JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉON AUTONNE

Recherches sur les groupes quadratiques crémoniens d'ordre fini. Second mémoire: multiplication des crémoniennes, groupes quadratiques ; groupe directeur

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 407-464.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__407_0>

Recherches sur les groupes quadratiques crémoniens d'ordre fini. Second Mémoire : *Multiplication des crémoniennes, groupes quadratiques; groupe directeur;*

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans un précédent Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 1888; voir aussi *Comptes rendus*, 14 mars 1887), j'ai étudié les propriétés d'une substitution quadratique crémonienne isolée. Je vais montrer maintenant comment de pareilles substitutions se combinent pour former des groupes quadratiques crémoniens d'ordre fini.

Soient deux crémoniennes quadratiques

$$s = \left| \begin{array}{ll} x_i & \varphi_i\left(\overset{a}{x}, \overset{b}{u}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\overset{c}{x}, \overset{d}{u}\right) \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right\},$$

$$s' = \left| \begin{array}{ll} x_i & \varphi'_i\left(\overset{a'}{x}, \overset{b'}{u}\right) \\ u_i & \psi'_i\left(\overset{c'}{x}, \overset{d'}{u}\right) \end{array} \right| = \left\{ \begin{array}{cc} a' & b' \\ c' & d' \end{array} \right\}.$$

On aura par définition

$$S = s's = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \\ u_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{Bmatrix}$$
$$= \begin{Bmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \Phi_i\left(\overset{a''}{x}, \overset{b''}{u}\right) \\ u_i & \Psi_i\left(\overset{c''}{x}, \overset{d''}{u}\right) \end{vmatrix}.$$

Les entiers a'', b'', c'', $d'' \leqq 8$, puisque les entiers a, b, c, d, a', b', c', $d' \leqq 2$.

Ainsi S n'est pas quadratique en général; il est nécessaire pour cela qu'il se sépare

$$\text{des } \Phi_i \text{ un facteur } P\left(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{u}\right),$$
$$\text{des } \Psi_i \quad \text{»} \quad Q\left(\overset{\gamma}{x}, \overset{\delta}{u}\right),$$

tels que les entiers

$$\left.\begin{matrix} a'a + b'c - \alpha, & a'b + b'd - \beta \\ c'a + d'c - \gamma, & c'b + d'd - \delta \end{matrix}\right\} \leqq 2.$$

Cela exige des conditions particulières fort étroites dont l'étude constitue les quatre premières Parties du présent travail.

Une discussion approfondie me permet, dans la cinquième Partie, d'énoncer le théorème suivant.

Appelons l toute monistique, telle que

$$l = \begin{vmatrix} x_1 & l_1 x_1 + l'_3 x_2 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l'_2 x_1 + l'_1 x_2 + l_3 x_3 \\ u_1 & l_2 l_3 u_1 - l_2 l'_2 u_3 \\ u_2 & -l_3 l'_3 u_1 + l_1 l_3 u_2 + (l'_2 l'_3 - l_1 l'_1) u_3 \\ u_3 & l_1 l_2 u_3 \end{vmatrix}$$

et ρ, ϖ et e les mêmes substitutions que dans le premier Mémoire.

Théorème. — *On obtient un groupe quadratique crémonien* G *en combinant ensemble d'une façon quelconque les substitutions* ρ, ϖ, e *avec des monistiques* l. *Tout groupe* G *peut être obtenu par ce procédé en combinant convenablement ensemble* ρ, ϖ, e *et* l.

Appelons z_1, z_2, z_3, z_4 les quatre fonctions suivantes des x_i et des u_i

$$x_1 u_3, \quad x_2 u_1, \qquad r_1 = x_2 u_2 - x_3 u_3, \quad x_2 u_3.$$

On aura réciproquement, en tenant compte de

$$\sum_i x_i u_i = 0,$$

les relations (α, β = facteurs de proportionnalité)

$$(0) \qquad \begin{cases} \alpha x_1 = 2 z_1 z_4, & \beta u_1 = 2 z_2 z_4, \\ \alpha x_2 = 2 z_4^2, & \beta u_2 = - z_1 z_2 + z_3 z_4, \\ \alpha x_3 = - z_1 z_2 - z_3 z_4, & \beta u_3 = 2 z_4^2. \end{cases}$$

Cela posé, soient z'_j, z''_j, ... les transformées de z_j ($j = 1, 2, 3, 4$) par les diverses substitutions du groupe quadratique crémonien G. Les déplacements des z'_j, z''_j, ..., forment un groupe G′ évidemment isomorphe à G. L'isomorphisme est d'ailleurs holoédrique : soit en effet s une substitution de G qui laisse immobile z_j; s, en vertu des relations (0), laissera immobiles x_i et u_i et $s = 1$.

Or un calcul simple montre que z'_j, z''_j, ... est une fonction linéaire homogène à coefficients constants des z_j et qu'une substitution s de G revient entre les z_j, z'_j, z''_j, ... à une substitution linéaire quaternaire de déterminant $\neq 0$. Ainsi les substitutions ρ, ϖ, e, l reviennent entre les z_j aux substitutions

$$\rho' = \begin{vmatrix} z_1 & -z_1 \\ z_2 & 2z_1 + z_2 \\ z_3 & z_3 \\ z_4 & -z_4 \end{vmatrix}, \qquad \varpi' = \begin{vmatrix} z_1 & z_4 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_2 \\ z_4 & z_1 \end{vmatrix}, \qquad e' = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & -z_3 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$
l' = \begin{vmatrix}
z_1 & l_1^2 z_1 + l_1 l_3' z_4 \\
z_2 & l_3 l_2 z_2 - l_2 l_2' z_4 \\
z_3 & -l_1 l_2' z_1 - l_3 l_3' z_2 + l_1 l_3 z_3 + (l_2' l_3' - 2 l_1 l_1') z_4 \\
z_4 & l_1 l_2 l_4
\end{vmatrix}.
$$

Cela revient au théorème que voici :

Théorème. — *Le groupe G dérivé des substitutions ρ, ϖ, e, l est isomorphe avec holoédrie au groupe linéaire quaternaire G′ dérivé de ρ', ϖ', e', l'.*

Soient

$$
s = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad s' = | \, z_j \quad T_j \, |, \qquad T_j = \sum_k a_{jk} z_k.
$$

$a_{jk} =$ const. de déterminant $\neq 0$,

$$
i = 1, 2, 3, \qquad j, k = 1, 2, 3, 4
$$

une substitution de G et sa correspondante dans G′.

Les relations (o) donnent immédiatement

$$
\begin{aligned}
\alpha y_1 &= 2 T_1 T_4, & \beta v_1 &= 2 T_2 T_4, \\
\alpha y_2 &= 2 T_4^2, & \beta v_2 &= -T_1 T_2 + T_3 T_4, \\
\alpha y_3 &= -T_1 T_2 - T_3 T_4, & \beta v_3 &= 2 T_4^2
\end{aligned}
$$

et, en remplaçant z_1, z_2, z_3, z_4 par $x_1 u_3$, $x_2 u_1$, r_1, $x_2 u_3$, on voit que s est de la forme

$$
s = \begin{vmatrix}
x_1 & 2 T_1 T_4 \\
x_2 & 2 T_4^2 \\
x_3 & -T_1 T_2 - T_3 T_4 \\
u_1 & 2 T_2 T_4 \\
u_2 & -T_1 T_2 + T_3 T_4 \\
u_3 & 2 T_4^2
\end{vmatrix},
$$

$$
T_j = a_{j1} x_1 u_3 + a_{j2} x_2 u_1 + a_{j3} r_1 + a_{j4} x_2 u_3.
$$

On voit que les substitutions s et s' se déduisent avec la plus grande facilité l'une de l'autre.

Soient a' et b' deux substitutions de G'

$$a' = \left| z_i \quad \sum_j a_{ij} z_j \right| \qquad \text{et} \qquad b' = \left| z_i \quad \sum_j b_{ij} z_j \right|;$$

on aura, en vertu de théories connues,

$$b'a' = \left| z_i \quad \sum_k z_k \sum_j b_{ij} a_{ik} \right|,$$

$$i, j, k = 1, 2, 3, 4.$$

La substitution ba de G pourra s'écrire immédiatement et le problème de la multiplication des crémoniennes est résolu.

Le groupe G' n'est pas le groupe quaternaire linéaire le plus général. Soit s' une substitution linéaire quaternaire quelconque, s'^{-1} son inverse. Ce qui précède permet de construire immédiatement une substitution quadratique s qui opérera sur les fonctions

$$x_1 u_3 = z_1, \qquad x_2 u_1 = z_2, \qquad r_1 = z_3, \qquad x_2 u_3 = z_4$$

la substitution s'; s'^{-1} donnera de même une substitution quadratique s^{-1}. Ainsi s sera quadratique et birationnelle, mais pourra n'être pas une substitution de contact. Pour que s soit crémonienne, il faut que s n'altère pas l'équation

$$\sum_i u_i dx_i = 0$$

et que s' n'altère pas l'équation

$$0 = 2 z_2 z_4 d.2 z_1 z_4 + (-z_1 z_2 + z_3 z_4) d.2 z_4^2 - 2 z_4^2 d.(z_1 z_2 + z_3 z_4)$$

ou simplement, après départ de $2 z_4^2$,

$$(1) \qquad 0 = z_2 dz_1 - z_1 dz_2 + z_3 dz_4 - z_4 dz_3,$$

laquelle équation s'obtient en remplaçant, dans

$$\sum_i u_i dx_i = 0,$$

x_i et u_i par les valeurs en fonction de z_j.

Si d'ailleurs s' n'altère pas l'*équation de contact*, s est quadratique, birationnelle de contact et fait par suite partie du groupe G.

Pour que G soit d'ordre fini, il faut et il suffit que G′ soit d'ordre fini.

Au lieu de construire G, on peut construire G′, groupe *directeur* du groupe G, car les formules précédentes permettent de passer de G′ à G avec la plus grande facilité. Malheureusement la construction des groupes linéaires quaternaires d'ordre fini n'a point encore été faite et paraît présenter des difficultés énormes. Je n'ai même pas pu résoudre le problème, en tenant compte de ce que les substitutions de G′ n'altèrent pas l'équation de contact et que par suite G′ n'est pas le groupe linéaire quaternaire d'ordre fini général.

Je me borne donc dans la sixième Partie à construire G′ dans des cas particuliers.

Premier cas particulier. — G *est dérivé de* ρ, ϖ, l *sans l'intervention de la dualistique* e.

Alors G n'est autre chose que le groupe quadratique Cremona du troisième type (*Comptes rendus*, 27 août 1883 et 3 mars 1884; *Journal de Mathématiques*, p. 436; 1885).

Second cas particulier. — *Les monistiques* l, *qui concourent avec* ρ, ϖ, e *pour former* C, *sont de la forme*

$$\begin{vmatrix} x_1 & l_1 x_1 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l_3 x_3 + l'_1 x_2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

Alors il y a pour G′ trois formes possibles :

I. $l'_1 = 0$. — G est dérivé de ϖ, e et de monistiques ayant toutes la forme canonique

$$\begin{vmatrix} x_1 & l_1 x_1 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l_3 x_3 \\ \ldots & \ldots\ldots \end{vmatrix},$$

$$l_i = \text{racine de l'unité.}$$

G ne contient que des crémoniques.

II. G′ s'obtient en combinant la substitution

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_3 \\ z_2 & z_4 \\ z_3 & z_1 \\ z_4 & z_2 \end{vmatrix} \quad \text{avec un groupe} \quad \begin{vmatrix} z_1 & p_{11} z_1 + p_{12} z_2 \\ z_2 & p_{21} z_1 + p_{22} z_2 \\ z_3 & z_3 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

où les coefficients p sont choisis de façon que

$$p_{22} p_{11} - p_{12} p_{21} = 1$$

et que le groupe linéaire binaire

$$\begin{vmatrix} t_1 & p_{11} t_1 + p_{12} t_2 \\ t_2 & p_{21} t_1 + p_{22} t_2 \end{vmatrix}$$

soit d'ordre fini.

III. G′ est de la forme

$$\begin{vmatrix} z_1 & p_{11} z_1 + p_{12} z_2 \\ z_2 & p_{21} z_1 + p_{22} z_2 \\ z_3 & q_{11} z_3 + q_{12} z_4 \\ z_4 & q_{21} z_3 + q_{22} z_4 \end{vmatrix} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{matrix} p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21} \\ q_{11} q_{22} - q_{12} q_{21} \end{matrix} \right\} = 1,$$

où les groupes linéaires binaires

$$\begin{vmatrix} t_1 & p_{11} t_1 + p_{12} t_2 \\ t_2 & p_{21} t_1 + p_{22} t_2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} t_1 & q_{11} t_1 + q_{12} t_2 \\ t_2 & q_{21} t_1 + q_{22} t_2 \end{vmatrix}$$

sont d'ordre fini.

Troisième cas particulier. — G *est dérivé de* ρ, c, l, *sans l'intervention de* ϖ.

Alors G' est de la forme III du cas précédent et de plus $q_{21} = 0$ (¹).

PRÉLIMINAIRES.

PRIMORDIALES, RÉSEAUX ET CONIQUES GÉNÉRALES D'UNE CRÉMONIENNE QUADRATIQUE.

Dans tout le présent Mémoire, je ferai un usage continuel des coniques du réseau ponctuel ou linéaire (*voir* premier Mémoire), relatif à une substitution crémonienne.

Je désigne, pour abréger, par le même symbole, une courbe et le premier membre de son équation. J'exprime par l'égalité des symboles la coïncidence des courbes.

Appelons $P^s_{pp} = 0$, $P^s_{lp} = 0$, ... les primordiales puncto-ponctuelle, linéo-ponctuelle, etc. d'une crémonienne s. Appelons C^s_p, C^s_l, ... la conique générale du réseau R^s_p, R^s_l, ..., c'est-à-dire la conique quelconque de ce réseau.

C^s_p sera représentée en coordonnées-points x_i par l'équation $P^s_{pp} = 0$, où y_i est *souligné*, c'est-à-dire considéré comme premier paramètre et non comme coordonnée (*voir* premier Mémoire). En coordonnées-lignes u_i, C^s_p sera représentée par $P^s_{lp} = 0$ avec y_i souligné. Par suite, $C^s_p = P^s_{pp}$ ou P^s_{lp} avec y_i souligné, et de même $C^s_l = P^s_{pl}$ ou P^s_{ll} avec v_i souligné, suivant que C^s_l est représenté en coordonnées-points x_i ou coordonnées-lignes u_i.

Rappelons, d'après le premier Mémoire, les propriétés de C^s_p et C^s_l, s étant l'une des six canoniques crémoniennes

$$\rho H \rho, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho, \quad \varpi E \varpi, \quad \xi, \quad \pi.$$

On a (premier Mémoire) la liste suivante des primordiales et des

(¹) Les principaux résultats du présent Mémoire ont fait l'objet d'une Note insérée dans les *Comptes rendus* le 23 mai 1887.

coniques générales de réseaux :

$$C_p^{\rho H \rho} = A y_2^2 + B x_2^2 + h x_1 x_2 y_1 y_2 = 0,$$
$$C_l^{\rho H \rho} = v_3^2(4A - h^2 x_1^2) - 2h x_1 x_2 v_1 v_3 - x_2^2(v_1^2 - 4v_2 v_3) = 0;$$
$$C_p^{\varpi E \rho} = - x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2(e x_2^2 + A) + x_2^2 y_2 y_3 = 0,$$
$$C_l^{\varpi E \rho} = 4v_2 v_3(e x_2^2 + A) + (x_2 v_1 + x_1 v_3)^2 = 0;$$
$$C_p^{\rho E \varpi} = - x_1 x_2 y_1 y_2 + (e y_2^2 + B) x_1^2 + x_2 x_3 y_2^2 = 0,$$
$$C_l^{\rho E \varpi} = 2x_1^2 v_2 v_3 + 4v_3^2(e x_1^2 + x_2 x_3) - (v_1 x_1 - x_2 v_3)^2 = 0;$$
$$C_p^{\varpi E \varpi} = - x_1 x_2 y_1 y_2 + e x_1^2 y_1^2 + x_1^2 y_2 y_3 + y_1^2 x_2 x_3 = 0,$$
$$C_l^{\varpi E \varpi} = 4 v_2 v_3(e x_1^2 + x_2 x_3) + (v_1 x_1 + v_3 x_2)^2 = 0;$$
$$C_p^{\xi} = AB - K^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 = 0,$$
$$C_l^{\xi} = (v_1^2 - 4v_2 v_3)\mathfrak{A}_\xi - K^2(x_2 v_1 + 2x_1 v_3) = 0;$$
$$C_p^{\pi} = AB - K^2(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = 0,$$
$$C_l^{\pi} = (v_1^2 - 4v_2 v_3)^2\mathfrak{A}_\pi + K^2(v_1 x_1 - 2x_2 v_3)^2 = 0.$$

On a posé, comme dans le premier Mémoire,

$$A = x_1^2 - x_2 x_3, \qquad B = y_1^2 - y_2 y_3,$$
$$\mathfrak{A}_\xi = A - K^2 x_2^2, \qquad \mathfrak{A}_\pi = A - K^2 x_1^2.$$

On reconnaît, sur les douze équations précédentes, que les coniques C_p ou C_l représentées par ces équations adhèrent toutes au *focal :* j'appelle ainsi l'élément (ω, Ω). De plus, ces douze coniques ont les propriétés suivantes, résumées dans le Tableau ci-dessous :

σ.	La conique C_p^σ	La conique C_l^σ
$\rho H \rho$........	est osculatrice à A au focal	est osculatrice à $4A - h^2 x_1^2 = 0$ au focal
$\varpi E \rho$........	est osculatrice à $e x_2^2 + A = 0$ au focal	touche la conique $e x_2^2 + A = 0$
$\rho E \varpi$........	passe par le point ω'	passe par le point $f(f_1 = 0, f_2 = 4, f_3 = 1)$
$\varpi E \varpi$........	passe par le point ω'	touche la conique $e x_1^2 + x_2 x_3 = 0$
ξ...........	touche la conique A	touche la conique $\mathfrak{A}_\xi$
π...........	touche la conique A	touche la conique $\mathfrak{A}_\pi$
ϖ...........	se réduit à un point	passe par ω'
ρ...........	se réduit à un point.	est osculatrice à A au focal.

J'ai complété le Tableau par l'indication des coniques C_p^ρ, C_l^ρ, C_p^ϖ, C_l^ϖ en remarquant que

$$P_{pl}^\rho = v_1 x_1 x_2 + v_2 x_2^2 + v_3(x_1^2 - x_2 x_3) = 0,$$
$$P_{pl}^\varpi = v_1 x_1 x_2 + v_2 x_1^2 + v_3 x_2 x_3 = 0.$$

Les coniques C_p^ρ et C_p^ϖ se réduisent bien à un point, et ne sont pas représentables en coordonnées x_i par une seule, mais bien par deux équations.

Cela posé, une crémonienne quelconque (crémonique ou non) sera équivalente à l'une des huit canoniques du tableau. Soient s cette crémonienne; σ la canonique. On aura, par définition, en désignant par α et β deux linéaires monistiques ou dualistiques,

$$s = \alpha\sigma\beta$$

et (premier Mémoire)

$$C_p^s = \beta^{-1}[C_p^\sigma], \qquad C_l^s = \beta^{-1}[C_p^\sigma],$$
$$C_p^{s^{-1}} = \alpha[C_p^\sigma], \qquad C_l^{s^{-1}} = \alpha[C_l^\sigma],$$

puisque $\sigma = \sigma^{-1}$, toutes les canoniques étant égales à leurs inverses.

Ces égalités donnent sans difficulté les propriétés géométriques des coniques C_p et C_l relatives à une crémonienne quelconque.

PREMIÈRE PARTIE.

CLASSE DE $\rho[a]$ ET $\varpi[a]$, a DÉSIGNANT UNE CONIQUE.

1. Soit a une conique

$$(i, j = 1, 2, 3) \qquad a = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j = 0;$$

soient n et k l'ordre et la classe de $\rho[a]$.

On sait (Clebsch-Lindemann, *Leçons sur la Géométrie*, t. II de la traduction Benoist, p. 209) que $n \leqq 4$.

Lemme. — *En général, $k = 6$.*

Soit u, de coordonnées u_i, une tangente à $\rho[a]$.

La substitution $\rho=\rho^{-1}$ étant de contact, les deux coniques a et

$$\rho[u]=\rho\left[\sum_i u_i x_i\right]=u_1x_1x_2+u_2x_2^2+u_3(x_1^2-x_2x_3)=0$$

doivent être tangentes entre elles tout comme les deux courbes $\rho[a]$ et u. Le tactinvariant de a et de $\rho[u]$ doit être nul. Cet invariant est précisément le discriminant du déterminant de la conique

$$\lambda_1\rho[u]+\lambda_2 a,$$

considéré comme forme binaire en λ_1, λ_2. Ce déterminant

$$\begin{vmatrix} 2u_3\lambda_1+a_{11}\lambda_2 & u_1\lambda_1+a_{12}\lambda_2 & a_{13}\lambda_2 \\ u_1\lambda_1+a_{21}\lambda_2 & 2u_2\lambda_1+a_{22}\lambda_2 & -u_3\lambda_1+a_{23}\lambda_2 \\ +a_{31}\lambda_2 & -u_3\lambda_1+a_{32}\lambda_2 & a_{33}\lambda_2 \end{vmatrix}$$
$$=-2u_3^3\lambda_1^3+\lambda_1^2\lambda_2 Q+2\lambda_1\lambda_2^2 P+(a)\lambda_2^3,$$
$$P=a'_{12}u_1+a'_{22}u_2+(a'_{11}-a'_{23})u_3,$$
$$Q=-a_{11}u_3^2-2a_{13}u_1u_3+4a_{23}u_3^2+a_{33}U,$$
$$U=4u_2u_3-u_1^2,$$

$(a)=$ déterminant de la conique a et

$$a'_{ij}=\frac{\partial(a)}{\partial a_{ij}}.$$

Le discriminant de la forme cubique binaire en λ_1, λ_2, c'est-à-dire l'équation de $\rho[a]$ en coordonnées-lignes, est donc

$$\Delta\big(\overset{6}{u}\big)=[9(a)u_3^3+PQ]^2+(12Pu_3^3+Q^2)[3(a)Q-4P^2]=0,$$

c'est-à-dire contient les u_i à la dimension six.

Il y a lieu de rechercher les conditions pour que $k\leqq 4$, autrement dit pour qu'il se détache de $\Delta(u)$ un facteur en u_i au moins quadratique.

Je rappelle (*voir* premier Mémoire) :

1° Que les éléments fondamentaux de ρ adhèrent à ω ou à Ω;

2° Qu'à un élément fondamental adhérent à ω correspondent tous les points de la droite Ω, $x_2 = 0$;

3° Qu'à un élément fondamental adhérent à Ω correspondent les ∞ éléments adhérents à ω, c'est-à-dire tous les éléments de la courbe-point $u_3 = 0$.

2. *Si* $k = 4$, $n = 3$. — Supposons, en effet, qu'il se détache de $\Delta\left(\overset{6}{u}\right) = 0$ un facteur $\delta\left(\overset{2}{u}\right)$. Si $\delta\left(\overset{2}{u}\right)$ n'est pas décomposable, il se détache de $\rho[a]$ la conique dont l'équation en coordonnées-lignes est $\delta\left(\overset{2}{u}\right) = 0$ et $n = 2$, et par suite $k = 2$, car une conique est de la classe deux. Supposons $\delta\left(\overset{2}{u}\right) = \delta_1\left(\overset{1}{u}\right)\delta_2\left(\overset{1}{u}\right)$, et un au moins des deux facteurs δ_1 et δ_2 différent de u_3, par exemple $\delta_1\left(\overset{1}{u}\right) = \sum_i \delta_{1i} u_i$. Appelons δ' le point $\delta_1 = 0$, de coordonnées δ_{1i}; δ' ne coïncidera pas avec ω. Alors $\rho[a]$ a parmi ses adhérents les ∞ adhérents de δ', et la conique a a parmi ses adhérents les ∞ adhérents à $\rho[\delta']$, ce qui est absurde, car a devrait se décomposer en un couple de points, l'un des deux points devant être δ'.

Il faut ainsi que $\delta\left(\overset{2}{u}\right) = u_3^2$, et $\Delta\left(\overset{6}{u}\right)$ doit être divisible par u_3^2.

Si $a_{33} = 0$, a passe par ω, $n = 3$, et après départ de u_3^2 il reste, pour $\Delta(u) = 0$,

$$0 = [9(a)u_3^2 + Pq]^2 + (12Pu_3 + q^2)[3(a)u_3 q - 4P^2],$$
$$Q = u_3 q = u_3(-a_{11}u_3 - 2a_{13}u_1 + 4a_{23}u_3).$$

Si $a_{33} \neq 0$, $\Delta(u)$ ou, ce qui revient au même en n'écrivant pas les puissances de u_3 supérieures à la deuxième,

$$Q^2[P^2 - (a)Q]$$

doit être divisible par u_3^2. Un calcul élémentaire montre que cela est impossible si $a_{33} \neq 0$.

Donc, en toute hypothèse, $a_{33} = 0$; a passe par ω et $n = 3$.

3. *Si* $k < 4$, $n = 2$ *et par suite* $k = 2$, *et a adhère à l'élément focal.* — Pour que $k < 4$, il faut qu'il sépare au moins une fois le facteur u_3 de l'équation précédemment obtenue

$$[9(a)u_3^2+Pq]^2+(12Pu_3+q^2)[3(a)u_3q-4P^2]=0,$$

qui représente $\rho[a]$ en coordonnées-lignes.

Cela exige que

$$P^2q^2$$

soit divisible par u_3, c'est-à-dire que

$$(a'_{12}u_1+a'_{22}u_2)a_{13}$$

soit identiquement zéro; donc, en toute hypothèse, $a_{13}=0$; a adhère à l'élément focal, $n=k=2$.

4. Étudions la classe k de $\varpi[a]$, et principalement les conditions qui rendent cette classe $\leqq 4$; appelons n l'ordre de $\varpi[a]$.

On vérifie aisément les propriétés suivantes en se reportant à l'étude de ϖ, faite dans le premier Mémoire.

1° En général, $n=4$. Pour que $n=3$, il faut et il suffit que a passe par ω (et il se sépare de $\varpi[a]$ la branche droite Ω', $x_1=0$), ou bien que a passe par ω' (et il se sépare de $\varpi[a]$ la branche droite Ω, $x_2=0$). Pour que $n=2$, il faut et il suffit que a adhère au focal (et $\varpi[a]$ perd deux fois la branche droite Ω', c'est-à-dire le facteur x_1^2), ou bien que a passe par ω et par ω' (et $\varpi[a]$ perd les deux branches droites Ω et Ω', c'est-à-dire le facteur x_1x_2).

2° Pour qu'il se sépare de $\varpi[a]$, le point ω, c'est-à-dire $u_3=0$ (ou ω', c'est-à-dire $u_2=0$), il faut et il suffit que a touche Ω' (ou Ω). Si l'on suppose que $n=4$, a ne passe ni par ω, ni par ω', et alors Ω' (ou Ω) qui touche déjà a ne peut occuper, par rapport à a, aucune position plus spéciale; il ne peut donc se séparer de $\varpi[a]$ le facteur u_3^2 (ou u_2^2).

5. Lemme. — *En général,* $k=6$. — On verra, comme plus haut (**1**), que pour avoir l'équation $\Delta[u]$ de $\varpi[a]$ en coordonnées-lignes u_i, il suffit de former le tactinvariant des deux coniques a et

$$\varpi\left[\sum_i u_ix_i\right]=u_1x_1x_2+u_2x_1^2+u_3x_2x_3=\varpi[u]=0,$$

c'est-à-dire le discriminant de la forme cubique binaire en λ_1, λ_2, déterminant de la conique

$$\lambda_1 \varpi[u] + \lambda_2 a = 0.$$

On trouve, après un calcul analogue à un calcul précédent (1),

$$\Delta\binom{6}{u} = [9(a)u_2u_3^2 + \mathrm{PQ}]^2 + (12\mathrm{P}u_2u_3^2 + \mathrm{Q}^2)[3(a)\mathrm{Q} - 4\mathrm{P}^2] = 0,$$

où

$$\mathrm{P} = a'_{12}u_1 + a'_{11}u_2 + a_{23}u_3,$$
$$\mathrm{Q} = -a_{11}u_3^2 + 2a_{13}u_1u_3 - 4a_{23}u_2u_3 - a_{33}u_1^2;$$

le reste comme plus haut (1). Le lemme est ainsi démontré.

Pour que $k \leqq 4$, il faut qu'il se sépare de $\Delta\binom{6}{u}$ un facteur de $\delta(u)$ au moins quadratique en u_i. On verra, comme plus haut, que si $\delta(u)$ est quadratique $\delta\binom{2}{u}$, cette forme se décompose en deux facteurs linéaires $\delta\binom{2}{u} = \delta_1\binom{1}{u}\delta_2\binom{1}{u}$: la démonstration est toute pareille à celle de **2**. Si un au moins des deux points $\delta_1 = 0$ et $\delta_2 = 0$ est un point δ' qui ne coïncide ni avec ω, ni avec ω', $\varpi[a]$ compte parmi ses adhérents les ∞ adhérents de δ' et la conique a compte parmi ses adhérents les ∞ adhérents de $\varpi[\delta']$, ce qui est absurde. On ne peut avoir ainsi que

$$\delta\binom{2}{u} = u_2u_3, \qquad u_2u_3^2, \qquad u_2^2u_3.$$

Les deux dernières hypothèses sont impossibles, car il ne peut se détacher de $\varpi[a]$ (*voir* **4**, 2° —) plus d'une fois le facteur u_2 ou u_3, si a ne passe ni par ω, ni par ω', c'est-à-dire si $n = 4$.

Cela posé, il vient

6. Lemme. — *Si $k = 4$ et $n = 4$ la conique a touche Ω et Ω'.*

Si $k = 4$, il se sépare de $\Delta\binom{6}{u}$ un facteur quadratique qui ne peut être que u_2u_3, en vertu de ce qui précède; comme $n = 4$, par hypothèse, a doit toucher Ω et Ω'.

7. La courbe $\varpi[a]$ est, en général (Clebsch-Lindemann, *Leçons* *sur la Géométrie*, traduction Benoît, t. II, p. 192), une biquadratique ayant un point double en ω' et un point de rebroussement en ω avec Ω pour tangente de rebroussement.

Si $n = 3$, a passe par ω et perd la branche droite Ω' ou bien a passe par ω' et perd la branche droite Ω. Il reste donc une cubique ayant, dans le premier cas, un point double en ω et passant par ω'; dans le second cas, un point double en ω' et passant par ω.

La classe d'une cubique à point double est, en général, quatre.

C. Q. F. D.

8. Si, n restant égal à trois, on voulait réduire à trois la classe k, il faudrait que le point double de la cubique $\varpi[a]$ devînt un point de rebroussement.

Dans le cas où a passe par ω, on a

$$a = a_1 x_3 + a_2 = 0,$$

a_1, $a_2 =$ formes binaires en x_1, x_2 d'ordre égal à l'indice.

Par suite, après départ de x_1,

$$\varpi[a] = x_2 a'_1 x_3 + x_1 a'_2 = 0,$$

$a'_i = a_i$, après transposition x_1 et x_2 $(i = 1, 2)$.

Les deux tangentes au point double ω sont

$$x_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad a'_1 = a_{23} x_1 + a_{13} x_2 = 0;$$

pour qu'elles se confondent, on doit avoir $a_{23} = 0$, et *a touche* Ω' *en* ω *et adhère à l'élément* (ω, Ω').

Dans le cas où a passe par ω',

$$a = a_1 x_2 + a_2 = 0;$$

il vient pour $\varpi[a]$, après départ de x_2,

$$a_1 x_1^2 + x_2 a_2 = 0,$$

$a_i =$ forme binaire en x_1 et x_3 d'ordre égal à l'indice $(i = 1, 2)$.

Pour que le point double ω' devienne de rebroussement, il faut que a_2 soit carré parfait, c'est-à-dire

$$a_{13}^2 - a_{11}a_{33} = 0,$$

et a *touche* Ω.

9. Enfin, si l'un des deux nombres n et k est deux, l'autre l'est aussi et a adhère au focal ou passe par ω et par ω'.

10. Nous pouvons résumer, sous forme de tableaux, tous les cas possibles où la classe k de $\varpi[a]$ et de $\rho[a]$ ne dépasse pas quatre, n étant l'ordre

$\rho[a]$.

n.	k.	La conique a
3	4	passe par ω
2	2	adhère au focal

et, de même,

$\varpi[a]$.

n.	k.	La conique a
4	4	touche Ω et Ω'
3	4	passe par ω ou ω'
3	3	passe par ω (ou ω') et touche Ω' (ou Ω)
2	2	adhère au focal ou passe par ω et ω'.

DEUXIÈME PARTIE.

PRODUIT D'UNE CRÉMONIENNE PAR LES CANONIQUES

$$\rho H \rho, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho, \quad \varpi E \varpi.$$

11. Dans cette Partie et la suivante, je vais étudier les conditions nécessaires et suffisantes pour que le produit de deux crémoniennes *quadratiques* s et s' soit une crémonienne *quadratique* S. Je suppose que s, s', S ne sont ni linéaires, ni crémoniques.

Soient σ et σ' les canoniques de s et de s', et α, β, α', β' des linéaires; on aura (premier Mémoire)

$$s = \alpha\sigma\beta, \qquad s' = \alpha'\sigma'\beta', \qquad S = \alpha'\sigma'\beta'\alpha\sigma\beta.$$

Les variables u_i et x_i figureront aux mêmes dimensions dans S et dans $\sigma' m \sigma$, où l'on a posé $\beta' \alpha = m$. Il suffira donc d'étudier $\sigma' m \sigma = \Sigma$.

Appelons C^s_p, C^s_l, ... la *conique générale*, c'est-à-dire l'une *quelconque* des ∞^2 coniques du réseau R^s_p, R^s_l, ... ponctuel ou linéaire de la substitution crémonienne s. On aura, puisque Σ est quadratique par hypothèse,

$$C^{\Sigma}_p = C^{\sigma' m \sigma}_p = \sigma^{-1}[C^{\sigma' m}_p],$$

en vertu du premier Mémoire, et en exprimant l'identité des courbes par l'égalité des symboles.

Appelons, pour abréger l'écriture, a la conique $C^{\sigma' m}_p = m^{-1}[C^{\sigma'}_p]$ et $\mathfrak{a}$ la conique C^{Σ}_p. Il faudra que la canonique σ transforme la conique a en une autre conique $\mathfrak{a}$,

$$\sigma^{-1}[a] = \mathfrak{a} \qquad \text{ou} \qquad \sigma[a] = \mathfrak{a}, \qquad \sigma = \sigma^{-1}.$$

Si l'une au moins des deux canoniques σ et σ' est à deux composantes crémoniques, nous pourrons toujours supposer que c'est σ, sans quoi il suffira de considérer S^{-1} au lieu de S, ce qui ne change pas les dimensions auxquelles entrent dans S et S^{-1} les variables x_i et u_i.

Dans cette deuxième Partie, j'examinerai donc le cas où la canonique

$$\sigma = \rho H \rho, \qquad \rho E \varpi, \qquad \varpi E \rho \qquad \text{ou} \qquad \varpi E \varpi.$$

12. *Premier cas :* $\sigma = \rho H \rho$. — On a alors

$$\rho H \rho [a] = \mathfrak{a}, \qquad H \rho [a] = \rho [\mathfrak{a}].$$

Pour avoir l'équation coordonnées-points x_i de la courbe $\rho[\mathfrak{a}]$, il suffit donc d'effectuer la dualistique H sur les variables u_i dans l'équation en coordonnées-lignes u_i de la courbe $\rho[a]$; pour avoir l'équation en coordonnées-lignes de $\rho[\mathfrak{a}]$, il suffit d'effectuer H sur l'équation en coordonnées-points de $\rho[a]$. Soient n et k l'ordre et la classe de $\rho[a]$, n' et k' l'ordre et la classe de $\rho[\mathfrak{a}]$; on aura, par suite,

$$k' = n, \qquad n' = k.$$

On peut avoir seulement (Tableaux du n° **10**) n, $n' = 3$ ou 2. Mais alors k, $k' = 2$, et enfin $n = n' = 2$. Cela exige que $\rho[a]$ et $\rho[\mathfrak{a}]$ soient des coniques, et, par suite, a et $\mathfrak{a}$ doivent adhérer au focal.

13. On vérifie sans peine que la conique C_p^σ ou C_l^σ, σ étant l'une des six canoniques crémoniennes

$$\rho H \rho, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho, \quad \varpi E \varpi, \quad \xi, \quad \pi,$$

adhère au focal. Nous dirons que ces six canoniques sont *tautofocales*.

De même, une crémonienne non canonique s sera *tautofocale* si C_p^s et C_l^s adhèrent au focal.

Une linéaire m sera *tautofocale* si elle laisse fixe le focal, c'est-à-dire si

$$m[(\omega, \Omega)] = (\omega, \Omega).$$

En remarquant qu'une monistique tautofocale l doit laisser fixes le point

$$\omega(x_1 = x_2 = u_3 = 0)$$

et la droite

$$\Omega(u_1 = x_2 = u_3 = 0),$$

et se reportant à mon Mémoire sur les groupes linéaires de contact (*Journal de Mathématiques*, p. 75; 1887), on construit immédiatement

$$l = \left| \begin{array}{ll} x_1 & l_1 x_1 + l'_3 x_2 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l'_2 x_1 + l'_1 x_2 + l_3 x_3 \\ u_1 & l_2 l_3 u_1 - l_2 l'_2 u_3 \\ u_2 & -l_3 l'_3 u_1 + l_1 l_3 u_2 + (l'_2 l'_3 - l_1 l'_1) u_3 \\ u_3 & l_1 l_2 u_3 \end{array} \right|.$$

La dualistique très simple

$$e = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_3 \\ x_3 & u_2 \\ u_1 & x_1 \\ u_2 & x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix} = e^{-1}$$

est tautofocale. Soit e' une seconde dualistique tautofocale; comme les linéaires *tautofocales* forment un groupe évidemment, $e'e$, qui est une linéaire monistique, sera tautofocale et de la forme l. Ainsi, *toute linéaire tautofocale sera de la forme l ou el*, selon qu'elle sera monistique ou dualistique.

Soit $s = \alpha\sigma\beta$ une crémonienne tautofocale équivalente à la canonique σ : la linéaire β sera évidemment tautofocale; α sera tautofocale si s^{-1} est tautofocale. Tout cela résulte évidemment de ce que

$$\begin{array}{lcl} C_p^s \text{ et } C_s^l & \text{adhèrent à} & \beta^{-1}[(\omega, \Omega)], \\ C_p^{s-1} \text{ et } C_p^{s-1} & \text{»} & \alpha\ [(\omega, \Omega)]. \end{array}$$

Une crémonique $\alpha\rho\beta$ ou $\alpha\varpi\beta$ sera *tautofocale* si la linéaire β est tautofocale. D'ailleurs, ρ et ϖ peuvent aussi être considérées comme tautofocales, car

$$C_l^\rho \quad \text{et} \quad C_l^\varpi$$

adhèrent au focal. Les coniques C_p^ρ et C_p^ϖ ne sont pas représentables en fait en coordonnées-points par une équation unique; aux ∞ éléments adhérents à un point ρ et ϖ font correspondre les ∞ éléments adhérents à un autre point et la primordiale linéo-ponctuelle est linéaire en u_i. Nous pouvons exprimer ce fait en disant que C_p^ϖ ou C_p^ρ dégénère en un couple de points dont l'un est ω; C_p^ϖ et C_p^ρ peut donc être considérée comme ayant le focal parmi ses adhérents, et peut être considérée comme adhérente au focal. Je puis ainsi étendre aux crémoniques d'une façon complète la notion de tautofocalité définie pour les crémoniennes.

14. Les résultats du n° **12**, en employant les notations du n° **13**, peuvent donc s'énoncer ainsi :

Théorème. — *Pour que le produit $\sigma' m \sigma$ soit une crémonienne quadratique Σ(σ', σ = canoniques, $\sigma = \rho \Pi \rho$, m = linéaire), il faut et il suffit que la linéaire m soit tautofocale; Σ est aussi tautofocale.*

En effet, $\mathfrak{a} = \sigma[C_p^{\sigma' m}] = C_p^{\Sigma}$, qui adhère au seul élément fixe

$$m^{-1}[(\omega, \Omega)],$$

doit adhérer aussi (**12**) au focal; donc

$$(\omega, \Omega) = m^{-1}[(\omega, \Omega)] = m[(\omega, \Omega)]$$

et m est tautofocale, ainsi du reste que Σ, puisque $\mathfrak{a}$ adhère au focal.

15. *Deuxième cas :* $\sigma = \rho E \varpi$.

Théorème. — *Pour que $\Sigma = \sigma' m \sigma$ soit une crémonienne quadratique, il faut et il suffit que m soit tautofocale, et alors Σ l'est aussi.*

Posons encore, avec les notations du n° **12**,

$$\rho E \varpi[a] = \mathfrak{a}, \qquad E \varpi[a] = \rho[\mathfrak{a}].$$

Soient n et R l'ordre de la classe $\varpi[a]$, n' et k' l'ordre et la classe de $\rho[\mathfrak{a}]$. On aura (**12**)

$$k' = n, \qquad n' = k.$$

La condition de l'énoncé est suffisante; car, alors qu'elle est remplie, $n = k = 2$, puisque a adhère au focal; $n' = k' = 2$, aussi $\rho[\mathfrak{a}]$ est une conique ainsi que $\mathfrak{a}$, et toutes deux adhèrent au focal.

La condition est aussi nécessaire. En effet, n et n' ne dépassent pas quatre; il en est de même de $k=n'$ et de $k'=n$. Si $k'\leqq 4$, $n'=k=3$ ou 2 (**10**, Tableaux) et $n=3$ ou 2. Mais, si $n=3$, $k=4=n'$, résultat absurde. La seule hypothèse possible est donc

$$n=k=n'=k'=2, \qquad \rho[\mathfrak{a}] \quad \text{et} \quad \varpi[a] \text{ coniques;}$$

$\mathfrak{a}$ adhère au focal, ainsi que $E\rho[\mathfrak{a}]=\varpi[a]$, puisque la dualistique E est tautofocale; donc a est adhérente au focal, et comme $a=C_p^{\sigma' m}$ et adhère à $m^{-1}[(\omega,\Omega)]$, m est tautofocale. On raisonnera sur les coniques $C_e^{\cdots}$ comme on vient de le faire sur les coniques $C_p^{\cdots}$, et l'on achève la démonstration sans difficulté.

16. *Troisième cas :* $\sigma=\varpi E\rho$.

Théorème. — *La linéaire m doit, et cela suffit, être tautofocale;* $\sigma' m \sigma$ *est aussi tautofocale.*

On a

$$\varpi E\rho[a]=\mathfrak{a}, \qquad E\rho[a]=\varpi[\mathfrak{a}].$$

Soient n et k l'ordre et la classe de $\rho[a]$, n' et k' l'ordre et la classe de $\varpi[\mathfrak{a}]$. On a encore

$$n'=k, \qquad k'=n.$$

On démontre, comme plus haut, que la condition de l'énoncé est suffisante.

Puisque $4\geqq n'=k$, il vient (**10**, Tableaux)

$$n=2 \qquad \text{ou} \qquad 3=k'.$$

Si $k'=3$, $n'=3=k$; ce dernier résultat est en contradiction avec (**10**, Tableaux). La seule hypothèse possible est donc

$$k'=n=n'=k=2;$$

la démonstration s'achève comme plus haut.

17. *Quatrième cas :* $\sigma = \varpi E \varpi$. On a

$$\varpi E \varpi[a] = \mathfrak{a}, \qquad E\varpi[\mathfrak{a}] = \varpi[\mathfrak{a}].$$

Soient k et n l'ordre et la classe de $\varpi[a]$, k' et n' la classe et l'ordre de $\varpi[\mathfrak{a}]$.

En se reportant aux Tableaux (**10**), on voit qu'on ne peut faire que trois hypothèses, eu égard aux relations $n = k'$, $k = n'$, savoir

(I) $\qquad n = n' = k = k' = 4,$

(II) $\qquad n = n' = k = k' = 3,$

(III) $\qquad n = n' = k = k' = 2.$

18. *Hypothèse I.* — D'après le Tableau (**10**), a et $\mathfrak{a}$ doivent toucher Ω et Ω'; comme $a = C_p^{\sigma' m}$, $\mathfrak{a} = C_p^{\Sigma}$, on voit, en se reportant aux *Préliminaires,* que la canonique σ' est ϖ et la crémonienne Σ équivalente à ϖ; de plus, m est dualistique. Soit donc $f(\overset{2}{u}, \overset{2}{y}) = 0$ la primordiale linéo-ponctuelle de ϖ; l'équation $f(m[u], y) = 0$ sera la primordiale puncto-ponctuelle de $\sigma' m$ et $f(m[u], \underline{y}) = 0$ sera l'équation de $C_p^{\sigma' m}$, c'est-à-dire de a. En un mot, les coefficients des puissances des x_i, dans l'équation de a, seront des fonctions *rationnelles quadratiques* des y_i. Comme a touche $\Omega(x_2 = 0)$ et $\Omega'(x_1 = 0)$, on voit que l'équation de a est

$$2a_0 x_1 x_2 + (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = \text{forme quadratique en } y_i \\ a_i = \quad \text{»} \quad \text{linéaire} \qquad \text{»} \end{array}\right\} \; (i = 1, 2, 3).$$

Pour avoir encore l'équation de $\varpi[a]$ en coordonnées-lignes, je forme, comme plus haut (**1**) et (**5**), le tactinvariant $\Delta(u)$ de la conique a avec la conique

$$\varpi[u] = \varpi\left[\sum_i u_i x_i\right] = u_1 x_1 x_2 + u_2 x_1^2 + u_3 x_2 x_3 = 0.$$

Faisant le calcul, c'est-à-dire formant le discriminant de la forme cubique linéaire, déterminant de la conique

$$\lambda_1 a + \lambda_2 \varpi[u] = 0,$$

on trouve, après départ de $u_2 u_3$, ce qui était prévu,

$$\begin{aligned}\Delta(\overset{4}{u}) = 4a_2\lambda^4 - 6a_0 u_3\lambda^3 + 96a_2^2 a_3 u_2 u_3 \lambda^2 \\ - 216 a_0 a_2 a_3 u_2 u_3^2 \lambda + 81 a_0^2 a_3 u_2 u_3^3 + 192 a_2^3 a_3^2 u_2^2 u_3^2 = 0,\end{aligned}$$

avec

$$\lambda = a_3 u_1 - a_1 u_3.$$

On ne peut avoir identiquement $a_2 = 0$, car il se détacherait alors de $\Delta(\overset{4}{u})$, le facteur u_3 et k ne serait plus 4. De plus, $\Delta(\overset{4}{u})$ contient y_i à la dimension cinq. Si j'effectue sur $\Delta(\overset{4}{u}) = 0$, équation de $\varpi[a]$ en coordonnées-lignes, la dualistique E, j'obtiens l'équation de $E\varpi[a]$ en coordonnées-points x_i et, si j'effectue encore dans cette dernière la substitution ϖ sur les x_i, j'obtiens l'équation de $\varpi E \varpi[a] = \mathfrak{a} = C_p^{\varpi}$ en coordonnées-points x_i. Ces diverses opérations n'altèrent pas la dimension à laquelle entrent les y_i; cette dimension est deux dans $\mathfrak{a}$, puisque l'équation de $\mathfrak{a}$ est aussi le premier membre de la primordiale puncto-ponctuelle de Σ; par suite, il doit se séparer de $\Delta(u)$ un facteur (y) cubique au moins. Le facteur (y) divise tous les coefficients de $\Delta(u)$ et, en particulier, $a_2^3 a_3^2$, coefficient de $u_2^2 u_3^2$. Ce coefficient n'est pas nul, car a_2 n'est pas nul et a_3 n'est pas nul, puisque $a_0^2 a_3^2$ est le déterminant de a. Ainsi (y) contient au moins une fois a_2 et, pour $a_2 = 0$, tous les coefficients de $\Delta(u)$ étant nuls, $\Delta(u)$ est lui-même nul, *quels que soient les* u_i. $\Delta(u)$ est le tactinvariant de a avec

$$\varpi[u] = u_1 x_1 x_2 + u_2 x_1^2 + u_3 x_2 x_3 = 0;$$

par suite, la conique a, avec $a_2 = 0$, c'est-à-dire

$$a' = 2a_0 x_1 x_2 + (a_1 x_1 + a_3 x_3)^2 = 0,$$

touche $\varpi[u]$ *quels que soient* u_i, c'est-à-dire la conique générale C^{ϖ}. Cette conique C_l^{ϖ} adhère au focal et passe par ω'; à part cela, elle n'est assujettie à aucune condition. La conique a' touche Ω en un point mobile avec les y_i et Ω' en ω'; il faudrait donc que a' touchât Ω en ω; cela exige que $a_3 = 0$ en même temps que $a_2 = 0$, autrement dit

$$a_2 = b_2 p, \qquad a_3 = b_3 p, \qquad p = \text{forme linéaire en } y_i, \\ b_2,\ b_3 = \text{const.}$$

On ne peut avoir d'ailleurs $a_1 = b_1 p$, $b_1 = \text{const.}$, car a toucherait Ω et Ω' en deux points *fixes* et $a = C_p^{\sigma'm}$ le réseau de la crémonienne; $\sigma'm$ serait un réseau de coniques à deux points et à deux tangentes fixes (ce qui est impossible, d'après les *Préliminaires*).

Il résulte de ce qui précède que $(y) = p^3$ doit diviser $\Delta(u)$ ou, en n'écrivant pas les puissances de p supérieures au cube, doit diviser [en remarquant que p doit diviser a_0, $a_0 = b_0 p$ (1)]

$$p\lambda^3(2b_2\lambda - 3b_0u_3), \qquad \lambda = -a_1u_3 + b_3pu_1.$$

Par suite, p^2 divise

$$\{-a_1^3u_3^3 + 3a_1^2b_3pu_3^2u_1 + p^2(\ldots)\} \\ \times \{-(2b_2a_1 + 3b_0)u_3 + 2b_2b_3pu_1\}.$$

Or p^2 ne divise pas a_1^3 et doit diviser $2b_2a_1 + 3b_0$, qui doit être identiquement zéro. Alors il faut que $b_2b_3 = 0$, c'est-à-dire $a_2a_3 = 0$, ce qui est absurde en vertu de ce qui précède. De là résulte : *l'hypothèse I est inadmissible.*

19. *Hypothèse II.* — Quatre hypothèses sont possibles, si

$$k = k' = n = n' = 3:$$

a passe par	ω	et touche	Ω'		a passe par	ω	et touche	Ω'
»	»	»	»		»	ω'	»	Ω
»	ω'	»	Ω		»	ω	»	Ω'
»	ω'	»	Ω		»	ω'	»	Ω

(1) Il suffit d'écrire, pour le voir, que $\Delta(u) = 0$ identiquement pour $p = 0$.

Il suffit de discuter les deux premières et la quatrième, puisque a et $\mathfrak{a}$ se comportent d'une façon pareille dans la discussion.

Pour les deux premières hypothèses a passe par ω et touche Ω', $x_1 = 0$; donc

$$a = 2a_{13}x_1x_3 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

et, après départ de x_1,

$$\varpi[a] = 2a_{13}x_2^2x_3 + a_{22}x_1^3 + 2a_{12}x_1^2x_2 + a_{11}x_1x_2^2 = 0.$$

Appelons *élément de rebroussement* (ou d'*inflexion*) l'élément formé par le point et la tangente de rebroussement (ou d'inflexion). Le focal est l'élément de rebroussement de la cubique $\varpi[a]$.

La première hypothèse est inadmissible. En effet, $\mathfrak{a}$ passerait, comme a, par ω et toucherait Ω'; $\varpi[\mathfrak{a}]$ aurait en (ω, Ω) son élément de rebroussement. Une dualistique quelconque, telle que E, transforme évidemment des éléments de rebroussement en éléments d'inflexion : donc $E\varpi[\mathfrak{a}] = \varpi[a]$ aurait un élément d'inflexion en

$$E[(\omega, \Omega)] = (\omega, \Omega).$$

Cela est absurde, car on s'assure aisément que la droite ϖi (i point d'inflexion de $\varpi[a]$) a pour équation

$$3a_{22}x_1 + 2a_{12}x_2 = 0$$

et ne peut se confondre avec Ω, $x_2 = 0$, sans que a_{22} ne devienne zéro et a un couple de droites.

La seconde hypothèse est inadmissible. La conique $\mathfrak{a}$ passe par ω' et touche Ω. Alors

$$\mathfrak{a} = 2\mathfrak{a}_{12}x_1x_2 + 2\mathfrak{a}_{23}x_2x_3 + (\mathfrak{a}_1x_1 + \mathfrak{a}_3x_3)^2$$

et, après départ de x_2,

$$\varpi[\mathfrak{a}] = x_2(\mathfrak{a}_1x_1 + \mathfrak{a}_3x_3)^2 + 2x_1^2(\mathfrak{a}_{21}x_1 + \mathfrak{a}_{23}x_3) = 0.$$

Appelons δ la droite

$$\mathfrak{a}_1x_1 + \mathfrak{a}_3x_3 = 0.$$

La cubique $\varpi[\mathfrak{a}]$ aura (ω', δ) pour élément de rebroussement, et la cubique $E\varpi[\mathfrak{a}] = \varpi[a]$ aura $E[(\omega', \delta)]$ pour élément d'inflexion. La droite $E[\omega']$

$$ex_2 + x_3 = 0$$

coupera $\varpi[a]$ en trois points confondus.

Faisons, dans $\varpi[a]$, $x_3 = -ex_2$; la forme binaire

$$a_{22}x_1^3 + 2a_{12}x_1^2x_2 + a_{11}x_1x_2^2 - 2ea_{13}x_2^3,$$

égalée à zéro, doit représenter trois fois la ligne inflexionnelle ϖi

$$3a_{22}x_1 + 2a_{12}x_2 = 0$$

de $\varpi[a]$. On a ainsi, $\mathcal{A}$ facteur à déterminer,

$$\mathcal{A}(a_{22}x_1^3 + 2a_{12}x_1^2x_2 + a_{11}x_1x_2^2 - 2ea_{13}x_2^3) = (3a_{22}x_1 + 2a_{12}x_2)^3.$$

L'identification donne

$$(\text{o})\quad \mathcal{A} = 27a_{22}^3, \qquad 4a_{12}^2 = 3a_{11}a_{22}, \qquad 4a_{12}^3 = -27ea_{22}^2a_{13}.$$

Mais $a = C_p^{\sigma' m}$, donc les coefficients des puissances des x_i dans a sont des fonctions rationnelles et quadratiques des y_i.

Si a_{12} est identiquement zéro, le système (o) donne, puisque a_{22} ne peut être zéro sans que a ne dégénère en couples de droites,

$$a_{11} = a_{13} = 0, \qquad a = a_{22}x_2^2,$$

ce qui est absurde.

Si a_{12} est une forme quadratique indécomposable en y_i, le système (o) montre que a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22} ne diffèrent que par des coefficients constants, et l'équation $a = 0$, qui est la primordiale puncto-ponctuelle de $\sigma' m$, serait de dimension zéro en y_i, ce qui est absurde.

Si enfin on a $a_{12} = \lambda\big(\overset{1}{y}\big)\,\mu\big(\overset{1}{y}\big)$, le système (o) devient

$$4\lambda^2\mu^2 = 3a_{11}a_{22}, \qquad 4\lambda^3\mu^3 = -27ea_{22}^2a_{13}.$$

Si a_{11} ne diffère de $\lambda\mu = a_{12}$ que par une constante-coefficient, on retombe sur la discussion précédente. Si

$$a_{11} = \alpha\lambda^2, \qquad a_{22} = \beta\mu^2 \qquad (\alpha, \beta = \text{const.})$$

et

$$4\lambda^3\mu^3 = -27e\beta^2\mu^4 a_{13},$$

les facteurs λ et μ ne diffèrent que par un coefficient constant, ainsi que diffèrent aussi entre elles les fonctions $a_{11}, a_{22}, a_{13}, a_{12}$, ce qui est absurde.

La quatrième hypothèse est inadmissible.

On démontrera, comme plus haut, pour la seconde hypothèse, que la droite $E[\omega']$, c'est-à-dire

$$ex_2 + x_3 = 0,$$

est la tangente d'inflexion de

$$\varpi[a] = x_2(a_1x_1 + a_3x_3)^2 + 2x_1^2(a_{21}x_1 + a_{23}x_3) = 0,$$

puisque a touche Ω et passe par ω',

$$a = (a_1x_1 + a_3x_3)^2 + 2a_{21}x_2x_1 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

On s'assure aisément que la ligne qui joint ω' au point d'inflexion de $\varpi[a]$ a pour équation, en posant

$$\alpha = 2a_1a_{23} - 3a_3a_{21},$$
$$\alpha x_1 - a_3a_{23}x_3 = 0.$$

On ne peut avoir $e = 0$, car la tangente d'inflexion ne peut passer par ω'; on tire de $ex_2 + x_3 = 0$, $x_2 = e^{-1}x_3$, et alors il faut avoir l'identité

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}(\alpha x_1 - a_3a_{23}x_3)^3 \\ &\quad = 2ea_{21}x_1^3 + x_1^2x_3(2ea_{23} - a_1^2) - 2a_1a_3x_1x_3^2 - a_3^2x_3^3,\end{aligned}$$

qui indique que $ex_2 + x_3 = 0$ coupe $\varpi[a]$ trois fois au point où $\varpi[a]$ est rencontré par $\alpha x_1 - a_3a_{23}x_3 = 0$.

On ne peut avoir $a_{23} = 0$ identiquement, car ω serait un point d'inflexion, tandis que ω n'est pas situé sur $ex_2 + x_3 = 0$. L'identification donne alors

$$\mathcal{A}\alpha^3 = 2ea_{21},$$
$$-3\mathcal{A}\alpha^2 a_3 a_{23} = 2ea_{23} - a_1^2,$$
$$3\mathcal{A}\alpha a_3^2 a_{23}^2 = -2a_1 a_3,$$
$$-\mathcal{A}a_3^3 a_{23}^3 = -a_3^2.$$

Il vient

$$\mathcal{A} = a_3^{-1} a_{23}^{-3},$$

d'où le système des deux relations distinctes seulement

$$(\text{o}') \qquad 0 = 4a_1^3 + 27ea_3 a_{21} \qquad \text{et} \qquad a_1^2 + 6ea_{23} = 0.$$

Mais $a = C_p^{\sigma' m}$; les coefficients des puissances des x_i dans a sont des fonctions rationnelles et quadratiques des y_i et

$$a_1,\ a_3 \ = \text{formes linéaires en } y_i,$$
$$a_{21},\ a_{23} = \text{formes quadratiques en } y_i.$$

Le système (o′) montre alors, en désignant par p une forme linéaire en y_i, et par b_1, b_3, c_1, c_3 des constantes, que l'on a

$$a_1 = b_1 p, \qquad a_3 = b_3 p, \qquad a_{21} = c_1 p^2, \qquad a_{23} = c_3 p^2,$$
$$a = p^2 \{(b_1 x_1 + b_3 x_3)^2 + c_1 x_1 x_2 + c_3 x_3 x_2\} = 0.$$

La primordiale puncto-ponctuelle de $\sigma' m$ ne contiendrait plus y_i, ce qui est absurde. L'hypothèse quatrième est donc inadmissible.

20. *Hypothèse III.* — On a

$$k = k' = n = n' = 2;$$

$\varpi[a]$ et $\varpi[\mathfrak{a}]$ sont des coniques. Si la linéaire m n'est pas tautofocale, a ne peut adhérer au focal; $\mathfrak{a}$ ne peut y adhérer non plus, car a y adhérerait aussi dans ce cas en vertu de ce que $E\varpi[a] = \varpi[\mathfrak{a}]$. Comme $\varpi[a]$ et $\varpi[\mathfrak{a}]$ sont deux coniques, a et $\mathfrak{a}$ doivent passer à la fois par ω et par ω', $\varpi[a]$ et $\varpi[\mathfrak{a}]$ passent aussi par ω et par ω'. La conique $E\varpi[a]$ touche $E[\omega] = \Omega$, puisque $\varpi[a]$ passe par ω, et comme

$E\varpi[a] = \varpi[\mathfrak{a}]$, $\varpi[\mathfrak{a}]$ adhérerait au focal, ce qui est absurde; il faut ainsi que m soit tautofocal, ainsi que Σ.

Il ressort des nos **17** à **20** la proposition :

21. Théorème. — *Pour que la substitution crémonienne*

$$\Sigma = \sigma' m \varpi E \varpi$$

soit quadratique, il faut et il suffit que f soit tautofocal; Σ est aussi tautofocal.

La condition est nécessaire, en vertu de ce qui précède. Si elle est remplie, $a = C_p^{\sigma' m}$ adhère au focal; $\varpi[a]$, $E\varpi[a]$ et enfin

$$\varpi E \varpi[a] = \mathfrak{a} = C_p^{\Sigma}$$

y adhèrent aussi et sont des coniques. Enfin, on peut raisonner sur $C_l^{\sigma' m}$ et C_l^{Σ} comme on vient de le faire sur $C_p^{\sigma' m}$ et C_p^{Σ}. La condition est donc suffisante.

TROISIÈME PARTIE.

PRODUIT D'UNE CRÉMONIENNE PAR LES DEUX CANONIQUES ξ ET π.

22. Nous reportant au n° **11**, on voit que, pour étudier les conditions qui rendent crémonienne quadratique le produit $s's$ de deux crémoniennes équivalentes l'une et l'autre à ξ ou à π, il suffit d'étudier les produits

$$\Sigma = \xi m \xi, \quad \xi m \pi, \quad \pi m \xi \qquad \text{ou} \qquad \pi m \pi, \quad m = \text{linéaire},$$

ou simplement les produits

$$\Sigma = \xi m \xi, \quad \pi m \xi \qquad \text{ou} \qquad \pi m \pi,$$

puisque le produit de forme $\xi m \pi$ a pour inverse un produit de forme $\pi m \xi$ et que les dimensions des variables sont les mêmes dans une crémonienne et son inverse.

Il convient tout d'abord d'approfondir l'étude faite dans le premier Mémoire sur les éléments fondamentaux de ξ et de π.

23. Les éléments fondamentaux de ξ adhèrent, comme on sait, à ω, Ω, A ou $\mathfrak{A}_\xi$,

$$A = x_1^2 - x_2 x_3, \qquad \mathfrak{A}_\xi = A - K^2 x_2^2 = 0.$$

Lemme I. — *A un élément fondamental* (ω, u), ξ *fait correspondre* tous *les* ∞ *éléments adhérents à* A.

Considérons $P_{pp}^\xi = 0$, en désignant, d'une façon générale, par P_{pp}^s, P_{lp}^s, P_{pl}^s, $\ldots = 0$ les primordiales puncto-ponctuelle, linéo-ponctuelle, puncto-linéaire, etc., d'une crémonienne s. On a (premier Mémoire)

$$P_{pp}^\xi = f(x, y) = AB - K^2 R^2 = 0,$$
$$R = x_2 y_1 - x_1 y_2.$$

L'élément $(y, v) = \xi[(x, u)]$ est, en général, comme on sait, l'élément autre que le focal, adhérent aux deux coniques

$$f(\underline{x}, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_i dx_i \frac{\partial f(\underline{x}, y)}{\partial x_i} = 0$$

avec

$$\sum_i u_i\, dx_i = 0.$$

Si $(x, u) = (\omega, u)$, la conique $f(\underline{x}, y) = 0$ s'évanouit et la conique

$$\sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

se réduit à

$$B\, dA = 0,$$

puisque $x_1 = x_2 = 0$. Comme $u \neq \Omega$ par hypothèse, $dA \neq 0$ et $B = 0 = y_1^2 - y_2 y_3 = 0$. Par suite, à un élément (ω, u) correspondent tous les ∞ éléments adhérents à A. C. Q. F. D.

LEMME II. — *A un élément fondamental* (x, Ω) ξ *fait correspondre tous les éléments en nombre* ∞ *adhérents à la conique* $\mathfrak{A}_\xi$.

Reprenons les deux coniques précédentes

$$AB - K^2R^2 = 0,$$
$$dA.B - 2K^2 R dR = 0$$

avec

$$\sum_i u_i dx_i = \sum_i x_i du_i = 0.$$

Si $(x, u) = (x, \Omega)$, $u_1 = x_2 = u_3 = dx_2 = 0$, et alors les deux coniques se réduisent à

$$x_1^2(B - K^2y_2^2) = 0, \qquad 2x_1\,dx_1(B - K^2y_2^2) = 0.$$

L'élément (y, v) est donc l'un quelconque des ∞ éléments adhérents à $\mathfrak{A}_\xi$. C. Q. F. D.

LEMME III. — *A un élément fondamental* (x, u) *adhérent à* A, ξ *fait correspondre les* ∞ *éléments adhérents à la droite* $\overline{\omega x}$.

Nos deux coniques précédentes

$$AB - K^2R^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad dA.B - 2K^2R\,dR = 0$$

se réduisent, puisque $A = dA = 0$, à

$$R^2 = 0, \qquad R\,dR = 0;$$

(y, v) est l'un quelconque des ∞ éléments adhérents à la droite $\overline{\omega x}$.

$$R = \underline{x}_2 y_1 - \underline{x}_1 y_2 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

LEMME IV. — *A un élément fondamental* (x, u) *adhérent à* $\mathfrak{A}_\xi$, ξ *fait correspondre les* ∞ *éléments adhérents au point de coordonnées* x_2, 0, $2x$, *de* Ω.

Considérons la conique

$$P^{\xi}_{pt} = B'\mathfrak{A}_{\xi} - K^2\mathfrak{R}^2 = F(\underline{x}, v) = 0,$$
$$B' = v_1^2 - 4v_2v_3, \qquad \mathfrak{R} = x_2v_1 + 2x_1v_3.$$

L'élément (y, v) sera l'élément autre que le focal adhérent à la fois aux deux coniques

$$(1) \qquad F(\underline{x}, v) = B'\mathfrak{A}_{\xi} - K^2\mathfrak{R}^2 = 0$$

et

$$(2) \qquad F(\underline{x + dx}, v) = B'd\mathfrak{A}_{\xi} - 2K^2\mathfrak{R}\, d\mathfrak{R} = 0,$$
$$\sum_i u_i\, dx_i = \sum_i x_i\, du_i = 0.$$

Si (x, u) adhère à $\mathfrak{A}_{\xi}$, $\mathfrak{A}_{\xi} = d\mathfrak{A}_{\xi} = 0$, les coniques (1) et (2) se réduisent à

$$\mathfrak{R}^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{R}\, d\mathfrak{R} = 0.$$

v_i satisfait seulement à

$$\mathfrak{R} = \underline{x}_2v_1 + 2\underline{x}_1v_3 = 0;$$

(y, v) est l'un quelconque des ∞ éléments adhérents au point de coordonnées

$$x_2, \quad 0, \quad 2x_1$$

situé sur Ω.

24. Passons à l'étude des éléments fondamentaux de π qui adhèrent, comme on sait, à ω, Ω, A et $\mathfrak{A}_{\pi} = A - K^2x_1^2 = 0$.

Lemme I. — *A un élément fondamental* (ω, u) *ou* (x, Ω), π *fait correspondre tous les* ∞ *éléments adhérents respectivement à* A *ou à* $\mathfrak{A}_{\pi}$.

Ce lemme se démontre comme les lemmes I et II du n° **23**.

Lemme II. — *A un élément fondamental* (x, u) *adhérent à* A,

π fait correspondre tous les ∞ éléments adhérents à la droite issue de ω, *qui a pour coordonnées* x_1, x_2 *et* o.

Soit la conique

$$f(\underline{x}, y) = P^{\pi}_{pp} = AB - K^2R^2 = 0,$$
$$R = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

L'élément (y, v) doit adhérer à la fois à

$$f(\underline{x}, y) = 0 \qquad \text{et à} \qquad f(\underline{x + dx}, y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(1) \qquad AB - K^2R^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad dAB - 2K^2R\,dR = 0.$$

Si (x, u) adhère à A, on a

$$A = dA = 0;$$

les deux coniques (1) ont en commun la droite

$$R = \underline{x}_1 y_1 + \underline{x}_2 y_2 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme III. — *A un élément fondamental* (x, u) *adhérent* à $\mathfrak{A}_\pi$, *π fait correspondre tous les ∞ éléments adhérents au point situé sur Ω qui a pour coordonnées* x_1, o et $-2x_2$.

Considérons la conique

$$F(\underline{x}, v) = P^{\pi}_{pl} = B'\mathfrak{A}_\pi + K^2R^2 = 0,$$
$$B' = v_1^2 - 4v_2v_3, \qquad \mathfrak{R} = x_1v_1 - 2x_2v_3.$$

L'élément (y, v) adhère aux deux coniques

$$(1) \qquad F(\underline{x}, v) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(\underline{x + dx}, v) = 0.$$

Si (x, u) adhère à $\mathfrak{A}_\pi$, $\mathfrak{A}_\pi = d\mathfrak{A}_\pi = 0$, les deux coniques (1) ont en commun le point

$$\mathfrak{R} = \underline{x}_1 v_1 - 2\underline{x}_2 v_3 = 0,$$

situé sur Ω et de coordonnées x_1, o et $-2x_2$. C. Q. F. D.

Nous pouvons aborder maintenant l'étude des produits

$$\xi m \xi, \quad \pi m \xi, \quad \pi m \pi.$$

25. Lemme. — *Soit a une conique, l'ordre et la classe des courbes $\xi[a]$ et $\pi[a]$ sont huit.*

Cherchons, par exemple, l'équation de $\xi[a]$ en coordonnées points z_i, en posant

$$a = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_{ij} = 0.$$

Si le point z de coordonnées z_i est sur $\xi[a]$, c'est qu'il a un adhérent commun avec $\xi[a]$; donc les coniques $\xi[z]$ et a ont un adhérent commun, c'est-à-dire sont tangentes; l'équation de $\xi[a]$ en coordonnées-points z_i est donc le tactinvariant des deux coniques a et

$$\xi[z] = \mathrm{P}^{\xi}_{pp} = \mathrm{A}(x)\mathrm{B}(\underline{z}) - \mathrm{K}^2(x_2 \underline{z}_1 - x_1 \underline{z}_2)^2 = 0;$$

de ce tactinvariant $\Delta(z)$ pourra se séparer, d'ailleurs, un certain nombre de fois le facteur $\mathrm{B}(z)$; car, si $\mathrm{B} = 0$, $\xi[z]$ est une droite double, tangente à une courbe quelconque et, en particulier, à a. Le tactinvariant cherché est le discriminant de la forme cubique binaire en λ_1, λ_2, déterminant de la conique

$$\lambda_1 \xi[z] + \lambda_2 a = 0.$$

On trouve, en faisant le calcul, que le tactinvariant $\Delta(z)$ est d'ordre huit en z_i après départ du facteur B^2, ce qui était prévu. L'ordre de $\xi[a]$ est donc huit.

Cherchons l'équation de $\xi[a]$ en coordonnées-lignes w_i. On voit, comme plus haut, qu'il faut chercher le tactinvariant des deux coniques a et (*voir* n° **23**, lemme IV)

$$\xi[w] = \mathrm{B}'(\underline{w})\mathfrak{A}_{\xi}(x) - \mathrm{K}^2 \mathfrak{R}^2 = \mathrm{P}^{\xi}_{lp} = 0,$$

où

$$\mathfrak{N} = x_2 \underline{w}_1 + 2x_1 \underline{w}_3.$$

Il pourra encore se séparer du résultat le facteur

$$B'(w) = w_1^2 - 4w_2 w_3$$

une ou plusieurs fois, car, si $B' = 0$, $\xi[w]$ se réduit à une droite double et est tangente à a, comme à toute autre courbe du plan. Nous chercherons encore le discriminant $\delta(w)$ de la forme binaire cubique en λ_1, λ_2 déterminant de la conique

$$\lambda_1 \xi[w] + \lambda_2 a = 0,$$

et nous trouverons par un calcul aisé que, après départ prévu du facteur B'^2, les w_i figurent dans $\delta(w)$ à la dimension huit.

Raisonnant de même façon que pour ξ, sur la canonique π, on achèvera la démonstration du lemme.

26. Supposons que la conique a *n'adhère pas au focal* et que l'ordre ou la classe de $\xi[a]$ soient moindres que huit; cela exige qu'il se sépare de $\xi[a]$ des courbes $c, c', c'', \ldots$. Je dis que ces courbes ne peuvent être que les coniques A ou $\mathfrak{A}_\xi$, des droites issues de ω ou des points situés sur Ω.

Prenons, par exemple, la courbe c, (y, v) un de ses ∞ adhérents; l'élément $\xi[(y, v)]$ ne peut occuper sur a qu'un nombre fini de positions, tandis que (y, v) parcourt toute la courbe c. Si, en effet, $\xi[(y, v)]$ occupe sur la conique a un nombre ∞ de positions, il parcourt toute la conique a, qui est indécomposable. Soit (x, u) un adhérent de a; tandis que (x, u) parcourt a, $\xi[(x, u)]$ devrait parcourir à la fois la courbe c et aussi la courbe restante de $\xi[a]$ après séparation de la courbe c. Cela est absurde, puisque $\xi[(x, u)]$ est unique.

Ainsi aux ∞ éléments adhérents à c, c', c'', $\ldots$, ξ fait correspondre un *nombre fini* d'éléments adhérents à a. Soit (x, u) un de ces éléments en nombre fini; ξ fait correspondre à (x, u) un nombre ∞ d'éléments, adhérents à c, ou c', ou c'', $\ldots$; (x, u) sera donc un élément *fondamental* de ξ, c'est-à-dire (**25**) :

Un élément (ω, u), et il se sépare de $\xi[a]$ la conique A (**25**, lemme I); il ne peut se séparer A^2, car la conique a ne peut passer qu'*une* fois par ω, et n'y touche pas Ω, par hypothèse;

Un élément (x, Ω), et il se sépare de $\xi[a]$ la conique $\mathfrak{A}_\xi$, sans qu'il puisse se séparer $\mathfrak{A}_\xi^2$ (**23**, lemme II), car a ne peut toucher Ω qu'*une* fois;

Un élément adhérent à A, et il se sépare de $\xi[a]$ une droite d issue de ω (**23**, lemme III); il ne peut se séparer de $\xi[a]$ plus de deux pareilles droites, car deux coniques ne peuvent avoir plus de *deux* adhérents communs, sans coïncider, tandis que a et A ne coïncident pas;

Un élément adhérent à $\mathfrak{A}_\xi$, et il se sépare de $\xi[a]$ un point p situé sur Ω (**23**, lemme IV); il ne peut se séparer de $\xi[a]$ plus de deux pareils points, car les deux coniques a et $\mathfrak{A}_\xi$ ne sauraient avoir plus de deux adhérents communs sans coïncider.

On voit ainsi que les courbes c, c', c'' ne peuvent être que A, $\mathfrak{A}_\xi$, des droites issues de ω, des points situés sur Ω.

27. Raisonnant sur π comme on vient de le faire sur ξ, et faisant usage des lemmes du n° **24**, on s'assure aisément des propriétés suivantes :

Il peut se séparer de $\pi[a]$:

La conique A, si a passe par ω;

La conique $\mathfrak{A}_\pi$, si a touche Ω;

Une ou deux droites issues de ω, si a touche une ou deux fois A;

Un ou deux points situés sur Ω, si a touche une ou deux fois $\mathfrak{A}_\pi$.

28. Théorème. — *Si la conique a n'adhère pas au focal,* $\xi[a]$ *ne peut être une conique.*

Soit $\Delta\binom{8}{x} = 0$ et $\delta\binom{8}{u} = 0$ les équations (**26**) de $\xi[a]$ en coordonnées-lignes et coordonnées-points. Comme a ne peut à la fois toucher Ω et passer par ω, il ne peut se séparer au plus de $\Delta\binom{8}{x}$ que le facteur quadratique A, ou $\mathfrak{A}_\xi$, et deux facteurs linéaires en x_1, x_2 si a touche deux fois A; $\xi[a]$ est ainsi d'ordre quatre au moins et n'est pas une conique.

On démontrera d'une façon identique le théorème analogue pour π.

29. Théorème. — *Pour que le produit*

$$\xi m\xi,\quad \xi m\pi,\quad \pi m\xi \quad \text{ou} \quad \pi m\pi$$

soit quadratique, il faut et il suffit que m soit tautofocale.

Appelons Σ la substitution, quadratique par hypothèse,

$$\Sigma = \xi m\xi,\quad \xi m\pi,\quad \pi m\xi \qquad \text{ou} \qquad \pi m\pi,$$

et posons

$$a = C_p^{\xi m} \qquad \text{ou} \qquad C_p^{\pi m}.$$

La canonique ξ, ou π suivant le cas, doit transformer a en la conique C_p^{Σ}; cela exige (**28**) que a adhère au focal; mais a adhère à $m^{-1}[(\omega, \Omega)]$ et m doit être tautofocale.

Il faut montrer maintenant que ξ et π transforment une conique adhérente au focal en une conique possédant la même propriété.

Soit

$$0 = a = 2a_{23}x_2x_3 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

une pareille conique.

Formons (**26**) le tactinvariant de a et de la conique

$$C_p^{\xi} = A(x)B(z) - K^2(x_2z_1 - x_1z_2)^2 = 0.$$

Ces deux coniques, qui se touchent déjà au focal, doivent se toucher en un autre point encore.

La forme quadratique binaire en x_1, x_2

$$\begin{vmatrix} 2a_{23} & a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \\ -B & (B - K^2z_2^2)x_1^2 + 2z_1z_2K^2x_1x_2 - K^2z_1^2x_2^2 \end{vmatrix}$$

donne, égalée à zéro, le produit des deux droites qui joignent ω aux deux points d'intersection de a et de C_p^{ξ}. Cette forme doit être carré parfait et son discriminant nul; cela exige

$$(1)\quad 0 = \begin{vmatrix} 2a_{23} & a_{12} \\ -B & K^2z_1z_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} 2a_{23} & a_{11} \\ -B & B - K^2z_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2a_{23} & a_{22} \\ -B & -Kz_1^2 \end{vmatrix},$$

équation de dimension 4 en z_i; mais, pour $B = o$, (1) est identiquement zéro,

$$4 K^4 a_{23}^2 z_1^2 z_2^2 - 4 K^4 a_{23}^2 z_1^2 z_2^2;$$

après départ du facteur quadratique B, (1) représente une conique adhérente au focal.

La démonstration pour π est la même que pour ξ.

QUATRIÈME PARTIE.

PRODUITS DE CRÉMONIENNES ET DE CRÉMONIQUES.

30. Je vais étudier le produit d'une crémonienne par une crémonique, au point de vue des dimensions avec lesquelles les variables figurent dans ce produit. Il suffira d'ailleurs (**11**) d'étudier à ce point de vue les trois produits

$$\Sigma = \sigma m \zeta, \quad \sigma m \varpi, \quad \sigma m \rho,$$

$$m = \text{linéaire},$$

$$\sigma = \pi, \quad \xi, \quad \rho H \rho, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho \quad \text{ou} \quad \varpi E \varpi.$$

Lemme. — *Le produit $\sigma m \zeta$ ne peut être quadratique, c'est-à-dire contenir les variables à des dimensions au plus égales à deux.*

Posons en effet $a = C_p^{\sigma m}$. La courbe $\zeta[a]$ sera $C_p^{\sigma m \zeta}$; Σ ne peut être linéaire, car

$$\sigma m = \Sigma \zeta$$

et une crémonienne serait équivalente à une crémonique; Σ ne peut être une crémonique, car la crémonienne σm serait à deux composantes crémoniques, dont l'une serait ζ, ce qui est absurde (premier Mémoire). Σ est ainsi forcément une crémonienne et $\zeta[a]$ une conique. Cela est possible seulement si a passe par deux des trois points fondamentaux ω, ω', ω'' de ζ, et σ est l'une des deux canoniques $\rho E \varpi$ et $\varpi E \varpi$ (Préliminaires); comme les trois points ω, ω', ω'' jouent dans ζ le même rôle, je puis, sans restreindre la généralité, supposer que a

passe par ω, y ayant une tangente fixe, et par ω'. L'équation de a sera

$$o = a = P_{pp}^{\sigma m} = a_3 x_3(k_1 x_1 + k_2 x_2) + a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2,$$

a_3, a_{11}, a_{12} = formes quadratiques en y_i,

$$k_1, \quad k_2 = \text{const.}$$

Il viendra

$$\zeta[a] = a_3 x_1(k_2 x_1 + k_1 x_2) + a_{11} x_2 x_3 + a_{12} x_1 x_3 = C_p^{\Sigma}.$$

$\zeta[a]$ passe par les deux points fixes ω et ω', Σ est donc équivalente à l'une des deux canoniques $\rho E \varpi$ et $\varpi E \varpi$ et $\zeta[a]$ doit avoir en ω ou en ω' une tangente fixe, ce qui n'est pas.

Le lemme est ainsi démontré.

31. Lemme. — *Pour que le produit $\Sigma = \sigma m \varpi$ soit quadratique, il faut et il suffit que m soit tautofocale.*

Σ n'est pas linéaire, car la crémonique $\Sigma \varpi m^{-1}$ serait identique à la crémonienne σ. Σ est donc crémonienne ou crémonique; dans l'un et l'autre cas la courbe générale de l'un au moins des deux réseaux R_p^{Σ} et R_l^{Σ} est une conique indécomposable. Supposons, par exemple, conique indécomposable

$$\mathfrak{A} = C_p^{\Sigma};$$

posons

$$a = C_p^{\sigma m}, \qquad \text{d'où} \qquad \varpi[a] = \mathfrak{A}.$$

Si m n'est pas tautofocale, a n'adhère pas au focal; $\varpi[a] = \mathfrak{A}$ peut être une conique seulement si a passe par ω et par ω'; cela exige que $\sigma = \rho E \varpi$ ou $\varpi E \varpi$ et a a en ω' une tangente fixe. Alors

$$o = a = C_p^{\sigma m} = P_{pp}^{\sigma m} = 2a_2(k_1 x_1 + k_3 x_3)x_2 + a_{11} x_1^2 + 2a_{13} x_1 x_3,$$

a_2, a_{11}, a_{13} = formes quadratiques en y_i,

$$k_1, \quad k_3 = \text{const.}$$

Il vient

$$\varpi[a] = \mathfrak{A} = 2a_2 x_1(k_1 x_1 + k_3 x_3) + a_{11} x_1 x_2 + 2a_{13} x_2 x_3.$$

$\mathfrak{A} = C_p^{\Sigma}$ passe par les deux points fixes ω et ω', ce qui exige que Σ soit équivalente à l'une des trois canoniques ϖ, $\rho E \varpi$ ou $\varpi E \varpi$ et $\mathfrak{A}$ doit avoir en ω ou en ω' une tangente fixe; cela n'est pas.

Il est absurde ainsi de supposer m non tautofocale; si au contraire m est tautofocale, a adhère au focal et $\mathfrak{A}$ jouit de la même propriété et est une conique.

Le lemme est démontré.

32. Pour que le produit $\Sigma = \sigma m \rho$ soit quadratique, il faut et il suffit que m soit tautofocale.

Conservons les notations précédentes (**31**); $\mathfrak{A} = \rho[a]$ et ne pourra être une conique que si a adhère au focal, et la démonstration s'achève comme pour le lemme précédent.

33. Étudions maintenant, au point de vue des dimensions avec lesquelles entrent les variables, le produit de deux crémoniques. Il suffira encore (**11**) d'étudier les produits

$$\Sigma = \sigma m \zeta, \qquad \sigma m \varpi, \quad \sigma m \rho,$$
$$m = \text{linéaire}, \qquad \sigma = \zeta, \quad \rho \quad \text{ou} \quad \varpi.$$

Si m est monistique, il faut et il suffit, pour que Σ soit quadratique, que σm ait avec ζ, ρ ou ϖ suivant le cas deux points fondamentaux communs. Cela résulte de mes recherches sur les groupes quadratiques Cremona (*Journal de Mathématiques*, 1885).

Si m est dualistique, la conique $C_l^{\sigma m}$ touchera les trois droites

$$m^{-1}[\omega], \quad m^{-1}[\omega'], \quad m^{-1}[\omega''], \qquad \text{si} \qquad \sigma = \zeta;$$

adhérera à $m^{-1}[(\omega, \Omega)]$ et touchera la droite

$$m^{-1}[\omega'], \qquad \text{si} \qquad \sigma = \varpi;$$

adhérera à $m^{-1}[(\omega, \Omega)]$ et n'aura aucun point et aucune tangente fixes autres que $m^{-1}[\omega]$ et $m^{-1}[\Omega]$.

Il résulte de là que $\sigma m \zeta$ n'est jamais quadratique si m est dualistique; dans le même cas $\sigma m \varpi$ et $\sigma m \rho$ ne peuvent être quadratiques que si m est tautofocale. Il est évident aussi que, pour m dualistique, $\sigma \neq \zeta$.

33. Il est aussi bien aisé de voir à quelles conditions le produit de deux crémoniennes est crémonique quadratique.

Il suffira (**11**) d'étudier à quelles conditions on a

$$(o) \qquad \sigma' m \sigma = \tau,$$

σ', σ = une des six canoniques crémoniennes, τ = crémonique quadratique.

De (o) on tire

$$\sigma' m = \tau\sigma;$$

posons $\tau = \alpha\tau_0\beta$, α, β = linéaires, $\tau_0 = \rho$ ou ϖ ou ζ.

Le produit $\tau\sigma$ étant une crémonienne $\sigma' m$, $\tau_0 \neq \zeta$ (lemme du n° **30**) et β est tautofocale (lemme des n^{os} **31** et **32**).

$C_p^{\tau\sigma}$ adhère au focal et $C_p^{\sigma' m}$ adhère à l'élément $m^{-1}[(\omega, \Omega)]$, donc

$$m^{-1}[(\omega, \Omega)] = (\omega, \Omega)$$

et m est tautofocale, donc :

LEMME. — *Pour que le produit $\sigma' m \sigma$ soit une crémonique quadratique, m doit être tautofocale.*

34. Il est inutile d'examiner le produit d'une crémonique par une crémonienne. En effet, la discussion se ramène (**11**) à celle du produit

$$\tau m \sigma,$$

$\tau = \zeta$, ρ, ϖ, σ = une des six crémoniennes canoniques.

Or

$$(\tau m \sigma)^{-1} = \sigma m^{-1} \tau$$

et on est ramené aux n^{os} **30** à **33**; m doit être tautofocale, $\tau \neq \zeta$.

Enfin il est facile de se rendre compte de ce qui se passe quand le produit d'une substitution quadratique crémonienne ou crémonique par une autre substitution quadratique crémonienne ou crémonique est linéaire. Se reportant au n° **11**, on voit qu'il suffit de voir ce qui se passe quand le produit $\sigma' m \sigma$ est linéaire et $= \lambda$.

σ', $\sigma =$ une des six canoniques crémoniennes ou des trois canoniques crémoniques

$$\zeta, \quad \rho, \quad \varpi;$$

$m =$ linéaire.

On voit que σ' est équivalent à σ; λ et m sont tautofocales.

CINQUIÈME PARTIE.

CONSTRUCTION DES GROUPES QUADRATIQUES CRÉMONIENS; GROUPE DIRECTEUR.

35. Nous sommes actuellement, après une discussion un peu méticuleuse à cause du grand nombre de cas à examiner, en possession de toutes les propositions nécessaires pour procéder à la construction d'un groupe quadratique crémonien G, dérivé de crémoniennes

$$\begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{a}{x}, \overset{b}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{c}{x}, \overset{d}{u}) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix},$$

$$a, \quad b, \quad c, \quad d \leqq 2,$$

et pouvant contenir par suite :

(I) des linéaires monistiques $\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$ ou dualistiques $\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$,

(II) des crémoniques

$$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

(III) des crémoniennes proprement dites

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}.$$

36. Si G manque de crémoniennes et de crémoniques, il est l'un des groupes linéaires de contact, construits par moi ailleurs (*Journal de Mathématiques*, 1887).

Supposons G dépourvu de crémoniennes et soit t une crémonique de G.

$$t = \alpha\tau\beta,$$

$$\tau = \zeta \quad \varpi, \quad \text{ou} \quad \rho; \quad \alpha, \beta = \text{linéaires}.$$

On peut, en transformant au besoin par α toutes les substitutions de G, supposer toujours $t = \tau\lambda$, puisque

$$\alpha^{-1} t\alpha = \tau\beta\alpha = \tau\lambda.$$

Soit maintenant $t' = \alpha'\tau'\beta'$ une crémonique de G, distincte ou non de t; si β' est dualistique, elle doit être tautofocale (**33**) pour que $t't$ soit quadratique. Il suffit de se reporter à la construction dans le premier Mémoire des crémoniennes à deux composantes crémoniques pour voir que

$$t't = \alpha'\tau'\beta\tau\lambda$$

est une crémonienne équivalente à

$$\rho\mathrm{H}\rho, \quad \rho\mathrm{E}\varpi, \quad \varpi\mathrm{E}\rho \quad \text{ou} \quad \varpi\mathrm{E}\varpi;$$

or G est dépourvu de crémoniennes par hypothèse, et β' ne peut être dualistique.

Il résulte de là que λ', α', β', ... sont monistiques. Une linéaire l de G est aussi monistique, car on aurait, dans le cas contraire, dans G, la substitution

$$\alpha'\tau'\beta' l,$$

et $\beta' l$ est dualistique.

Les substitutions de G sont donc toutes de la forme $\alpha\tau\beta$, où α, β = monistiques; $\tau = 1$, ρ, ϖ ou ζ; en d'autres termes, G est l'un des groupes quadratiques Cremona déjà construits par moi ailleurs.

37. Si G est pourvu de crémoniennes, soit (**36**) $\sigma\lambda$ l'une d'elles, où λ = linéaire, σ = une des six canoniques crémoniennes.

Lemme I. — *La linéaire λ est tautofocale.*

Cela est évident, si $(\sigma\lambda)^2 = \sigma\lambda\sigma\lambda$ est crémonienne ou crémonique, en vertu des deuxième et troisième Parties et de (**33** et **34**). Supposons $(\sigma\lambda)^2$ linéaire et égal à Λ. On aura

$$\sigma\lambda\sigma\lambda = \Lambda \qquad \text{et} \qquad \sigma\lambda = \Lambda\lambda^{-1}\sigma = \Sigma.$$

C_p^{Σ} adhère au focal, puisque $\Sigma = \sigma\lambda$, et, par suite, λ^{-1} = tautofocale. C_p^{Σ} adhère au focal, puisque $\Sigma = \Lambda\lambda^{-1}\sigma$: donc λ est tautofocale. Λ est aussi tautofocale.

Lemme II. — *Toute linéaire de G est tautofocale.*

Soient $\sigma\lambda$ la crémonienne de G considérée plus haut; L une linéaire de G. La crémonienne $\sigma\lambda L$ figurera dans G, et λL doit être tautofocale comme λ, ce qui exige que L soit tautofocale.

Théorème. — *Toute substitution de G doit être de la forme*

$$s = \alpha\sigma'\beta,$$

où α et β désignent des linéaires tautofocales, et σ' l'une des huit substitutions canoniques

$$\varpi, \quad \rho, \quad \rho H\rho \quad \rho E\varpi, \quad \varpi E\rho, \quad \varpi E\varpi, \quad \pi, \quad \xi$$

ou la substitution unité.

Le théorème est évident si s est linéaire. Il est évident aussi, en vertu de ce qui précède, si le produit $s\sigma\lambda$ et $s^{-1}\sigma\lambda$ est crémonienne ou crémonique. Si le produit $s\sigma\lambda$ est une linéaire Λ, on aura

$$s\sigma\lambda = \Lambda = \alpha\sigma'\beta\sigma\lambda,$$
$$\sigma'\beta = \alpha^{-1}\Lambda\lambda^{-1}\sigma.$$

Raisonnant comme pour le lemme précédent, on voit que β est tautofocale, ainsi que la linéaire $\alpha^{-1}\Lambda\lambda^{-1}$. Comme λ et Λ sont tautofocales en vertu des deux lemmes précédents, α est aussi tautofocale.

Il est évident d'ailleurs (**30**) qu'aucune crémonique de G ne peut être équivalente à la canonique ζ. C. Q. F. D.

Comme les six canoniques crémoniennes s'obtiennent (premier Mémoire) en combinant ρ et ϖ avec les tautofocales H, E, e, k, k', comme une tautofocale dualistique est le produit par e d'une monistique de la forme l (**13**), on peut formuler ainsi le théorème précédent :

38. Théorème. — *On obtient une substitution quelconque de* G *en combinant convenablement ensemble les substitutions* ρ, ϖ, e *avec des monistiques* l *de la forme*

$$l = \left|\begin{array}{lc} x_1 & l_1 x_1 + l'_3 x_2 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l'_2 x_1 + l'_1 x_2 + l_3 x_3 \\ u_1 & l_2 l_3 u_1 - l_2 l'_3 u_3 \\ u_2 & -l_3 l'_3 u_1 + l_1 l_3 u_2 + (l'_2 l'_3 - l_1 l'_1) u_3 \\ u_3 & l_1 l_2 u_3 \end{array}\right|.$$

39. Posons

$$(0) \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_4}, \qquad \frac{u_1}{u_3} = \frac{z_2}{z_4}, \qquad \frac{r_1}{x_2 u_3} = \frac{z_3}{z_4},$$

$$r_1 = x_2 u_2 - x_3 u_3,$$

avec la relation bien connue

$$\sum_i u_i x_i = 0,$$

laquelle indique que l'élément (x, u) est principal.

Des relations (0) on tire (α, β, γ = facteurs de proportionnalité) les deux systèmes d'équations

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \gamma z_1 = x_1 u_3, \\ \gamma z_2 = x_2 u_1, \\ \gamma z_3 = r_1, \\ \gamma z_4 = x_2 u_3 \end{array}\right.$$

et

$$
(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
\alpha x_1 = \quad 2 z_1 z_4, & \beta u_1 = \quad 2 z_2 z_4, \\
\alpha x_2 = \quad 2 z_4^2, & \beta u_2 = - z_1 z_2 + z_3 z_4, \\
\alpha x_3 = - z_1 z_2 - z_3 z_4; & \beta u_3 = \quad 2 z_4^2.
\end{array}\right.
$$

Ces équations permettent de passer sans ambiguïté aucune de l'élément principal (x, u) au point z, de coordonnées $z_j (j = 1, 2, 3, 4)$ de l'espace, et réciproquement. On peut appeler z point affixe de l'élément (x, u).

40. Un calcul simple montre que l'on a

$$
\rho\left[\frac{z_1}{z_4}\right] = \rho\left[\frac{x_1}{x_2}\right] = \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_4},
$$

$$
\rho\left[\frac{u_1}{u_3}\right] = \rho\left[\frac{z_2}{z_4}\right] = - \frac{x_2 u_1 + 2 x_1 u_3}{x_2 u_3} = - \frac{z_2 + 2 z_1}{z_4},
$$

$$
\rho\left[\frac{z_3}{z_4}\right] = \rho\left[\frac{r_1}{x_2 u_3}\right] = \frac{- r_1}{x_2 u_3} = - \frac{z_3}{z_4}.
$$

La substitution ρ équivaut entre les quatre variables z_j, en vertu des égalités précédentes, à la substitution *linéaire quaternaire*

$$
\rho' = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad - z_1 \quad 2 z_1 + z_2 \quad z_3 \quad - z_4 \; |.
$$

On verra, de la même façon, que les substitutions ϖ, e, t reviennent entre les quatre variables z_j aux substitutions linéaires

$$
\varpi' = \left|\begin{array}{cc}
z_1 & z_4 \\
z_2 & z_3 \\
z_3 & z_2 \\
z_4 & z_1
\end{array}\right|, \qquad
e' = \left|\begin{array}{cc}
z_1 & z_2 \\
z_2 & z_1 \\
z_3 & - z_3 \\
z_4 & z_4
\end{array}\right|,
$$

$$
t' = \left|\begin{array}{lc}
z_1 & l_1^2 z_1 + l_4 l'_3 z_4 \\
z_2 & l_2 l_3 z_2 - l_2 l'_2 z_4 \\
z_3 & - l_1 l'_2 z_1 - l_3 l'_3 z_2 + l_1 l_3 z_3 + (l'_2 l'_3 - 2 l_1 l'_1) z_4 \\
z_4 & l_1 l_2 z_4
\end{array}\right|.
$$

41. Tout groupe G dérivé de ρ, ϖ, e, l est évidemment isomorphe au groupe G', dérivé de la même façon, des linéaires quaternaires ρ', ϖ', e', l'. L'isomorphisme est d'ailleurs holoédrique; car, si une substitution s' de G' laisse immobile un point quelconque z de l'espace, la substitution s de G laisse immobile, en vertu des relations (2) du n° **39**, un élément principal quelconque (x, u) du plan et $s = 1$.

Soit, d'ailleurs, une substitution s' de G',

$$| z_i \quad T'_i | = s' = \left| z_i \quad \sum_j a_{ij} z_j \right| \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

a_{ij} = constantes de déterminant $\neq 0$. Il vient

$$s'\left[\frac{z_1}{z_4}\right] = \frac{T'_1}{T'_4} = \frac{a_{11} x_1 u_3 + a_{12} x_2 u_1 + a_{13} r_1 + a_{14} x_2 u_3}{a_{41} x_1 u_3 + a_{42} x_2 u_1 + a_{43} r_1 + a_{44} x_2 u_3} = s\left[\frac{x_1}{x_2}\right],$$

$$s'\left[\frac{z_2}{z_4}\right] = \frac{T'_2}{T'_4} = \frac{a_{21} x_1 u_3 + \ldots}{a_{41} x_1 u_3 + \ldots} = s\left[\frac{u_1}{u_3}\right],$$

$$s\left[\frac{z_3}{z_4}\right] = \frac{T'_3}{T'_4} = \frac{a_{31} x_1 u_3 + \ldots}{a_{41} x_1 u_3 + \ldots} = s\left[\frac{r_1}{x_2 u_3}\right],$$

en vertu du système (1) du n° **39**.

Si je pose donc

$$T_i = a_{i1} x_1 u_3 + a_{i2} x_2 u_1 + a_{i3} r_1 + a_{i4} x_2 u_3,$$

on voit que s' a pour correspondante, dans le groupe quadratique crémonien G, la substitution

$$s = \left| \begin{array}{ll} x_1 & 2T_1 T_4 \\ x_2 & 2T_4^2 \\ x_3 & -T_1 T_2 - T_3 T_4 \\ u_1 & 2T_2 T_4 \\ u_2 & -T_1 T_2 + T_3 T_4 \\ u_3 & 2T_4^2 \end{array} \right|.$$

En effet, des relations précédentes on tire

$$\frac{s[x_1]}{s[x_2]} = \frac{T_1}{T_4}, \qquad \frac{s[u_1]}{s[u_3]} = \frac{T_2}{T_4}, \qquad \frac{s[r_1]}{s[x_2 u_3]} = \frac{T_3}{T_4},$$

et il suffit de résoudre le système par rapport aux $s[x_i]$ et $s[u_i]$ pour apercevoir la forme de s.

42. Soit s' une linéaire quaternaire quelconque à déterminant $\neq 0$; le procédé précédent donne toujours naissance, appliqué sur s', à une substitution s quadratique par rapport aux deux séries de variables x_i et u_i, mais s, qui est forcément birationnelle (car il suffit, pour avoir s^{-1}, d'opérer sur s'^{-1} au lieu d'opérer sur s'), peut n'être pas de contact.

En effet, s, si elle est de contact, n'altère pas l'équation

$$\sum_i u_i\, dx_i = 0,$$

c'est-à-dire, en tenant compte du système (2) du n° **39**, l'équation

$$(0)\quad \left\{\begin{aligned} &2z_2z_4\,d.(2z_1z_2)+(-z_1z_2+z_3z_4)\,d.(2z_4^2)\\ &\quad+2z_4^2\,d.(-z_1z_2-z_3z_4)\\ &\qquad\qquad = z_2\,dz_1-z_1\,dz_2+z_3\,dz_4-z_4\,dz_3=0,\end{aligned}\right.$$

après départ du facteur $2z_4^2$. La linéaire quaternaire s' ne doit donc pas changer l'équation (0). Cette *condition de contact* est d'ailleurs la seule à laquelle soit astreinte s'; car, si elle est remplie, s, qui est déjà quadratique et birationnelle, devient de contact, c'est-à-dire crémonienne.

Les substitutions ρ, ϖ, c, l sont de contact, donc ρ', ϖ', c', l' satisfont à la condition de contact, ce dont on s'assure facilement. En combinant ρ', ϖ', c', l' d'une façon quelconque, on trouve une linéaire s' satisfaisant à la condition de contact, et s fait partie du groupe G dérivé de ρ, ϖ, c, l. On peut donc compléter ainsi l'énoncé du n° **38**.

THÉORÈME. — *On obtient un groupe quadratique crémonien* G *en combinant d'une façon quelconque les substitutions* ρ, ϖ, c, l.

43. Pour que G soit d'ordre fini, il faut et il suffit évidemment que G' soit d'ordre fini. Je suis ainsi ramené à la construction des groupes linéaires quaternaires d'ordre fini, dont toutes les substitutions satisfont à la condition de contact.

G′ est le groupe *directeur* de G. Nous supposons dorénavant G′ d'ordre fini, puisque G l'est par hypothèse. Les substitutions de G′ seront les *directrices* de celles de G.

SIXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DANS QUELQUES CAS PARTICULIERS DU GROUPE DIRECTEUR.

44. La construction, dans le cas général, du groupe directeur G′, relatif à un groupe quadratique crémonien d'ordre fini G, présente les difficultés les plus grandes. L'énumération des groupes linéaires quaternaires d'ordre fini n'a pas encore été faite. M. Jordan (*Journal de Crelle*, t. LXXXIV, et Mémoire couronné par l'Académie de Naples, 1880), après avoir posé les principes de la méthode, ne s'est pas engagé dans une interminable discussion arithmétique, où les hypothèses à examiner successivement se présentaient par milliers. Dans le cas particulier, qui nous intéresse seul, l'équation de contact allège considérablement la discussion qui, néanmoins, reste encore trop fastidieuse pour que je l'aborde, au moins à présent. Je me bornerai à construire G′ dans quelques cas particuliers.

Si nous posons, pour abréger,

$$(z\,dz)_{ij} = z_i\,dz_j - z_j\,dz_i \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4),$$

l'équation de contact (**42**) peut s'écrire

$$\mathfrak{S} = (z\,dz)_{12} - (z\,dz)_{34} = 0.$$

Une substitution quadratique birationnelle de la forme

$$s = \begin{vmatrix} x_1 & 2T_1T_4 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

[*voir* (**41**)] sera crémonienne si sa directrice s' multiplie $\mathfrak{S}$ par un facteur constant (**42**).

Au lieu de construire G, nous pouvons construire le groupe $t^{-1}Gt$, t étant une crémonienne quadratique, puisque cela revient à transformer par la substitution t tout le plan des éléments (x, u), c'est-à-dire à effectuer dans ce plan un changement de coordonnées curvilignes, lequel n'altère pas les propriétés du groupe G. Donc, *il est licite de transformer le groupe linéaire quaternaire* G' *par une linéaire quaternaire quelconque* t', *laquelle a son déterminant* $\neq 0$ *et multiplie* ϖ *par un facteur constant.*

Passons maintenant à la discussion des cas particuliers.

45. G' *est dérivé de* ρ', ϖ', t'. — Les substitutions de G sont des substitutions Cremona, et G se réduit à un groupe quadratique Cremona du troisième type (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 27 août 1883 et 3 mars 1884; *Journal de Mathématiques*, p. 436; 1885).

46. *On a, dans toutes les monistiques* t, *les constantes* l'_2 *et* l'_3 *nulles* (**40**).

Les monistiques t de cette nature forment évidemment un groupe. Une substitution quelconque de G' est, ainsi qu'on s'en assure sur le champ, de la forme

$$s' = \begin{vmatrix} z_1 & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ z_2 & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ z_3 & b_{11} z_3 + b_{12} z_4 \\ z_4 & b_{21} z_3 + b_{22} z_4 \end{vmatrix},$$

ou

$$t' = \begin{vmatrix} z_1 & c_{11} z_3 + c_{12} z_4 \\ z_2 & c_{21} z_3 + c_{22} z_4 \\ z_3 & d_{11} z_1 + d_{12} z_2 \\ z_4 & d_{21} z_1 + d_{22} z_4 \end{vmatrix}.$$

Appelons λ le couple de variables z_1 et z_2, et, de même, μ le couple z_3, z_4. Appelons α, β, ... les binaires

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad \ldots;$$

soient a le déterminant de α, b celui de β, etc.

Les substitutions s' et t' s'écriront symboliquement

$$s' = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha[\lambda] \\ \mu & \beta[\mu] \end{vmatrix}, \qquad t' \begin{vmatrix} \lambda & \gamma[\mu] \\ \mu & \delta[\lambda] \end{vmatrix},$$

et l'on vérifiera sans peine que, si l'on a

$$\begin{aligned} s' &= \begin{vmatrix} \lambda & \alpha[\lambda] \\ \mu & \beta[\mu] \end{vmatrix}, & s'_1 &= \begin{vmatrix} \lambda & \alpha_1[\lambda] \\ \mu & \beta_1[\mu] \end{vmatrix}, & \ldots, \\ t' &= \begin{vmatrix} \lambda & \gamma[\mu] \\ \mu & \delta[\lambda] \end{vmatrix}, & t'_1 &= \begin{vmatrix} \lambda & \gamma_1[\mu] \\ \mu & \delta_1[\lambda] \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

il vient les relations

$$(\text{o}) \quad \left\{ \begin{aligned} s'_1 s' &= \begin{vmatrix} \lambda & \alpha_1 \alpha[\lambda] \\ \mu & \beta_1 \beta[\mu] \end{vmatrix}, & t'_1 t' &= \begin{vmatrix} \lambda & \gamma_1 \delta[\mu] \\ \mu & \delta_1 \gamma[\mu] \end{vmatrix}, \\ s'^{-1} &= \begin{vmatrix} \lambda & \alpha^{-1}[\lambda] \\ \mu & \beta^{-1}[\mu] \end{vmatrix}, & t'^{-1} &= \begin{vmatrix} \lambda & \delta^{-1}[\mu] \\ \mu & \gamma^{-1}[\lambda] \end{vmatrix}, \\ t's' &= \begin{vmatrix} \lambda & \gamma\beta[\mu] \\ \mu & \delta\alpha[\lambda] \end{vmatrix}, & t'^{-1} s' t &= \begin{vmatrix} \lambda & \delta^{-1}\beta\delta[\lambda] \\ \mu & \gamma^{-1}\alpha\gamma[\mu] \end{vmatrix}, \end{aligned} \right.$$

$\alpha_1 \alpha$ étant le produit de la substitution binaire α_1 par la binaire α, etc.

De ces relations résultent immédiatement les trois corollaires :

Corollaire I. — *Les substitutions de la forme s', contenues dans* G', *forment un groupe* S' *contenu dans* G' *et permutable à ses substitutions.*

Corollaire II. — G' *résulte de la combinaison de* S' *avec une seule substitution t'_0, de la forme t', et contient le double des substitutions s' de* S'.

Corollaire III. — *Pour que* G' *soit d'ordre fini, il faut et il suffit que* S' *le soit, c'est-à-dire qu'il faut et il suffit que chacun des groupes binaires* A_γ *dérivés des α et* B, *dérivés des β, soit d'ordre fini.*

Les relations (o) indiquent aussi que, si

$$t'_0 = \begin{vmatrix} \lambda & \gamma[\mu] \\ \mu & \delta[\lambda] \end{vmatrix},$$

on a entre les groupes A et B

$$\delta^{-1} B \delta = A, \qquad \gamma^{-1} A \gamma = B.$$

47. Les substitutions s' et t' changent respectivement ϖ (**44**) en

$$a(z\,dz)_{12} - b(z\,dz)_{34} \quad \text{et} \quad c(z\,dz)_{34} - d(z\,dz)_{12};$$

d'où, puisque ϖ ne change pas (**44**),

$$a = b, \qquad c = d,$$

a étant le déterminant de α, ...

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que les déterminants ab de s' et cd de t' sont égaux à l'unité; donc

$$a^2 = b^2 = 1 = c^2 = d^2$$

et enfin

$$a = b = c = d = 1,$$

car, si $b = a = -1$ par exemple, il suffirait de multiplier s' par la substitution

$$(i^4 = 1) \qquad | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad iz_1 \quad iz_2 \quad iz_3 \quad iz_4 \; |.$$

Réciproquement on voit sans peine que *toute linéaire quaternaire* de la forme s'

$$s'_0 = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha_0[\lambda] \\ \mu & \beta_0[\mu] \end{vmatrix} \qquad \text{avec} \qquad a_0 = b_0 = 1$$

est la directrice d'une quadratique crémonienne s_0.

Les groupes binaires A et B ne diffèrent, comme on vient de le voir, que par le choix des variables, puisque

$$\delta^{-1} B \delta = A \qquad \text{et} \qquad \gamma^{-1} A \gamma = B.$$

Il nous est licite (**44**) de transformer G′ par la substitution s'_0 ci-dessus, dont nous choisirons les coefficients de façon à faire coïncider

$$\alpha_0^{-1}A\alpha_0 \quad \text{et} \quad \beta_0^{-1}B\beta_0$$

avec un même groupe P, convenablement choisi parmi les groupes linéaires binaires d'ordre fini.

Après cette transformation, G′ résultera de la combinaison du groupe $s_0'^{-1}S's'_0 = \Sigma'$ avec la substitution

$$s_0'^{-1}t'_0 s_0 = \begin{vmatrix} \lambda & \Gamma[\mu] \\ \mu & \Delta[\lambda] \end{vmatrix}.$$

Le groupe Σ′ dérivé de

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mathbf{a}[\lambda] \\ \mu & \mathbf{b}[\mu] \end{vmatrix}$$

sera isomorphe à chacun des groupes

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \mu & \mathbf{b}[\mu] \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda & \mathbf{a}[\lambda] \\ \mu & \mu \end{vmatrix}$$

et se composera des Π^2 substitutions (Π étant l'ordre P)

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mathbf{a}[\lambda] \\ \mu & \mathbf{b}[\mu] \end{vmatrix},$$

obtenues en combinant chacune des substitutions **a** de P avec chacune des substitutions **b** aussi de P.

Σ′ est permutable à $s_0'^{-1}t'_0 s'$ et par suite P est permutable à Γ et à Δ. La transformation de P par Γ équivaut entre les substitutions de P à une certaine substitution $\mathfrak{G}$; si $\mathfrak{G}^m = 1$, Γ^m sera échangeable à toutes les substitutions de P.

Supposons que P n'est pas un faisceau et qu'il est le plus général possible, c'est-à-dire n'est contenu dans aucun autre groupe d'ordre fini. Alors $\Gamma^m = 1$; le groupe dérivé de Γ et de P est d'ordre fini et coïncide avec P, puisque P est général : donc Γ est contenu dans P. Le raisonnement est le même pour Δ. Ainsi la substitution

$$t'_0 = \begin{vmatrix} \lambda & \Delta^{-1}[\lambda] \\ \mu & \Gamma^{-1}[\mu] \end{vmatrix}$$

figurera dans Σ' et la substitution

$$s'^{-1}_0 t'_0 s'_0 \tau'_0 = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & \lambda \end{vmatrix} = \mathfrak{T}'_0$$

se combinera à Σ' pour former G'; il suffira même de combiner $\mathfrak{T}'_0$ avec le groupe

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mathbf{a}[\lambda] \\ \mu & \mu \end{vmatrix}.$$

Si P est un faisceau, les substitutions de Σ' seront de la forme

$$\sigma' = \begin{vmatrix} \lambda & \alpha[\lambda] \\ \mu & \beta[\mu] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & az_1 \\ z_2 & a^{-1}z_2 \\ z_3 & bz_3 \\ z_4 & b^{-1}z_4 \end{vmatrix};$$

$$a, \quad b = \text{racines de l'unité},$$

et celles de G' non contenues dans Σ', de la forme

$$\begin{vmatrix} \lambda & \alpha_1\gamma[\mu] \\ \mu & \beta_1\delta[\lambda] \end{vmatrix}$$

avec

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \beta_1 = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1^{-1} \end{pmatrix}; \qquad \gamma, \quad \delta = 1 \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Toute substitution de la forme

$$L' = | \; z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \qquad az_1 \quad a^{-1}z_2 \quad bz_3 \quad b^{-1}z_4$$

est la directrice de la monistique

$$\mathrm{L} = \left| \begin{array}{cc} x_1 & abx_1 \\ x_2 & x_2 \\ x_3 & bx_3 \\ \ldots & \ldots\ldots \end{array} \right|.$$

De plus, comme on a

$$\varpi' = \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_4 \\ z_2 & z_3 \\ z_3 & z_2 \\ z_4 & z_1 \end{array} \right| \quad \text{et} \quad e' = \left| \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \\ z_3 & -z_3 \\ z_4 & z_4 \end{array} \right|,$$

on voit que toute substitution de G s'obtient en combinant des monistiques L avec la dualistique e et la canonique ϖ.

En résumé, il vient :

THÉORÈME. — *Si* G *est dérivé des substitutions* ρ, ϖ, e *et*

$$l = \left| \begin{array}{cc} x_1 & l_1 x_1 \\ x_2 & l_2 x_2 \\ x_3 & l_3 x_3 + l'_1 x_2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right|,$$

on a constamment $l' = 0$ *et* G *ne contient pas de crémoniennes, mais seulement des crémoniques, dérivées de* ϖ, e, L; *ou bien* G *a pour groupe directeur un groupe* G' *obtenu en combinant*

$$| \, z_1 \quad z_2 \quad z_3 \quad z_4 \quad z_3 \quad z_4 \quad z_1 \quad z_2 \, |$$

avec un groupe

$$\left| \begin{array}{cc} z_1 & p_{11} z_1 + p_{12} z_2 \\ z_2 & p_{21} z_1 + p_{22} z_2 \\ z_3 & z_3 \\ z_4 & z_4 \end{array} \right|,$$

le groupe linéaire binaire

$$\begin{vmatrix} z_1 & p_{11}z_1 + p_{12}z_2 \\ z_2 & p_{21}z_1 + p_{22}z_2 \end{vmatrix}$$

étant d'ordre fini.

48. Si G′ ne contenait pas de substitution déplaçant les couples λ et μ, G′ serait formé de substitutions

$$\begin{vmatrix} \lambda & \alpha[\lambda] \\ \mu & \beta[\mu] \end{vmatrix},$$

où les binaires α et β formeraient des groupes A et B d'ordre fini.

49. G′ *est dérivé de* ρ', e' *et* l'. On voit sur-le-champ que toute substitution de G′ est de la forme

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{14}z_4 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{24}z_4 \\ z_3 & a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}z_3 + a_{34}z_4 \\ z_4 & a_{44}z_4 \end{vmatrix}.$$

G′ est donc isomorphe au groupe linéaire ternaire G″, dérivé des substitutions

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{14}z_4 \\ z_2 & a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{24}z_4 \\ z_4 & a_{44}z_4 \end{vmatrix}.$$

Lemme. — G′ est holoédriquement isomorphe à G″.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Soit

$$\sigma' = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_2 & z_2 \\ z_3 & b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 + b_4z_4 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

une substitution de G′ qui correspond à la substitution unité de G″; σ' transforme ϖ en

$$(z\,dz)_{12} - b_1(z\,dz)_{14} - b_2(z\,dz)_{24} - b_3(z\,dz)_{34};$$

comme ϖ ne doit pas changer, on a

$$b_1 = b_2 = 0, \qquad b_3 = 1;$$

mais alors

$$\sigma' = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_2 & z_2 \\ z_3 & z_3 + b_4 z_4 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix}, \qquad \sigma'^m = \begin{vmatrix} z_1 & z_1 \\ z_2 & z_2 \\ z_3 & z_3 + m b_4 z_4 \\ z_4 & z_4 \end{vmatrix};$$

σ' doit être d'ordre fini : donc $b_4 = 0$, $\sigma' = 1$. C. Q. F. D.

Pour que G soit d'ordre fini, il faut et il suffit par suite que G″ soit d'ordre fini. Ainsi G″ ne diffère que par le choix des variables de l'un des groupes de M. Jordan (*voir* l'énumération, *Journal de l'École Polytechnique*, LI^e Cahier, p. 134). D'ailleurs G″ multiplie simplement par un facteur la variable z_4; par suite, G″ appartient au premier type.

50. Lemme. *Dans une substitution*

$$\mathfrak{R}' = \begin{vmatrix} z_1 & p_{11}z_1 + p_{12}z_2 + p_{14}z_4 \\ z_2 & p_{21}z_1 + p_{22}z_2 + p_{24}z_4 \\ z_3 & q_1 z_1 + q_2 z_2 + q_3 z_3 + q_4 z_4 \\ z_4 & p_{44} z_4 \end{vmatrix},$$

on peut, quels que soient les coefficients p, *déterminer les coefficients* q, *de façon que* $\mathfrak{R}'$ *n'altère pas l'équation de contact*

$$\varpi = (z\,dz)_{12} - (z\,dz)_{34} = 0.$$

$\mathfrak{R}'$ *change* ϖ *en*

$$(z\,dz)_{12}\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + (z\,dz)_{14}\begin{vmatrix} p_{11} & p_{14} \\ p_{21} & p_{24} \end{vmatrix} + (z\,dz)_{24}\begin{vmatrix} p_{12} & p_{14} \\ p_{22} & p_{24} \end{vmatrix}$$
$$- q_1 p_{44}(z\,dz)_{14} - q_2 p_{44}(z\,dz)_{24} - q_3 p_{44}(z\,dz)_{34}.$$

Il suffit donc de faire

$$\begin{aligned} q_1 p_{44} &= p_{11} p_{24} - p_{14} p_{21}, \\ q_2 p_{44} &= p_{12} p_{24} - p_{14} p_{22}, \\ q_3 p_{44} &= p_{11} p_{22} - p_{12} p_{21}. \end{aligned}$$

Ce système définit q_1, q_2, q_3, car $p_{44} \neq 0$.

$\mathfrak{K}'$ est la directrice d'une crémonienne quadratique $\mathfrak{K}$. Il est licite de transformer G par $\mathfrak{K}$, c'est-à-dire G′ par $\mathfrak{K}'$. Il est possible alors de disposer des coefficients p dans $\mathfrak{K}'$ de façon à ramener G″, groupe linéaire ternaire d'ordre fini et du premier type, à sa forme habituelle

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ z_2 & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ z_4 & a_{44} z_4 \end{vmatrix}.$$

Alors G′ est de la forme

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_{11} z_1 + a_{12} z_2 \\ z_2 & a_{21} z_1 + a_{22} z_2 \\ z_3 & b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + b_4 z_4 \\ z_4 & a_{44} z_4 \end{vmatrix}.$$

Les substitutions de G′ changent $\mathfrak{E}$ en

$$\begin{aligned} &(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})(z\,dz)_{12} \\ &\quad - a_{44} b_1 (z\,dz)_{14} - a_{44} b_2 (z\,dz)_{24} - a_{44} b_3 (z\,dz)_{34}; \end{aligned}$$

donc $b_1 = b_2 = 0$, et nous sommes ramenés à un cas déjà étudié (**46** à **49**).