(h^2-k^2)}\left(\dfrac{\rho^2-k^2}{c^2-k^2}+2\right), \\ x^2+z^2 = \dfrac{2\rho^2-c^2}{3} + \dfrac{M_1N_1}{3(k^2-h^2)}\left(\dfrac{\rho^2-h^2}{b^2-h^2}+2\right) + \dfrac{M_2N_2}{3(h^2-k^2)}\left(\dfrac{\rho^2-k^2}{b^2-k^2}+2\right), \\ y^2+z^2 = \dfrac{2\rho^2-b^2-c^2}{3} + \dfrac{M_1N_1}{3(k^2-h^2)}\left(\dfrac{\rho^2-h^2}{-h^2}+2\right) + \dfrac{M_2N_2}{3(h^2-k^2)}\left(\dfrac{\rho^2-k^2}{-k^2}+2\right). \end{cases}$$

Cela posé, les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde étant ρ_1^2, $\rho_1^2-b^2$, $\rho_1^2-c^2$, la formule de Dirichlet s'écrit

$$V = \frac{3}{4}\mathfrak{M}\int_{\rho^2-\rho_1^2}^{\infty} \frac{1-\dfrac{x^2}{\rho_1^2+s}-\dfrac{y^2}{\rho_1^2-b^2+s}-\dfrac{z^2}{\rho_1^2-c^2+s}}{\sqrt{(\rho_1^2+s)(\rho_1^2-b^2+s)(\rho_1^2-c^2+s)}}\,ds$$

ou, en posant $t^2=\rho_1^2+s$ et prenant t pour variable,

$$(26)\qquad V = \frac{3}{2}\mathfrak{M}\int_{\rho}^{\infty} \frac{1-\dfrac{x^2}{t^2}-\dfrac{y^2}{t^2-b^2}-\dfrac{z^2}{t^2-c^2}}{\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}\,dt.$$

Exprimant x^2, y^2, z^2 en produits MN

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}\frac{V}{\mathfrak{M}} = \int_\rho^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} &- \frac{\rho^2}{3}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&- \frac{\rho^2-b^2}{3}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-b^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&- \frac{\rho^2-c^2}{3}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-c^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&- \frac{M_2N_2}{3(h^2-k^2)}\left[\frac{\rho^2}{k^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}\right. \\
&\qquad + \frac{\rho^2-b^2}{k^2-b^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-b^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&\qquad \left.+ \frac{\rho^2-c^2}{k^2-c^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-c^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}\right] \\
&- \frac{M_1N_1}{3(k^2-h^2)}\left[\frac{\rho^2}{h^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}\right. \\
&\qquad + \frac{\rho^2-b^2}{h^2-b^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-b^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&\qquad \left.+ \frac{\rho^2-c^2}{h^2-c^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-c^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}\right].
\end{aligned}
$$

Il faut montrer l'identité du second membre avec le second membre de

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{3}\frac{V}{\mathfrak{M}} = \frac{2}{3}\int_\rho^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} &- \frac{M_2N_2}{3(h^2-k^2)}\,2(\rho^2-k^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-k^2)^2\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&- \frac{M_1N_1}{3(k^2-h^2)}\,2(\rho^2-h^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-h^2)^2\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}.
\end{aligned}
$$

Comparons d'abord les termes où M_1N_1 et M_2N_2 n'entrent pas. Leur différence est, au facteur $\frac{1}{3}$ près,

$$
\int_\rho^\infty \frac{dt}{T_{(t)}} - \rho^2\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2T_{(t)}} - (\rho^2-b^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-b^2)T_{(t)}} - (\rho^2-c^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-c^2)T_{(t)}},
$$

en posant

$$T_{(t)} = \sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}.$$

Elle est nulle pour $\rho = \infty$. Pour prouver qu'elle est toujours nulle, il suffit de prouver qu'elle est constante ou que sa dérivée par rapport à ρ est nulle.

Cette dérivée est

$$\frac{2}{T_{(\rho)}} - 2\rho\left[\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2 T_{(t)}} + \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - b^2)T_{(t)}} + \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)T_{(t)}}\right].$$

Cette fonction est nulle pour $\rho = \infty$. Pour prouver qu'elle est nulle, il suffit de montrer que la dérivée de

$$\frac{1}{\rho T_{(\rho)}} - \int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2 T} - \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - b^2)T} - \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)T}$$

est nulle. Or on arrive, tout calcul fait, à

$$-\frac{1}{T_{(\rho)}}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2 - b^2} + \frac{1}{\rho^2 - c^2}\right) + \frac{1}{\rho^2 T_{(\rho)}} + \frac{1}{(\rho^2 - b^2)T_{(\rho)}} + \frac{1}{(\rho^2 - c^2)T_{(\rho)}},$$

expression qui est nulle identiquement.

L'identité des coefficients de M_1N_1 et de M_2N_2 se prouverait d'une manière toute semblable, en ayant égard à l'équation qui définit les quantités h^2 et k^2. Ces identités

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
&2(\rho^2 - k^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - k^2)^2\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} \\
&\quad = \frac{\rho^2}{k^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} + \frac{\rho^2 - b^2}{k^2 - b^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - b^2)\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} \\
&\qquad + \frac{\rho^2 - c^2}{k^2 - c^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}}, \\
&2(\rho^2 - h^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - h^2)^2\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} \\
&\quad = \frac{\rho^2}{h^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} + \frac{\rho^2 - b^2}{h^2 - b^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - b^2)\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} \\
&\qquad + \frac{\rho^2 - c^2}{h^2 - c^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}},
\end{aligned}\right.$$

expriment les fonctions S_1 et S_2 à l'aide d'intégrales qui ne contiennent pas h^2 et k^2 sous le signe $\int$.

V.

Le potentiel d'un ellipsoïde homogène a pour valeur, pour les points extérieurs,

$$V = \mathfrak{M}\left(S_0 + \frac{S_1 M_1 N_1}{h^2 - k^2} + \frac{S_2 M_2 N_2}{k^2 - h^2}\right).$$

D'un autre côté, la formule générale du potentiel d'un ellipsoïde pour les points extérieurs peut s'écrire, comme nous l'avons vu (14 et 16),

$$V = 4\pi \sum \text{SMN} \frac{\int\int\int \delta R'M'N'\, dx'\, dy'\, dz'}{\int\int l'(M'N')^2\, d\omega'},$$

où l'intégrale triple est étendue à tout l'ellipsoïde. Dans le cas actuel, δ est constant et peut être chassé du signe $\int\int\int$. La comparaison de ces deux formules montre que tous les polynômes de Lamé $R'M'N'$ en $x'y'z'$ sont tels que

$$\int\int\int R'M'N'\, dx'\, dy'\, dz' = 0,$$

sauf

$$R'_0 M'_0 N'_0 = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} R'_1 M'_1 N'_1 \\ R'_2 M'_2 N'_2 \end{array}\right\} \text{deux des cinq polynômes du second degré.}$$

VI. — Moments d'inertie.

Désignons par A, B, C les moments d'inertie de l'ellipsoïde par rapport à ses axes, et considérons le cylindre infinitésimal droit dont nous avons parlé en établissant la formule du potentiel. Sa masse dm'

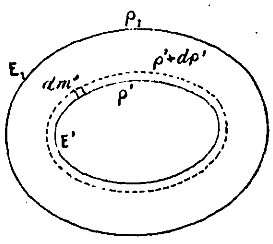
(*fig.* 2) a été trouvée égale à (13)

$$dm' = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \frac{\delta}{l'^2} l' \, d\omega'$$

ou bien à

$$dm' = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \mathcal{A}' \mathrm{M}' \mathrm{N}' l' \, d\omega'.$$

Fig. 2.



Le moment d'inertie de cette masse élémentaire par rapport à ox est, en employant une expression donnée plus haut (25),

$$\begin{aligned}(y^2 + z^2)\, dm' = {} & \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \mathcal{A}' \mathrm{M}' \mathrm{N}' l' \, d\omega' \\ & \times \left[\frac{2\rho'^2 - (b^2 + c^2)}{3} + \frac{1}{3(k^2 - h^2)} \left(\frac{\rho'^2 - h^2}{-h^2} + 2 \right) \mathrm{M}'_1 \mathrm{N}'_1 \right. \\ & \left. + \frac{1}{3(h^2 - k^2)} \left(\frac{\rho'^2 - k^2}{-k^2} + 2 \right) \mathrm{M}'_2 \mathrm{N}'_2 \right].\end{aligned}$$

Intégrant le long de l'ellipsoïde (ρ') et remarquant que l'intégrale $\int\int l' (\mathrm{M}'\mathrm{N}')_1 (\mathrm{M}'\mathrm{N}')_2 \, d\omega'$ est nulle tant que $(\mathrm{M}'\mathrm{N}')_1 \gtrless (\mathrm{M}'\mathrm{N}')_2$, on arrive à

$$\begin{aligned}d\mathrm{A} = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} & \left[\frac{2\rho'^2 - b^2 - c^2}{3} \mathcal{A}'_0 \int\int l' \, d\omega' \right. \\ & + \frac{\mathcal{A}'_1}{3(k^2 - h^2)} \left(\frac{\rho'^2 - h^2}{-h^2} + 2 \right) \int\int l' (\mathrm{M}'_1 \mathrm{N}'_1)^2 \, d\omega' \\ & \left. + \frac{\mathcal{A}'_2}{3(h^2 - k^2)} \left(\frac{\rho'^2 - k^2}{-k^2} + 2 \right) \int\int l' (\mathrm{M}'_2 \mathrm{N}'_2)^2 \, d\omega' \right].\end{aligned}$$

Un raisonnement analogue conduirait pour dB et dC aux expressions

$$dB = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\left[\frac{2\rho'^2 - c^2}{3}\mathcal{A}'_0 \int\int l'\,d\omega' + \frac{\mathcal{A}'_1}{3(k^2 - h^2)}\left(\frac{\rho'^2 - h^2}{b^2 - h^2} + 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\,d\omega' + \frac{\mathcal{A}'_2}{3(h^2 - k^2)}\left(\frac{\rho'^2 - k^2}{b^2 - k^2} + 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_2\mathrm{N}'_2)^2\,d\omega'\right],$$

$$dC = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\left[\frac{2\rho'^2 - b^2}{3}\mathcal{A}'_0 \int\int l'\,d\omega' + \frac{\mathcal{A}'_1}{3(k^2 - h^2)}\left(\frac{\rho'^2 - h^2}{c^2 - h^2} + 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\,d\omega' + \frac{\mathcal{A}'_2}{3(h^2 - k^2)}\left(\frac{\rho'^2 - k^2}{c^2 - k^2} + 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_2\mathrm{N}'_2)^2\,d\omega'\right].$$

Une nouvelle intégration par rapport à ρ' entre les limites c et ρ_1 donnerait A, B, C.

Ces formules renferment les intégrales $\int\int l'\,d\omega'$, $\int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\,d\omega'$, $\int\int l'(\mathrm{M}'_2\mathrm{N}'_2)^2\,d\omega'$ qui sont de simples fonctions de b et c. La première même se réduit à 4π, comme nous l'avons déja vu. La valeur de ces trois intégrales peut s'obtenir en appliquant la formule qui donne dA au cas de l'homogénéité.

Nous avons trouvé, dans le cas de l'ellipsoïde homogène (19'),

$$\mathcal{A}'_0 = \delta\,\mathrm{R}'_1\mathrm{R}'_2, \qquad \mathcal{A}'_1 = \delta\frac{\mathrm{R}'_2}{h^2 - k^2}, \qquad \mathcal{A}'_2 = \delta\frac{\mathrm{R}'_1}{k^2 - h^2}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\delta}dA = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\left[\frac{2\rho'^2 - b^2 - c^2}{3}(\rho'^2 - h^2)(\rho'^2 - k^2)\int\int l'\,d\omega' + \frac{1}{3(h^2 - k^2)^2}(\rho'^2 - k^2)\left(\frac{\rho'^2 - h^2}{h^2} - 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\,d\omega' + \frac{1}{3(h^2 - k^2)^2}(\rho'^2 - h^2)\left(\frac{\rho'^2 - k^2}{k^2} - 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_2\mathrm{N}'_2)^2\,d\omega'\right].$$

D'ailleurs la formule bien connue du moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène donne pour le moment d'inertie A' de l'ellipsoïde (ρ')

$$\frac{A'}{\delta} = \frac{4}{3}\pi\rho'\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}\,\frac{2\rho'^2 - b^2 - c^2}{5},$$

puis, en différentiant,

$$\frac{1}{\delta}\,dA = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \times 4\pi\,\frac{4\rho'^2(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2) + 3(2\rho'^2 - b^2 - c^2)(\rho'^2 - h^2)(\rho'^2 - k^2)}{15}.$$

Les polynômes du troisième degré en ρ'^2 qui entrent dans ces deux expressions de dA devant être identiques, on est conduit à égaler les coefficients des mêmes puissances de ρ'^2.

L'identification des termes en ρ'^6 donne de suite

$$(28)\qquad \iint l'\,d\omega' = 4\pi.$$

Puis, en posant

$$L_1 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\iint l'(M'_1N'_1)^2\,d\omega'}{h^2(h^2 - k^2)^2},\qquad L_2 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\iint l'(M'_2N'_2)^2\,d\omega'}{k^2(h^2 - k^2)^2},$$

on doit avoir identiquement

$$\begin{aligned}&\tfrac{2}{15}(b^2 + c^2)\rho'^4 - \tfrac{4}{15}(b^4 + c^4)\rho'^2 + \tfrac{2}{15}b^2c^2(b^2 + c^2)\\ &\quad = (\rho'^2 - 3h^2)(\rho'^2 - k^2)L_1 + (\rho'^2 - 3k^2)(\rho'^2 - h^2)L_2,\end{aligned}$$

ce qui nécessite

$$\begin{aligned}&\tfrac{2}{15}(b^2 + c^2) = L_1 + L_2,\\ &\tfrac{4}{15}(b^4 + c^4) = (3h^2 + k^2)L_1 + (3k^2 + h^2)L_2,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{5}(h^2 + k^2) = L_1 + L_2,\\ &\frac{3(h^2 + k^2)^2 - 8h^2k^2}{5} = (3h^2 + k^2)L_1 + (3k^2 + h^2)L_2.\end{aligned}$$

On en tire

$$\mathrm{L}_1 = \frac{h^2(h^2 - 3k^2)}{5(h^2 - k^2)}, \qquad \mathrm{L}_2 = \frac{k^2(k^2 - 3h^2)}{5(k^2 - h^2)},$$

d'où

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} &\iint l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5}\, h^4(h^2 - k^2)(h^2 - 3k^2), \\ &\iint l'(\mathrm{M}'_2\mathrm{N}'_2)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5}\, k^4(k^2 - h^2)(k^2 - 3h^2). \end{aligned} \right.$$

Tel est le résultat auquel nous nous proposions de parvenir.

Les différences C — A, B — A, C — B des moments d'inertie s'obtiennent sans peine à l'aide des formules données plus haut

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{C} - \mathrm{A} &= \frac{c^2}{3}\,\mathfrak{M} + 4\pi\,\frac{h^2(3k^2 - h^2)(c^2 - k^2)}{5(c^2 - b^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{L}'_1 \mathrm{R}'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ &\quad + 4\pi\,\frac{k^2(3h^2 - k^2)(c^2 - h^2)}{5(c^2 - b^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{L}'_2 \mathrm{R}'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \\ \mathrm{B} - \mathrm{A} &= \frac{b^2}{3}\,\mathfrak{M} + 4\pi\,\frac{h^2(3k^2 - h^2)(b^2 - k^2)}{5(b^2 - c^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{L}'_1 \mathrm{R}'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ &\quad + 4\pi\,\frac{k^2(3h^2 - k^2)(b^2 - h^2)}{5(b^2 - c^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{L}'_2 \mathrm{R}'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \\ \mathrm{C} - \mathrm{B} &= \frac{c^2 - b^2}{3}\,\mathfrak{M} + 4\pi\,\frac{h^2(3k^2 - h^2)(b^2 + c^2 - 2k^2)}{5(c^2 - b^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{L}'_1 \mathrm{R}'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ &\quad + 4\pi\,\frac{k^2(3h^2 - k^2)(b^2 + c^2 - 2h^2)}{5(c^2 - b^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{L}'_2 \mathrm{R}'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}. \end{aligned} \right.$$

Il est important d'observer que les intégrales

$$4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{L}'_1 \mathrm{R}'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \qquad 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{L}'_2 \mathrm{R}'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

entrent dans le développement du potentiel comme coefficients respectifs de $\mathrm{S}_1\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1$, $\mathrm{S}_2\mathrm{M}_2\mathrm{N}_2$.

VII. — Ellipsoide animé d'un mouvement de rotation dont la surface est de niveau.

Imaginons une masse hétérogène composée d'une partie centrale solide, de forme quelconque, dont la constitution physique est inconnue, complètement immergée au sein d'un fluide limité extérieurement par un ellipsoïde. Supposons que, sous l'influence d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe de cet ellipsoïde, la surface libre soit de niveau et proposons-nous de trouver les conditions d'équilibre. V étant le potentiel attractif de l'ellipsoïde, r la distance d'un point de la surface à l'axe de rotation et f la constante de l'attraction, on doit avoir pour tout point de la surface

$$fV + \frac{\omega^2}{2} r^2 = \text{const.},$$

r^2 représentant $x^2 + y^2$, $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$ suivant l'axe autour duquel tourne le système. Il en résulte que sur la surface la fonction V doit se réduire identiquement à une fonction linéaire de x^2, y^2, z^2. Le potentiel V, dont l'expression générale est

$$V = 4\pi \sum \text{SMN} \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{M}' \text{R}' \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

ne doit donc contenir que les fonctions SMN qui se réduisent soit à une constante, soit à des polynômes linéaires en x^2, y^2, z^2 sur la surface. Or on sait qu'il n'y a que trois produits SMN jouissant de ces propriétés (10) : ce sont (¹)

$$S_0 M_0 N_0, \quad S_1 M_1 N_1, \quad S_2 M_2 N_2,$$

(¹) On peut écrire, pour plus de clarté, $\text{SMN} = \frac{\text{S}}{\text{R}}(\text{RMN})$; $\frac{\text{S}}{\text{R}}$ se réduit à une constante sur la surface, puisque ρ est constant. Ainsi les produits de SMN et RMN ne diffèrent que par un facteur constant.

dont nous avons déjà parlé dans ce Chapitre (18), (19'). Ainsi

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} V = \mathfrak{M} S_0 &+ S_1 M_1 N_1 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ &+ S_2 M_2 N_2 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}. \end{aligned} \right.$$

Tous les autres produits SMN devant disparaître dans le développement, leur coefficient est nul

$$\int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}' R' \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} = 0$$

ou, à cause de l'identité (15),

$$\iiint R'M'N' dm' = \iint l'(M'N')^2 d\omega' \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}' R' \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

$$\iiint R'M'N' \, dm' = 0.$$

Tous les polynômes $R'M'N'$, à part le polynôme de degré 0 et les deux polynômes du second degré $R'_1 M'_1 N'_1$, $R'_2 M'_2 N'_2$, doivent vérifier cette relation.

Les trois polynômes du premier degré sont, à un facteur constant près, x, y, z. On a donc (10)

$$(32)\quad \iiint x' \, dm' = 0, \qquad \iiint y' \, dm' = 0, \qquad \iiint z' \, dm' = 0,$$

ce qui exprime que le centre de gravité se confond avec le centre de l'ellipsoïde.

Il y a cinq polynômes du second degré. Trois de ces polynômes doivent annuler $\iiint R'M'N' \, dm'$: ce sont xy, xz, yz, à des facteurs constants près (10),

$$(33)\quad \iiint x'y' \, dm' = 0, \qquad \iiint y'z' \, dm' = 0, \qquad \iiint z'x' \, dm' = 0.$$

Les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité coïncident avec les axes de l'ellipsoïde.

Ainsi le centre de gravité et la direction des axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité restent invariables dans toutes les dispositions possibles des masses internes (¹).

VIII.

La fonction $f\mathrm{V} + \frac{\omega^2}{2} r^2$, développée en produits MN, possède trois termes. Un terme constant, un terme en $\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1$ et un terme en $\mathrm{M}_2\mathrm{N}_2$. Les coefficients de ces deux derniers doivent être nuls, s'il y a équilibre, pour tous les points de la surface, c'est-à-dire pour $\rho = \rho_1$. On arrive, en employant les développements qui ont été donnés (25) et (31), aux équations suivantes

$$8\pi f\delta_1\rho_1\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{\rho_1^2 - c^2}(\rho_1^2 - h^2)\int_{\rho_1}^{\infty}\frac{d\rho'}{(\rho'^2 - h^2)^2\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

$$= \begin{cases} \omega^2\left(\dfrac{\rho_1^2 - h^2}{c^2 - h^2} + 2\right) & \text{si } oz \text{ est l'axe de rotation,} \\ \omega_2\left(\dfrac{\rho_1^2 - h^2}{b^2 - h^2} + 2\right) & oy \quad » \\ \omega^2\left(\dfrac{\rho_1^2 - h^2}{-h^2} + 2\right) & ox \quad » \end{cases}$$

$$8\pi f\delta_2\rho_1\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{\rho_1^2 - c^2}(\rho_1^2 - k^2)\int_{\rho_1}^{\infty}\frac{d\rho'}{(\rho'^2 - k^2)^2\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

$$= \begin{cases} \omega^2\left(\dfrac{\rho_1^2 - k^2}{c^2 - k^2} + 2\right) & \text{si } oz \text{ est l'axe de rotation,} \\ \omega^2\left(\dfrac{\rho_1^2 - k^2}{b^2 - k^2} + 2\right) & oy \quad » \\ \omega^2\left(\dfrac{\rho_1^2 - k^2}{-k^2} + 2\right) & ox \quad » \end{cases}$$

(¹) Ces propriétés ne s'appliquent pas seulement à l'ellipsoïde.

en posant

$$\delta_1 = \frac{(h^2-k^2)4\pi \displaystyle\int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_1 \mathrm{B}'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}}{\frac{4}{3}\pi\rho_1\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{\rho_1^2-c^2}},$$

$$\delta_2 = \frac{(k^2-h^2)4\pi \displaystyle\int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_2 \mathrm{B}'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}}{\frac{4}{3}\pi\rho_1\sqrt{\rho_1^2-b^2}\sqrt{\rho_1^2-c^2}}.$$

Lorsque les équations d'équilibre sont satisfaites, on peut en déduire la valeur de δ_1 et δ_2 en fonction de ρ_1, b, c et ω et partant celle des intégrales dont ces quantités dérivent. Le potentiel extérieur de l'ellipsoïde et les différences des moments d'inertie par rapport aux axes (30) et (31) peuvent ainsi s'exprimer à l'aide des données superficielles de l'ellipsoïde. En remarquant que les axes sont principaux d'inertie par rapport au centre de gravité, on est conduit à énoncer les théorèmes suivants :

Le potentiel extérieur d'un ellipsoïde dont la surface est de niveau sous l'influence d'un mouvement de rotation uniforme dépend uniquement des données superficielles (¹).

Les différences des moments d'inertie principaux relatifs au centre de gravité dépendent seulement des données superficielles.

Dans un ellipsoïde homogène ou composé de couches homofocales homogènes, $\delta_1 = \delta_2 =$ la densité moyenne de l'ellipsoïde, parce qu'à l'intérieur de chaque couche (19′) $\mathcal{A}'_1 = \frac{\mathrm{B}'_2}{h^2-k^2} \times$ densité de la couche, $\mathcal{A}'_2 = \frac{\mathrm{B}'_1}{k^2-h^2} \times$ densité de la couche [*voir* (21)]. Il en résulte que les équations d'équilibre ne doivent pas, dans cette hypothèse, être différentes de celles qui se présentent dans la discussion de l'ellipsoïde de

(¹) Ce théorème remarquable est général. M. Stockes l'a démontré pour une surface quelconque (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, 1849). On en trouvera une belle démonstration de M. Poincaré dans un important Mémoire de M. Callandreau [*Sur la théorie de la figure des planètes* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX)].

Jacobi. Au surplus, on pourrait les transformer de manière à les ramener à la forme ordinaire, en faisant disparaître les quantités h^2 et k^2. Ce calcul se ferait aisément en partant de la somme et de la différence des équations d'équilibre après avoir remplacé S_1 et S_2 par les expressions données plus haut (27). Il faudrait, en outre, recourir aux formules (22) et (24).

Les résultats de la discussion de l'ellipsoïde de Jacobi sont les suivants [1] :

1° L'axe dirigé suivant l'axe de rotation est le plus petit;

2° $$\frac{c^2(c^2-b^2)}{(\rho^2-c^2)^2} > 1, \qquad \text{ce qui entraîne} \qquad \rho^2 < 2c^2;$$

3° $$0 < \frac{\omega^2}{2\pi f \delta} < 0,18709\ldots$$

Si $\frac{\omega^2}{2\pi f \delta} = 0,18709\ldots$, l'ellipsoïde devient de révolution.

Les conditions d'équilibre de la surface ne présentent pas de différence avec celles qui précèdent si l'on a, dans le cas de l'hétérogénéité, $\delta_1 = \delta_2 > 0$, ce qui entraîne

$$\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{D}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} + \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{D}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} = 0.$$

Les expressions (30) des moments d'inertie donnent alors

$$\frac{8}{15}\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{D}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^3-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} = \frac{\mathfrak{M}}{3} - \frac{C-A}{c^2} = \frac{\mathfrak{M}}{3} - \frac{B-A}{b^2} > 0.$$

[1] *Journal de Liouville*, t. XVI.

CHAPITRE II.

ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION APLATI.

I.

Soit

$$\frac{x^2+y^2}{\rho_1^2}+\frac{z^2}{\rho_1^2-c^2}=1$$

l'équation de la surface. Nous représenterons, comme plus haut, $\frac{\delta}{l'^2}$ par une série

$$\frac{\delta}{l'^2}=\sum \mathfrak{M}'\mathrm{M}'\mathrm{N}' \quad (^1), \tag{34}$$

où $\mathfrak{M}'$ ne dépend que de ρ', en posant (3)

$$l'=\frac{1}{\rho'\sqrt{\rho'^2-\mu'^2}}.$$

L'expression du potentiel extérieur s'obtiendrait comme pour l'ellipsoïde à trois axes. On a

$$\mathrm{V}=4\pi\sum \mathrm{SMN}\int_c^{\rho_1}\frac{\mathfrak{M}'\mathrm{R}'\,d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2-c^2}}, \tag{34'}$$

en posant

$$\mathrm{S}=\mathrm{R}\int_\rho^\infty\frac{d\rho'}{\mathrm{R}'^2\rho'\sqrt{\rho'^2-c^2}}.$$

On démontrerait, comme dans le cas général (15), l'identité

$$\iiint \mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'\,dm'=\iint l'(\mathrm{M}'\mathrm{N}')^2\,d\omega'\int_c^{\rho_1}\frac{\mathfrak{M}'\mathrm{R}'\,d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2-c^2}}. \tag{35}$$

(1) *Voir* le § III de l'Introduction.

Aux fonctions R_1, M_1, N_1, R_2, M_2, N_2 relatives à l'ellipsoïde à trois axes correspondent ici (10), (11), (18),

$$(36)\quad \begin{cases} R_1 = \rho^2 - \frac{2c^2}{3}, & R_2 = \rho^2, \\ M_1 = \mu^2 - \frac{2c^2}{3}, & M_2 = \mu^2, \\ N_1 = 1, & N_2 = \nu_1^2 - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On a donné, dans les préliminaires (8),

$$\rho^2\mu^2 = c^2(x^2+y^2),$$

et, comme on a identiquement

$$M_1 N_1 = \mu^2 - \frac{2c^2}{3},$$

$$\rho^2\mu^2 = \tfrac{2}{3}\rho^2 c^2 + \rho^2 M_1 N_1,$$

on en déduit

$$(37)\quad x^2+y^2 = \tfrac{2}{3}\rho^2 + \frac{\rho^2}{c^2} M_1 N_1.$$

Lorsque $b^2 > 0$ (29),

$$\iint l'(M'_1 N'_1)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5} h^4 (h^2 - k^2)(h^2 - 3k^2),$$

$$\iint l'(M'_2 N'_2)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5} k^4 (k^2 - h^2)(k^2 - 3h^2),$$

$$\iint l'\, d\omega' = 4\pi,$$

et alors

$$h^2 = \frac{2c^2}{3} + \text{des termes contenant en facteur } b^2,$$

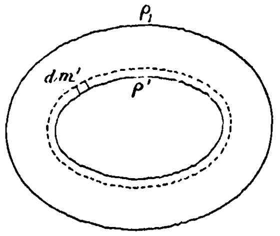
$$k^2 = \frac{b^2}{2} + \quad\text{»}\quad b^4.$$

En se reportant à ce qui a été dit relativement au passage des fonctions générales N à celles qui leur correspondent dans l'ellipsoïde de révolution aplati, et tenant compte des facteurs constants qui ont été supprimés (11), on arrive sans peine à

$$(38)\quad \left\{\begin{aligned} &\iint l'(M'_1 N'_1)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5}\left(\frac{2c^2}{3}\right)^2,\\ &\iint l'(M'_2 N'_2)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5}\frac{c^4}{3},\\ &\iint l'\, d\omega' = 4\pi. \end{aligned}\right.$$

Le calcul des moments d'inertie se fait comme pour les ellipsoïdes à trois axes.

Fig. 3.



Le cylindre infinitésimal déjà considéré a pour masse (13),

$$dm' = \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \mathfrak{M}' M' N' l'\, d\omega',$$

et (37),

$$(x^2 + y^2)\, dm' = \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \left(\tfrac{2}{3}\rho'^2 + \frac{\rho'^2}{c^2} M'_1 N'_1\right) \mathfrak{M}' M' N' l'\, d\omega'.$$

Le moment d'inertie dC de la courbe infiniment mince homofocale s'en déduit par une double intégration effectuée le long de l'ellipsoïde (ρ') (6) et (7). En représentant par $\mathfrak{M}'_0$ le coefficient de $M'_0 N'_0 = 1$, $\mathfrak{M}'_1$ celui de $M'_1 N'_1$, $\mathfrak{M}'_2$ celui de $M'_2 N'_2$ dans le développement de la densité (34), on a

$$dC = \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\left[\tfrac{8}{3}\pi\rho'^2 \mathfrak{M}'_0 + \frac{\rho'^2}{c^2}\mathfrak{M}'_1 \int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\, d\omega'\right],$$

$$C = \tfrac{8}{3}\pi\int_c^{\rho_1} \rho'^2 \frac{\mathfrak{M}'_0\, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} + \frac{1}{c^2}\int_c^{\rho_1} \rho'^2 \frac{\mathfrak{M}'_1\, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\, d\omega'.$$

Introduisons dans cette formule la densité moyenne de la couche infiniment mince.

Sa masse est $\int\int_{(\rho')} dm' = \frac{4\pi\mathfrak{M}'_0\, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$ (7), et son volume

$$\tfrac{4}{3}\pi\, d\rho'^2\sqrt{\rho'^2 - c^2} = \tfrac{4}{3}\pi\frac{3\rho'^2 - 2c^2\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\, d\rho'.$$

La densité moyenne η' a donc pour valeur

$$\eta' = \frac{\mathfrak{M}'_0}{\rho'^2\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)}, \qquad \mathfrak{M}'_0 = \rho'^2\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\eta'.$$

Le premier terme de C devient

$$\tfrac{8}{3}\pi\int_c^{\rho_1}\eta'\frac{\rho'^3\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)}{\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\, d\rho'$$

ou

$$\tfrac{8}{9}\pi\int_c^{\rho_1}\eta'\rho'^2\, d\rho'^2\sqrt{\rho'^2 - c^2}.$$

On peut écrire la seconde intégrale entrant dans C,

$$\frac{1}{c^2}\int_c^{\rho_1}\frac{\rho'^2}{\mathrm{R}'_1}\, d\int_c^{\rho'}\frac{\mathrm{R}'_1\mathfrak{M}'_1\, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \times \int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\, d\omega'.$$

L'intégrale $\int\int\int \mathrm{R}'_1\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1\, dm'$, étendue à tout l'ellipsoïde (ρ'), a pour valeur (35)

$$\iiint_{(\rho')} R'_1 M'_1 N'_1\, dm' = \iint l'(M'_1 N'_1)^2\, d\omega' \int_c^{\rho'} \frac{R'_1 \mathfrak{M}'_1\, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

On a vu (11) que

$$R'_1 M'_1 N'_1 = \frac{c^2}{3}\left(x'^2 + y'^2 - 2z'^2 - \frac{2c^2}{3}\right);$$

donc, en désignant par A′, B′, C′ les moments d'inertie de l'ellipsoïde (ρ') par rapport à ses axes, et par $\mathfrak{M}'$ sa masse,

$$\iiint_{(\rho')} R'_1 M'_1 N'_1\, dm' = \frac{c^2}{3}\left(2C' - A' - B' - \frac{2c^2}{3}\mathfrak{M}'\right).$$

Il en résulte que l'intégrale dont nous nous occupons peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{3}\int_c^{\rho_1} \frac{\rho'^2}{\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}} \frac{d}{d\rho'}\left(2C' - A' - B' - \frac{2c^2}{3}\mathfrak{M}'\right) d\rho'.$$

Ainsi l'on a

$$C = \frac{8}{9}\pi \int_c^{\rho_1} \eta' \rho'^2\, d\rho'^2 \sqrt{\rho'^2 - c^2}$$
$$+ \frac{1}{3}\int_c^{\rho_1} \frac{\rho'^2}{\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}}\, d\left(2C' - A' - B' - \frac{2c^2}{3}\mathfrak{M}'\right).$$

A cette expression, il faut joindre l'expression de la masse totale

$$\mathfrak{M} = \frac{4}{3}\pi \int_c^{\rho_1} \eta'\, d\rho'^2 \sqrt{\rho'^2 - c^2}.$$

Supposons qu'il s'agisse d'une sphère. Alors $c = 0$,

$$C = \frac{8}{9}\pi \int_0^{\rho_1} \eta' \rho'^2\, d\rho'^3 + \frac{1}{3}\int_0^{\rho_1} d(2C' - A' - B')$$

ou bien

$$(39)\qquad \begin{cases} C = \frac{8}{15}\pi \int_0^{\rho_1} \eta'\, d\rho'^5 + \frac{1}{3}(2C - A - B) \\ \text{et} \\ \mathfrak{M} = \frac{4}{3}\pi \int_0^{\rho_1} \eta'\, d\rho'^3, \end{cases}$$

où η' est la densité moyenne de la couche infiniment mince comprise entre les deux sphères concentriques de rayon ρ', $\rho' + d\rho'$.

La première formule (39), qui équivaut à

$$A + B + C = \frac{8}{5}\pi \int_0^{\rho_1} \eta'\, d\rho'^5,$$

peut s'établir d'une façon élémentaire. On a, en effet, pour une couche sphérique infiniment mince quelconque

$$\begin{aligned} d(A + B + C) &= 2\sum (x'^2 + y'^2 + z'^2)\, dm' \\ &= 2\rho'^2 \times \text{masse de la couche} = 8\pi\eta'\rho'^4\, d\rho'. \end{aligned}$$

En intégrant, on tombe sur la formule à démontrer.

II. — Ellipsoïde de révolution aplati animé d'un mouvement de rotation dont la surface est de niveau.

Considérons une masse hétérogène en équilibre, composée d'une partie centrale quelconque recouverte entièrement par un liquide limité extérieurement par un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe oz, et tournant uniformément autour de cet axe.

La fonction $f\,V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ doit se réduire à une constante sur l'ellipsoïde. En développant le potentiel en produit MN

$$V = 4\pi \sum \text{SMN} \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{M}'\, R'\, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

on verrait, par un raisonnement semblable à celui qui a été fait au sujet de l'ellipsoïde à trois axes, que le développement contient au plus trois termes,

$$S_0 M_0 N_0, \quad S_1 M_1 N_1, \quad S_2 M_2 N_2;$$

tous les autres ont un coefficient nul

$$(40) \qquad \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{P}' R' \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} = 0.$$

Il en résulte que le centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipsoïde, et que les axes sont principaux d'inertie relativement au centre de gravité (¹).

La fonction qui doit se réduire à une constante pour $\rho = \rho_1$ est donc (37)

$$f\mathfrak{M} S_0 + f S_1 M_1 N_1 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{P}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$
$$+ f S_2 M_2 N_2 4\pi \int_0^{\rho_1} \frac{\mathfrak{P}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{\rho^2}{c^2} M_1 N_1\right).$$

Égalant à zéro les coefficients de $M_2 N_2$ et de $M_1 N_1$ et faisant $\rho = \rho_1$ dans ces coefficients, on a

$$4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{P}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} = 0,$$

$$\frac{\omega^2}{2f} \frac{\rho_1^2}{c^2} + (S_1)_{\rho_1} 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{P}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} = 0.$$

On a identiquement (35)

$$\iiint_{(\rho_1)} (R'_2 M'_2 N'_2) \, dm' = \iint l (M'_2 N'_2)^2 \, dm' \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{P}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

(¹) Pour discuter plus complètement l'équation (40) qui équivaut, à cause de l'identité (35), à $\iiint R' M' N' \, dm' = 0$, il y aurait à faire usage des expressions de R, M, N données dans le § III de l'Introduction.

et (11)

$$R'_2 M'_2 N'_2 = \frac{c^2}{2}(x'^2 - y'^2);$$

donc

$$(41) \qquad \iiint R'_2 M'_2 N'_2 \, dm' = \frac{c^2}{2}(B - A) = 0.$$

Les moments d'inertie principaux équatoriaux sont égaux.

Posons

$$(42) \qquad \delta = -\frac{4\pi \displaystyle\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{M}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}}{\frac{4}{3}\pi\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}}$$

et remplaçons $(S_1)_{\rho_1}$ par sa valeur

$$\left(\rho_1^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho'}{\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)^2 \rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

L'équation d'équilibre devient

$$(43) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = \frac{4}{3}c^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\left(\rho_1^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho'}{\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)^2 \rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Il suffit de poser $\rho'^2 - c^2 = u^2$ pour ramener la fonction à intégrer à la forme rationnelle. Les calculs faits, on a

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = -3\frac{\rho^2 - c^2}{c^2} + \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}(3\rho^2 - 2c^2)}{c^3}\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{\sqrt{\rho^2 - c^2}},$$

et, en posant

$$\rho^2 = (\rho^2 - c^2)(1 + \lambda^2),$$

il vient

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = -\frac{3}{\lambda^2} + \frac{3 + \lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda.$$

C'est l'équation qui se présente dans la discussion de l'ellipsoïde de révolution homogène. On en tire deux valeurs de λ tant que

$$0 < \frac{\omega^2}{2\pi f \delta} < 0,22467.$$

La quantité δ, qui se réduit à la densité lorsque l'ellipsoïde est homogène, peut être exprimée dans le cas général en fonction de la densité moyenne D et du rapport $\frac{C-A}{\mathfrak{M}}$.

On a en effet identiquement (35)

$$\int\int\int_{(\rho_1)} R'_1 M'_1 N'_1 \, dm' = \int\int l'(M'_1 N'_1)^2 \, d\omega' \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{P}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

On a vu (11) que

$$R'_1 M'_1 N'_1 = \frac{c^2}{3}\left(x'^2 + y'^2 - 2z'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)$$

et (38)

$$\int\int l'(M'_1 N'_1)^2 \, d\omega' = \frac{4\pi}{5}\left(\frac{2c^2}{3}\right)^2.$$

On a donc identiquement

$$\frac{c^2}{3}\left(2C - A - B - \frac{2c^2}{3}\mathfrak{M}\right) = \frac{4\pi}{5}\left(\frac{2c^2}{3}\right)^2 \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{P}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

et, comme $B = A$ (41), il en résulte

$$4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{P}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^3}} = \frac{15}{2c^2}\left(\frac{C-A}{\mathfrak{M}} - \frac{c^2}{3}\right)\mathfrak{M};$$

mais

$$\mathfrak{M} = \tfrac{4}{3}\pi\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\, D,$$

par suite

$$\delta = \frac{15}{2c^2}\left(\frac{c^2}{3} - \frac{C-A}{\mathfrak{M}}\right) D. \tag{44}$$

Ainsi l'équation d'équilibre peut s'écrire

$$\frac{\omega^2}{2\pi f D} = \frac{15}{2c^2}\left(\frac{c^2}{3} - \frac{C-A}{\mathfrak{M}}\right)\left(-\frac{3}{\lambda^2} + \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda\right).$$

L'aplatissement de la surface ayant pour valeur

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

on voit que le rapport $\frac{C-A}{\mathfrak{M}}$ peut s'exprimer en fonction seulement des données superficielles. Nous ferons plus loin l'application de cette formule aux ellipsoïdes peu aplatis.

Cherchons actuellement la valeur de la pesanteur superficielle. Il faut prendre la dérivée de la fonction $f\mathrm{V} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$ suivant la normale à la surface

$$g = \frac{d}{ds}\left[f\mathrm{V} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\right].$$

Or, pour passer du point (ρ_1, μ, ν), de l'ellipsoïde à un point infiniment voisin placé sur la normale à la surface en ce point, il faut seulement faire varier ρ_1 de $d\rho$, μ et ν gardant la même valeur. On peut donc écrire

$$g = \frac{d\rho}{ds}\frac{d}{d\rho}\left[f\mathrm{V} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\right].$$

Il faudra faire $\rho = \rho_1$ après la dérivation.

Or on a, à cause de $A = B$,

$$\begin{aligned} &f\mathrm{V} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) \\ &\quad = \frac{\omega^2}{3}\rho^2 + f\mathfrak{M}\,\mathrm{S}_0 + \left(\frac{\omega^2}{2}\frac{\rho^2}{c^2} - \tfrac{4}{3}\pi\delta\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2-c^2}\,f\mathrm{S}_1\right)\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1, \end{aligned}$$

de plus (2)

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\sqrt{\rho^2-c^2}}{\sqrt{\rho^2-\mu^2}};$$

on en tire

$$(45)\quad \left\{ \begin{aligned} g = \frac{\sqrt{\rho_1^2-c^2}}{\sqrt{\rho_1^2-\mu^2}}\Bigg[&\tfrac{2}{3}\omega^2\rho + f\mathfrak{M}\frac{d\mathrm{S}_0}{d\rho} \\ &+ \left(\omega^2\frac{\rho}{c^2} - \tfrac{4}{3}\pi\delta\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2-c^2}\,f\frac{d\mathrm{S}_1}{d\rho}\right)\mathrm{M}_1\mathrm{N}_1\Bigg]_{\rho=\rho_1} \end{aligned} \right.$$

où S_0 et S_1 ont les valeurs suivantes :

$$S_0 = \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}},$$

$$S_1 = \left(\rho^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\left(\rho^2 - \frac{2c^2}{3}\right)^2 \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Nous ne développerons pas cette formule qui ne présente pas grand intérêt dans le cas général. Elle sera appliquée plus loin aux ellipsoïdes peu aplatis. Nous nous bornerons à faire remarquer que, l'équation d'équilibre de la surface donnant la valeur de δ en fonction de λ et ω, on peut exprimer g en fonction des données superficielles. Il en est évidemment de même du potentiel extérieur (¹)

$$(46) \qquad V = \mathfrak{M} S_0 - \tfrac{4}{3}\pi\delta\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\, S_1 M_1 N_1.$$

III.

Les planètes sont limitées extérieurement par des ellipsoïdes de révolution peu aplatis animés d'un faible mouvement de rotation. En partant de ce fait expérimental, on peut établir, indépendamment de toute hypothèse sur leur constitution interne, quelques-unes des formules auxquelles conduit la théorie de Clairaut. Dans les approximations, nous considérerons, comme on le fait dans cette théorie, ω^2 et l'aplatissement ε comme des quantités du premier ordre.

L'équation de la surface étant

$$\frac{x^2 + y^2}{\rho_1^2} + \frac{z^2}{\rho_1^2 - c^2} = 1,$$

son aplatissement est

$$\varepsilon = \frac{\rho_1 - \sqrt{\rho_1^2 - c^2}}{\rho_1} = 1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{\rho_1^2}}.$$

(¹) *Voir* la note de la page 102.

Si l'on considère ε comme une quantité du premier ordre, $\frac{c^2}{\rho_1^2}$ est du premier ordre, et l'on a, au second ordre près,

$$\frac{c^2}{\rho_1^2} = 2\varepsilon. \tag{47}$$

L'équation d'équilibre de la surface, donnée plus haut (43),

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = \tfrac{4}{3}c^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\left(\rho_1^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\int_{\rho_1}^{\infty}\frac{d\rho'}{\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)^2 \rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

devient, en ne conservant dans le second membre que les termes du premier ordre,

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = \frac{4}{3}c^2\rho_1^3\int_{\rho_1}^{\infty}\frac{d\rho'}{\rho'^6},$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = \frac{4}{15}\frac{c^2}{\rho_1^2};$$

d'où

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = \frac{8}{15}\varepsilon. \tag{48}$$

Reprenons la formule de la pesanteur trouvée plus haut (45) et remplaçons-y $M_1 N_1$ par sa valeur en fonction de μ (36)

$$g = \sqrt{\frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2 - \mu^2}}\left[\tfrac{2}{3}\omega^2\rho + f\mathfrak{M}\frac{dS_0}{d\rho} + \left(\frac{\omega^2\rho}{c^2} - \tfrac{4}{3}\pi f\delta\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\frac{dS_1}{d\rho}\right)\left(\mu^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\right]_{\rho=\rho_1}.$$

Les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la surface et la quantité μ^2 sont liées par l'équation $\frac{x^2+y^2}{\mu^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1$. Il en résulte que, le long d'un parallèle, la pesanteur est constante. La valeur de μ^2 tirée de l'équation qui précède est

$$\mu^2 = c^2\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} + \text{des termes contenant } c^4 \text{ en facteur},$$

c'est-à-dire

$$\mu^2 = c^2\cos^2\psi + \ldots,$$

en désignant par ψ l'angle que fait le rayon de l'ellipsoïde aboutissant au point xyz de la surface avec l'équateur.

Proposons-nous d'obtenir g en négligeant les termes du second ordre.

$\mu^2 - \frac{2c^2}{3} = c^2\left(\cos^2\psi - \frac{2}{3}\right)$ est du premier ordre; on peut donc négliger les termes du premier ordre dans son coefficient et y remplacer

$$\begin{array}{lll} \rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2} & \text{par} & \rho_1^3, \\ S_1 & \text{par} & \rho^2 \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\rho'^6} = \frac{1}{5}\frac{1}{\rho^3}, \\ \frac{dS_1}{d\rho} & \text{par} & -\frac{3}{5}\frac{1}{\rho^4}; \end{array}$$

de plus on peut faire, à cause de l'équation d'équilibre de la surface,

$$\frac{4}{3}\pi f\delta = \frac{5}{4}\frac{\omega^2}{\varepsilon}.$$

La formule

$$S_0 = \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} = \int_\rho^\infty \left(\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho'^4}\right) d\rho$$

donne, en négligeant les termes du second ordre,

$$\frac{dS_0}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho^4}.$$

La valeur de g devient

$$g = \sqrt{\frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2 - \mu^2}}\left[-\frac{1}{\rho_1^2} f\mathfrak{M} + \frac{2}{3}\omega^2\rho_1 - \frac{f\mathfrak{M}}{2}\frac{c^2}{\rho_1^4} \right.$$
$$\left. + \left(\omega^2\rho_1 + \frac{3}{4}\frac{\omega^2\rho_1}{\varepsilon}\frac{c^2}{\rho_1^2}\right)\left(\cos^2\psi - \frac{2}{3}\right)\right];$$

puis, remplaçant $\frac{c^2}{\rho_1^2}$ par 2ε (47),

$$g = \sqrt{\frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2 - \mu^2}}\left[-\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2} - \frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}\varepsilon + \left(\frac{5}{2}\cos^2\psi - 1\right)\omega^2\rho_1\right].$$

On a d'ailleurs

$$\sqrt{\frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2 - \mu^2}} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_1^2}\cos^2\psi\right) = 1 - \varepsilon\sin^2\psi + \ldots,$$

donc

$$g = \left[-\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2} - \frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}\varepsilon\cos^2\psi + \left(\frac{5}{2}\cos^2\psi - 1\right)\omega^2\rho_1\right].$$

Posons

$$(49)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi = \frac{\omega^2\rho_1}{\dfrac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}} &= \frac{\text{force centrifuge équatoriale}}{\text{attraction équatoriale}} \\ &= \frac{\text{force centrifuge équatoriale}}{\text{pesanteur équatoriale}} \\ &\quad + \text{termes du second ordre,} \end{aligned}\right.$$

il vient

$$g = -\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}\left[1 + \varepsilon\cos^2\psi - \varphi\left(\frac{5}{2}\cos^2\psi - 1\right)\right]$$

ou bien

$$g = -\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}\left[1 + \varepsilon - \frac{3}{2}\varphi + \left(\frac{5\varphi}{2} - \varepsilon\right)\sin^2\psi\right].$$

$\dfrac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}$ est l'attraction à l'équateur; on peut introduire l'attraction au pôle $\dfrac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2 - c^2}$. Il suffit de remplacer dans l'expression qui précède $\dfrac{1}{\rho_1^2}$ par

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{\rho_1^2 - c^2}\,\frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2} = \frac{1}{\rho_1^2 - c^2}(1 - 2\varepsilon).$$

On obtient finalement,

$$g = -\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2 - c^2}\left[1 - \varepsilon - \frac{3}{2}\varphi + \left(\frac{5}{2}\varphi - \varepsilon\right)\sin^2\psi\right].$$

C'est la formule de Clairaut. L'angle ψ se confond avec la latitude dans le cas de la sphère où $\varepsilon = 0$. Ces deux angles diffèrent donc entre eux d'une quantité du premier ordre quand ε est petit. Ainsi, dans la formule qui précède, on peut confondre l'angle ψ avec la latitude et énoncer ce résultat :

La pesanteur à la surface d'une planète varie proportionnellement au sinus carré de la latitude ([1]).

IV. — Valeur du rapport $\frac{C - A}{\mathfrak{M}}$.

On a

$$\varphi = \frac{\omega^2 \rho_1}{f \frac{\mathfrak{M}}{\rho_1^2}}.$$

Introduisons la densité moyenne dans ce rapport en posant

$$\mathfrak{M} = \tfrac{4}{3}\pi D \rho_1^2 \sqrt{\rho_1^2 - c^2}.$$

Il vient, en négligeant les termes du second ordre,

$$\varphi = \frac{\omega^2}{\frac{4}{3}\pi f D}.$$

Remplaçant $\frac{\omega^2}{4\pi f}$ par sa valeur $\frac{4}{15}\varepsilon\delta$ (48), on en déduit

$$\delta = \frac{5}{4} D \frac{\varphi}{\varepsilon}. \tag{50}$$

On a vu, d'autre part, que δ peut s'exprimer, au moyen du rapport $\frac{C - A}{\mathfrak{M}}$ (44),

$$\delta = \frac{15}{2c^2}\left(\frac{c^2}{3} - \frac{C - A}{\mathfrak{M}}\right) D.$$

On a donc

$$\frac{5}{4}\frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{15}{2c^2}\left(\frac{c^2}{3} - \frac{C - A}{\mathfrak{M}}\right);$$

([1]) Cette formule a été établie ici sans rien supposer sur la constitution interne de la planète. Ce résultat a été obtenu pour la première fois par Laplace, mais son analyse manque de rigueur.

d'où

$$\frac{C-A}{\mathfrak{M}} = \frac{c^2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\varphi}{\varepsilon}\right)$$

et, en remplaçant c^2 par $2\varepsilon\rho_1^2$ (47),

$$\frac{C-A}{\mathfrak{M}} = \frac{2}{3}\rho_1^2\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\varphi\right). \tag{51}$$

C'est la formule à laquelle conduit la théorie de Clairaut ([1]).

V. — Rapport $\frac{C-A}{C}$.

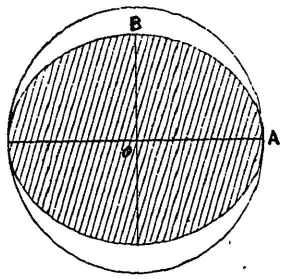
On a identiquement

$$\frac{C-A}{C} = \frac{C-A}{\mathfrak{M}}\frac{\mathfrak{M}}{C}.$$

Si l'on néglige les termes du second ordre, on peut faire abstraction des termes du premier ordre dans $\frac{\mathfrak{M}}{C}$, puisque $\frac{C-A}{\mathfrak{M}}$ est du premier ordre.

Circonscrivons une sphère à l'ellipsoïde (*fig.* 4), et considérons la

Fig. 4.



masse hétérogène renfermée à l'intérieur (y compris l'espace vide). Les moments d'inertie de la sphère sont les mêmes que ceux de l'ellip-

---

([1]) *Voir* à ce sujet le premier Mémoire de M. Callandreau inséré dans le t. XIX des *Annales de l'Observatoire de Paris.*

soïde. D'après une formule donnée plus haut, on a, pour la sphère (39),

$$\frac{C}{\mathfrak{M}} = \frac{\frac{8}{15}\pi \int_0^{\rho_1} \eta' \, d\rho'^5}{\frac{4}{3}\pi \int_0^{\rho_1} \eta' \, d\rho'^3} + \frac{1}{3}\,\frac{2C - A - B}{\mathfrak{M}},$$

et ici, comme $A = B$ (41),

$$\frac{C}{\mathfrak{M}} = \frac{2}{5}\,\frac{\int_0^{\rho_1} \eta' \, d\rho'^5}{\int_0^{\rho_1} \eta' \, d\rho'^3} + \frac{2}{3}\,\frac{C - A}{\mathfrak{M}}.$$

Le second terme étant du premier ordre peut être négligé. Pour le même motif, au lieu de prendre le rayon équatorial pour limite supérieure des intégrales, on peut prendre le rayon polaire et écrire, en gardant les termes les plus importants,

$$\frac{C}{\mathfrak{M}} = \frac{2}{5}\rho_1^2\,\frac{\int_0^1 \eta' \, dt^5}{\int_0^1 \eta' \, dt^3} \text{ (1)},$$

où η' est la *densité moyenne* des matières comprises entre les deux sphères de rayons $t\sqrt{\rho_1^2 - c^2}$, $(t + dt)\sqrt{\rho_1^2 - c^2}$. On déduit de là

$$\frac{C - A}{C} = \frac{5}{3}\left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\int_0^1 \eta' \, dt^3}{\int_0^1 \eta' \, dt^5}.$$

(1) Cette formule conviendrait même si la surface libre de la planète n'était pas un ellipsoïde, pourvu qu'elle fût peu différente d'une sphère, et que $\frac{2C - A - B}{\mathfrak{M}}$ fût petit. Pour la Terre, en particulier, on sait par la théorie de la précession que $\frac{2C - A - B}{2C}$ est voisin de $\frac{1}{306}$.

Cette formule est semblable à celle où conduit la théorie de Clairaut.

Supposons que η' croisse constamment de la surface au centre, mais que la variation de cette densité n'augmente pas avec la profondeur; en d'autres termes $\frac{d\eta'}{d\rho'} < 0$, $\frac{d^2\eta'}{d\rho'^2} < 0$ (c'est ce qui aurait lieu, en particulier, si l'accroissement de la densité n'était dû qu'à la compression).

Pour passer d'une loi de densité soumise à ces restrictions au cas où la densité croîtrait proportionnellement à la profondeur, sans modifier la masse totale, il faudrait augmenter la densité des parties centrales au détriment de celle des couches élevées. Il est facile de voir que le moment d'inertie C diminuerait dans cette transformation.

Soient $m + \mu$ la masse d'une couche sphérique infiniment mince, homogène, de rayon R, m' celle d'une autre couche de rayon R', et $R > R'$. La somme des moments d'inertie de ces couches est

$$\tfrac{2}{3}[(m+\mu)R^2 + m'R'^2];$$

si l'on transporte la masse μ dans la couche (R'), la somme devient

$$\tfrac{2}{3}[mR^2 + (m'+\mu)R'^2],$$

expression dont la valeur est inférieure à la première.

Il résulte de là que, en supposant la densité proportionnelle à la profondeur, on obtiendra pour $\frac{C}{\mathfrak{M}}$ une valeur inférieure à la valeur réelle et, pour $\frac{C-A}{C}$, une valeur trop grande.

Posons $\eta' = \lambda - \mu t$. On en déduit

$$\int_0^1 \eta'\, dt^5 = \lambda - \tfrac{5}{6}\mu.$$

D'autre part, en désignant par θ la densité moyenne superficielle et par D la densité moyenne de la planète,

$$\int_0^1 \eta'\, dt^3 = D = \lambda - \tfrac{3}{4}\mu,$$
$$\theta = \lambda - \mu.$$

Ces équations donnent

$$\mu = 4(\mathrm{D} - \theta), \qquad \lambda = \theta + 4(\mathrm{D} - \theta), \qquad \lambda - \tfrac{5}{6}\mu = \theta + \tfrac{2}{3}(\mathrm{D} - \theta);$$

il en résulte

$$\frac{\int_0^1 \eta' \, dt^3}{\int_0^1 \eta' \, dt^5} = \frac{3\dfrac{\mathrm{D}}{\theta}}{1 + 2\dfrac{\mathrm{D}}{\theta}}.$$

Ainsi, l'on doit avoir

$$\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}} < \frac{5\dfrac{\mathrm{D}}{\theta}}{1 + 2\dfrac{\mathrm{D}}{\theta}}\left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Pour la Terre en particulier, on a

$$\varepsilon = \frac{1}{293,5}, \qquad \varphi = \frac{1}{288,38}, \qquad \frac{\mathrm{D}}{\theta} = 2,$$

donc

$$\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}} < \frac{1}{298,5}.$$

La précession donne

$$\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}} < \frac{1}{305,6}.$$

Si, au lieu de rapprocher les fortes densités du centre, on s'arrangeait de façon à rendre la masse homogène, on augmenterait le moment C, et l'on diminuerait $\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}}$. On trouverait

$$\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}} > \frac{5}{3}\left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Pour la Terre,

$$\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}}{\mathrm{C}} > \frac{1}{358}.$$

VI. — Limite inférieure de la densité au centre de la Terre.

Nous avons trouvé

$$\mathrm{D} = \int_0^1 \eta' \, dt^3 = \ldots = 3\int_0^1 \eta' t^2 \, dt$$

et

$$\frac{C-A}{C} = \frac{5}{3}\left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\int_0^1 \eta' dt^3}{\int_0^1 \eta' dt^5} = \left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\int_0^1 \eta' t^2 dt}{\int_0^1 \eta' t^4 dt}.$$

En prenant

$$D = 5,56, \qquad \varepsilon = \frac{1}{293,5}, \qquad \varphi = \frac{1}{288,38}, \qquad \frac{C-A}{C} = \frac{1}{305,6},$$

on tire de ces équations

$$\int_0^1 \eta' t^2 dt = 1,853, \qquad \int_0^1 \eta' t^4 dt = 0,9484, \qquad \frac{\int_0^1 \eta' t^2 dt}{\int_0^1 \eta' t^4 dt} = 1,954.$$

La densité moyenne η' des matières comprises entre deux sphères infiniment voisines correspondant au paramètre t joue ici le même rôle que la densité des couches de Clairaut. Si l'on admet que $\frac{d\eta'}{dt} < 0$, on peut procéder comme l'a fait M. Stieltjes pour obtenir une limite inférieure de la densité au centre de l'ellipsoïde et l'on arrivera au même résultat. Ainsi, en appelant θ la densité moyenne superficielle, η la densité moyenne au centre, D la densité moyenne de la planète, et λ le rapport $\frac{\int_0^1 \eta' t^2 dt}{\int_0^1 \eta' t^4 dt}$ (¹), on a

$$\eta > \theta + \frac{(D-\theta)^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{5D}{3\lambda} - \theta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

(¹) *Bulletin astronomique*, tome I, page 465.

Si l'on adopte la valeur $\theta = 2,5$ on a, pour la Terre,

$$\eta > 7,39.$$

VII. — Potentiel extérieur d'une planète.

On a trouvé (46) et (36)

$$V = \mathfrak{M} \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} - \frac{4}{3}\pi\delta\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\left(\frac{\mu^2}{c^2} - \frac{2}{3}\right)\left(\rho^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)^2 \rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Cette expression peut s'écrire, en négligeant des termes du second ordre,

$$V = \mathfrak{M}\left[\int_\rho^\infty \left(\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho'^4}\right) d\rho' - \frac{\delta}{D} c^2 \left(\frac{\mu^2}{c^2} - \frac{2}{3}\right)\rho^2 \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\rho'^6}\right]$$

ou, en remplaçant c^2 par $2\varepsilon\rho_1^2$ et $\frac{\delta}{D}$ par $\frac{5}{4}\frac{\varphi}{\varepsilon}$ (47) et (50),

$$V = \mathfrak{M}\left\{\frac{1}{\rho} + \frac{\rho_1^2}{\rho^3}\left[\frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varphi}{2}\left(\frac{\mu^2}{c^2} - \frac{2}{3}\right)\right]\right\}.$$

μ et ρ sont les racines de l'équation $\frac{x^2 + y^2}{t^2} + \frac{z^2}{t^2 - c^2} = 1$ (8), ou

$$t^4 - t^2(x^2 + y^2 + z^2 + c^2) + c^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Désignons par r la distance du point attiré au centre de la planète, et par θ l'angle que fait la droite qui joint ces deux points avec l'axe de rotation OZ. L'équation devient

$$t^4 - t^2(r^2 + c^2) + c^2 r^2 \sin^2\theta = 0:$$

on en tire, en négligeant les termes du second ordre,

$$\rho^2 = r^2 + c^2\cos^2\theta$$

et

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}\cos^2\theta\right) + \ldots, \qquad \mu^2 = c^2\sin^2\theta + \ldots.$$

Remplaçant c^2 par $2\varepsilon\rho_1^2$ dans $\frac{1}{\rho}$, substituant dans V et négligeant les termes du second ordre,

$$V = \frac{\mathfrak{M}}{r}\left[1 - \frac{\rho_1^2}{r^2}\left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right)\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\right].$$

Le potentiel dépend uniquement des données superficielles (1).

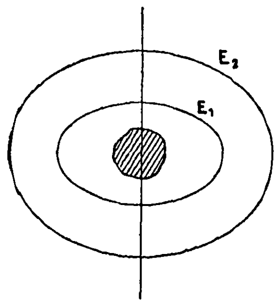
CHAPITRE III.

SUR UN THÉORÈME DE M. POINCARÉ.

I.

Considérons une masse hétérogène composée comme il suit : 1° d'une partie centrale solide de forme et de constitution inconnues, complè-

Fig. 5.



tement plongée au sein d'un liquide limité par un ellipsoïde ; 2° d'une autre couche liquide superposée à la première et également limitée à

(1) *Voir* la note de la page 102.

l'extérieur par un ellipsoïde. Si l'on fait tourner le tout d'un mouvement uniforme autour d'un axe et que, sous l'influence de ce mouvement de rotation, le système se trouve en équilibre, les ellipsoïdes sont homofocaux.

Cette remarquable proposition, qui a été établie par M. Poincaré (¹), peut être démontrée simplement lorsque les ellipsoïdes ont les mêmes plans de symétrie et tournent autour d'un de leurs axes (²).

Désignons par V_2 le potentiel de l'ellipsoïde E_2 (*fig.* 5) supposé plein du liquide, de densité θ, qui compose la couche superficielle, pour un point intérieur; par V_1 le potentiel des masses renfermées à l'intérieur de l'ellipsoïde E_1 diminué du potentiel du même ellipsoïde supposé rempli de la matière de densité θ, pour un point extérieur.

Les deux surfaces E_1, E_2 étant en équilibre, la fonction

$$V_1 + V_2 + \frac{\omega^2}{2f} r^2,$$

où r^2 désigne x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2 suivant l'axe autour duquel s'effectue le mouvement de rotation, doit se réduire identiquement à une constante sur ces surfaces. V_2, d'après sa nature, et par suite

$$V_2 + \frac{\omega^2}{2f} r^2$$

est une fonction linéaire de x^2, y^2, z^2 le long de E_1 et de E_2. Il en résulte que V_1 doit être aussi une fonction linéaire de x^2, y^2, z^2 le long des mêmes surfaces.

Soient

$$\frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_1^2 - b_1^2} + \frac{z^2}{\rho_1^2 - c_1^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{\rho_2^2} + \frac{y^2}{\rho_2^2 - b_2^2} + \frac{z^2}{\rho_2^2 - c_2^2} = 1$$

les équations de E_1 et E_2. On peut exprimer V_1 à l'aide des produits

---

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, juin 1888.

(²) Cela revient, à cause de ce qui a été dit au § VII du Chapitre I du présent travail, à supposer que le centre de gravité de l'ellipsoïde E_1 et les axes principaux d'inertie relatifs à ce point coïncident avec le centre et les axes de cet ellipsoïde.

SMN qui dépendent des coordonnées elliptiques ρ, μ, ν relatives à l'ellipsoïde E_1 (14)

$$V_1 = \sum \alpha SMN,$$

où les quantités α désignent des constantes. V_1 devant se réduire sur E_1, c'est-à-dire pour $\rho = \rho_1$, à une fonction linéaire de x^2, y^2, z^2, le second membre ne doit contenir que les produits

$$S_0, \quad S_1 M_1 N_1, \quad S_2 M_2 N_2,$$

si souvent considérés,

$$V_1 = \alpha_0 S_0 + \alpha_1 S_1 M_1 N_1 + \alpha_2 S_2 M_2 N_2$$

ou bien

$$\begin{aligned} V_1 = {} & \alpha_0 \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b_1^2}\sqrt{\rho'^2 - c_1^2}} \\ & + \alpha_1 R_1 M_1 N_1 \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{R_1'^2 \sqrt{\rho'^2 - b_1^2}\sqrt{\rho'^2 - c_1^2}} \\ & + \alpha_2 R_2 M_2 N_2 \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{R_2'^2 \sqrt{\rho'^2 - b_1^2}\sqrt{\rho'^2 - c_1^2}}. \end{aligned}$$

Le long de l'ellipsoïde E_2, on a

$$\frac{x^2}{\rho_2^2} + \frac{y^2}{\rho_2^2 - b_2^2} + \frac{z^2}{\rho_2^2 - c_2^2} = 1,$$

et la quantité ρ doit vérifier

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b_1^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c_1^2} = 1.$$

$R_1 M_1 N_1$ et $R_2 M_2 N_2$ fonctions linéaires de x^2, y^2, z^2 sont exprimables linéairement en y^2 et z^2 au moyen de la première de ces relations. De même, les intégrales qui entrent dans V_1 dépendent uniquement de y^2 et z^2 à cause de l'équation qui définit ρ, facile à déduire des précédentes,

$$y^2\left(\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2}\right) + z^2\left(\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2}\right) = \rho_2^2 - \rho^2.$$

Ainsi le long de E_2, V_1 est une fonction de y^2 et z^2 qui doit être linéaire par rapport à ces variables. On doit donc avoir identiquement

$$\frac{d^2 V_1}{d(y^2)^2} = \alpha_0 \frac{d^2 S_0}{d(y^2)^2} + \alpha_1 \frac{d^2 (S_1 M_1 N_1)}{d(y^2)^2} + \alpha_2 \frac{d^2 (S_2 M_2 N_2)}{d(y^2)^2} = 0,$$
$$\frac{d^2 V_1}{dy^2\, dz^2} = \alpha_0 \frac{d^2 S_0}{dy^2\, dz^2} + \alpha_1 \frac{d^2 (S_1 M_1 N_1)}{dy^2\, dz^2} + \alpha_2 \frac{d^2 (S_2 M_2 N_2)}{dy^2\, dz^2} = 0,$$
$$\frac{d^2 V_1}{d(z^2)^2} = \alpha_0 \frac{d^2 S_0}{d(z^2)^2} + \alpha_1 \frac{d^2 (S_1 M_1 N_1)}{d(z^2)^2} + \alpha_2 \frac{d^2 (S_2 M_2 N_2)}{d(z^2)^2} = 0;$$

α_0, α_1, α_2 ne peuvent être nuls simultanément, sans quoi V_1 serait identiquement nul (1); ces trois identités exigent, par suite,

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 S_0}{d(y^2)^2} & \frac{d^2 (S_1 M_1 N_1)}{d(y^2)^2} & \frac{d^2 (S_2 M_2 N_2)}{d(y^2)^2} \\ \frac{d^2 S_0}{dy^2\, dz^2} & \frac{d^2 (S_1 M_1 N_1)}{dy^2\, dz^2} & \frac{d^2 (S_2 M_2 N_2)}{dy^2\, dz^2} \\ \frac{d^2 S_0}{d(z^2)^2} & \frac{d^2 (S_1 M_1 N_1)}{d(z^2)^2} & \frac{d^2 (S_2 M_2 N_2)}{d(z^2)^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation de condition est indépendante des constantes α_0, α_1, α_2, et par suite de la constitution interne de l'ellipsoïde E_1. Au lieu de calculer le déterminant, ce qui serait long, on peut donc chercher directement la condition pour que les trois dérivées dont il s'agit soient nulles simultanément *en supposant l'ellipsoïde* E_1 *homogène.*

La formule de Dirichlet peut s'écrire, à un facteur constant près (26),

$$V_1 = \int_\rho^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{t^2} - \frac{y^2}{t^2 - b_1^2} - \frac{z^2}{t^2 - c_1^2}}{\sqrt{t^2 - b_1^2}\sqrt{t^2 - c_1^2}}\, dt.$$

(1) Si V_1 était identiquement nul, l'ellipsoïde E_1 agirait au dehors comme s'il était rempli du liquide superficiel. Dans ces conditions, la surface E_1 devrait faire partie des surfaces de niveau d'un ellipsoïde homogène, et ne pourrait être qu'un ellipsoïde semblable à l'ellipsoïde E_2. Le théorème serait en défaut.

Le long de E_2,

$$\frac{x^2}{\rho_2^2} + \frac{y^2}{\rho_2^2 - b_2^2} + \frac{z^2}{\rho_2^2 - c_2^2} = 1;$$

par suite

$$V_1 = \int_\rho^\infty \frac{1 - \dfrac{y^2}{t^2 - b_1^2} - \dfrac{z^2}{t^2 - c_1^2} - \dfrac{1}{t^2}\left(\rho_2^2 - y^2\dfrac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2} - z^2\dfrac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2}\right)}{\sqrt{t^2 - b_1^2}\sqrt{t^2 - c_1^2}}\,dt.$$

L'équation

$$y^2\left(\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2}\right) + z^2\left(\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2}\right) = \rho_2^2 - \rho^2,$$

qui lie ρ^2, y^2 et z^2 donne, par différentiation,

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2} + \left[\frac{b_1^2 y^2}{(\rho^2 - b_1^2)^2} + \frac{c_1^2 z^2}{(\rho^2 - c_1^2)^2} + 1\right]\frac{d(\rho^2)}{d(y^2)} = 0,$$

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2} + \left[\frac{b_1^2 y^2}{(\rho^2 - b_1^2)^2} + \frac{c_1^2 z^2}{(\rho^2 - c_1^2)^2} + 1\right]\frac{d(\rho^2)}{d(z^2)} = 0.$$

On tire de là, sans difficulté,

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial(y^2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2} - \dfrac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2}\right)^2}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - b_1^2}\sqrt{\rho^2 - c_1^2}\left[\dfrac{b_1^2 y^2}{(\rho^2 - b_1^2)^2} + \dfrac{c_1^2 z^2}{(\rho^2 - c_1^2)^2} + 1\right]},$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2\,\partial z^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2} - \dfrac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2}\right)\left(\dfrac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2} - \dfrac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2}\right)}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - b_1^2}\sqrt{\rho^2 - c_1^2}\left[\dfrac{b_1^2 y^2}{(\rho^2 - b_1^2)^2} + \dfrac{c_1^2 z^2}{(\rho^2 - c_1^2)^2} + 1\right]},$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial(z^2)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2} - \dfrac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2}\right)^2}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - b_1^2}\sqrt{\rho^2 - c_1^2}\left[\dfrac{b_1^2 y^2}{(\rho^2 - b_1^2)^2} + \dfrac{c_1^2 z^2}{(\rho^2 - c_1^2)^2} + 1\right]}.$$

Pour que ces trois dérivées soient simultanément nulles, il faut

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2} - \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2} = 0,$$

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2} - \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2} = 0.$$

L'équation que vérifie ρ donnant alors

$$\rho = \rho_2,$$

on a

$$b_1 = b_2,$$

$$c_1 = c_2.$$

Ainsi les ellipsoïdes sont bien homofocaux.

Si, au lieu de deux liquides superposés, il y en avait un nombre quelconque tous séparés par des ellipsoïdes, ces ellipsoïdes seraient homofocaux. On le déduit sans peine des considérations qui précèdent.

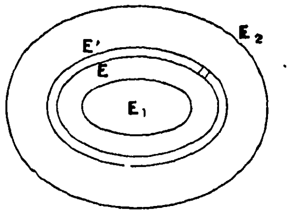
II. — Potentiel d'une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes homofocaux.

Soient

ρ_1 le paramètre de l'ellipsoïde intérieur E_1 (*fig.* 6);
ρ_2 celui de E_2;
θ la densité de la couche.

En opérant comme on l'a fait pour un ellipsoïde quelconque et em-

Fig. 6.



ployant le développement (19)

$$\frac{\theta}{l'^2} = \theta R'_1 R'_2 + \theta \frac{R'_2}{h^2 - k^2} M'_1 N'_1 + \theta \frac{R'_1}{k^2 - h^2} M'_2 N'_2 = \theta \sum \mathfrak{B}' M' N',$$

on trouve, pour le potentiel de la couche infiniment mince homofocale (E, E'),

$$dv_2 = \frac{\theta\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \mathfrak{B}' \int\int_{(\rho')} \frac{l' M' N'}{\Delta}\, d\omega'.$$

Si le point attiré (ρ, μ, ν) est extérieur à E_2, on a (5)

$$\iint_{(\rho')} \frac{l'M'N'}{\Delta} d\omega' = 4\pi R'SMN \qquad (\rho > \rho_2);$$

s'il est intérieur à E_1,

$$\iint_{(\rho')} \frac{l'M'N'}{\Delta} d\omega' = 4\pi S'RMN \qquad (\rho < \rho_1).$$

Il en résulte, pour le potentiel cherché, si $\rho \geqq \rho_2$,

$$v_2 = 4\pi\theta\left(S_0 + \frac{S_1M_1N_1}{h^2-k^2} + \frac{S_2M_2N_2}{k^2-h^2}\right)\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{R'_1 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}};$$

et si $\rho \leqq \rho_1$,

$$\begin{aligned} v_2 = 4\pi\theta\Bigg(\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{R'_1 R'_2 S'_0\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} &+ \frac{R_1M_1N_1}{h^2-k^2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{S'_1}{R'_1}\frac{R'_1 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} \\ &+ \frac{R_2M_2N_2}{k^2-h^2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{S'_2}{R'_2}\frac{R'_1 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}\Bigg). \end{aligned}$$

Nous affecterons dans la suite les fonctions R_1, S_1, R_2, S_2 d'un indice supérieur égal à 1 quand on y fera $\rho = \rho_1$, et égal à 2 quand on y fera $\rho = \rho_2$. Ainsi

$$\begin{aligned} R_1 &= \rho^2 - h^2, & S_1 &= R_1 \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho'}{R_1'^2\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}, \\ R_1^{(1)} &= \rho_1^2 - h^2, & S_1^{(1)} &= R_1^{(1)} \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho'}{R_1'^2\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}, \\ R_1^{(2)} &= \rho_2^2 - h^2, & S_2^{(2)} &= R_1^{(2)} \int_{\rho_2}^{\infty} \frac{d\rho'}{R_2'^2\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}; \end{aligned}$$

de même pour R_2 et S_2.

Nous poserons en outre

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\rho^2(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}, \\ u^{(1)} &= \sqrt{\rho_1^2(\rho_1^2-b^2)(\rho_1^2-c^2)}, \\ u^{(2)} &= \sqrt{\rho_2^2(\rho_2^2-b^2)(\rho_2^2-c^2)}, \\ u' &= \sqrt{\rho'^2(\rho'^2-b^2)(\rho'^2-c^2)}. \end{aligned}$$

On a (21)

$$\int_c^\rho \frac{R'_1 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} = \frac{1}{3}u,$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{S'_1}{R'_1}\frac{R'_1 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} = \frac{1}{3}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{S'_1}{R'_1}\,du' = \frac{1}{3}\left[\left(u'\frac{S'_1}{R'_1}\right)_{\rho_1}^{\rho_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'_1}\right)_{\rho_1}^{\rho_2}\right].$$

Ainsi l'on a, si $\rho \geqq \rho_2$,

$$v_2 = \frac{4}{3}\pi\theta\left(u^{(2)} - u^{(1)}\right)\left(S_0 + \frac{S_1 M_1 N_1}{h^2-k^2} + \frac{S_2 M_2 N_2}{k^2-h^2}\right);$$

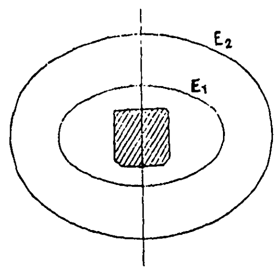
et si $\rho \leqq \rho_1$,

$$\begin{aligned} v_2 = \frac{4}{3}\pi\theta\Bigg\{ & 3\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{R'_1 R'_2 S'_0\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} \\ & + \frac{R_1 M_1 N_1}{h^2-k^2}\left[u^{(2)}\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(2)}} - \left(u^{(1)}\frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right] \\ & + \frac{R_2 M_2 N_2}{k^2-h^2}\left[u^{(2)}\frac{S_2^{(2)}}{R_2^{(2)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_2^{(2)}} - \left(u^{(1)}\frac{S_2^{(1)}}{R_2^{(1)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_2^{(1)}}\right)\right]\Bigg\}. \end{aligned}$$

III. — Équations d'équilibre.

Revenons au problème de M. Poincaré et supposons que la masse tourne autour du plus petit axe oz. Appelons v_2 le potentiel de la

Fig. 7.



couche homogène superficielle et v_1 le potentiel des masses renfermées à l'intérieur de E_1 (*fig.* 7). La fonction

$$v_1 + v_2 + \frac{\omega^2}{2f}(x^2+y^2)$$

doit se réduire à une constante sur E_1 et sur E_2. Les développements de v_2 et de x^2+y^2 ne contiennent pas d'autres produits MN que

$$M_0N_0=1,\quad M_1N_1,\quad M_2N_2;$$

il doit en être de même pour v_1. Ainsi, en représentant comme nous l'avons fait jusqu'ici la densité à l'intérieur de E_1 par la série

$$\frac{\delta}{l'^2}=\Sigma\mathcal{A}'M'N',$$

où $\mathcal{A}'$ dépend de ρ' seulement, on a, à l'extérieur de E_1,

$$v_1=\mathfrak{M}_1S_0+S_1M_1N_1\,4\pi\int_c^{\rho_1}\frac{\mathcal{A}'_1R'_1\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}$$
$$+S_2M_2N_2\,4\pi\int_c^{\rho_1}\frac{\mathcal{A}'_2R'_2\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}};$$

$\mathfrak{M}_1$ est la masse de E_1, $\mathcal{A}'_1$ et $\mathcal{A}'_2$ les coefficients de $M'_1N'_1$ et $M'_2N'_2$ dans $\frac{\delta}{l'^2}$.

Tous les autres coefficients $\mathcal{A}'$ doivent vérifier la relation

$$\int_c^{\rho_1}\frac{\mathcal{A}'R'\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}=0,$$

ce qui équivaut, comme on l'a vu, à

$$\iiint R'M'N'\,dm'=0.$$

En posant

$$\eta_1=\frac{h^2-k^2}{\frac{4}{3}\pi\sqrt{\rho_1^2(\rho_1^2-b^2)(\rho_1^2-c^2)}}\,4\pi\int_c^{\rho_1}\frac{\mathcal{A}'_1R'_1\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}$$
$$=\frac{h^2-k^2}{\frac{4}{3}\pi u^{(1)}}\,4\pi\int_c^{\rho_1}\frac{\mathcal{A}'_1R'_1\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}},$$

$$\eta_2=\frac{k^2-h^2}{\frac{4}{3}\pi\sqrt{\rho_1^2(\rho_1^2-b^2)(\rho_1^2-c^2)}}\,4\pi\int_c^{\rho_1}\frac{\mathcal{A}'_2R'_2\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}$$
$$=\frac{k^2-h^2}{\frac{4}{3}\pi u^{(1)}}\,4\pi\int_c^{\rho_1}\frac{\mathcal{A}'_2R'_2\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}},$$

il vient

$$v_1 = \mathfrak{M}_1 S_0 + \frac{\frac{4}{3}\pi u^{(1)}\eta_1}{h^2 - k^2} S_1 M_1 N_1 + \frac{\frac{4}{3}\pi u^{(1)}\eta_2}{k^2 - h^2} S_2 M_2 N_2.$$

Joignons à cette formule le développement

$$x^2 + y^2 = \frac{2\rho^2 - b^2}{3} + \frac{M_1 N_1}{3(k^2 - h^2)}\left(\frac{R_1}{c^2 - h^2} + 2\right) + \frac{M_2 N_2}{3(h^2 - k^2)}\left(\frac{R_2}{c^2 - k^2} + 2\right).$$

En faisant successivement

$$\rho = \rho_2 \qquad \text{et} \qquad \rho = \rho_1$$

dans la fonction

$$v_1 + v_2 + \frac{\omega^2}{2f}(x^2 + y^2),$$

que nous pouvons maintenant développer en produits de Lamé, et égalant à zéro le coefficient de $M_1 N_1$, on arrive aux deux équations

$$\theta u^{(2)} S_1^{(2)} + (\eta_1 - \theta) u^{(1)} S_1^{(2)} = \frac{\omega^2}{8\pi f}\left(\frac{R_1^{(2)}}{c^2 - h^2} + 2\right),$$

$$\theta R_1^{(1)}\left(u^{(2)}\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(2)}} + \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(1)}}\right) + (\eta_1 - \theta) u^{(1)} S_1^{(1)} = \frac{\omega^2}{8\pi f}\left(\frac{R_1^{(1)}}{c^2 - h^2} + 2\right).$$

En égalant à zéro le coefficient de $M_2 N_2$, on obtiendrait deux autres équations qui se déduisent des précédentes en y remplaçant l'indice inférieur 1 par l'indice 2 et h^2 par k^2.

On tire des deux équations écrites

$$\theta = \frac{S_1^{(1)}\left(\frac{R_1^{(2)}}{c^2 - h^2} + 2\right) - S_1^{(2)}\left(\frac{R_1^{(1)}}{c^2 - h^2} + 2\right)}{u^{(2)} S_1^{(2)} R_1^{(1)}\left[\frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} - \frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2u^{(2)}}\left(\frac{1}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{R_1^{(2)}}\right)\right]}\frac{\omega^2}{8\pi f},$$

$$\eta_1 - \theta = \frac{S_1^{(2)}\left(\frac{R_1^{(1)}}{c^2 - h^2} + 2\right) - R_1^{(1)}\left[\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2u^{(2)}}\left(\frac{1}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right]\left(\frac{R_1^{(2)}}{c^2 - h^2} + 2\right)}{u^{(1)} S_1^{(2)} R_1^{(1)}\left[\frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} - \frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2u^{(2)}}\left(\frac{1}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{R_1^{(2)}}\right)\right]}\frac{\omega^2}{8\pi f}.$$

La fonction de ρ, $\frac{S_1}{R_1} - \frac{1}{2u^{(2)}}\frac{1}{R_1}$, a pour dérivée $\frac{\rho}{R_1^2}\left(\frac{1}{u^{(2)}} - \frac{1}{u}\right)$. Cette dérivée est négative pour $\rho < \rho_2$. Il en résulte que les dénominateurs de θ et de $(\eta_1 - \theta)$ sont positifs.

La fonction $\dfrac{\dfrac{R_1}{c^2-h^2}+2}{S_1}$ a pour dérivée $\dfrac{\rho}{S_1^2}\left[-4\dfrac{S_1}{R_1}+\left(\dfrac{1}{c^2-h^2}+\dfrac{2}{R_1}\right)\dfrac{1}{u}\right]$. La quantité entre crochets est décroissante, car sa dérivée est $\left(\dfrac{1}{c^2-h^2}+\dfrac{2}{R_1}\right)\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{1}{u}\right) < 0$; elle est nulle pour $\rho = \infty$, donc elle est toujours positive. Il en résulte que la fonction dont nous nous occupons est croissante. Ainsi le numérateur de θ est positif et par suite θ est positif. Si la valeur trouvée pour θ avait été négative, le problème, tel qu'il a été posé, n'eût pas été possible puisque θ représente une densité.

On peut mettre le numérateur de $\eta_1 - \theta$ sous la forme

$$\frac{1}{2}\left(R_1^{(2)} - R_1^{(1)}\right)\left[4\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{u^{(2)}}\left(\frac{1}{c^2-h^2}+\frac{2}{R_1^{(2)}}\right)\right].$$

Le premier facteur est égal à $\rho_2^2 - \rho_1^2 > 0$. Le second est une fonction de ρ_2 que nous venons de rencontrer; il est toujours négatif. On a donc $\eta_1 - \theta < 0$. La discussion des deux autres équations conduirait de même à $\eta_2 - \theta < 0$. Ces conditions doivent nécessairement être vérifiées pour que l'équilibre soit possible.

Supposons l'ellipsoïde E_1 fluide. Peut-il être composé de couches séparées par des ellipsoïdes? En vertu du théorème de M. Poincaré, ces surfaces seraient homofocales. Il en résulterait $\eta_1 = \eta_2 = \delta$, densité moyenne de l'ellipsoïde E_1 (Ier Chap., § VIII), et l'on devrait avoir $\delta < \theta$, en vertu de ce qui précède.

En d'autres termes, les fluides internes devraient être en partie plus légers que le fluide composant la couche superficielle [1]. Cette hypothèse est irréalisable physiquement.

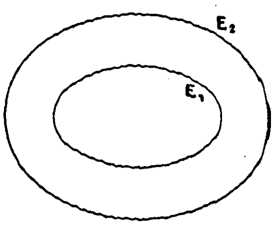
---

[1] Ce théorème n'est pas différent de celui auquel je suis arrivé dans mon *Mémoire sur la figure des corps célestes* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX).

IV.

Supposons les deux ellipsoïdes homofocaux de révolution autour de l'axe de rotation et aplatis suivant cet axe (*fig.* 8). Le calcul du po-

Fig. 8.



tentiel de la couche homogène comprise entre les deux ellipsoïdes homofocaux se ferait en partant de l'identité

$$\frac{1}{l'^2} = R'_1 R'_2 - R'_2 M'_1 N'_1.$$

On trouverait, comme pour l'ellipsoïde à trois axes, si $\rho < \rho_2$,

$$v_2 = \frac{4}{3}\pi\theta(u^{(2)} - u^{(1)})(S_0 - S_1 M_1 N_1);$$

et si $\rho > \rho_1$,

$$v_2 = \frac{4}{3}\pi\theta\left\{3\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{R'_1 R'_2 S'_0\,d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} - R_1 M_1 N_1\left[u^{(2)}\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(2)}} - \left(u^{(1)}\frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right]\right\}.$$

En représentant par la série

$$\frac{\delta}{l'^2} = \Sigma\mathcal{B}' M' N'$$

la densité δ à l'intérieur de E_1, on a, pour le potentiel de E_1,

$$v_1 = \mathrm{SMN}' 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}' \mathrm{R}' \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Ces formules et la suivante

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3}\rho^2 + \frac{\rho^2}{c^2} \mathrm{M}_1 \mathrm{N}_1$$

permettent de développer la fonction $v_1 + v_2 + \frac{\omega^2}{2f}(x^2 + y^2)$ en produits MN. Cette fonction doit se réduire à une constante le long de E_1 et le long de E_2; donc, pour $\rho = \rho_1$ et $\rho = \rho_2$, tous les coefficients du développement doivent être nuls.

On est donc conduit à poser

$$\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}' \mathrm{R}' \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} = 0$$

pour tous les coefficients $\mathfrak{B}'$, sauf pour le coefficient $\mathfrak{B}'_1$, ce qui équivaut (35) à

$$\iiint \mathrm{R}' \mathrm{M}' \mathrm{N}' \, dm' = 0.$$

En substituant les différents polynômes $\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'$ du premier et du deuxième degré dans cette relation, on trouverait que le centre de gravité de E_1 est au centre de l'ellipsoïde et que les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité coïncident en direction avec les axes de E_1.

Le polynôme $\mathrm{R}'_2 \mathrm{M}'_2 \mathrm{N}'_2$, qui est égal à $\frac{c^2}{2}(x'^2 - y'^2)$, donne

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}_1,$$

en appelant A_1 et B_1 les moments d'inertie principaux équatoriaux de l'ellipsoïde E_1.

En posant

$$\eta = -\frac{4\pi \displaystyle\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_1 \mathrm{R}'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}}{\frac{4}{3}\pi \rho_1^2 \sqrt{\rho_1^2 - c^2}},$$

et égalant à zéro les coefficients de $M_1 N_1$ pour $\rho = \rho_1$ et $\rho = \rho_2$, on a

$$\theta R_1^{(1)}\left(u^{(2)}\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(2)}} - u^{(1)}\frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} + \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(1)}}\right) + \eta u^{(1)} S_1^{(1)} = \frac{\omega^2}{8\pi f}\frac{3\rho_1^2}{c^2},$$

$$\theta S_1^{(2)}(u^{(2)} - u^{(1)}) + \eta u^{(1)} S_1^{(2)} = \frac{\omega^2}{8\pi f}\frac{3\rho_2^2}{c^2},$$

où

$$R_1 = \rho^2 - \frac{2c^2}{3}, \qquad R_1^{(1)} = \rho_1^2 - \frac{2c^2}{3}, \qquad R_1^{(2)} = \rho_2^2 - \frac{2c^2}{3},$$

$$u = \rho^2\sqrt{\rho^2 - c^2}, \qquad u^{(1)} = \rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}, \qquad u^{(2)} = \rho_2^2\sqrt{\rho_2^2 - c^2},$$

$$\frac{S_1}{R_1} = \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{R_1'^2\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \qquad \frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} = \int_{\rho_1}^\infty \frac{d\rho'}{R_1'^2\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \qquad \frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} = \int_{\rho_2}^\infty \frac{d\rho'}{R_1'^2\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

On tire de ces équations

$$\theta = \frac{\frac{3}{c^2}(\rho_1^2 S_1^{(2)} - \rho_2^2 S_1^{(1)})}{S_1^{(2)} R_1^{(1)}\left[u^{(2)}\left(\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right]}\frac{\omega^2}{8\pi f},$$

$$u^{(1)}\eta = \frac{\frac{3}{c^2}\left\{\rho_2^2 R_1^{(1)}\left[u^{(2)}\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(2)}} - \left(u^{(1)}\frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right] - \rho_1^2 S_1^{(2)}(u^{(2)} - u^{(1)})\right\}}{S_1^{(2)} R_1^{(1)}\left[u^{(2)}\left(\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right]}\frac{\omega^2}{8\pi f}.$$

Le dénominateur de ces expressions est négatif, parce que la fonction de ρ

$$u^{(2)}\frac{S_1}{R_1} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1}$$

est décroissante quand $\rho < \rho_2$. La fonction $\frac{\rho^2}{S_1}$ est croissante (on le montre au moyen de deux dérivations). Il en résulte que θ est positif.

Nous poserons dans le numérateur de η, après avoir effectué les intégrations,

$$\rho_2^2 = c^2\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}, \qquad \rho_1^2 = c^2\frac{1+\mu^2}{\mu^2};$$

ce qui nécessite, à cause de $\rho_2 > \rho_1$,

$$\lambda < \mu.$$

On a

$$\frac{S_1}{R_1} = \frac{9}{4c^5}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{\sqrt{\rho^2-c^2}} - \frac{3c\sqrt{\rho^2-c^2}}{3\rho^2-2c^2}\right),$$

d'où

$$\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} = \frac{9}{4c^3}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3\lambda}{3+\lambda^2}\right),$$

$$R_1^{(2)} = \frac{c^2}{3}\,\frac{3+\lambda^2}{\lambda^2},$$

$$u^{(2)} = c^3\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3},$$

$$u^{(2)}\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{R_1^{(2)}} = \frac{9}{4c^2}\left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \lambda) + \frac{1}{3}\right].$$

Le numérateur de $u^{(1)}\eta$ devient

$$\begin{aligned}
-\frac{9}{4}\,\frac{1+\mu^2}{\mu^2}\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}\Bigg\{ &-\frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \lambda)\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1+\mu^2}{\mu^3}(\operatorname{arc\,tang}\mu - \mu)\right]\\
&+\frac{3+\lambda^2}{1+\lambda^2}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3\lambda}{3+\lambda^2}\right)\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

On peut écrire cette fonction, abstraction faite du facteur négatif $-\frac{9}{4}\,\frac{1+\mu^2}{\mu^2}\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{arc\,tang}\lambda\left[\frac{3+\lambda^2}{1+\lambda^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right) - \frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\right]\\
&\quad-\frac{3\lambda}{1+\lambda^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right) + \frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} + \frac{3+\mu^2}{\mu^3}(\operatorname{arc\,tang}\mu - \mu).
\end{aligned}$$

Sa dérivée par rapport à λ est

$$\begin{aligned}
&\frac{3+\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right) - \frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{1}{\lambda^3}\\
&-3\,\frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right) + \frac{3(3+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)\lambda^3} - \frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{2}{\lambda^3}\\
&+\operatorname{arc\,tang}\lambda\left[-\frac{4\lambda}{(1+\lambda^2)^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right) - \frac{(3+\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)\lambda^4} + \frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{3+\lambda^2}{\lambda^4}\right],
\end{aligned}$$

ou bien

$$\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}-\frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right)+\frac{3}{\lambda^3}\left(\frac{2}{1+\lambda^2}-\frac{2}{1+\mu^2}\right)$$
$$-\frac{\operatorname{arc\,tang}\lambda}{\lambda}\left[\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}-\frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right)+\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{2}{1+\lambda^2}-\frac{2}{1+\mu^2}\right)\right]$$

ou

$$2(\mu-\lambda)\frac{2(1+\mu^2)\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2+\mu^2\lambda^2)+3\mu^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)}{\lambda^3\mu^3(1+\mu^2)(1+\lambda^2)^2}$$
$$-\frac{\operatorname{arc\,tang}\lambda}{\lambda}\,2(\mu-\lambda)\frac{2(1+\mu^2)\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2+\mu^2\lambda^2)+(3+\lambda^2)\mu^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)}{\lambda^3\mu^3(1+\mu^2)(1+\lambda^2)^2},$$

ce qui équivaut à

$$2(\mu-\lambda)\frac{2(1+\mu^2)\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2+\mu^2\lambda^2)+(3+\lambda^2)\mu^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)}{\lambda^4\mu^3(1+\mu^2)(1+\lambda^2)^2}$$
$$\times\left[\lambda-\operatorname{arc\,tang}\lambda-\frac{\mu^3\lambda^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)}{2(1+\mu^2)\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2+\mu^2\lambda^2)+(3+\lambda^2)\mu^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)}\right].$$

Cette dérivée a le signe du crochet. Différentions le crochet par rapport à λ. On arrive, toutes réductions faites, à

$$\frac{\left.\begin{matrix}6\mu^8\\+10\mu^6\end{matrix}\right|\lambda^4\left.\begin{matrix}+12\mu^7\\+20\mu^5\end{matrix}\right|\lambda^5\left.\begin{matrix}+18\mu^8\\+50\mu^6\\+28\mu^4\end{matrix}\right|\lambda^6\left.\begin{matrix}+20\mu^7\\+56\mu^5\\+20\mu^3\end{matrix}\right|\lambda^7\left.\begin{matrix}+18\mu^8\\+58\mu^6\\+56\mu^4\\+12\mu^2\end{matrix}\right|\lambda^8\left.\begin{matrix}+8\mu^7\\+44\mu^5\\+36\mu^3\\+8\mu\end{matrix}\right|\lambda^9\left.\begin{matrix}+6\mu^8\\+14\mu^6\\+24\mu^4\\+16\mu^2\\+4\end{matrix}\right|\lambda^{10}}{[2(1+\mu^2)\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2+\lambda^2\mu^2)+(3+\lambda^2)\mu^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)]^2}>0.$$

Ainsi l'expression entre crochets est croissante. Elle est nulle pour $\lambda=0$, donc elle est toujours positive. Il résulte de là que la dérivée première de la fonction dont nous nous occupons est positive, et que cette fonction va en croissant avec λ. μ ne peut être dépassé par λ; on obtiendra donc la plus grande valeur de la fonction en y faisant $\lambda=\mu$. Le résultat de la substitution est nul. Ainsi la fonction à étudier est toujours négative. Il en résulte que le numérateur de η est essentiellement positif et que η a le signe de son dénominateur, qui est négatif.

La condition $\eta < 0$ équivaut à

$$\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{M}'_1 R'_1\, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} > 0,$$

et, à cause de l'identité (35),

$$\iiint R'M'N'\, dm' = \iint l'(M'N')^2\, d\omega' \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{M}' R'\, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

on doit avoir

$$\iiint R'_1 M'_1 N'_1\, dm' > 0$$

ou (11)

$$\iiint \left[2z'^2 - (x'^2 + y'^2) + \frac{2c^2}{3} \right] dm' < 0,$$

l'intégrale triple étant étendue à l'ellipsoïde E_1.

Les deux moments d'inertie A_1 et B_1 étant égaux, cette inégalité peut s'écrire

$$A_1 - C_1 + \frac{c^2}{3}\mathfrak{M}_1 < 0.$$

On peut se faire une idée grossière de la distribution de la densité à l'intérieur de l'ellipsoïde E_1. L'hyperboloïde à une nappe, ayant pour équation

$$2z^2 - (x^2 + y^2) + \frac{2c^2}{3} = 0,$$

sépare l'espace en deux régions. Dans celle qui contient l'axe OZ (*fig.* 9), la fonction $2z^2 - x^2 - y^2 + \frac{2c^2}{3}$ est positive; dans l'autre région, cette fonction est négative. Quand l'ellipsoïde est homogène, on a

$$\iiint \left(2z'^2 - x'^2 - y'^2 + 2\frac{c^2}{3} \right) dm'$$
$$= 2\left(A_1 - C_1 + \frac{c^2}{3}\mathfrak{M}_1 \right) = \frac{4}{15} c^2 \mathfrak{M}_1 > 0.$$

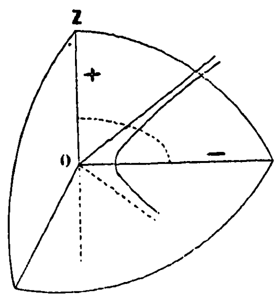
Ainsi, dans la question qui nous occupe, les matières les plus denses doivent être placées dans la région où ne se trouve pas l'axe OZ, c'est-à-dire près de l'équateur, sans quoi l'intégrale triple ne pourrait être négative.

L'inégalité

$$C_1 - A_1 > \frac{c^2}{3}\mathfrak{M}_1$$

permet d'affirmer que les figures dont nous nous occupons, si elles sont réalisables, n'existent pas dans le système planétaire. Désignons par

Fig. 9.



C_2 et A_2 les moments d'inertie principaux de la couche homogène supérieure. L'expression connue des moments d'inertie d'un ellipsoïde homogène donne

$$C_2 - A_2 = \frac{c^2}{5}\mathfrak{M}_2.$$

En ajoutant membre à membre à l'inégalité qui précède, on a, pour la différence des moments d'inertie de toute la masse,

$$C - A > \frac{c^2}{3}\mathfrak{M}_1 + \frac{c^2}{5}\mathfrak{M}_2$$

et, *a fortiori*,

$$C - A > \frac{c^2}{5}\mathfrak{M},$$

où $\mathfrak{M}$ est la masse totale. Or on a trouvé, pour un ellipsoïde peu aplati dont la surface est de niveau (51),

$$C - A = \mathfrak{M}\tfrac{2}{3}\rho_2^2(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varphi),$$

en appelant ρ_2 le rayon équatorial, ε l'aplatissement de la surface et φ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur.

Portant cette valeur dans l'inégalité et remplaçant $\frac{c^2}{\rho_2^2}$ par 2ε, il vient

$$\tfrac{2}{3}(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varphi) > \tfrac{2}{5}\varepsilon$$

ou

$$\varepsilon > \frac{5\varphi}{4}.$$

C'est cette inégalité qui est en contradiction avec ce que l'on observe dans le système planétaire.

Nous déduirons un autre résultat de la condition $\eta < 0$.

Supposons l'ellipsoïde E_1 entièrement fluide. Peut-il être composé de couches toutes séparées par des ellipsoïdes? En vertu du théorème de M. Poincaré, toutes ces surfaces seraient homofocales. La quantité η représenterait, dans ces conditions, la densité moyenne de l'ellipsoïde E_1. On voit donc que l'équilibre ne pourrait exister que si la densité moyenne de cet ellipsoïde était négative, c'est-à-dire si les masses internes étaient en majeure partie répulsives (1).

---

(1) Ce théorème est plus général que celui auquel je suis arrivé dans mon Mémoire déjà cité.