JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. KOENIGS

Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 5 (1889), p. 321-343.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1889_4_5__321_0>

Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque;

PAR M. G. KŒNIGS,

Maître de Conférences à l'École Normale supérieure et à la Sorbonne.

Tout le monde connaît les belles propositions sur les corps de révolution auxquelles est attaché le nom de Guldin. On a cru, il est vrai, pouvoir lire un énoncé de ces théorèmes dans un passage obscur des *Collections* de Pappus, mais c'est Guldin qui paraît en avoir donné, le premier, sinon une démonstration satisfaisante, au moins un énoncé suffisamment précis.

Au début de ces recherches, je m'étais proposé de trouver une extension du théorème de Guldin qui concerne le volume, en supposant qu'un contour fermé quelconque, donné, accomplît une révolution complète autour d'une droite de l'espace. Le volume engendré devait être naturellement une fonction des coordonnées de l'axe de rotation (une *fonction de droite*). Je fus ainsi conduit à reconnaître que la théorie des segments de Möbius s'imposait, en quelque sorte, dans la solution de ce problème, et qu'elle en fournissait la solution la plus rationnelle et la plus simple. En cherchant ensuite à étendre mon étude au cas d'un mouvement quelconque, je me vis encore forcé de faire un nouvel appel à cette même théorie, pour la représentation du mouvement, en sorte que, grâce à la doctrine de Möbius, tout ce qui a trait aux volumes engendrés par un contour fermé de forme invariable se trouve compris dans une proposition unique, simple, immédiatement compréhensible.

Cette double intervention de la théorie de Möbius m'a paru d'autant plus digne d'intérêt qu'on ne lui avait pas, jusqu'ici, trouvé d'emploi, en dehors des deux applications classiques de la Statique et de la Cinématique du corps solide, pour lesquelles, à vrai dire, Möbius l'avait justement créée.

Il m'a semblé important, pour la théorie de Möbius, de prouver qu'elle ne se borne pas à ces deux applications, qu'elle n'est pas stérile et propre uniquement à satisfaire un esprit philosophique; mais, au contraire, qu'elle s'impose dans telles questions qui ne pourraient trouver en dehors d'elle leur solution naturelle.

Cette considération m'a décidé à développer ici cette application nouvelle de la doctrine de Möbius.

I. — Énoncé du problème.

Il me semble convenable d'expliquer au début ce que j'entends par volume engendré par un contour fermé dans un mouvement quelconque. Dans le cas général, en effet, le contour fermé mobile engendre une sorte de surface-canal ouverte aux deux bouts, et l'on n'aperçoit pas ce qu'il faut entendre par le mot *volume*. Pour lever cette difficulté, concevons que l'on ait tendu une cloison sur le contour fermé; le volume engendré par le contour sera celui que cette cloison aura balayé.

Quant à la valeur du volume ainsi défini, elle se trouve indépendante de la cloison choisie; car, changer la cloison T et la remplacer par une autre T′, également tendue sur le contour, cela revient à transporter d'une extrémité à l'autre du volume l'onglet compris entre les deux cloisons T, T′, et dont le contour proposé forme l'arête. On voit donc que le volume possède une valeur indépendante du choix de la cloison. Cette valeur ne dépend que du contour, et c'est à juste titre que nous considérons le volume comme engendré par le contour.

Au surplus, les développements ultérieurs démontreront en toute rigueur l'indifférence du choix de la cloison, dont je ne puis ici que faire comprendre approximativement l'origine.

II. — Axe aréolaire.

La solution précise du problème exige, en effet, quelques explications préliminaires que je vais exposer.

Il est d'abord nécessaire, en vue de la fixation des signes, de supposer que le contour est doué d'un sens de parcours donné *a priori*. Dans certaines questions, notamment dans celles qui ont trait aux aires, on est assujetti déjà à cette nécessité.

Soient un plan orienté Π [1] et un contour fermé $\mathfrak{S}$, doué d'un sens de parcours. On sait que la projection du contour sur le plan Π a une aire parfaitement définie en grandeur et signe, qui a pour valeur

$$(1) \qquad A\alpha + B\beta + C\gamma,$$

en supposant que α, β, γ soient les cosinus directeurs de l'orientation. Quant à A, B, C, ce sont les aires (prises avec leurs signes) des projections du contour sur les plans de coordonnées. Ainsi l'on a

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \int y\,dz = -\int z\,dy = \tfrac{1}{2}\int (y\,dz - z\,dy), \\ B &= \int z\,dx = -\int x\,dz = \tfrac{1}{2}\int (z\,dx - x\,dz), \\ C &= \int x\,dy = -\int y\,dx = \tfrac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx), \end{aligned} \right.$$

les intégrales étant prises le long du contour $\mathfrak{S}$, parcouru dans le sens qui lui appartient.

Considérons un segment, dont la position sera indéterminée dans l'espace, mais dont A, B, C seront les projections sur les axes de coor-

(1) On appelle *plan orienté* un plan sur les normales duquel un sens de parcours est fixé. Les cosinus directeurs α, β, γ relatifs à ce sens de parcours fixent l'orientation du plan ; on peut les appeler les *cosinus directeurs de l'orientation*. J'appelle *axe d'orientation* une quelconque des normales au plan, décrite dans le sens de l'orientation, par exemple celle qui passe à l'origine.

données; la formule (1) fait voir que, pour avoir l'aire du contour sur un plan orienté quelconque, il suffira de projeter ce segment sur l'axe d'orientation du plan, en affectant la longueur du segment du signe + ou —, selon qu'il aura le sens de l'axe d'orientation du plan ou le sens opposé.

Je donnerai abréviativement le nom d'*axe aréolaire* du contour à ce segment dont la simple projection sur un axe suffit pour représenter en grandeur et en signe l'aire de la projection du contour sur tout plan orienté par cet axe.

III. — La formule de Stokes.

Considérons toujours un contour fermé $\mathcal{C}$ doué d'un sens de parcours, et tendons une cloison T sur ce contour; puis, décomposons cette cloison en éléments superficiels infiniment petits ω. Chacun de ces éléments superficiels est limité par un contour fermé infiniment petit, et je vais montrer que la propriété du contour $\mathcal{C}$ d'avoir un sens de parcours se transmet à tous les contours élémentaires dans lesquels la cloison a été décomposée.

Soient, en effet, M un point de la cloison T et MM′, MM″ deux segments égaux à une même quantité constante h, aussi petite qu'on voudra, portés de part et d'autre de M sur la normale à la cloison au point M. Lorsque ce point M décrit la cloison, les points M′ et M″ décrivent deux surfaces T′ et T″ parallèles à la cloison et limitées respectivement par les deux contours $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ que l'on obtient lorsque le point M décrit le contour $\mathcal{C}$ lui-même.

Prenons le point M, de sorte qu'il soit infiniment voisin d'un point P du contour $\mathcal{C}$, et menons la tangente en P au contour dans le sens de ce contour; sur la normale en M à la cloison, il y a un sens qui est dextrorsum avec le sens de cette tangente; supposons que ce soit le sens MM′, qui va de T à la surface T′. Nous dirons que la surface T′ est à droite de la cloison T′; la surface T″ sera, au contraire, à gauche de cette cloison.

Si, au lieu du point P du contour $\mathcal{C}$, on avait pris un autre point Q de ce même contour, et puis un point M voisin de Q sur la cloison T, et que l'on eût effectué les mêmes constructions, on aurait évidemment été conduit à donner le nom de droite de la cloison T encore à la surface T', et de gauche à la surface T'', en sorte que la définition est indépendante, au fond, du point P pris sur le contour. On s'en assure aisément par voie de continuité, en déplaçant le point M sur une courbe tracée sur la cloison T, et infiniment voisine de l'arc PQ du contour $\mathcal{C}$.

Il est clair que, si l'on change le sens de parcours du contour $\mathcal{C}$, la droite et la gauche de la cloison T se permutent.

Ceci posé, prenons un point M de la cloison T, et soit ω un élément superficiel qui entoure le point M; élevons en M la normale à la cloison T vers la *droite de cette cloison;* soit MN cette normale. Des deux sens de parcours qu'on peut attribuer au contour élémentaire ω, il en est un qui est dextrorsum avec MN : c'est ce sens que j'attribue au contour ω.

Tout contour élémentaire ω se trouve ainsi doué d'un sens de parcours déterminé, et ce sens change avec celui qui est donné sur le contour total $\mathcal{C}$.

Maintenant désignons par ξ, η, ζ les cosinus directeurs de la normale *droite* MN et par u, v, w trois fonctions arbitraires des coordonnées x, y, z; on a la formule suivante, attribuée à Stokes,

$$(3)\quad \begin{cases} \int(u\,dx + v\,dy + w\,dz) \\ \quad = \int\int\left[\xi\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \zeta\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\omega; \end{cases}$$

l'intégrale simple est prise, suivant le contour, dans le sens qui lui appartient, et l'intégrale double s'étend à tous les éléments ω. Ajoutons que, dans cette intégrale double, ω représente la valeur de l'aire élémentaire du contour ω, qui est assimilable à une aire plane.

Comme application de cette formule de Stokes, cherchons la somme des aires des projections de tous les contours ω sur un plan Π, dont α, β, γ seront les cosinus directeurs de l'orientation.

Il faut observer que l'axe aréolaire du contour ω (assimilable à un contour plan) n'est autre qu'une longueur égale à ω, portée sur la normale MN. D'après un théorème bien connu sur la projection des aires planes, l'aire de projection sur le plan Π du contour ω aura donc la valeur suivante

$$(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\omega;$$

d'où, pour la somme de toutes ces projections,

$$\int\int(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\omega.$$

Or prenons, dans la formule de Stokes,

$$u = \frac{\beta z - \gamma y}{2}, \qquad v = \frac{\gamma x - \alpha z}{2}, \qquad w = \frac{\alpha y - \beta x}{2},$$

et nous aurons

$$\int \alpha \frac{y\,dz - z\,dy}{2} + \beta \frac{z\,dx - x\,dz}{2} + \gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{2}$$
$$= \int\int(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\omega,$$

c'est-à-dire, d'après les équations (2),

$$= A\alpha + B\beta + C\gamma.$$

On voit donc que la somme des aires des projections de tous les éléments ω sur un plan Π orienté, quelconque, est indépendante de la cloison T choisie et est égale à l'aire de la projection du contour sur ce plan.

C'est à dessein que j'ai rattaché cette remarque bien connue au théorème de Stokes, car une remarque toute pareille va me conduire à la solution du problème que je me suis proposé.

IV. — Volume de translation.

Il importe d'abord de fixer le signe des volumes et d'introduire à cet effet une convention. L'étude des volumes de translation nous en fournira l'occasion.

Supposons d'abord que le contour subisse une translation rectiligne dont je représenterai par u, v, w les composantes suivant trois axes rectangulaires liés au contour.

Les cosinus directeurs de cette translation seront

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}},$$

et $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ représentera son amplitude.

Concevons une cloison T tendue sur le contour; chaque élément ω de cette cloison décrira un élément cylindrique dont la section droite sera précisément la projection du contour ω sur le plan Π dont

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$$

sont les cosinus directeurs de l'orientation; la valeur absolue de cette section droite sera donc égale à la valeur absolue de l'expression

$$\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\xi + \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\eta + \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}\zeta\right)\omega,$$

où ξ, η, ζ sont les cosinus directeurs de la normale MN à la cloison définie comme précédemment. Pour avoir le volume, il suffira de multiplier la section droite par la hauteur $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$. Quant au signe, *je conviens expressément d'adopter celui même de l'aire de la projection du contour ω sur le plan* Π.

Le volume balayé par l'élément ω aura dès lors en grandeur *et signe* la valeur suivante

$$(u\xi + v\eta + w\zeta)\omega.$$

Le volume engendré par la cloison T sera la somme des volumes balayés par chaque élément, ce qui donne, pour le volume intégral,

$$\int\int(u\xi + v\eta + w\zeta)\omega.$$

Or on aperçoit tout de suite, d'après l'application déjà faite du théorème de Stokes, que cette intégrale a la valeur suivante

$$(4) \qquad Au + Bv + Cw;$$

où A, B, C ont la signification que leur attribuent les formules (2).

Je ne m'arrêterai pas à montrer que la formule (4) s'étend au cas d'une translation non rectiligne, à condition que u, v, w représentent les projections de la corde qui sous-tend l'arc de la courbe directrice du mouvement de translation.

Je passe immédiatement au cas d'un déplacement hélicoïdal.

V. — Volume hélicoidal.

J'observe d'abord que, pour une même hélice directrice, les volumes hélicoïdaux engendrés par un même contour sont entre eux comme les amplitudes des rotations effectuées autour de l'axe de l'hélice. Il suffit donc d'étudier le cas d'un déplacement hélicoïdal infiniment petit.

Je représente par p, q, r les composantes de la vitesse de rotation, le temps étant pris pour variable indépendante, et par a, b, c les composantes de la vitesse de l'origine; le tout en supposant que *les axes de coordonnées soient liés invariablement au contour*. La vitesse d'un point x, y, z lié au contour aura pour composantes

$$\begin{aligned} V_x &= a + qz - ry, \\ V_y &= b + rx - pz, \\ V_z &= c + py - qx; \end{aligned}$$

il suffirait de multiplier par dt pour avoir le déplacement même du point (x, y, z).

Considérons maintenant une cloison T tendue sur le contour, et un élément ω de cette cloison, décrit autour d'un point $M(x, y, z)$. Le volume balayé par l'élément ω est assimilable au volume qu'il engendrerait dans une translation égale et parallèle au déplacement $V_x\,dt$, $V_y\,dt$, $V_z\,dt$ du point M. Ce volume, d'après le numéro précédent, a donc pour valeur en grandeur et en signe

$$(V_x\xi + V_y\eta + V_z\zeta)\omega\, dt,$$

et le volume balayé par toute la cloison est la somme des volumes balayés par tous les éléments, c'est-à-dire

$$\int\int(V_x\xi + V_y\eta + V_z\zeta)\omega\, dt.$$

Or posons, dans la formule de Stokes,

$$u = \frac{bz - cy}{2} - p\frac{y^2 + z^2}{2},$$
$$v = \frac{cx - az}{2} - q\frac{z^2 + x^2}{2},$$
$$w = \frac{ay - bx}{2} - r\frac{x^2 + y^2}{2},$$

et nous trouvons

$$V_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad V_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad V_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'intégrale qui représente le volume se transforme donc dans l'intégrale simple, prise le long du contour,

$$dt\int\left[\left(\frac{bz - cy}{2} - p\frac{y^2 + z^2}{2}\right)dx + \left(\frac{cx - az}{2} - q\frac{z^2 + x^2}{2}\right)dy + \left(\frac{ay - bx}{2} - r\frac{x^2 + y^2}{2}\right)dz\right].$$

Posons, outre les équations (2), les suivantes

$$(2')\qquad \left\{\begin{aligned} L &= -\int\frac{y^2 + z^2}{2}\,dx,\\ M &= -\int\frac{z^2 + y^2}{2}\,dy,\\ N &= -\int\frac{x^2 + y^2}{2}\,dz,\end{aligned}\right.$$

et nous arrivons finalement à cette expression du volume

$$(5) \qquad (Aa + Bb + Cc + Lp + Mq + Nr)\,dt.$$

Cette formule est fondamentale, je vais l'interpréter.

VI. — Système de segments attaché au contour.

On sait qu'un système de segments rapporté à trois axes rectangulaires a pour coordonnées les sommes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des projections des segments qui le composent sur les axes de coordonnées, et les moments résultants $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, pris par rapport à ces mêmes axes.

Si l'on fait la somme géométrique de tous les segments du système, le segment qui figure cette somme, et qu'on nomme la *résultante de translation* du système, a pour projections $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et, par conséquent, sa longueur est égale à

$$(6) \qquad \sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}.$$

Chasles a démontré que si par voie de glissement des segments sur leurs lignes d'action, ou par voie de composition et de décomposition, on transforme un système en un autre, qui lui est, comme on sait, *équivalent*, les tétraèdres construits sur les segments du premier système pris deux à deux, avec des signes convenables, ont une somme égale à la somme analogue que l'on obtiendrait avec le second système de segments, équivalent au premier. Cette somme doit donc s'exprimer à l'aide des coordonnées $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, et l'on sait en effet qu'elle a pour valeur le sixième de l'expression

$$(7) \qquad \mathcal{A}\mathcal{L} + \mathcal{B}\mathcal{M} + \mathcal{C}\mathcal{N}.$$

Cette expression est donc un invariant du système de segments, de même que la somme $\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2$ qui représente le carré de la résultante de translation. Le rapport

$$(8) \qquad h = \frac{\mathcal{A}\mathcal{L} + \mathcal{B}\mathcal{M} + \mathcal{C}\mathcal{N}}{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}$$

est donc également un invariant du système de segments.

Le théorème de Chasles est susceptible d'une extension, dans laquelle on considère simultanément deux systèmes de segments $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$; $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, $\mathcal{L}'$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{N}'$. Construisons de toutes les façons possibles un tétraèdre en prenant un segment dans un système et un segment dans l'autre, la somme des tétraèdres ainsi obtenus et affectés d'un signe convenable est égale au sixième de l'expression

$$(9) \qquad \mathcal{A}\mathcal{L}' + \mathcal{B}\mathcal{M}' + \mathcal{C}\mathcal{N}' + \mathcal{L}\mathcal{A}' + \mathcal{M}\mathcal{B}' + \mathcal{N}\mathcal{C}'.$$

Cette expression constitue donc un *invariant simultané* des deux systèmes : on lui donne le nom de *moment* des deux systèmes.

Si les deux systèmes se réduisent chacun à un segment, le moment est égal au sextuple du tétraèdre construit sur ces deux segments.

Parmi tous les systèmes de segments que l'on peut imaginer et qui forment une sextuple infinité, je considère particulièrement ceux pour lesquels la résultante de translation est égale à l'unité ; je donnerai à ces systèmes de segments unitaires le nom de *vis*, pour adopter une locution employée par M. Ball, dans ses recherches sur la dynamique des corps solides.

Soit un système de segments

$$\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}, \quad \mathcal{C}, \quad \mathcal{L}, \quad \mathcal{M}, \quad \mathcal{N};$$

si l'on divise par $\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}$ toutes les coordonnées de ce système, on obtient les coordonnées d'une vis

$$(10) \qquad \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}}, \quad \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}}.$$

Nous dirons d'une telle vis qu'*elle porte* le système de segments. D'après cela, tout système de segments peut être représenté par les coordonnées α, β, γ, λ, μ, ν de la vis qui le porte, et par son *module*, qui ne sera autre que la longueur $\mathcal{R}$ de sa résultante de translation.

Si l'on se reporte à l'expression (8) de l'invariant h, on voit que h ne dépend pas du module du système, mais seulement de la vis qui le porte ; en introduisant les coordonnées α, β, γ, λ, μ, ν de cette vis, on trouve, puisque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$,

$$h = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu. \tag{10}$$

Cette quantité h est le *pas* de la vis.

Si le pas est nul, la vis se réduit simplement à un axe, et le système de segments est réductible à un segment unique. Les axes de l'espace sont donc des vis de pas nul; on peut encore dire que ce sont des segments dont la longueur est l'unité.

Pour qui connaît les principes de la théorie de Möbius, ces définitions ne peuvent présenter de difficultés. Les vis portent les systèmes de segments, de même que les axes portent les segments eux-mêmes.

On voit dès lors ce qu'il faudra entendre par moment d'un segment ou d'un système de segments par rapport à une vis; si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ sont les coordonnées du système de segments, α, β, γ, λ, μ, ν celles de la vis, ce moment aura l'expression suivante

$$\mathcal{A}\lambda + \mathcal{B}\mu + \mathcal{C}\nu + \mathcal{L}\alpha + \mathcal{M}\beta + \mathcal{N}\gamma. \tag{11}$$

Si la vis se réduit à un axe, on retombe tout simplement sur le moment du système par rapport à cet axe.

Ces notions rappelées, revenons au problème qui nous occupe.

Je considère le système de segments dont les coordonnées seraient A, B, C, L, M, N [formules (2) et (2')], système qui est, en quelque sorte, attaché au contour donné $\mathcal{C}$, et que je représenterai par la notation $S\mathcal{C}$.

La résultante de translation de ce système n'est autre que l'*axe aréolaire* du contour. Quant à L, M, N, leur signification est des plus simples.

Supposons que le mouvement hélicoïdal se réduise à une rotation autour de l'axe Ox, la formule (5) nous donne pour expression du volume

$$\mathrm{L}p\,dt$$

ou encore, $\varepsilon = p\,dt$ représentant l'angle de rotation,

$$\mathrm{L}\varepsilon.$$

Or les volumes, engendrés par révolution autour d'un même axe, étant proportionnels aux angles de rotation, on voit que L *est le volume que le contour engendrerait par une rotation d'amplitude-unité autour de* $\mathrm{O}x$. Les quantités M, N ont des significations analogues. Les formules (2′) convenablement interprétées conduisent d'ailleurs au même résultat.

VII. — Interprétation de la formule fondamentale (5).

Il nous est maintenant possible d'interpréter la formule (5). En effet, le déplacement hélicoïdal s'effectue suivant la vis dont les coordonnées α, β, γ, λ, μ, ν sont égales à

$$\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$
$$\lambda = \frac{a}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \mu = \frac{b}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \qquad \nu = \frac{c}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

et l'amplitude ε de la rotation a pour valeur

$$\varepsilon = \sqrt{p^2+q^2+r^2}\,dt.$$

La formule (5) peut donc s'écrire

$$(12) \qquad (\mathrm{A}\lambda + \mathrm{B}\mu + \mathrm{C}\nu + \mathrm{L}\alpha + \mathrm{M}\beta + \mathrm{N}\gamma)\varepsilon.$$

Si l'on utilise alors la remarque que, dans un mouvement hélicoïdal (cas qui comprend le mouvement de révolution), les volumes engendrés sont proportionnels aux amplitudes, on reconnaîtra qu'il est permis de supposer dans la formule (12) que ε est fini.

La quantité entre parenthèses n'est autre, du reste, que le moment du système $\mathrm{S}\mathfrak{S}$ par rapport à la vis V qui dirige le mouvement hélicoïdal. De là ce théorème :

Si un contour fermé $\mathfrak{S}$ *est animé d'un mouvement hélicoïdal d'amplitude* ε *sur une vis* V, *le volume engendré est égal au pro-*

duit de l'amplitude ε *par le moment du système* $S\mathfrak{S}$ *pris par rapport à la vis* V.

Supposons, en particulier, que la vis se réduise à un axe Ξ; on a ce théorème :

Le volume engendré par un contour fermé $\mathfrak{S}$ *tournant d'un angle* ε *autour d'un axe* Ξ *est égal au produit de l'amplitude* ε *par le moment du système* $S\mathfrak{S}$ *pris par rapport à l'axe* Ξ.

Ce dernier théorème montre que la théorie des moments de Poinsot et de Möbius s'applique en tous ses points à l'étude des volumes de révolution engendrés par un contour fermé donné. La distribution des volumes est la même que celle des moments d'un certain système de segments. Il est aisé d'en conclure une série de théorèmes calqués sur ceux de la théorie des moments. Par exemple, le lieu des axes de volume nul est un complexe linéaire; le lieu des axes d'égal volume (pour une même amplitude de rotation, bien entendu) est un complexe quadratique, etc.

Dans mes Communications aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, après avoir démontré le théorème relatif aux corps de révolution, j'étais passé au cas des volumes hélicoïdaux par l'application d'une proposition que j'avais démontrée directement et qui me paraît avoir en elle-même quelque intérêt.

Tout déplacement hélicoïdal est la résultante d'une rotation autour de l'axe hélicoïdal et d'une translation le long de ce même axe; si ε est l'amplitude de la rotation, l'amplitude de la translation est égale à $h\varepsilon$, où

$$h = \frac{\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu$$

représente le pas de la vis.

Les coordonnées de l'axe de rotation sont alors

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \lambda - \alpha h, \quad \mu - \beta h, \quad \nu - \gamma h,$$

et les composantes de la translation ont pour valeur

$$\alpha h\varepsilon, \quad \beta h\varepsilon, \quad \gamma h\varepsilon.$$

Le volume engendré dans la rotation est donc égal à

$$[L\alpha + M\beta + N\gamma + A(\lambda - \alpha h) + B(\mu - \beta h) + C(\nu - \gamma h)]\varepsilon,$$

et le volume de translation est, au contraire, égal à

$$(A\alpha + B\beta + C\gamma)h\varepsilon.$$

La somme de ces deux volumes est

$$(L\alpha + M\beta + N\gamma + A\lambda + B\mu + C\nu)\varepsilon,$$

c'est-à-dire le volume hélicoïdal lui-même.

Ainsi, *le volume hélicoïdal est la résultante du volume de révolution et du volume de translation, de même que le mouvement hélicoïdal lui-même est la résultante du mouvement de rotation et du mouvement de glissement.*

VIII. — Cas d'un mouvement quelconque.

J'ai hâte d'arriver au cas d'un déplacement fini *quelconque* du contour. Je suppose que la position du contour dépende d'un paramètre t, que nous pouvons imaginer être le temps. Le mouvement correspondra à une variation de t entre deux limites t_0 et t_1, et ce mouvement pourra être considéré comme une succession de torsions infiniment petites sur des vis successives.

Soient, à l'époque t, α, β, γ, λ, μ, ν les coordonnées de la vis instantanée, prises par rapport à des axes entraînés avec le contour, et ω la vitesse angulaire. Les quantités α, β, γ, λ, μ, ν, ω seront des fonctions connues de la variable t, et le volume engendré dans la torsion élémentaire sera, d'après la formule (12),

$$(A\lambda + B\mu + C\nu + L\alpha + M\beta + N\gamma)\omega\, dt,$$

et, par suite, le volume fini engendré dans le mouvement intégral sera représenté par l'intégrale définie

$$\int_{t_0}^{t_1} (A\lambda + B\mu + C\nu + L\alpha + M\beta + N\gamma)\omega\, dt.$$

J'introduis alors les notations suivantes

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{lll} a = \int_{t_0}^{t_1} \alpha\omega\, dt, & b = \int_{t_0}^{t_1} \beta\omega\, dt, & c = \int_{t_0}^{t_1} \gamma\omega\, dt, \\ l = \int_{t_0}^{t_1} \lambda\omega\, dt, & m = \int_{t_0}^{t_1} \mu\omega\, dt, & n = \int_{t_0}^{t_1} \nu\omega\, dt, \end{array} \right.$$

et l'expression du volume devient

$$(\mathrm{F}) \qquad Al + Bm + Cn + La + Mb + Nc.$$

Cette formule générale (F) est celle qui résout complètement le problème général que je m'étais proposé. Nous allons chercher à l'interpréter.

IX. — Système de segments lié au mouvement.

Dire que l'on se donne le mouvement dont est animé le contour $\mathcal{C}$, c'est dire que l'on se donne les quantités α, β, γ, λ, μ, ν, ω en fonction de t, et, par conséquent, les intégrales a, b, c, l, m, n.

Je regarderai ces six intégrales comme les coordonnées d'un système de segments $S\mathfrak{M}$, dont je pourrai dire qu'il est *attaché au mouvement*, de même que le système $S\mathcal{C}$ est attaché au contour $\mathcal{C}$.

Si l'on se reporte alors à la formule (9) qui représente le moment de deux systèmes de segments, on voit que la formule (F) exprime le théorème suivant :

Le volume engendré par un contour fermé $\mathcal{C}$ dans un mouvement quelconque $\mathfrak{M}$ est égal au moment de deux systèmes de segments $S\mathcal{C}$, $S\mathfrak{M}$ *qui dépendent, le premier, du contour seulement, et le second uniquement du mouvement.*

Ainsi se trouve résolu le problème que je m'étais proposé ; il ne me reste plus qu'à en développer quelques conséquences et quelques cas particuliers.

Comme exemple des diverses remarques générales auxquelles peut donner lieu la formule (F), j'énoncerai les deux théorèmes suivants :

I. *Si sept contours fermés sont liés invariablement entre eux, il existe une même relation linéaire et homogène entre les sept volumes auxquels ces contours donnent lieu dans un mouvement commun arbitraire.*

Il suffit, pour démontrer ce théorème, de remarquer que les *sept* volumes $v_1, v_2, \ldots, v_7$ sont des fonctions linéaires des *six* paramètres a, b, c, l, m, n par lesquels intervient le mouvement.

II. *Si l'on imprime à un contour $\mathcal{C}$ sept mouvements $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots,$ $\mathfrak{M}_6, \mathfrak{M}_7$, il existe entre les sept volumes engendrés par ce contour une relation linéaire homogène, indépendante du contour choisi.*

Ce théorème résulte d'une remarque analogue à la précédente.

L'observation suivante offre encore un certain intérêt.

Considérons le système $S\mathfrak{M}$, de coordonnées

$$a, \quad b, \quad c, \quad l, \quad m, \quad n,$$

porté par la vis $\frac{a}{\theta}, \frac{b}{\theta}, \frac{c}{\theta}, \frac{l}{\theta}, \frac{m}{\theta}, \frac{n}{\theta}$, où

$$\theta = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Il est clair, d'après la formule F, que tout contour fermé invariablement lié aux axes mobiles Ox, Oy, Oz engendre, dans le mouvement $\mathfrak{M}$, le même volume que s'il était animé d'une torsion d'amplitude θ sur la vis $\frac{a}{\theta}, \frac{b}{\theta}, \frac{c}{\theta}, \frac{l}{\theta}, \frac{m}{\theta}, \frac{n}{\theta}$. Appelons $\mathfrak{T}$ cette torsion hélicoïdale. La propriété que nous venons de reconnaître à $\mathfrak{T}$ permet de résoudre immédiatement la question suivante :

Trouver sur une surface donnée convexe Σ une courbe fermée $\mathcal{C}$ qui engendre dans un mouvement donné $\mathfrak{M}$ le plus grand volume. Il suffira de résoudre le problème pour la torsion $\mathfrak{F}$; dans ce mouvement de torsion la surface Σ touche son enveloppe suivant une courbe $\mathfrak{C}$ qui est précisément la courbe fermée cherchée.

Je laisse au lecteur le soin de reconnaître qu'il existe des contours pour lesquels $S\mathfrak{C}$ est identiquement nul, d'autres pour lesquels $S\mathfrak{C}$ se réduit à un couple ou à un segment unique. Ce dernier cas est particulièrement intéressant, car il se présente chaque fois que le contour est plan.

X. — Cas d'un contour plan.

Considérons en effet un contour plan et adoptons, pour axes liés au contour, deux axes rectangulaires Gx, Gy, situés dans son plan et se coupant au centre de gravité G de son aire (que je suppose non nulle) et un troisième Gz normal au plan de contour.

Les formules (2) et (2′) nous donnent, puisque z est toujours nul sur le contour,

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = \tfrac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx),$$
$$L = -\tfrac{1}{2}\int y^2\,dx, \qquad M = -\tfrac{1}{2}\int x^2\,dy, \qquad N = 0.$$

Or les coordonnées ξ, η du centre de gravité de l'aire sont données par

$$C\xi = \iint x\,dx\,dy, \qquad C\eta = \iint y\,dx\,dy,$$

ou encore, en ramenant à des intégrales curvilignes,

$$C\xi = -\tfrac{1}{2}\int x^2\,dy, \qquad C\eta = \tfrac{1}{2}\int y^2\,dx.$$

On a donc

$$C\xi = M, \qquad C\eta = -L.$$

Mais, puisque le centre de gravité est à l'origine, on a

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0;$$

d'où

$$L = 0, \qquad M = 0.$$

Donc toutes les coordonnées du système $S\mathfrak{S}$ sont nulles, sauf C. Le système $S\mathfrak{S}$ est ainsi réductible à un seul segment C, égal à l'aire du contour et élevé perpendiculairement à son plan au centre de gravité de son aire. En un mot, le système se réduit à l'axe aréolaire, transporté au centre de gravité.

Le cas d'un contour plan n'est pas le seul où le système $S\mathfrak{S}$ se réduise à un segment unique. Mais chaque fois que $S\mathfrak{S}$ se réduit à un seul segment, il existe une infinité de contours plans qui, *dans tout mouvement,* engendrent chacun un volume équivalent à celui du contour considéré.

On peut même supposer, par exemple, que ce contour est une circonférence. Prenons en effet le cercle de rayon $\sqrt{\frac{C}{\pi}}$, et qui admettrait pour axe la ligne d'action du segment C; attribuons à ce cercle un sens de parcours qui soit *dextrorsum* avec le segment C : nous obtenons ainsi un contour circulaire dont le système $S\mathfrak{S}$ sera représenté par le segment C, et, par suite, dans tous les mouvements possibles, ce cercle engendrera des volumes équivalents à ceux qu'engendrent tous les contours dont le système se réduit au segment C.

Par suite, on peut énoncer ce théorème :

Un contour plan étant donné, il existe un cercle dans son plan qui, dans tout mouvement, *engendre un volume équivalent à celui engendré par le contour.*

§ XI. — Le théorème de Guldin.

On donne le nom de Guldin à une proposition concernant le volume engendré par un contour plan tournant autour d'une droite de son plan. Guldin a en effet énoncé cette proposition en 1635, dans son Traité *De centro gravitatis;* mais c'est dans les *Exercitationes geometricæ* de Cavalieri qu'on en trouve la première démonstration satisfaisante. Ajoutons qu'un passage obscur des *Collections mathématiques* de Pappus paraît avoir trait aux propositions attribuées à Guldin.

Celle de ces propositions qui concerne les volumes (la seule dont il soit ici question) se déduit aisément de la proposition relative aux corps de révolution du § VII.

En effet, soit un contour plan tournant autour d'un axe Δ situé dans son plan; soit θ l'angle de rotation; le volume sera égal au produit de θ par le moment pris par rapport à Δ du segment unique $\overline{C}$ auquel se réduit ici le système $S\mathfrak{S}$. Or, le segment $\overline{C}$ est normal au plan du contour au centre de gravité G de son aire; appelons r la distance de G à l'axe Δ, le moment aura pour valeur

$$r.C$$

et le volume sera, par conséquent,

$$r\theta.C.$$

Comme C est l'aire du contour plan, et $r\theta$ l'arc de cercle décrit par le centre de gravité, on a bien la proposition de Guldin.

Mais on peut généraliser encore cette proposition en l'étendant, sous sa forme légèrement modifiée, au cas d'un contour plan tournant autour d'un axe Δ quelconque.

Le volume sera encore égal au produit de θ par le moment du segment $\overline{C}$, pris par rapport à Δ.

Soit r la plus courte distance de Δ et de la droite Δ' qui porte le segment $\overline{C}$; soit $\sin\alpha$ la valeur positive du sinus de l'angle de ces deux droites. Le moment a pour valeur

$$rC\sin\alpha,$$

et le volume est, par conséquent,

$$\theta r.C\sin\alpha.$$

Or, soit P le pied, sur Δ', de la perpendiculaire commune à Δ' et à Δ. Dans θr on aperçoit le chemin décrit par le point P dans la rotation.

Dans $C \sin \alpha$ on reconnaît l'aire de la projection du contour sur le plan mené par le point P et par l'axe Δ.

De là l'énoncé suivant :

Le volume engendré par un contour plan tournant d'un angle quelconque autour d'un axe quelconque Δ *est égal au chemin parcouru par le point* P, *pied de la perpendiculaire commune à l'axe de rotation* Δ *et à la normale au plan du contour, élevée au centre de gravité de son aire, multiplié par l'aire de la projection de ce contour sur le plan mené par l'axe de rotation et le point* P.

Telle est la généralisation du théorème de Guldin pour les contours plans. Le cas d'un contour quelconque ne se prête pas à un énoncé aussi simple, et l'emploi du système de segments nous paraît fournir l'expression la plus simple, et en même temps la plus générale que l'on puisse désirer; surtout si, comme nous l'avons fait ici, au lieu de se borner au cas d'un mouvement de révolution, on veut embrasser le cas d'un mouvement quelconque.

XII. — Un cas particulier de mouvement.

Dans la proposition du § IX intervient un système $S\mathcal{M}$ de segments lié au mouvement. La définition directe de ce système, son interprétation, ne paraît pas aussi simple que celle du système $S\mathcal{C}$ lié au contour. Il y a cependant un cas où cette interprétation est facile : c'est celui où le mouvement est dirigé par une courbe.

Je dis que le mouvement d'une figure est dirigé par une courbe quand cette figure est liée invariablement au trièdre trirectangle formé par la tangente, la normale principale et la binormale d'une courbe. Soient s l'arc de la courbe directrice compté à partir de la position initiale du sommet du trièdre; σ et τ les arcs correspondants des indicatrices sphériques des tangentes et des binormales de la courbe directrice.

Prenons naturellement le trièdre de la courbe pour trièdre de référence mobile, et soient A, B, C, L, M, N les coordonnées du système $S\mathfrak{S}$ attaché à un contour $\mathfrak{S}$, lié invariablement à ce trièdre. Les coordonnées de la vis suivant laquelle s'effectue la torsion instantanée seront (DARBOUX, *Cours de Géométrie*, t. I, p. 15)

$$\alpha = -\frac{d\tau}{\sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2}}, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = \frac{d\sigma}{\sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2}},$$
$$\lambda = \frac{ds}{\sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2}}, \qquad \mu = 0, \qquad \nu = 0,$$

et l'amplitude de la rotation sera

$$\sqrt{d\tau^2 + d\sigma^2}.$$

Le volume hélicoïdal élémentaire sera donc, d'après la formule (12),

$$A\,ds - L\,d\tau + N\,d\sigma,$$

et le volume intégral dû à un déplacement fini sera alors, d'après la définition de s, σ, τ,

$$As - L\tau + N\sigma. \tag{13}$$

Telle est la formule simple à laquelle on parvient dans ce cas, et où les coordonnées du système $S\mathfrak{M}$ ont toutes des significations bien connues.

Qu'il s'agisse, par exemple, du cercle osculateur d'une courbe à courbure constante; nous aurons

$$A = 0, \qquad N = 0, \qquad L = \pi\rho^2,$$

où ρ est le rayon de courbure; on aura donc, pour le volume engendré par ce cercle,

$$\pi\rho^2\tau.$$

La formule (13) conduit à un certain nombre de problèmes où interviennent les courbes découvertes par M. Bertrand dans ses recherches sur les surfaces de normales principales.

Prenons, par exemple, un contour $\mathfrak{S}$ et un trièdre T lié invariablement à $\mathfrak{S}$. Cherchons à déplacer le trièdre, de sorte qu'il soit le trièdre d'une courbe et que le volume engendré par le contour $\mathfrak{S}$ soit proportionnel à l'arc de la courbe directrice, ainsi que cela a lieu dans le théorème de Guldin.

Nous devrons avoir

$$As - L\tau + N\sigma = Ks,$$

où K est une constante; d'où

$$A - L\frac{d\tau}{ds} + N\frac{d\sigma}{ds} = K.$$

Les courbures de la courbe directrice sont donc linéairement liées, et celle-ci est dès lors une courbe de M. Bertrand.

On parviendrait au même résultat si l'on voulait choisir la courbe directrice de telle sorte que deux contours $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ invariablement liés engendrent constamment des volumes égaux ou proportionnels.