JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉON AUTONNE

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. Premier mémoire : Étude d'une substitution crémonienne isolée

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 177-247.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__177_0>

Recherches sur les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe quadratique crémonien. Premier Mémoire : *Étude d'une substitution crémonienne isolée ;*

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Après avoir, dans deux Mémoires insérés au *Journal de Mathématiques* (années 1885 et 1886), étudié les groupes d'ordre fini contenus dans les groupes quadratique et cubique Cremona, je me propose, dans le présent travail, d'étendre le même genre de recherches aux substitutions birationnelles qui, au lieu d'avoir seulement une série de trois variables homogènes x_i (coordonnées d'un point x du plan), contiennent deux séries de trois variables homogènes : x_i (coordonnées d'un point x du plan), u_i (coordonnées d'une droite u du plan).

Soit

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{a}{x}, \overset{b}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{c}{x}, \overset{d}{u}) \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix}$$

une pareille substitution, φ_i et ψ_i étant des polynômes qui contiennent les x_i et les u_i aux dimensions marquées par les entiers a, b, c, d, lesquels ne peuvent être négatifs.

La substitution s sera *birationnelle* si, posant

$$\alpha y_i = \varphi_i(x, u), \qquad \beta v_i = \psi_i(x, u),$$

$$(\alpha, \beta = \text{facteur de proportionnalité})$$

on a aussi

$$\gamma x_i = \theta_i\begin{pmatrix} a' & b' \\ y, & v \end{pmatrix}, \qquad \delta u_i = \eta_i\begin{pmatrix} c' & d' \\ y, & v \end{pmatrix},$$

$$(\gamma, \delta = \text{facteur de proportionnalité}),$$

θ_i et η_i étant de même nature que φ_i et ψ_i. On pourra écrire, dans ce cas,

$$s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i\begin{pmatrix} a' & b' \\ x, & u \end{pmatrix} \\ u_i & \eta_i\begin{pmatrix} c' & d' \\ x, & u \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}.$$

La substitution s est une substitution *de contact*, si chacun des deux systèmes d'équations

$$\sum_i u_i x_i = \sum_i u_i \, dx_i = \sum_i x_i \, du_i = 0$$

et

$$\sum_i y_i v_i = \sum_i v_i \, dy_i = \sum_i y_i \, dv_i = 0$$

entraîne l'autre.

J'appelle *crémonienne* une substitution

$$s = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

qui est à la fois *birationnelle* et *de contact*. L'appellation *crémonienne* est justifiée par le fait que s se réduit à une substitution Cremona ordinaire, si l'entier b est nul.

Soient deux crémoniennes s et s',

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix}, \qquad s' = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(x, u) \\ u_i & \psi'_i(x, u) \end{vmatrix};$$

la substitution

$$\begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \\ u_i & \psi'_i(\varphi, \psi) \end{vmatrix}$$

est, par définition, le produit $s's$ de s' par s. Je démontre que les crémoniennes forment un groupe, que j'appelle groupe *crémonien*.

C'est la construction de groupes crémoniens, dits *quadratiques*, formés par des substitutions

$$\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix},$$

les entiers a, b, c, $d \leq 2$, qui est l'objet du présent Mémoire.

Pour la construction des groupes Cremona, je pouvais opérer sur des substitutions dont les propriétés étaient bien connues. Au contraire, le champ des recherches relatif aux crémoniennes est presque inexploré. On connaît bien (MAYER, *Mathematische Annalen*, t. VIII) certaines équations aux dérivées partielles, auxquelles φ_i et ψ_i doivent satisfaire pour que la substitution s soit de contact, mais personne n'a encore donné, au moins à ma connaissance, les conditions de birationnalité et la forme explicite des fonctions entières φ_i et ψ_i.

La construction des groupes crémoniens a dû, par conséquent, être précédée de la construction et de l'étude d'une crémonienne isolée.

J'ai démontré dans un autre travail (*Journal de Mathématiques*, 1887, et *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 8 février 1886) que, si l'un des entiers a, b, c, d est zéro ou un, la crémonienne s s'obtient en combinant une substitution Cremona, convenablement choisie, avec la *substitution d'échange*

$$\begin{vmatrix} x_i & u_i \\ u_i & x_i \end{vmatrix}.$$

Dans ce cas, je donne à s le nom de *crémonique*.

Ce résultat m'a permis de construire les groupes crémoniens *linéaires* formés de substitutions

$$\begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix},$$

où aucun des entiers a, b, c, d ne dépasse l'unité.

J'ai fait voir qu'un pareil groupe, s'il est d'ordre fini, s'obtient en combinant avec la substitution d'échange l'un des groupes de M. Jordan [linéaires et d'ordre fini à trois variables homogènes (*Journal de Crelle*, t. 84)].

Un groupe quadratique crémonien contient, ou peut contenir, des substitutions linéaires (monistiques ou dualistiques), des crémoniques et des substitutions

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix},$$

qui s'appelleront tout simplement *quadratiques crémoniennes*.

Le présent Mémoire est exclusivement consacré à l'étude d'une substitution isolée contenue dans un groupe quadratique crémonien. Les substitutions linéaires (monistiques ou dualistiques) ont été étudiées ailleurs (*Journal de Mathématiques*, fasc. I, 1887, et *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 8 février 1886); je ne m'occuperai donc que des crémoniques et des crémoniennes.

Un second Mémoire traitera de la composition des crémoniennes, de la construction des groupes quadratiques et de la recherche des groupes d'ordre fini.

Le présent travail est divisé en cinq Parties.

Dans la première Partie, j'expose les définitions et quelques généralités applicables à des crémoniennes de dimensions quelconques, et je fais voir que le produit de deux crémoniennes est aussi une crémonienne, en d'autres termes que *les crémoniennes forment un groupe*, le groupe *crémonien*.

Dans la deuxième Partie, j'établis le théorème suivant :

Théorème. — *Toute crémonique quadratique est de la forme $\alpha\sigma\beta$, α et β étant des substitutions linéaires quelconques, monistiques ou* *dualistiques, et σ l'une quelconque des trois substitutions*

$$\zeta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2x_3 \\ x_2 & x_3x_1 \\ x_3 & x_1x_2 \\ u_1 & x_1^2u_1 \\ u_2 & x_2^2u_2 \\ u_3 & x_3^2u_3 \end{vmatrix}, \qquad \varpi = \begin{vmatrix} x_1 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1^2 \\ x_3 & x_2x_3 \\ u_1 & -x_1r_1 \\ u_2x & x_2^2u_2 \\ u_3 & -x_1^2u_3 \end{vmatrix}, \qquad \rho = \begin{vmatrix} x_1 & x_1x_2 \\ x_2 & x_2^2 \\ x_3 & \mathrm{A} \\ u_1 & x_2r_2 \\ u_2 & x_1^2u_3 - x_2^2u_2 \\ u_3 & x_2^2u_3 \end{vmatrix};$$

$$\zeta = \zeta^{-1}, \qquad \varpi = \varpi^{-1}, \qquad \rho = \rho^{-1},$$

$$\mathrm{A} = x_1^2 - x_2x_3, \qquad \mathrm{A}_i = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_i}, \qquad r_i = (\mathrm{A}u)_i,$$

$$r_1 = \mathrm{A}_2u_3 - \mathrm{A}_3u_2, \qquad \ldots.$$

Je définis (**17** du Mémoire) certains *éléments fondamentaux* et certains *connexes fondamentaux* qui jouent vis-à-vis d'une crémonienne respectivement un rôle analogue à celui des *points fondamentaux* et des *lignes fondamentales* vis-à-vis d'une substitution Cremona. Les expressions *éléments* et *connexes* signifient d'ailleurs (**1** du Mémoire) la même chose que dans la terminologie de Clebsch (*Leçons sur la Géométrie*, traduction Benoist, t. III, *Connexes*).

Ainsi, pour mettre en parallèle les propriétés respectives des substitutions Cremona et crémoniennes,

Une substitution Cremona fait correspondre, à un de ses points fondamentaux, ∞ points, et aux ∞ points d'une de ses lignes fondamentales, *un seul* point.	Une substitution crémonienne fait correspondre, à *un* de ses éléments fondamentaux, ∞ éléments, et aux ∞^2 (1 du Mémoire) éléments d'un connexe fondamental, ou *un nombre fini* ou ∞ au plus éléments.

Un *facteur fondamental* est un facteur qui, égalé à zéro, donne l'équation d'un connexe fondamental; pour chacune des crémoniennes que je considère, je donne le Tableau des éléments et des facteurs fondamentaux.

Dans la troisième Partie, j'établis le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute crémonienne quadratique qui n'est pas crémonique est un produit de deux ou trois crémoniques.*

Nous sommes amenés ainsi à distinguer ainsi les crémoniennes à *deux* et à *trois composantes crémoniques.*

Comme toute crémonique, d'après la première Partie, s'obtient en combinant des substitutions linéaires avec ζ, ϖ, ρ, lesquelles sont des substitutions quadratiques Cremona, on voit que toute crémonienne quadratique s'obtient en combinant des substitutions quadratiques Cremona avec des substitutions linéaires monistiques ou dualistiques. Ce résultat est à rapprocher du fait bien connu, qu'une substitution Cremona d'ordre quelconque s'obtient en combinant des collinéations (substitutions linéaires monistiques) avec des substitutions quadratiques Cremona.

La quatrième Partie est consacrée aux crémoniennes quadratiques à deux composantes crémoniques, et établit la proposition suivante, dans l'énoncé de laquelle on a désigné par E et H les substitutions

$$H = H^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & hu_3 \\ x_3 & hu_2 \\ u_1 & hx_1 \\ u_2 & x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad E = E^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_3 \\ x_3 & u_2 - eu_3 \\ u_1 & -x_1 \\ u_2 & ex_2 + x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix}.$$

$$h, \quad e = \text{const.}$$

THÉORÈME. — *Toute crémonienne quadratique à deux composantes crémoniques est de la forme* $\alpha s \beta$, α *et* β *étant deux substitutions linéaires monistiques ou dualistiques, et* s *une des quatre crémoniennes suivantes :*

$$\varpi E \varpi = (\varpi E \varpi)^{-1} = \left|\begin{array}{lc} x_1 & -x_1 u_3 r_1 \\ x_2 & r_1^2 \\ x_3 & -u_3(x_2^2 u_2 + e x_1^2 u_3) \\ u_1 & r_1(2 e x_1 u_3 - x_2 u_1) \\ u_2 & u_3^2(e x_1^2 + x_2 x_3) \\ u_3 & -r_1^2 \end{array}\right|,$$

$$\rho E \varpi = (\varpi E \rho)^{-1} = \left|\begin{array}{lc} x_1 & -x_1 u_3 r_1 \\ x_2 & x_1^2 u_3^2 \\ x_3 & r_1^2 + u_3(x_2^2 u_2 + e x_1^2 u_3) \\ u_1 & x_1 u_3(x_2 u_3 + 2 r_1) \\ u_2 & r_1^2 - u_3^2(e x_1^2 + x_2 x_3) \\ u_3 & x_1^2 u_3^2 \end{array}\right|,$$

$$\varpi E \rho = (\rho E \varpi)^{-1} = \left|\begin{array}{lc} x_1 & -x_2 u_3 r_2 \\ x_2 & r_2^2 \\ x_3 & u_3(x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2 - e x_2^2 u_3) \\ u_1 & r_2(r_1 + 2 e x_2 u_3) \\ u_2 & u_3^2(e x_2^2 + A) \\ u_3 & -r_2^2 \end{array}\right|,$$

$$\rho H \rho = (\rho H \rho)^{-1} = \left|\begin{array}{lc} x_1 & h x_2 u_3 r_2 \\ x_2 & h^2 x_2^2 u_3^2 \\ x_3 & r_2^2 - h^2 u_3(x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2) \\ u_1 & -h x_2 u_3(2 r_2 + h^2 x_1 u_3) \\ u_2 & r_2^2 - h^2 u_3^2 A \\ u_3 & h^2 x_2^2 u_3^2 \end{array}\right|,$$

A et r_i ayant la même signification que dans la première Partie.

La cinquième Partie est consacrée aux substitutions crémoniennes quadratiques à trois composantes crémoniques. Si l'on désigne par e,

k, k' les substitutions linéaires

$$e = e^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_3 \\ x_3 & u_2 \\ u_1 & x_1 \\ u_2 & x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad k = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & -\frac{1}{4}K^{-2}x_2 \\ x_3 & x_3 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -4K^2 u_2 \\ u_3 & u_3 \end{vmatrix}, \qquad k' = \begin{vmatrix} x_1 & -4K^2 x_1 \\ x_2 & 4K^2 x_2 \\ x_3 & x_3 - x_2 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -(u_2 + u_3) \\ u_3 & -4K^2 + u_3 \end{vmatrix},$$

on a la proposition :

THÉORÈME. — *Toute crémonienne quadratique à trois composantes crémoniques est de la forme* $\alpha\xi\beta$ *ou* $\alpha\pi\beta$, α *et* β *désignant des substitutions linéaires monistiques ou dualistiques, où*

$$\xi = \xi^{-1} = \rho e \varpi k e \rho = \begin{vmatrix} x_1 & r_1 r_2 \\ x_2 & r_2^2 \\ x_3 & r_1^2 - 4K^2 u_3^2 A \\ u_1 & -2\mathfrak{r}_1 r_2 \\ u_2 & \mathfrak{r}_1^2 + 4K^2 u_3^2 \mathfrak{A} \\ u_3 & r_2^2 \end{vmatrix},$$

$$A = x_1^2 - x_2 x_3, \qquad \mathfrak{A} = A - K^2 x_2^2, \qquad K = \text{const.},$$

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial x_i}, \qquad \mathfrak{A}_i = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_i}, \qquad r_i = (Au)_i, \qquad \mathfrak{r}_i = (\mathfrak{A}u)_i,$$

$$K, \quad K^{-1}, \quad K^2 - 1 \neq 0;$$

$$\pi = \pi^{-1} = \rho e \varpi e k' \varpi = \begin{vmatrix} x_1 & -r_1 r_2 \\ x_2 & r_1^2 \\ x_3 & r_2^2 - 4K^2 u_3^2 A \\ u_1 & 2 r_1 \mathfrak{r}_2 \\ u_2 & \mathfrak{r}_2^2 + 4K^2 u_3^2 \mathfrak{A} \\ u_3 & r_1^2 \end{vmatrix}$$

($\mathfrak{A} = A - K^2 x_1^2$, le reste comme plus haut).

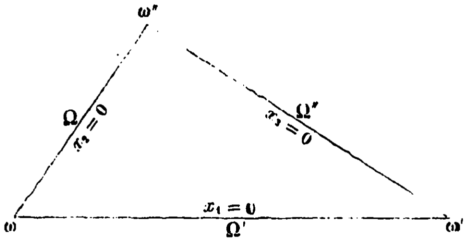
Quant aux éléments et aux facteurs fondamentaux, ils sont donnés par le Tableau ci-contre. J'appelle d'ailleurs *élément adhérent :*

A une courbe, le système formé par une tangente et le point de contact;

A une droite, le système formé par la droite et un point de cette droite;

A un point, le système formé par le point et une droite passant par le point.

Je donne aux côtés et aux sommets du triangle des coordonnées les noms indiqués sur la figure.



Pour	Les éléments fondamentaux sont les ∞ éléments adhérents à	Les facteurs fondamentaux sont
ζ	$\omega,\ \omega'\ \omega'',\ \Omega,\ \Omega',\ \Omega''$	$x_1,\ x_2,\ x_3$
ϖ	$\omega,\ \omega',\ \Omega,\ \Omega'$	$x_1,\ x_2$
ρ	$\omega,\ \Omega$	x_2
$\rho H \rho$	$\omega,\ \Omega$	$x_2,\ u_3$
$\rho E \varpi$	$\omega,\ \omega',\ \mathfrak{h}$ (1), $\Omega,\ \Omega'$	$x_1,\ x_2,\ u_3$
$\varpi E \rho$	$\omega,\ \Omega,\ e x_2^2 + A = 0$	$x_2,\ u_3,\ r_2$
$\varpi E \varpi$	$\omega,\ \omega',\ \Omega,\ \Omega'\ e x_1^2 + x_2 x_3 = 0$	$x_2,\ u_3,\ r_1$
ξ	$\omega,\ \Omega,\ A = 0,\ A - K^2 x_2^2 = 0$	$x_2,\ u_3,\ r_2$
π	$\omega,\ \Omega,\ A = 0,\ A - K^2 x_1^2 = 0$	$x_2,\ u_3,\ r_1$

$$A = x_1^2 - x_2 x_3, \qquad A_i = \frac{\partial A}{\partial x_i},$$

$$r_i = (A u)_i, \qquad r_1 = A_2 u_3 - A_3 u_2, \qquad \ldots.$$

J'ai systématiquement laissé de côté, comme moins importantes au point de vue de la construction des groupes crémoniens quadratiques, les nombreuses propriétés géométriques des substitutions crémo-

(1) $\mathfrak{h}$ est le point situé sur Ω', dont les coordonnées sont $0,\ 4,\ 1$.

niennes. J'ai négligé notamment les relations qui existent entre les éléments et connexes fondamentaux de la crémonienne s, et les connexes et éléments fondamentaux de s^{-1}. Ces relations sont tout à fait de même nature que celles qui existent entre les points et lignes fondamentales d'une substitution Cremona, les lignes et points fondamentaux de son inverse.

PREMIÈRE PARTIE.

GÉNÉRALITÉS ET DÉFINITIONS.

1. La terminologie adoptée dans le présent Travail est celle de Clebsch-Lindemann (*Leçons sur la Géométrie, Connexes*, tome III de la traduction Benoist). Je renvoie à l'Ouvrage cité pour la définition des mots *élément, élément principal, situation réunie, connexe, coïncidence, coïncidence principale, couple de courbes*, etc.

Toutefois, comme je ne m'occupe que d'éléments principaux, le mot *élément* voudra dire élément *principal;* un connexe aura ainsi pour moi ∞^2 éléments, ceux de sa coïncidence principale. De même, à moins de stipulation contraire, des éléments infiniment voisins seront toujours supposés en situation réunie.

Un élément (x, u) formé par le point x d'une courbe et la tangente u en ce point *adhérera* ou *sera adhérent* à la courbe, laquelle à son tour sera *adhérente* ou *adhérera* à l'élément. De même tout élément (x, a) adhère à la droite fixe a, laquelle adhère à l'élément (x, a). Enfin tout élément (b, u) adhère au point fixe b, lequel à son tour adhère à l'élément. Il y a évidemment ∞ éléments adhérents à une courbe, à une droite, à un point.

Suivant l'usage, je désigne par $x, y, z, \ldots$ des points ayant respectivement pour coordonnées $x_i, y_i, z_i, \ldots (i = 1, 2, 3)$, et par $u, v, w_i, \ldots$ des droites ayant pour coordonnées $u_i, v_i, w_i, \ldots$. J'écrirai $f(x)$ au lieu de $f(x_1, x_2, x_3), \ldots$. Dans une forme à plusieurs séries de variables

$$P(x, y, \ldots, u, v, \ldots),$$

je *soulignerai* celles des variables qui seront considérées non comme coordonnées, mais comme *paramètres.* La notation

$$P\left(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y}, \ldots\right)$$

met en évidence les dimensions avec lesquelles figurent dans la forme P mixte les variables homogènes $x_i, y_i, \ldots$. Enfin, quand aucune ambiguïté ne sera possible, je désignerai une forme mixte simplement par

$$\left(\overset{\alpha}{x}, \overset{\beta}{y}, \ldots, \overset{\gamma}{u}, \overset{\delta}{v}, \ldots\right),$$

par exemple.

Il va sans dire que nous supposerons toujours, à moins de stipulations contraires, entre les six variables x_i et u_i la relation

$$\sum_i u_i x_i = 0.$$

Toutes nos formules ne seront exactes que sous le bénéfice de cette relation.

2. Soit une substitution de contact (*voir*, pour la définition, l'Ouvrage précité de Clebsch-Lindemann, t. III, p. 465)

$$s = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{a}{x}, \overset{b}{u}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\overset{c}{x}, \overset{d}{u}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix}, \qquad \begin{matrix} \rho y_i = \varphi_i, \\ \sigma v_i = \psi_i \end{matrix}$$

(ρ, σ = facteurs de proportionnalité; φ_i, ψ_i = formes rationnelles et entières.)

Si l'on a réciproquement

$$\rho' x_i = \theta_i\left(\overset{a'}{y}, \overset{b'}{v}\right), \qquad \sigma' u_i = \eta_i\left(\overset{c'}{y}, \overset{d'}{v}\right)$$

(ρ', σ' = facteurs de proportionalité),

la substitution s sera *birationnelle* et l'on posera par définition

$$s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i\left(\overset{a'}{x}, \overset{b'}{u}\right) \\ u & \eta_i\left(\overset{c'}{x}, \overset{d'}{u}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_i & x_i \\ v_i & u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix}.$$

Il est évident que $\theta_i(\varphi, \psi)$ et $\eta_i(\varphi, \psi)$ sont respectivement proportionnels à x_i et u_i.

Une substitution, qui est à la fois birationnelle et de contact

$$s = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix},$$

sera appelée *crémonienne,* parce qu'elle se réduit à une substitution ordinaire Cremona d'ordre a, si l'entier b est nul. Une crémonienne devient *crémonique* si l'un au moins des quatre entiers a, b, c, d est zéro ou un. La crémonienne est *linéaire monistique* ou *dualistique* (*voir* ma Note dans les *Comptes rendus* du 8 février 1886 ou mon Mémoire du *Journal de Mathématiques,* p. 64; 1887) si aucun des entiers a, b, c, d ne dépasse l'unité; la crémonienne est *quadratique* si aucun de ces quatre entiers ne dépasse deux. Je sous-entendrai souvent *substitution* devant crémonienne et *substitution linéaire* devant monistique ou dualistique.

3. Soit une crémonienne

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i \\ u_i & \psi_i \end{vmatrix}; \qquad s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i \\ u_i & \eta_i \end{vmatrix}.$$

L'élément (y, v) dont les coordonnées sont $\varphi_i(x, u)$ et $\psi_i(x, u)$ sera le *transformé par s* de l'élément (x, u) et sera désigné par $s[(x, u)]$.

Soit (x, u) l'élément courant du connexe C : le lieu géométrique des éléments $s[(x, u)]$ sera le connexe $s[\mathrm{C}]$, transformé par s du connexe C.

Soit $\mathrm{P}(x, u)$ une forme mixte, je poserai

$$s[\mathrm{P}(x, u)] = \mathrm{P}(\varphi, \psi).$$

Comme on a identiquement, à un facteur de proportionnalité près (2),

$$\mathrm{P}(x, u) = \mathrm{P}[\theta(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi)];$$

on voit que, si $P = 0$ est l'équation du connexe C,

$$s^{-1}[P(x, u)] = P(\theta, \eta) = 0$$

est l'équation du connexe $s[C]$.

Soient une courbe c, (x, u) l'élément courant adhérent à cette courbe. Par les propriétés connues des substitutions de contact, on voit que $s[(x, u)]$ est l'élément courant adhérent à une certaine courbe, que j'appelle *transformée de c par s* et que je représente par $s[c]$. Si

$$p(x) = q(u) = 0$$

sont les équations de la courbe c en coordonnées-points x_i et coordonnées-lignes u_i, on voit aisément qu'il suffit d'éliminer successivement entre les trois équations

$$s^{-1}[p(x)] = s^{-1}[q(u)] = p(\theta) = q(\eta) = \sum_i u_i x_i = 0$$

x_i et u_i pour avoir l'équation de $s[c]$ successivement en coordonnées-points et coordonnées-lignes.

4. Soient deux crémoniennes

$$s' = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(x, u) \\ u_i & \psi'_i(x, u) \end{vmatrix}, \qquad s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix};$$

la substitution

$$s's = \begin{vmatrix} x_i & s[\varphi'_i] \\ u_i & s[\psi'_i] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi'_i(\varphi, \psi) \\ u_i & \psi'_i(\varphi, \psi) \end{vmatrix}$$

sera *par définition* le *produit* $s's$ de s' par s, *dans l'ordre indiqué de facteurs*.

Au point de vue géométrique $s's$ équivaut aux deux substitutions s et s' successivement faites (dans l'ordre indiqué); s et s' étant de contact changent par définition des éléments infiniment voisins en situation réunie en des éléments infiniment voisins en situation réunie; il en est donc de même de $s's$, qui, par suite, est de contact.

Posons $(y, v) = s[(x, u)]$ et ensuite $(z, w) = s'[(y, v)]$, on aura, d'après ce qui précède,

$$(z, w) = s's[(x, u)].$$

L'inverse s'^{-1} de la crémonienne s' est évidemment crémonienne et transforme (z, w) en l'élément *unique* (y, v), et s^{-1} transforme (y, v) en l'élément *unique* (x, u); la substitution $s^{-1}s'^{-1} = (s's)^{-1}$ équivaut aux substitutions s'^{-1} et s^{-1} successivement faites dans l'ordre indiqué et change (z, w) en l'élément unique (x, u); donc $s's$ est birationnelle et, étant déjà de contact, est crémonienne comme ses *composantes* s' et s. En résumé :

THÉORÈME. — *Les crémoniennes forment un* groupe crémonien.

5. Posons $(y, v) = s[(x, u)]$ et par suite $(x, u) = s^{-1}[(y, v)]$, s étant la crémonienne

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i \\ u_i & \psi_i \end{vmatrix}, \qquad s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i \\ u_i & \eta_i \end{vmatrix}.$$

J'appelle équation primordiale ou simplement *primordiale* de la crémonienne toute équation algébrique, telle que

$$f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = 0, \qquad f_1\left(\overset{m_1}{x}, \overset{q_1}{v}\right) = 0, \qquad f_2\left(\overset{p_2}{u}, \overset{n_2}{y}\right) = 0, \qquad f_3\left(\overset{p_3}{u}, \overset{q_3}{v}\right) = 0,$$

dont la crémonienne entraîne l'existence entre *une* série de coordonnées de (x, u) et *une* série de coordonnées de (y, v). J'appelle plus spécialement

$f = 0$, primordiale puncto-ponctuelle de s et de s^{-1},

$f_1 = 0$, » $\begin{cases} \text{puncto-linéaire de } s, \\ \text{linéo-ponctuelle de } s^{-1}, \end{cases}$

. . . .

. . . . ;

6. Soit $(\underline{x}, u)$ l'un quelconque des ∞ éléments adhérents à un certain point x du plan et posons $(y, v) = s[(x, u)]$. Les ∞ points y sont situés sur la courbe d'ordre n (*voir* **1** du Mémoire pour les explications des lettres *soulignées*)

$$f\left(\overset{m}{\underline{x}}, \overset{n}{y}\right) = 0$$

et les ∞ droites v touchent la courbe de classe q_1

$$f\left(\overset{m_1}{\underline{x}}, \overset{q_1}{v}\right) = 0.$$

Deux éléments (x, u) infiniment voisins sont en situation réunie; puisque s est crémonienne, il en est de même de deux éléments infiniment voisins $(y, v) = s[(x, u)]$. En d'autres termes, les équations

$$f\left(\overset{m}{\underline{x}}, \overset{n}{y}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_1\left(\overset{m_1}{\underline{x}}, \overset{q_1}{v}\right) = 0$$

représentent, l'une en coordonnées-points y_i, l'autre en coordonnées-lignes v_i, *la même courbe d'ordre* m et de classe q_1, ou plutôt, en considérant x_i comme des paramètres variables, le même *réseau* de ∞^2 courbes d'ordre m et de classe q_1. J'appelle ce réseau *afférent* à la substitution s^{-1} et *ponctuel* comme se rapportant aux divers points x du plan. Je le désigne par la notation

$$R_p^{s^{-1}},$$

affectant la lettre R comme indice supérieur du nom de la substitution et comme indice inférieur de la première lettre du mot *ponctuel*.

De même, les deux primordiales

$$f_1\left(\overset{m_1}{x}, \overset{q_1}{\underline{v}}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_3\left(\overset{p_3}{u}, \overset{q_3}{\underline{v}}\right) = 0,$$

par exemple, représentent un réseau d'ordre m_1 et de classe p_3, que j'appelle *réseau linéaire* (se rapportant aux diverses droites v du plan) de la crémonienne s et que je désigne par la notation

$$R_l^s.$$

En résumé, la crémonienne s aura deux réseaux

$$\begin{array}{llllll}
R_p^s & \text{d'ordre } m & \text{et de classe } p_2, & f\left(\overset{m}{x}, \underline{\overset{n}{y}}\right) = f_2\left(\overset{p_2}{u}, \underline{\overset{n_2}{y}}\right) = 0, \\
R_l^s & \text{»} \quad m_1 & \text{»} \quad p_3, & f_1\left(\overset{m_1}{x}, \underline{\overset{q_1}{v}}\right) = f_3\left(\overset{p_3}{u}, \underline{\overset{q_3}{v}}\right) = 0.
\end{array}$$

La crémonienne s^{-1} aura deux réseaux

$$\begin{array}{llllll}
R_p^{s^{-1}} & \text{d'ordre } n & \text{et de classe } q_1, & f\left(\underline{\overset{m}{x}}, \overset{n}{y}\right) = f_1\left(\underline{\overset{m_1}{x}}, \overset{q_1}{v}\right) = 0, \\
R_l^{s^{-1}} & \text{»} \quad n_2 & \text{»} \quad q_3, & f_2\left(\underline{\overset{p_2}{u}}, \overset{n_2}{y}\right) = f_3\left(\underline{\overset{p_3}{u}}, \overset{q_3}{v}\right) = 0.
\end{array}$$

7. Nous avons raisonné comme si entre deux mêmes séries de coordonnées de (x, u) et de (y, v) n'existait qu'une seule primordiale. Supposons maintenant qu'il y ait deux primordiales puncto-ponctuelles par exemple

$$f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right) = 0 \quad \text{et} \quad f'\left(\overset{m'}{x}, \overset{n'}{y}\right) = 0.$$

Si x est donné, y est l'un des nn' points d'intersection des deux courbes d'ordres n et n' respectivement

$$(1) \qquad f\left(\underline{\overset{m}{x}}, \overset{n}{y}\right) = 0, \qquad f'\left(\underline{\overset{m'}{x}}, \overset{n'}{y}\right) = 0;$$

y_i ne dépend donc que des x_i, et la crémonienne

$$s = \left| \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ll} x_i & \varphi_i\left(\overset{a}{x}, \overset{b}{u}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\overset{c}{x}, \overset{d}{u}\right) \end{array} \right|$$

devient crémonique puisque u manque dans φ_i et $b = 0$.

Pour que s restât crémonienne, il faudrait que les deux courbes (1) eussent ∞ points communs, c'est-à-dire fussent décomposables, avec une partie commune. Alors on aurait

$$f = \varpi(x, y)\,\mathrm{F}(x, y),$$
$$f' = \varpi'(x, y)\,\mathrm{F}(x, y)$$

et c'est

$$F(x, y) = 0$$

qu'il faudrait prendre pour véritable et unique primordiale puncto-ponctuelle.

8. Si l'un des réseaux d'une crémonienne s, le réseau ponctuel R_p^s par exemple, se décompose en un système de droites (ou de points), il n'est plus représentable par *une seule* équation en coordonnées-lignes (ou coordonnées-points); en ce cas, la primordiale linéo-ponctuelle (ou puncto-ponctuelle) de s ne peut plus être unique et s devient crémonique.

9. Existe-t-il, en général, des primordiales pour une crémonienne donnée? Il est aisé d'en former. Soit une crémonienne

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix}.$$

Posons

$$\rho y_i = \varphi_i(x, u), \tag{1}$$

$$\sigma v_i = \psi_i(x, u), \tag{2}$$

$$\sum_i u_i x_i = 0. \tag{3}$$

ρ, σ = facteurs de proportionnalité.

Nous obtiendrons, en éliminant entre (3) et les trois équations,

(1), ρ et u_i, une primordiale puncto-ponctuelle,
(1), ρ et x_i, » linéo-ponctuelle,
(2), σ et u_i, » puncto-linéaire,
(2), σ et x_i, » linéo-linéaire.

Par suite *une crémonienne possédera en général les deux réseaux* linéaire et ponctuel dont nous avons montré plus haut les propriétés.

10. Réciproquement, d'une primordiale, puncto-ponctuelle par exemple, $f(x, y) = 0$, on peut remonter à la crémonienne.

En effet, on sait (*Leçons sur la Géométrie*, t. III de la traduction Benoist, p. 466 et suiv.) que (y, v) est l'un des éléments adhérents à la fois aux deux courbes

$$f(\underline{x}, y) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(\underline{x} + \underline{dx}, y) = \sum_i dx_i \frac{\partial f(\underline{x}, y)}{\partial x_i} = 0,$$

avec

$$\sum_i u_i dx_i = 0.$$

Éliminons y_i entre les trois équations

$$f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_i w_i y_i = 0,$$

en tenant compte de

$$\sum_i u_i x_i = \sum_i u_i dx_i = 0;$$

d'où

$$u_i \text{ proportionnel à } (x\,dx)_i,$$

$$(x\,dx)_1 = x_2 dx_3 - x_3 dx_2, \qquad \ldots.$$

Le résultat

$$\left(\overset{n^2}{w}, u, x\right) = 0$$

de l'élimination donne le produit des n^2 points d'intersection de

$$f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0,$$

en coordonnées-lignes w_i.

Parmi ces n^2 points se trouve y dont l'équation est

$$w_y = \sum_i w_i \varphi_i(x, u) = 0.$$

Le facteur w_y doit se détacher par conséquent de $\left(\overset{n^2}{w}, u, x\right)$ et les fonctions φ_i se trouvent déterminées.

Opérons de même sur la primordiale puncto-linéaire, nous déterminerons les fonctions ψ_i, et la crémonienne s sera construite.

D'ailleurs, dès que y_i, c'est-à-dire φ_i est obtenue, on a v_i, c'est-à-dire ψ_i en remarquant que v_i est proportionnelle à $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i}$, c'est-à-dire à

$$\frac{\partial f(x, \varphi)}{\partial x_i}.$$

11. Théorème. — *Le réseau ponctuel (ou linéaire) du produit $s's$ de deux crémoniennes est le transformé par s^{-1} du réseau ponctuel (ou linéaire) de s'.*

J'appelle d'ailleurs réseau transformé $s^{-1}[R_p^{s'}]$ le réseau des transformées par s^{-1} des ∞^2 courbes de $R_p^{s'}$.

Soient σ et σ' deux crémoniennes quelconques, x un point fixe d'ailleurs *quelconque* du plan. Les ∞ éléments $\sigma[(x, u)]$, pour u variable, adhèrent à une certaine courbe d'ailleurs *quelconque* de $R_p^{\sigma^{-1}}$ (**6**) et les ∞ éléments $\sigma'\sigma[(x, u)]$ adhèrent (**3**) à la transformée par σ' de cette courbe, laquelle transformée est une certaine courbe d'ailleurs *quelconque* de $\sigma'[R_p^{\sigma^{-1}}]$. Mais (**6**) les ∞ éléments $\sigma'\sigma[(x, u)$ adhèrent à une certaine courbe d'ailleurs *quelconque* parmi les ∞^2 courbes de $R_p^{(\sigma'\sigma)^{-1}}$; donc, en exprimant par l'égalité des symboles la coïncidence des réseaux,

$$R_p^{(\sigma'\sigma)^{-1}} = \sigma'[R_p^{\sigma^{-1}}].$$

Les crémoniennes σ' et σ sont quelconques : appelons s^{-1} la crémonienne σ' et s'^{-1} la crémonienne σ, il viendra l'égalité

$$R_p^{s's} = s^{-1}[R_p^{s'}],$$

qui démontre le théorème.

Il suffit de raisonner comme ci-dessus sur les réseaux R_l pour établir que

$$R_l^{s's} = s^{-1}[R_l^{s'}].$$

On aura seulement à considérer, au lieu d'un point fixe quelconque x du plan, une droite fixe u quelconque.

Soient

$$f'(x, \underline{y}) = 0, \qquad F'(u, \underline{y}) = 0$$

les équations en coordonnées-points x_i et coordonnées-lignes u_i du réseau $R_p^{s'}$; les équations du réseau $R_p^{s's}$ en coordonnées-points et coordonnées-lignes s'obtiendront en éliminant respectivement u_i ou x_i entre les trois équations

$$f'(\varphi, \underline{y}) = F'(\psi, \underline{y}) = \sum_i u_i x_i = 0,$$

la crémonienne s étant

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix}.$$

12. Soit s une crémonienne ; soient α et β deux linéaires quelconques monistiques ou dualistiques, la substitution

$$\alpha s \beta$$

sera évidemment crémonienne, comme s, α et β, et *par définition* sera *équivalente* à s. Deux crémoniennes équivalentes à une troisième sont équivalentes entre elles. Parmi les crémoniennes en nombre infini équivalentes à s, nous prendrons comme *forme canonique* de s la crémonienne qui a l'expression la plus simple, grâce à un choix convenable des linéaires α et β.

Ce qui précède s'applique aux crémoniennes en général, les entiers a, b, c, d étant quelconques. Je vais passer maintenant aux crémoniennes linéaires, où a, b, c, $d \leq 1$, et aux crémoniennes *quadratiques*, où a, b, c, $d \leq 2$.

13. Toute linéaire est évidemment crémonique; comme je l'ai démontré ailleurs (*Journal de Mathématiques*, p. 74; 1887), une linéaire ne peut être que monistique

$$a = \begin{vmatrix} x & A[x] \\ u & A'^{-1}[u] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \sum\limits_j a_{ij} x_j \\ u_i & \sum\limits_j \alpha_{ij} u_j \end{vmatrix},$$

(α_{ij} élément du système adjoint des a_{ij}), ou dualistique,

$$b = \begin{vmatrix} x & \mathrm{B}[u] \\ u & \mathrm{B}'^{-1}[x] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \sum_j b_{ij} u_j \\ u_i & \sum_j \beta_{ij} x_j \end{vmatrix},$$

(β_{ij} élément du système adjoint des b_{ij}; a_{ij}, b_{ij} = const. de déterminant $\neq 0$).

14. Les crémoniques quadratiques ont l'une des quatre formes suivantes :

$$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{Bmatrix},$$

si l'on a égard au théorème de la page 71 du *Journal de Mathématiques*, 1887, ainsi conçu :

Si l'une des deux séries de variables x_i et u_i entre linéairement (ou manque) dans l'une des séries de fonctions φ_i et ψ_i, qui définissent s supposée de contact, cette même série de variables manque (ou entre linéairement) dans l'autre série de fonctions.

Une crémonique

$$\begin{Bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix} = \lambda = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(\overset{2}{x}) \\ u_i & \sum_j u_j \Phi_{ij}(\overset{2}{x}) \end{vmatrix},$$

où Φ_{ij} est le coefficient de $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ dans le développement du déterminant des dérivées $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, et la substitution ternaire

$$| \; t_i \quad \varphi_i(t) \; |$$

une substitution Cremona.

Si l'on désigne par $\mathfrak{L}$ la dualistique d'échange

$$\mathfrak{L} = \begin{vmatrix} x_i & u_i \\ u_i & x_i \end{vmatrix} = \mathfrak{L}^{-1},$$

on voit aisément que toute crémonique quadratique de la forme

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{Bmatrix} = \mathfrak{L}\lambda\mathfrak{L}, \qquad \begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{Bmatrix} = \lambda\mathfrak{L}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{Bmatrix} = \mathfrak{L}\lambda.$$

En résumé, toute *crémonique quadratique est équivalente à une crémonique de la forme* λ.

Il suffira donc de construire la forme canonique (**12**) de λ.

Remarque. — On voit aisément que l'inverse d'une crémonique est aussi une crémonique.

15. Je réserve plus particulièrement le nom de *crémonienne quadratique* à la substitution

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Bmatrix}.$$

Dans ce qui suit, j'abrégerai le langage en disant *crémonique* et *crémonienne* au lieu de crémonique quadratique et crémonienne quadratique.

Je me bornerai, pour une crémonique ou crémonienne, à donner sa forme canonique, puisqu'il suffira, pour produire la substitution, de multiplier devant et derrière la forme canonique par des linéaires convenables; pour cette forme canonique il suffira (**10**) de donner une primordiale.

DEUXIÈME PARTIE.

FORME CANONIQUE D'UNE CRÉMONIQUE : ÉLÉMENTS, FACTEURS. CONNEXES FONDAMENTAUX.

16. Il suffira de construire la forme canonique de la crémonique λ (**14**). Soit

$$\lambda = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x) \\ u_i & \dots\dots \end{vmatrix}.$$

La primordiale puncto-linéaire de λ

$$\sum_i v_i \varphi_i(x) = 0$$

représente pour v constante, mais quelconque, une des ∞^2 courbes de R_i^λ, lequel réseau est un réseau de ∞^2 coniques passant par trois points fixes, puisque la ternaire

$$| \; t_i \quad \varphi_i(t) \; |$$

est une substitution Cremona.

Trois cas sont à distinguer :

I. Les trois points sont distincts. On peut amener ces trois points à coïncider avec les trois points

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_2 = x_3 = 0, \qquad x_3 = x_1 = 0,$$

grâce à la multiplication de λ par une monistique qui équivaut, comme on sait, à un changement de coordonnées. Eu égard à l'équivalence, on peut donc écrire

$$\varphi_i = a_{i1} x_2 x_3 + a_{i2} x_3 x_1 + a_{i3} x_1 x_2,$$

(a_{ij} = const. de déterminant $\neq 0$).

Alors

$$\sum v_i\varphi_i = \sum_i (a_{i1}x_2x_3 + a_{i2}x_3x_1 + a_{i3}x_1x_2)v_i$$
$$= x_2x_3\sum_i a_{i1}v_i + x_3x_1\sum_i a_{i2}v_i + x_1x_2\sum_i a_{i3}v_i.$$

Remplacer $\sum_i a_{ij}v_i$ par v_j, c'est multiplier encore λ par devant par une monistique a (effectuer le produit $a\lambda$), ce qui est licite au point de vue de l'équivalence. Alors la primordiale devient

$$v_1x_2x_3 + v_2x_3x_1 + v_3x_1x_2 = 0,$$

et la crémonique prend sa *forme canonique* (**14** et **12**),

$$\zeta = \left|\begin{array}{cc} x_1 & x_2x_3 \\ x_2 & x_3x_1 \\ x_3 & x_1x_2 \\ u_i & x_i^2u_i \end{array}\right| = \zeta^{-1}.$$

II. Deux points fixes sont infiniment voisins sur une droite et le troisième distinct. Appelons une fois pour toutes (ω, Ω) l'élément

$$x_1 = x_2 = u_1 = u_3 = 0,$$

et ω' le point

$$x_1 = x_3 = 0.$$

Nous pouvons, eu égard à l'équivalence, supposer les deux points fixes infiniment voisins confondus en $\omega(x_1 = x_2 = u_3 = 0)$ sur la droite $\Omega(u_1 = x_2 = u_3 = 0)$, et le troisième point fixe situé en ω'. Alors

$$\varphi_i = a_{i1}x_2x_3 + a_{i12}x_1x_2 + a_{i11}x_1^2,$$

$$0 = \sum_i v_i\varphi_i = x_2x_3\sum_i a_{i1}v_i + x_1x_2\sum_i a_{i12}v_i + x_1^2\sum_i a_{i11}v_i.$$

Remplaçons encore, ce qui est licite au point de vue de l'équivalence, $\sum_i a_{i1} v_i$ par v_3, $\sum_i a_{i12} v_i$ par v_1, $\sum_i a_{i11} v_i$ par v_2, il vient la forme canonique ϖ pour λ,

$$\varpi = \varpi^{-1} = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_1^2 \\ x_3 & x_2 x_3 \\ & \\ u_1 & -x_1 r_1 \\ u_2 & x_2^2 u_2 \\ u_3 & x_1^2 u_3 \end{array} \right|, \qquad r_1 = x_2 u_2 - x_3 u_3.$$

III. Les trois points fixes sont confondus, et l'on peut supposer qu'ils le sont au point ω de la conique $A = x_1^2 - x_2 x_3 = 0$ et situés tous trois sur la conique; cette supposition, en effet, ne change pas l'équivalence. Alors

$$\varphi_i = a_i x_1 x_2 + b_i x_2^2 + c_i(x_1^2 - x_2 x_3),$$

$$0 = \sum_i v_i \varphi_i = x_1 x_2 \sum_i a_i v_i + x_2^2 \sum_i b_i v_i + (x_1^2 - x_2 x_3) \sum_i c_i v_i.$$

Nous pouvons encore, eu égard à l'équivalence, écrire v_1 au lieu de $\sum_i a_i v_i$, v_2 au lieu de $\sum_i b_i v_i$, v_3 enfin au lieu de $\sum_i c_i v_i$. Alors il vient la primordiale

$$v_1 x_1 x_2 + v_2 x_2^2 + v_3(x_1^2 - x_2 x_3) = 0,$$

et, pour λ, la forme canonique

$$\rho = \rho^{-1} = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_2^2 \\ x_3 & x_1^2 - x_2 x_3 \\ & \\ u_1 & x_2 r_2 \\ u_2 & x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2 \\ u_3 & x_2^2 u_3 \end{array} \right|, \qquad -r_2 = x_2 u_1 + 2 x_1 u_3.$$

On peut remarquer que, si l'on pose

$$A_i = \frac{\partial A}{\partial x_i}, \qquad r_1 = (Au)_1 = A_2 u_3 - A_3 u_2, \qquad \ldots, \qquad r_3 = (Au)_3.$$

Nous avons ainsi le théorème :

THÉORÈME. — *Toute crémonique est de la forme $\alpha\sigma\beta$, α et β désignant des linéaires, et σ l'une quelconque des trois formes canoniques ζ, ϖ, ρ.*

17. Soit s une crémonienne quelconque, quadratique ou non, crémonique ou non. Un élément (a, b) sera *fondamental* pour s, s'il existe plus d'un élément $s[(a, b)]$. Il faut évidemment pour cela, si

$$s = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x, u) \\ u_i & \psi_i(x, u) \end{vmatrix},$$

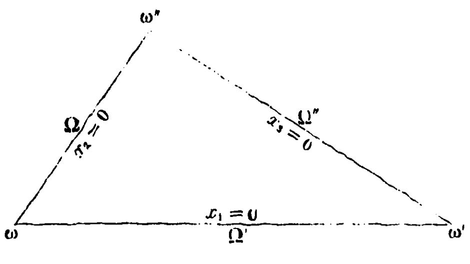
que l'on ait

$$\varphi_i = 0, \qquad \text{ou} \qquad \psi_i = 0, \qquad \text{ou} \qquad \varphi_i = \psi_i = 0$$

pour l'élément (a, b).

Un connexe C est *fondamental* pour s, si s transforme les ∞^2 éléments de C en ∞ au plus. Un *facteur fondamental* est une forme mixte qui donne annulée l'équation d'un connexe fondamental.

18. Pour la commodité du langage, je donne aux sommets et aux côtés du triangle des coordonnées les noms indiqués sur la figure ci-dessous.



19. On voit aisément que la canonique ζ (**16**)

$$\zeta = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i \\ u_i & \psi_i \end{vmatrix} = \zeta^{-1}, \qquad (y, v) = \zeta[(x, u)]$$

a pour éléments fondamentaux :

1° Les ∞ éléments adhérents à l'une des trois droites Ω, Ω', Ω'', éléments qui annulent ψ_i;

2° Les ∞ éléments adhérents à l'un des trois points ω, ω', ω'', éléments qui annulent φ_i et ψ_i.

Si (x, u) adhère à $\Omega, \Omega', \Omega''$, y est respectivement placé en ω', ω'', ω, et v est indéterminée, $\psi_i = 0$. Donc, ζ transforme *chacun* des ∞ éléments adhérents à $\Omega, \Omega', \Omega''$ en les ∞ éléments adhérents respectivement à ω', ω'', ω.

Si (x, u) adhère à ω, ω', ω'', y est situé en un certain point de Ω'', Ω, Ω', et v est indéterminé autour de ce point.

Donc, ζ transforme les ∞ éléments adhérents à ω, ω', ω'' en les ∞^2 éléments des connexes $x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 = 0$ respectivement. Comme $\zeta = \zeta^{-1}$, x_2, x_3, x_1 sont les facteurs fondamentaux de ζ, en vertu même de la définition.

Lemme. — *Soit s une crémonienne quelconque,* $P(x, u)$ *une forme mixte irréductible; si* $P(\varphi, \psi)$ *se décompose en un produit de plusieurs facteurs, tous ces facteurs, sauf un au plus, sont fondamentaux pour s.*

Soit, par exemple,

$$s[P(x, u)] = P(\varphi, \psi) = Q^\beta \Pi^\alpha \Pi_1^{\alpha_1} \ldots;$$

appelons p, q, π, π_1, ... les connexes $P = 0$, $Q = 0$, $\Pi = 0$, ... Si Q n'est pas fondamental pour s, tandis que (x, u) parcourt le connexe q, $s[(x, u)]$ parcourt le connexe p et le parcourt tout entier, puisqu'il est irréductible. Cela résulte (3) de ce que $s[P(x, u)] = 0$ est l'équation du connexe $s^{-1}[p]$, lieu géométrique de l'élément $s^{-1}[(x, u)]$.

Si maintenant Π n'est pas fondamental pour s, tandis que (x, u) parcourt π, $s[(x, u)$ parcourt de nouveau le connexe p. Alors, tandis que (x, u) parcourt p, $s^{-1}[(x, u)]$ parcourt à la fois q et π; ces connexes coïncideraient donc, et Q ne différerait de Π que par une constante facteur, ce qui est contre l'hypothèse.

Au contraire, si Π est fondamental, tandis que (x, u) parcourt π, $s[(x, u)]$ vient coïncider avec ∞ au plus éléments de p.

Appliquons le lemme à ζ, il vient le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* P *une forme mixte irréductible; il ne peut se séparer de* $\zeta[\mathrm{P}]$ *d'autres facteurs que* x_1, x_2, x_3; *il faut et il suffit pour cela que le connexe* $\mathrm{P}=0$ *contienne les* ∞ *éléments adhérents respectivement à* ω'', ω', ω.

20. Passons maintenant à l'étude de

$$\varpi=\varpi^{-1}=\begin{vmatrix} x_1 & x_1x_2 \\ x_2 & x_1^2 \\ x_3 & x_2x_3 \\ u_1 & -x_1r_1 \\ u_2 & x_2^2u_2 \\ u_3 & -x_1^2u_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_i & \varphi_i(x,u) \\ u_i & \psi_i(x,u) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix}.$$

Les éléments fondamentaux de ϖ sont :

Les ∞ éléments adhérents à Ω et à Ω' respectivement, $\psi_i=0$;

Les ∞ éléments adhérents à ω et à ω' respectivement, $\varphi_i=\psi_i=0$.

Si (x, u) adhère à Ω ou Ω', y est en ω' ou en ω, et v est indéterminé autour de y. Si (x, u) adhère à ω', y est en un certain point de Ω, et v est indéterminé autour de ce point. Si (x, u) adhère à ω, y est en ω, et v est indéterminé autour de y.

Étudions enfin les éléments en nombre infini $\varpi[(\omega, \Omega)]$; soit (y, v) l'un d'eux; $\varpi[(y, v)]=(\omega, \Omega)$, puisque $\varpi=\varpi^{-1}$. Il faut donc avoir

$$0=y_1y_2=y_1^2=y_1(y_3v_3-y_2v_2)=y_1^2v_3.$$

L'élément (y, v) est donc l'un quelconque des ∞^2 éléments du connexe $x_1=0$.

La discussion précédente et le lemme du n° **19** nous conduisent au théorème suivant :

Théorème. — *Soit* $\mathrm{P}(x, u)$ *une forme irréductible en* x_i *et* u_i; *il ne peut se séparer de* $\varpi[\mathrm{P}(x, u)]$ *que les facteurs fondamentaux* x_1 *et* x_2 *de* ϖ; *pour qu'il se sépare du facteur* x_2, *il faut et il suffit que le connexe* $\mathrm{P}=0$ *contienne les* ∞ *éléments adhérents à* ω'; *pour* *qu'il se sépare du facteur* x_1, *il faut et il suffit que le connexe* $P = 0$ *contienne l'élément* (ω, Ω).

J'appelle une fois pour toutes *élément focal*, ou simplement le *focal*, l'élément (ω, Ω).

21. Passons à la canonique ρ

$$\rho = \rho^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 x_2 \\ x_2 & x_2^2 \\ x_3 & x_1^2 - x_2 x_3 \\ u_1 & x_2 r_2 \\ u_2 & x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2 \\ u_3 & x_2^2 u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i \\ u_i & \psi_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ u_i & v_i \end{vmatrix}.$$

Les éléments fondamentaux de ρ sont les éléments qui adhèrent à ω ou à Ω. Une discussion analogue aux précédentes montre que x_2 est le seul facteur fondamental de ρ, et conduit au théorème suivant :

Théorème. — *Soit* $P(x, u)$ *une forme irréductible mixte; il ne peut se séparer de* $\rho[P(x, u)]$ *que le facteur* x_2; *il faut et il suffit pour cela que le connexe* $P = 0$ *contienne l'élément focal.*

22. Considérons maintenant une crémonique quelconque qui sera (**16**), α et β désignant des linéaires monistiques ou dualistiques

$$\beta\sigma\alpha, \quad \sigma = \zeta, \quad \varpi \quad \text{ou} \quad \rho.$$

On s'assure aisément que les éléments fondamentaux et les connexes fondamentaux de $\beta\sigma\alpha$ sont les transformés par α^{-1} des éléments et des connexes fondamentaux de σ.

Une monistique équivaut, comme on sait, à un changement de coordonnées; une dualistique, à un changement de coordonnées combiné avec une transformation par polaires réciproques par rapport à une certaine conique de base. Nous sommes donc en mesure de déterminer les éléments fondamentaux et les connexes fondamentaux d'une crémonique quelconque.

TROISIÈME PARTIE.

DÉCOMPOSITION DES CRÉMONIENNES EN CRÉMONIQUES.

23. Une crémonienne $(a = b = c = d = 2)$ a pour inverse une autre crémonienne; en effet, une linéaire ou une crémonique a pour inverse une linéaire ou une crémonique, et nous excluons par hypothèse toute substitution où a, b, c ou d serait > 2.

Prenons donc une crémonienne

$$s = \begin{vmatrix} x & \varphi_i\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}\right) \end{vmatrix}, \qquad s^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \theta_i\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}\right) \\ u_i & \eta_i\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}\right) \end{vmatrix}.$$

Posons

$$(1) \qquad \alpha y_i = \varphi_i(x, u),$$

$$(2) \qquad \beta v_i = \psi_i(x, u);$$

d'où, par suite aussi,

$$(3) \qquad \gamma x_i = \theta_i(y, v),$$

$$(4) \qquad \delta u_i = \eta_i(y, v),$$

α, β, γ, δ = facteurs de proportionnalité.

Éliminons respectivement:

α et u_i entre les trois équations (1) et $\sum_i u_i x_i = 0$;

γ et v_i entre les trois équations (3) et $\sum_i v_i y_i = 0$.

Soient $p\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{y}\right)$ et $q\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{y}\right) = 0$ les résultats des deux éliminations. On obtient ainsi une double primordiale puncto-ponctuelle, et, comme s est crémonienne par hypothèse et non crémonique, il faut (**7**) que les deux courbes

$$p\left(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{2}{y}\right) = 0, \qquad q\left(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{4}{y}\right) = 0$$

aient une partie commune. La conique $p = 0$ ne peut se décomposer, pour x quelconque, en un couple de droites (**8**); donc

$$q\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{y}\right) = p\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{y}\right)\pi\left(\overset{-2}{x}, \overset{1}{y}\right);$$

chassant les dénominateurs de π, il vient, π n'ayant plus la même signification,

$$\mu\left(\overset{m}{x}\right)q\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{y}\right) = p\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{y}\right)\pi\left(\overset{m-2}{x}, \overset{2}{y}\right);$$

m étant un entier ≥ 2, et μ n'ayant aucun facteur commun avec les coefficients des puissances et produits des y_i dans π. Donc μ divise p, et $m \leq 4$. On ne peut ainsi faire que les hypothèses $m = 4$, 3, 2.

$m = 4$. — $p = \left(\overset{4}{x}\right)\left(\overset{2}{y}\right)$; pour x quelconque, y ne serait pas quelconque dans le plan, mais situé sur la conique $\left(\overset{2}{y}\right) = 0$, résultat absurde.

$m = 3$. — $p = \left(\overset{3}{x}\right)\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{y}\right)$. La primordiale

$$\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{y}\right) = 0$$

contiendrait x_i à la première dimension, le réseau R'_p se composerait de droites, résultat absurde (**8**).

$m = 2$. — $q\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{y}\right) = \left(\overset{2}{y}\right)f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right)$, en désignant par f le quotient de p par μ.

En résumé, on a

$$p\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{y}\right) = \left(\overset{2}{x}\right)f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right),$$
$$q\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{y}\right) = \left(\overset{2}{y}\right)f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right).$$

Ainsi, c'est $f = 0$ qui est la véritable et unique primordiale puncto-ponctuelle de s ou s^{-1}.

On peut raisonner *mutatis mutandis* sur une autre primordiale que la puncto-ponctuelle, et il vient par conséquent :

LEMME I. — *Une primordiale quelconque d'une crémonienne contient chacune de ses deux séries de coordonnées à la dimension deux.*

Lemme II. — *Les divers réseaux d'une crémonienne (ponctuel ou linéaire) sont des réseaux de coniques.*

24. Théorème. — *Il existe une conique (critique de la crémonienne s) A telle que si x est sur A, la conique correspondante*

$$f\left(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{2}{y}\right) = 0$$

du réseau R_p^{s-1} est une droite double.

Considérons les primordiales

$$f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad F\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{v}\right) = 0.$$

Si l'on considère x comme fixe, $f = 0$ et $F = 0$ représentent la *même conique* respectivement en coordonnées-points y_i et coordonnées-lignes v_i (**6**).

Posons

$$f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = \sum_i \sum_j y_i y_j X_{ij}\left(\overset{2}{x}\right), \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

La conique $F\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{v}\right) = 0$ doit coïncider avec celle dont l'équation est

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & v_1 \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} & v_2 \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = \left(\overset{4}{x}, \overset{2}{v}\right) = 0.$$

Cela exige l'identité, $A\left(\overset{2}{x}\right)$ étant une forme ternaire quadratique,

$$\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{v}\right) = A\left(\overset{2}{x}\right) F\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{v}\right).$$

$A\left(\overset{2}{x}\right)$ divise tous les coefficients de la conique $\left(\overset{4}{x}, \overset{2}{v}\right) = 0$, c'est-à-dire tous les mineurs du déterminant

$$\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{12} & X_{22} & X_{23} \\ X_{13} & X_{23} & X_{33} \end{vmatrix}$$

de la conique

$$f\left(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{2}{y}\right) = 0.$$

Si $A(x) = 0$, tous ces mineurs sont nuls, et $f(x, y) = 0$ est une droite double. C. Q. F. D.

On verrait de même qu'il existe une critique $\mathfrak{A}$ telle que si x est sur $\mathfrak{A}$, la conique $F(\underline{x}, v) = 0$ se réduit à un point double. Le déterminant de la conique $f(\underline{x}, y) = 0$ est $A^2\mathfrak{A}$ à un coefficient constant près; le déterminant de la conique $F(\underline{x}, v) = 0$ est, à un coefficient constant près, $A\mathfrak{A}^2$.

A et $\mathfrak{A}$ sont deux *critiques* de s; ce sont deux coniques pour les points desquelles la conique du réseau $R_p^{s^{-1}}$ se réduit à un point ou à une droite double :

Droite double pour un point de A;

Point double pour un point de $\mathfrak{A}$.

Réciproquement, s^{-1} a aussi deux *critiques* B et $\mathfrak{B}$ telles que la conique du réseau R_p^s se réduit :

A une droite double pour un point de B;

A un point double pour un point de $\mathfrak{B}$.

On peut remarquer, d'ailleurs, que le déterminant de la conique $f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = 0$ est $A^2\mathfrak{A}$ à une constante près; celui de la conique $f\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = 0$ est $B^2\mathfrak{B}$, à une constante près.

25. Appelons *réductible* toute crémonienne qui est identique à un produit de crémoniques. Nous allons démontrer que toute crémonienne est réductible.

Lemme. — *Les trois coniques* $\dfrac{\partial f(\underline{x}, y)}{\partial x_i} = 0$ *ont, avec* $f(\underline{x}, y) = 0$, trois *points communs situés sur la critique* B *de* s^{-1}.

Appliquons, pour déterminer les fonctions φ_i et ψ_i qui déterminent s, le procédé indiqué plus haut (**10**). Éliminons y_i entre les trois équations

$$f = \sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_i w_i y_i = 0;$$

le résultat

$$\left(\overset{4}{w}, \overset{4}{x}, \overset{2}{u}\right) = 0$$

de l'élimination représente en coordonnées-lignes w_i le produit des quatre points d'intersection des deux coniques

$$f = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0.$$

Un de ces quatre points est y; soient y', y'', y''' les trois autres. L'équation du point y est

$$\sum_i w_i \varphi_i\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}\right) = 0;$$

donc

$$\left(\overset{4}{w}, \overset{4}{x}, \overset{2}{u}\right) = \left(\overset{3}{w}, \overset{2}{x}\right) \sum_i w_i \varphi_i\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{u}\right),$$

et le produit des trois points y', y'', y''' est représenté par l'équation

$$\left(\overset{3}{w}, \overset{2}{x}\right) = 0.$$

Les trois points y', y'', y''' ne dépendent donc pas de u_i ou, ce qui revient au même, de dx_i, et se trouvent sur chacune des coniques

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} = 0.$$

La première partie du lemme est démontrée.

Posons

$$f = \sum_i \sum x_i x_j \, \mathrm{Y}_{ij}\left(\overset{2}{y}\right) = 0;$$

il vient

$$\text{(o)} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_j x_j \mathrm{Y}_{ij} = 0;$$

donc le point $y^{(k)}(y', y''$ ou $y''')$ se trouve sur la courbe (**24**)

$$\mathrm{Y} = \mathrm{B}^2\binom{2}{y}\mathfrak{B}\binom{2}{y} = 0,$$

dont l'équation est obtenue par l'annulation du déterminant Y des Y_{ij}.

Si $y^{(k)}$ est sur B, le lemme est démontré. Si $y^{(k)}$ est sur $\mathfrak{B}$, des trois équations (o) on tire, puisque les mineurs de Y ne sont pas tous nuls pour un point $y^{(k)}$ non situé sur B,

$$\text{(o')} \qquad \lambda x_i = \lambda_i(y^{(k)}),$$

(λ = facteur de proportionnalité).

Puisque, par hypothèse, $y^{(k)}$ coïncide avec l'un des ∞ points de $\mathfrak{B}$, x coïncide avec l'un des ∞ points de la courbe $\Lambda(x) = 0$, obtenue en éliminant λ et $y_i^{(k)}$ entre les trois équations (o') et $\mathfrak{B}\left(\overset{2}{y^{(k)}}\right) = 0$. Mais x est l'un *quelconque* des ∞^2 points du plan : donc $y^{(k)}$ est en général sur B, et ne vient sur $\mathfrak{B}$ que pour des positions particulières de x. C. Q. F. D.

26. *Remarque.* — Il est évident que toutes les crémoniennes équivalentes (**12**) entre elles sont ou ne sont pas réductibles en même temps; que s et s^{-1} sont ou ne sont pas réductibles en même temps.

THÉORÈME. — *Si l'un au moins des quatre réseaux R_p^s, R_l^s, $\mathrm{R}_p^{s^{-1}}$, $\mathrm{R}_l^{s^{-1}}$ est un système de coniques à trois points (ou tangentes) fixes, s est réductible.*

Il suffit de démontrer la proposition pour un système à trois points fixes, puisque l'on peut, sans altérer l'équivalence et la réductibilité, multiplier s par une dualistique et changer ainsi un système à trois tangentes fixes en un système à trois points fixes.

Supposons, par exemple, toutes les ∞^2 coniques de R_p^s se coupant en trois points fixes; prenons ces trois points pour les trois points fondamentaux d'une substitution quadratique Cremona σ^{-1}; le réseau (**11**)

$$R_p^{s\sigma} = \sigma^{-1}[R_p^s]$$

est un réseau de droites, puisque la substitution σ^{-1} transforme en droite toute conique qui passe par ses trois points fondamentaux, et $s\sigma$ est une crémonique σ' (**8**), et

$$s = \sigma'\sigma^{-1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

27. Nous pouvons faire, sur les critiques A, B, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, trois hypothèses différentes que nous allons successivement examiner et faire voir que s est réductible dans chacune des trois :

Une au moins des quatre critiques est une droite double;

Une au moins des quatre critiques est un couple de droites;

Les quatre critiques sont indécomposables.

Pour l'examen des deux premières hypothèses, il nous est nécessaire de connaître comment se comporte une conique de l'un des quatre réseaux de s par rapport à une branche droite d'une critique décomposable.

Soit, par exemple, R_p^s et la branche droite $y_3 = 0$ de la critique décomposable B.

Si, dans l'équation de la conique du réseau R_p^s,

$$f(x, y) = \sum_i \sum_j x_i x_j \, Y_{ij}\binom{2}{y} = 0,$$

on fait $y_3 = 0$, on doit avoir (**24**), pour une valeur quelconque de $y_1 : y_2$,

$$f = \sum_i \sum_j x_i x_j \, Y_{ij} = \left(\sum_i p_i x_i\right)^2,$$

c'est-à-dire les six identités

$$(0) \qquad Y_{ij} = p_i p_j,$$

$p_i, p_j =$ fonction de y_1 et y_2. Y_{ij} est une fonction quadratique de y_1

et y_2; si Y_{ii} est le carré d'une forme linéaire en y_1 et y_2, p_i est évidemment linéaire en y_1 et y_2, et

$$\sum_i p_i x_i = \left(\overset{1}{x}, \overset{1}{y}\right) = \xi_2 y_1 - \xi_1 y_2 \qquad (\xi_i \text{ linéaire en } x_i),$$

c'est-à-dire linéaire ternaire en x_i et linéaire binaire en y_1 et y_2. Mais, si l'on a posé

$$f = \sum_i \sum_j y_i y_j X_{ij}\left(\overset{2}{x}\right),$$

il reste, en faisant $y_3 = 0$,

$$X_{11} y_1^2 + 2X_{12} y_1 y_2 + X_{22} y_2^2 = (\xi_2 y_1 - \xi_1 y_2)^2,$$
$$f = y_3(2X_{31} y_1 + 2X_{32} y_2 + X_{33} y_3) + (\xi_2 y_1 - \xi_1 y_2)^2.$$

Donc, *la conique du réseau* R_p^{s-1} *touche la branche droite* $y_3 = 0$ *de la critique* B *en un point mobile dont les coordonnées*

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad 0$$

sont linéaires en x_i.

Supposons maintenant que l'un des Y_{ii} au moins ne soit pas le carré d'une forme linéaire en y_1, y_2, mais le produit $\lambda\mu$ de deux facteurs linéaires binaires en y_1, y_2. Alors, comme on s'en assure aisément,

$$Y_{ij} = a_i a_j \lambda\mu \qquad (a_i, a_j = \text{const.}),$$
$$f = y_3 \{ 2X_{31} y_1 + 2X_{32} y_2 + X_{33} y_3 \} + \lambda\mu\left(\sum_i a_i x_i\right)^2;$$

le réseau R_p^{s-1} est un réseau à deux points fixes

$$y_3 = \lambda = 0 \qquad \text{et} \qquad y_3 = \mu = 0.$$

En résumé, il vient :

Lemme. — *Toute branche droite de la critique* A (*ou* B) *coupe une conique quelconque du réseau* R_p^s (*ou* R_p^{s-1}) *en* deux *points fixes,* *à moins d'être tangente à la conique en un point* mobile *dont les coordonnées sont linéaires en y_i (ou x_i).*

28. La première hypothèse (**27**) mène au lemme :

LEMME. — *Si l'une au moins des quatre critiques est une droite double, s est réductible.*

Considérons, par exemple, $B = y_3^2$ par hypothèse. Les trois points $y^{(k)}$ (**25**) sont sur la branche droite $y_3 = 0$ de B; $y^{(k)}$ ne peut être fixe, car s serait réductible (**26**); donc, l'un au moins des trois points $y^{(k)}$ est mobile avec x_i. Mais alors (lemme du **27**) les trois points $y^{(k)}$ sont confondus et ont leurs coordonnées linéaires en x_i; le produit des trois points $y^{(k)}$ est ainsi, en coordonnées-lignes w_i,

$$\left(\overset{1}{w}, \overset{1}{x}\right)^3 = 0,$$

résultat absurde, puisque ce produit doit avoir pour équation (**25**)

$$\left(\overset{3}{w}, \overset{2}{x}\right) = 0.$$

Les trois points $y^{(k)}$, distincts ou non, sont donc fixes, et s est un produit de deux crémoniques (**26**). C. Q. F. D.

29. LEMME. — *Aucun des quatre réseaux de s ou s^{-1} ne peut être un réseau de coniques à deux points fixes distincts ou deux tangentes fixes distinctes sans que s soit réductible.*

Une dualistique transforme un réseau à deux tangentes fixes distinctes en un réseau à deux points fixes distincts, tout en multipliant s ce qui n'altère ni l'équivalence ni la réductibilité. Il suffit donc de démontrer le lemme pour le cas de deux points fixes distincts.

Soit, par exemple, le réseau R_p^{s-1} à deux points fixes distincts, qu'on peut supposer en ω' et ω'' (**18**) en multipliant, au besoin, s par une monistique convenable, ce qui équivaut à un changement de coordonnées. Alors

$$f = 2X_{12}y_1y_2 + y_3(2X_{13}y_1 + 2X_{23}y_2 + X_{33}y_3).$$

Parmi les mineurs, tous divisibles par A (**24**), du déterminant des X_{ij}, figurent

$$X_{12}^2, \quad X_{32}^2, \quad X_{31}^2,$$

et, comme A n'est pas une droite double (**28**),

$$X_{12} = A_3 A, \qquad X_{32} = a_1 A, \qquad X_{31} = a_2 A \qquad (a_i = \text{const.}),$$
$$f = X_{33} y_3^2 + 2A(a_1 y_2 y_3 + a_2 y_3 y_1 + a_3 y_1 y_2).$$

Le réseau R_p^s est un réseau à quatre points fixes

$$X_{33} = A = 0;$$

donc s, si elle existe, est réductible (**26**). C. Q. F. D.

Le lemme nous permet d'examiner la deuxième hypothèse (**27**); et supposons, par exemple, que B se décompose en les deux droites $\Omega(y_2 = 0)$ et $\Omega''(y_3 = 0)$. Je dis que ce cas s est réductible.

Considérons une conique quelconque $f(\underline{x}, y) = 0$ du réseau R_p^{s-1}; comme il faut qu'un au moins des trois points $y^{(k)}$ (**25**) soit mobile (**26**), nous ne pouvons plus faire que les hypothèses suivantes (**27**) sur les rapports de $f = 0$ avec les deux branches Ω et Ω'' de B :

Ω et Ω'' touchent chacune f en un point mobile, et sont *deux tangentes fixes distinctes* des coniques de R_p^{s-1}, ce qui est impossible par hypothèse (lemme précédent).

Ω touche $f = 0$ en *un* point fixe ω (ne pouvant couper $f = 0$ en deux points fixes distincts), et Ω'' touche $f = 0$ en un point mobile; alors,

$$f = 2X_{23} y_2 y_3 + X_{11} y_1^2 + 2X_{12} y_1 y_2 + X_{22} y_2^2.$$

Le déterminant des X_{ij} est $X_{23}^2 X_{11}$; parmi les mineurs de ce déterminant figure X_{23}^2; A divise X_{23}^2 et ne peut être une droite double (**28**); donc, à des coefficients constants près,

$$X_{23} = A,$$

et, par suite,

$$X_{11} = \mathfrak{A},$$

puisque le déterminant des X_{ij} est $X_{23}^2 X_{11}$, et doit être $A^2 \mathfrak{A}$ (**24**).

Ω est une branche de la critique B; donc, pour $y_2 = 0$, $f(x, \underline{y}) = 0$ se réduit à une droite double.

Or, pour $y_2 = 0$,

$$f = \mathfrak{A} y_1^2,$$

puisque

$$X_{11} = \mathfrak{A}.$$

Ainsi, $\mathfrak{A}$ est une droite double, ce qui est contre l'hypothèse.

En résumé, il vient, en tenant compte du lemme (**28**), le théorème suivant :

Théorème. — *Si l'une au moins des quatre critiques* A, $\mathfrak{A}$, B, $\mathfrak{B}$ *est décomposable, s est un produit de deux crémoniques.*

Cela est évident, puisque nos raisonnements établissent que l'un au moins des quatre réseaux est un réseau à trois points fixes ou à trois tangentes fixes, ce qui démontre l'énoncé (**26**).

30. Examinons enfin la troisième hypothèse (**27**), qui suppose les quatre critiques indécomposables.

Théorème. — *Chacune des coniques de* R_p^{s-1} (*ou* R_p^s) *a, avec* B (*ou* A), *deux éléments, dont un fixe, adhérents communs.*

Soient $\lambda y_i = \lambda_i \binom{2}{t}$ (λ = facteur de proportionnalité) les expressions des coordonnées d'un point quelconque y de $B\binom{2}{y} = 0$, λ_i désignant une forme quadratique binaire en t_1 et t_2. Alors, si dans la primordiale

$$f = \sum_i \sum_j x_i x_j Y_{ij} \binom{2}{y}$$

on remplace y_i par $\lambda_i \binom{2}{t}$, on doit avoir

$$(0) \qquad f = \sum_i \sum_j x_i x_j Y_{ij} \binom{4}{t} = \Big(\sum_i p_i x_i\Big)^2,$$

en vertu d'une proposition connue (**24**), p_i désignant une certaine fonction à déterminer du paramètre $t_1 : t_2$.

De l'identité (o) on tire les égalités

$$(o') \qquad p_i p_j = Y_{ij}\left(\overset{4}{t}\right).$$

Supposons d'abord que $Y_{ii}\left(\overset{4}{t}\right)$ $(i = 1, 2, 3)$ soit le carré d'une forme quadratique binaire en t_1, t_2; en vertu de (o′), cette forme est p_i; p_i est donc une forme quadratique binaire en t_1, t_2; il vient

$$f\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{t}\right) = \left(\sum_i p_i x_i\right)^2$$

$$\frac{\partial f\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{t}\right)}{\partial x_i} = 2 p_i \sum_i p_i x_i.$$

Les paramètres $t_1 : t_2$ des quatre points où B est coupée respectivement par $f(\underline{x}, y) = 0$ et $\frac{\partial f(\underline{x}, y)}{\partial x_i} = 0$ sont les racines de l'équation biquadratique en $t_1 : t_2$,

$$(o'') \qquad \left(\sum p_i x_i\right)^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad p_i \sum_i p_i x_i = 0$$

respectivement.

Les trois points $y^{(k)}$ se trouvent à la fois (25) sur $B = 0$, $f(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} = 0$; les quatre équations (o″) ont, par suite, trois racines communes, lesquelles ne peuvent évidemment être que les *deux* racines de

$$\sum_i x_i p_i = 0,$$

et *une* racine commune aux trois équations

$$p_i = 0.$$

On a donc

$$p_i = p\left(\overset{1}{t}\right) q_i\left(\overset{1}{t}\right),$$

$$(o''') \qquad f\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{t}\right) = \left[\sum q_i\left(\overset{1}{t}\right) x_i\right]^2 \left[p\left(\overset{1}{t}\right)\right]^2 = 0,$$

$$(o''' \text{ bis}) \qquad \frac{\partial f\left(\overset{2}{x}, \overset{4}{t}\right)}{\partial x_i} = q_i\left(\overset{1}{t}\right) \left[p\left(\overset{1}{t}\right)\right]^2 \sum q_i\left(\overset{1}{t}\right) x_i = 0.$$

Les équations (o$'''$) et (o$''$ *bis*) indiquent simplement que les points y' et y'' sont confondus au point fixe, dont le paramètre $t_1 : t_2$ est donné par

$$p\binom{1}{t} = 0;$$

le point y''' est mobile avec x sur la courbe B, puisque son paramètre $t_1 : t_2$ est donné par l'équation

$$\sum x_i q_i \binom{1}{t} = 0.$$

D'ailleurs (o$'''$) montre aussi que B est touchée par $f(\underline{x}, y) = 0$ au point y'''. Les deux éléments formés par y' et y''' et les tangentes en B à ces points adhèrent donc à la fois à B et à $f(x, y) = 0$.

C. F. Q. D.

Supposons maintenant qu'une au moins des formes biquadratiques $Y_{ii}\binom{4}{t}$ en t_1, t_2, Y_{33} par exemple, ne soit pas carré parfait.

Une discussion d'Algèbre élémentaire montre que, en vertu des égalités (o$'$), tout facteur linéaire binaire en t_1, t_2, affecté dans Y_{33} d'un exposant impair, divise toutes les formes $Y_{ij}\binom{4}{t}$; soit α ce facteur, la conique $f(\underline{x}, y) = 0$ coupe évidemment B en un point *fixe*, dont la position sur B est donnée par la racine $t_1 : t_2$ de l'équation $\alpha = 0$.

Cela posé, si $Y_{33}\binom{4}{t}$ n'est pas carré parfait, Y_{33} sera de l'une des formes suivantes (α, β, γ, δ = facteurs linéaires en $t_1 : t_2$),

$$\alpha\beta\gamma\delta, \quad \alpha\beta\gamma^2, \quad \alpha\beta^3.$$

Dans tous les cas, Y_{33} a au moins deux facteurs affectés d'exposants impairs, le réseau $R_p^{\varepsilon-1}$ serait donc à deux points fixes distincts (**29**), ce qui est absurde, puisque l'une au moins des quatre critiques serait une droite double. Il est absurde de supposer, d'ailleurs, que le réseau R_p^{ε} est à quatre points fixes, car alors, pour y donné quelconque dans le plan, le point $s^{-1}[y] = 0$, intersection (**10**) des coniques

$$f(\underline{x}, y) = 0, \qquad \sum_i dy_i \frac{\partial f(\underline{x}, y)}{\partial y_i} = 0,$$

$$\sum_i \nu_i dy_i = 0,$$

serait fixe.

$Y_{ii}\left(\overset{4}{t}\right)$ est donc forcément carré parfait, et le théorème est démontré.

On démontrerait, par le même raisonnement, que $f(x, \underline{y}) = 0$ se comporte, par rapport à A, comme $f(\underline{x}, y) = 0$ par rapport à B.

31. Nous pouvons toujours supposer

$$A = x_1^2 - x_2 x_3, \qquad B = y_1^2 - y_2 y_3,$$

(ω, Ω) (**18**) l'élément fixe adhérant à la fois à

$$A = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x, \underline{y}) = 0$$

ou à

$$B = 0 \qquad \text{et} \qquad f(\underline{x}, y) = 0$$

respectivement. Si, en effet, A et B et l'élément en question occupaient une autre position dans le plan, il suffirait, pour amener les deux critiques et l'élément à la position voulue, d'effectuer sur x_i et y_i des collinéations convenables; or cela revient à multiplier devant et derrière s par des monistiques convenables, et n'altère ni l'équivalence, ni la réductibilité.

Cela posé, puisque $f(\underline{x}, y) = 0$ touche en $\omega(y_1 = y_2 = 0)$ la droite $\Omega(y_2 = 0)$, il vient

$$f = 2X_{23}y_2y_3 + X_{11}y_1^2 + 2X_{12}y_1y_2 + X_{22}y_2^2,$$

ou, ce qui n'est ni plus ni moins général,

$$f = 2X_{23}B + X'_{11}y_1^2 + 2X_{12}y_1y_2 + X_{22}y_2^2.$$

On voit aisément que A devant diviser tous les mineurs du déterminant des X_{ij} et étant indécomposable ne peut être que $2X_{23}$, et il vient

$$f = AB + X_{11}y_1^2 + 2X_{12}y_1y_2 + X_{22}y_2^2.$$

Posons

$$P\left(\overset{2}{x}, \overset{2}{y}\right) = X_{11}y_1^2 + \ldots = Y_{11}x_1^2 + 2Y_{12}x_1x_2 + \ldots,$$

$P(\underline{x}, y) = o$ représente deux fois la droite menée de ω au point de contact de $f(\underline{x}, y) = o$ avec B; $P(x, \underline{y}) = o$ représente aussi deux fois la courbe de contact A avec $f(x, \underline{y}) = o$ (**30**); cette corde de contact passe par ω, quel que soit y, et x_3 manque dans P.

Ainsi, $P(x_1, x_2; y_1, y_2)$ doit être à la fois le carré d'une forme linéaire en x_1, x_2 et le carré d'une forme linéaire en y_1, y_2; donc

$$P = (\overset{1}{x}, \overset{1}{y})^2 = \{ y_2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)y_2 \}^2.$$

Cela étant, je considère le réseau

$$R_p^{s\rho} = \rho[R_p^s],$$

ρ étant la canonique connue (**21**).

La conique générale de ce réseau sera, après départ du facteur x_2^2,

$$\rho[f] = x_2 x_3 B + \{ y_2(a_{11}x_1 + \ldots) - y_1(a_{21}x_1 + \ldots) \}^2.$$

On vérifie aisément que la critique A de $s\rho$ est $x_2 x_3 = o$, couples de droites; $s\rho = \sigma\sigma'$ (théorème du n° **29**), σ, σ' = crémoniques, et

$$s = \sigma\sigma'\rho;$$

donc:

Théorème I. — *Si les quatre critiques sont indécomposables, s est un produit de* trois *crémoniques.*

Réunissant ce théorème à celui du **29**, il vient :

Théorème II. — *Toute crémonienne est un produit de deux ou de trois crémoniques.*

Nous sommes ainsi amenés à distinguer des crémoniennes à *deux* et à *trois composantes crémoniques.*

Nota. — La primordiale puncto-ponctuelle n'est autre que l'*æquatio directrix* de Plücker (Clebsch-Lindemann, *Leçons sur la Géométrie*, traduction Benoist, t. III, p. 466).

QUATRIÈME PARTIE.

CRÉMONIENNES A DEUX COMPOSANTES CRÉMONIQUES; ÉLÉMENTS, CONNEXES, FACTEURS FONDAMENTAUX.

32. Parmi diverses crémoniennes équivalentes, nous ne construirons, comme plus haut (**16**), qu'une seule à expression particulièrement simple, qui sera la *canonique*.

Toute crémonique est de la forme (**22**) $\alpha\sigma\beta$, où $\sigma = \zeta$, ϖ ou ρ; α et β sont des linéaires monistiques ou dualistiques; le produit de deux crémoniques sera équivalent à une des neuf substitutions

$$(\mathrm{o})\qquad \left\{\begin{matrix} \zeta m\zeta & \zeta m\varpi & \zeta m\rho \\ \varpi m\zeta & \varpi m\varpi & \varpi m\rho \\ \rho m\zeta & \rho m\varpi & \rho m\rho \end{matrix}\right\},$$

$$m = \text{linéaire quelconque.}$$

Lemme I. — *Aucune des substitutions du tableau* (o) *ne peut être une crémonienne quadratique, si* m *est monistique.*

Cela est évident, car le produit de deux substitutions Cremona est une substitution Cremona et non une crémonienne.

Lemme II. — *Aucune des substitutions du tableau* (o) *ne peut être crémonienne quadratique, si elle contient la composante* ζ.

Il suffit de démontrer le lemme pour $\zeta m\zeta$, $\varpi m\zeta$, $\rho m\zeta$, car $(\zeta m\zeta)^{-1}$, $(\varpi n\zeta)^{-1}$, $(\rho n\zeta)^{-1}$ sont respectivement de la forme $\zeta m\zeta$, $\zeta m\varpi$, $\zeta m\rho$ et que l'inverse d'une crémonienne doit être une crémonienne (**23**).

Appelons, pour abréger, σ l'une quelconque des crémoniques ζm, ϖm, ρm. Puisque m est dualistique, on a

$$\sigma = \left| \begin{matrix} x_i & \varphi_i(\overset{2}{u}) \\ u_i & \psi_i(\overset{1}{x}, \overset{2}{u}) \end{matrix} \right|.$$

Posons

$$\varphi = \sum_i k_i \varphi_i\left(\overset{2}{u}\right) = 0,$$

$$k_i = \text{const. arbitraire.}$$

Pour que la crémonienne $\sigma\zeta$ soit quadratique, il faut qu'il se sépare de

$$\zeta[\varphi] = \sum_i k_i \varphi_i(x^2 u) = \left(\overset{4}{x}, \overset{2}{u}\right)$$

un facteur $\Pi\left(\overset{2}{x}\right)$ d'ordre deux en x_i. Π ne peut être que le carré d'un facteur fondamental de ζ ou le produit de deux facteurs fondamentaux (**19**).

Il suffira d'examiner les cas $x_3^2 = \Pi$ et $\Pi = x_1 x_2$, par exemple.

Si $\Pi = x_3^2$, le connexe $\varphi(u) = 0$ doit contenir les ∞ éléments adhérents au point $\omega(x_1 = x_2 = 0)$; l'équation de ces ∞ éléments en coordonnées-lignes u_i est $u_3 = 0$; ainsi $\varphi(u)$ est divisible par u_3, pour k_i quelconque; $\varphi_i(u)$ est aussi divisible par u_3 et σ est linéaire dualistique; alors $\sigma\zeta$ est crémonique, ce qui est contre l'hypothèse.

On discuterait de même le cas $\Pi = x_1 x_2$.

Lemme III. — *Pour qu'une substitution du tableau* (o), *dépourvue de la composante ζ, soit crémonienne quadratique, il faut que la dualistique m ne déplace pas l'élément focal* (ω, Ω) *et soit par conséquent de la forme*

$$m = \left|\begin{array}{ll} x_1 & m_1 u_1 + m_{13} u_3 \\ x_2 & m_2 u_3 \\ x_3 & m_{31} u_1 + m_3 u_2 + m_{33} u_3 \\ u_1 & m_1^{-1} x_1 + m_2 m_{31} x_2 \\ u_2 & m_3 m_{13} x_1 + (m_1 m_{33} - m_{13} m_{31}) x_2 + m_2^{-1} x_3 \\ u_3 & m_3^{-1} x_2 \end{array}\right|,$$

le déterminant $-m_1 m_2 m_3$ de m étant l'unité, d'où

$$m_1 m_2 m_3 = -1.$$

Conservons les notations précédentes; appelons encore σ l'une quelconque des deux crémoniques ϖm ou ρm.

$$\sigma = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i\left(\overset{2}{u}\right) \\ u_i & \psi_i\left(\overset{1}{x}, \overset{2}{u}\right) \end{vmatrix}.$$

Lemme auxiliaire. — *Soit $\varphi\left(\overset{2}{u}\right) = 0$ l'équation d'une conique en coordonnées-lignes u_i; pour qu'il se sépare respectivement de $\varpi[\varphi(u)]$ le facteur x_1^2 et de $\rho[\varphi(u)]$ le facteur x_2^2, il faut et il suffit que la conique adhère à l'élément focal.*

Le connexe $\varphi(u) = 0$ d'abord doit contenir l'élément focal (**20** et **21**); donc

$$\varphi = u_2(a_1 u_1 + a_3 u_3) + Q(u_1, u_3),$$

$$Q = \text{forme quadratique binaire.}$$

Alors

$$\begin{aligned} \varpi[\varphi] &= -x_1 x_2^2 u_2 \ (a_1 r_1 + a_3 x_1 u_3) + x_1^2 Q(r_1, x_1 u_3), \\ \rho[\varphi] &= \quad x_2 \rho[u_2](a_1 r_2 + a_3 x_2 u_3) + x_2^2 Q(r_2, x_2 u_3). \end{aligned}$$

Comme $\rho[u_2] = x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2$ n'est pas divisible par x_2, il faut avoir $a_1 = 0$ et cela suffit; alors

$$\varphi = a_3 x_2 x_3 + Q(u_1, u_2) = 0$$

et adhère à l'élément focal.

Cela posé, pour que $\sigma\varpi$ ou $\sigma\rho$ soit crémonienne, il faut qu'il se sépare de $\varpi[\varphi(u)]$ et de $\rho[\varphi(u)]$ un facteur quadratique Π en x_i; on a posé d'ailleurs

$$\varphi(u) = \sum_i k_i \varphi_i(u),$$

$$k_i = \text{const. arbitraire.}$$

Le facteur Π ne peut être que x_2^2 si l'on considère $\sigma\rho$ et que x_1^2 ou $x_1 x_2$ si l'on considère $\sigma\varpi$.

Si Π est x_1^2 ou x_2^2, le lemme auxiliaire prouve que la conique $\varphi(u)=0$ adhère à l'élément focal. D'ailleurs la conique $\varphi(u)$ est, pour $\sigma=\varpi m$,

$$m[\mathrm{R}_1 x_1 x_2 + \mathrm{R}_2 x_1^2 + \mathrm{R}_3 x_2 x_3],$$

pour $\sigma=\rho m$

$$m[\mathrm{R}_1 x_1 x_2 + \mathrm{R}_2 x_2^2 + \mathrm{R}_3(x_1^2 - x_2 x_3)],$$

et n'adhère qu'à un seul élément fixe (indépendant des k_i), à l'élément $m^{-1}[(\omega,\Omega)]$. Donc

$$(\omega,\Omega)=m[(\omega,\Omega)].$$

Si Π est $x_1 x_2$, le connexe $\varphi(u)=0$ doit contenir les ∞ éléments adhérents à ω'; $\varphi(u)$ et $\varphi_i(u)$ seraient divisibles par u_2, σ serait une linéaire dualistique et $\sigma\varpi$ une crémonique.

Soit maintenant

$$m=\begin{vmatrix} x_i & \sum\limits_j m_{ij} u_j \\ u_i & \sum\limits_j \mu_{ij} x_j \end{vmatrix},$$

μ_{ij} étant l'élément du système adjoint du système des m_{ij}, le déterminant de ces dernières étant l'unité [*voir* mon Mémoire *Sur les substitutions linéaires de contact* (*Journal de Mathématiques*, 1887)]. Puisque m ne déplace pas l'élément focal, la droite $m[\omega]$ coïncide avec Ω et le point $m[\Omega]$ avec ω; cela exige $m_{12}=m_{21}=m_{22}=0$; m prend la forme indiquée dans l'énoncé. C. Q. F. D.

33. La dualistique m a pour primordiale puncto-ponctuelle

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(\overset{1}{x},\overset{1}{y}) &= m_1^{-1} x_1 y_1 + m_2^{-1} x_3 y_2 \\ &\quad + m_3^{-1} x_2 y_3 + \mu x_2 y_2 + m_2 m_{31} x_2 y_1 + m_3 m_{13} x_1 y_2 = 0; \\ &\mu = m_1 m_{33} - m_{13} m_{31}, \qquad m_1 m_2 m_3 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Pour avoir la primordiale puncto-ponctuelle de $\alpha^{-1} m \beta$, α et β étant des linéaires quelconques, il suffit évidemment (**11**) d'effectuer dans $\mathrm{M}=0$ la linéaire β sur les x_i et la linéaire α sur les y_i.

On vérifie aisément que la monistique

$$a = \left| \begin{array}{ll} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \\ x_3 & a'x_1 + ax_3 \\ \cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots \end{array} \right|$$

est échangeable à $\varpi (a\varpi = \varpi a)$ pour a' et a quelconques, et que la monistique

$$\alpha = \left| \begin{array}{ll} x_1 & \alpha x_1 + 2\alpha' x_2 \\ x_2 & x_2 \\ x_3 & 2\alpha\alpha' x_1 + 2\alpha'^2 x_2 + \alpha^2 x_3 \\ \cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right|$$

est échangeable à $\rho(\alpha\rho = \rho\alpha)$ pour des valeurs quelconques de α et α'.

Soient a, b, ... des monistiques de la forme a; soient α, β, ... des monistiques de la forme α; la substitution

$$\begin{array}{lcl} \alpha\rho m\rho\beta = \rho\alpha m\beta\rho & \text{est équivalente à} & \rho m\rho, \\ \alpha\rho m\varpi a = \rho\alpha m a\varpi & \text{»} & \rho m\varpi, \\ a\varpi m\rho\alpha = \varpi a m\alpha\rho & \text{»} & \varpi m\rho, \\ a\varpi m\varpi b = \varpi a m b\varpi & \text{»} & \varpi m\varpi, \end{array}$$

et nous pourrons, pour la recherche de la forme canonique, effectuer dans $M(x, y)$ des monistiques convenables de façon à simplifier l'expression de m.

34. THÉORÈME. — *Une crémonienne de la forme $\varpi m\varpi$ a pour forme canonique $\varpi E\varpi$, où E désigne la dualistique suivante :*

$$E = \left| \begin{array}{ll} x_1 & -u_1 \\ x_2 & u_3 \\ x_3 & u_2 - cu_3 \\ u_1 & -x_1 \\ u_2 & cx_2 + x_3 \\ u_3 & x_2 \end{array} \right|.$$

La primordiale puncto-ponctuelle de E est

$$\mathfrak{E} = -x_1y_1 + ex_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de faire voir qu'on peut reproduire $M(x, y)$ (**33**), en effectuant dans $\mathfrak{E}$ sur x_i et y_i des monistiques convenables de la forme a (**33**).

Effectuons sur x_i la monistique a; sur y_i la monistique b; $\mathfrak{E}$ devient

$$\begin{aligned} &-x_1y_1 + ex_2y_2 + x_2(b'y_1 + by_3) + y_2(a'x_1 + ax_3)\\ &= -x_1y_1 + ex_2y_2 + b'x_2y_1 + a'x_1y_2 + bx_2y_3 + ax_3y_2.\end{aligned}$$

Pour identifier avec M, il suffit de poser

$$e = -m_1\mu, \qquad b' = -m_1m_2m_{31}, \qquad a' = -m_1m_3m_{13},$$
$$b = -m_1m_3^{-1}, \qquad a = -m_1m_2^{-1}.$$

Il vient ensuite

$$\varpi\mathrm{E} = \begin{vmatrix} x_1 & -u_1u_3 \\ x_2 & u_1^2 \\ x_3 & u_3(u_2 - eu_3) \\ u_1 & u_1(2ex_2u_3 - r_1) \\ u_2 & u_3^2(ex_2 + x_3) \\ u_3 & -u_1^2x_2 \end{vmatrix}.$$

Effectuons maintenant dans ϖE la substitution ϖ; il vient, eu égard à la forme de ϖ(**20**) et après suppression du facteur x_1^2 dans les φ_i et du facteur x_1^4 dans les ψ_i, la *forme canonique* pour les crémoniennes, telles que $\varpi m \varpi$

$$\varpi\mathrm{E}\varpi = \begin{vmatrix} x_1 & -x_1u_3r_1 \\ x_2 & r_1^2 \\ x_3 & -u_3(x_2^2u_2 + ex_1^2u_3) \\ u_1 & r_1(2ex_1u_3 - x_2u_1) \\ u_2 & u_3^2(ex_1^2 + x_2x_3) \\ u_3 & -r_1^2 \end{vmatrix} = (\varpi\mathrm{E}\varpi)^{-1}.$$

35. THÉORÈME. — *Si* E *désigne la même dualistique que dans le théorème précédent, la forme canonique des crémoniennes* $\rho m \varpi$ *est* $\rho E \varpi$.

Il suffit de démontrer encore qu'en effectuant dans $\mathfrak{E}$ une monistique β sur les y_i et a sur les x_i on reproduit M.

Effectuons ces monistiques; $\mathfrak{E}$ devient

$$\begin{aligned}
&-(\beta y_1 + 2\beta' y_2)x_1 + e x_2 y_2 + x_2(2\beta\beta' y_1 + 2\beta'^2 y_2 + \beta^2 y_3) \\
&\quad + y_2(a' x_1 + a x_3) \\
&\quad = -\beta x_1 y_1 + x_2 y_2 (e + 2\beta'^2) \\
&\qquad + 2\beta\beta' x_2 y_1 + a' x_1 y_2 + \beta^2 x_2 y_3 + a x_3 y_2.
\end{aligned}$$

Pour identifier avec M, posons, k étant un facteur de proportionnalité

$$\begin{aligned}
-\beta &= k m_1^{-1}, & a' &= k m_3 m_{13}, \\
e + 2\beta'^2 &= k\mu, & \beta^2 &= k m_3^{-1}, \\
2\beta\beta' &= k m_2 m_{31}, & a &= k m_2^{-1}.
\end{aligned}$$

Ces six équations déterminent les six constantes a, a', β, β', e, k; ces dernières sont assujetties simplement à $ka\beta \neq 0$, qui a toujours lieu en vertu de $m_1 m_2 m_3 + 1 = 0$.

Cela posé, effectuons le produit ρE; il vient

$$\rho E = \left|\begin{matrix}
x_1 & -u_1 u_3 \\
x_3 & u_3^2 \\
x_3 & u_1^2 - u_3(u_2 - e u_3) \\
u_1 & u_3(2x_2 u_1 + x_1 u_3) \\
u_2 & u_1^2 x_2 - u_3^2(e x_2 + x_3) \\
u_3 & u_3^2 x_2
\end{matrix}\right|.$$

Effectuons maintenant $\rho E \varpi$; il vient, après départ du facteur x_1^2 dans les φ_i et du facteur x_1^1 dans les ψ_i,

$$\rho E \varpi = \left|\begin{array}{ll} x_1 & -x_1 u_3 r_1 \\ x_2 & x_1^2 u_3^2 \\ x_3 & r_1^2 + u_3(x_2^2 u_2 + e x_1^2 u_3) \\ u_1 & x_1 u_3 (x_2 u_3 + 2 r_1) \\ u_2 & r_1^2 - u_3^2(e x_1^2 + x_2 x_3) \\ u_3 & x_1^2 u_3^2 \end{array}\right|.$$

Nous avons construit ainsi la *forme canonique* des crémoniennes $\rho m \varpi$.

36. Théorème. — *La forme canonique des crémoniennes $\varpi m \rho$ est* $\varpi E \rho$.

Toute crémonienne de la forme $\varpi m \rho = (\rho m^{-1} \varpi)^{-1}$ a pour inverse une crémonienne de la forme $\rho m \varpi$. Nous pouvons prendre pour forme canonique des crémoniques $\varpi m \rho$ l'inverse de la forme canonique $\rho E \varpi$ des crémoniennes $\rho m \varpi$. Or $E^{-1} = E$, comme on le voit par la symétrie de $\mathfrak{E}$; la forme canonique cherchée pour les crémoniennes $\varpi m \rho$ est ainsi $\varpi E \rho$.

La crémonique ϖE est déjà construite (**34**); il vient pour la *forme canonique*, après départ du facteur x_2^2 dans les φ_i et x_2^1 dans les ψ_i,

$$\varpi E \rho = \left|\begin{array}{ll} x_1 & -x_2 u_3 r_2 \\ x_2 & r_2^2 \\ x_3 & u_3(x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2 - e x_2^2 u_3) \\ u_1 & r_2(r_1 + 2 e x_2 u_3) \\ u_2 & u_3^2(e x_2^2 + x_1^2 - x_2 x_3) \\ u_3 & -r_2^2 \end{array}\right| = (\rho E \varpi)^{-1}.$$

37. Théorème. — *Toute crémonienne de la forme $\rho m \rho$ a pour* *forme canonique* $\rho H \rho$, *où* H *désigne la dualistique*

$$H = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & hu_3 \\ x_3 & hu_2 \\ u_1 & hx_1 \\ u_2 & x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix} = H^{-1}.$$

Nous pouvons remarquer que toute monistique, telle que

$$a = \begin{vmatrix} x_1 & ax_1 + a'x_2 \\ x_2 & x_2 \\ x_3 & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a^2x_3 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

est telle que $\rho a \rho$ soit une linéaire a_0 de la même forme. Alors, si b désigne une seconde monistique de la forme a,

$$\rho bma\rho = a_0 \rho m \rho b_0.$$

La primordiale puncto-ponctuelle de H est

$$\mathcal{G} = hx_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 = 0.$$

Il suffit de démontrer qu'en faisant dans $\mathcal{G}$ la monistique b sur y_i et a sur y_i, on reproduit M, pour des coefficients de a et b convenablement choisis.

Faisant le calcul, $\mathcal{G}$ devient

$$\begin{aligned} &h(ax_1 + a'x_2)(by_1 + b'y_2) \\ &\quad + x_2(b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b^2y_3) + y_2(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a^2x_3) = 0 \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} &habx_1y_1 + x_2y_2(ha'b' + b_{32} + a_{32}) + b^2x_2y_3 + a^2x_3y_2 \\ &\quad + x_2y_1(ha'b + b_{31}) + x_1y_2(hab' + a_{31}) = 0. \end{aligned}$$

Pour identifier avec M, il suffit, k désignant un facteur de proportionnalité, de poser

$$(\mathrm{o})\qquad \left\{\begin{array}{c} hab = km_1^{-1}, \qquad b^2 = km_3^{-1}, \qquad a^2 = km_2^{-1}, \\ ha'b + b_{31} = km_2 m_{31}, \qquad hab' + a_{31} = km_3 m_{13}, \\ ha'b' + b_{32} + a_{32} = k\mu. \end{array}\right.$$

Il est évidemment possible toujours de satisfaire au système des six équations (o) à l'aide des neuf quantités $a, b, a', b', a_{31}, a_{32}, b_{31}, b_{32}, k$, dont plusieurs restent arbitraires; mais h est bien déterminé et unique, car

$$m_2 m_3 = h^2 m_1^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, on trouve successivement

$$\rho \mathrm{H} = \left|\begin{array}{ll} x_1 & hu_1 u_3 \\ x_2 & h^2 u_3^2 \\ x_3 & u_1^2 - h^2 u_2 u_3 \\ u_1 & -hu_3(h^2 x_1 u_3 + 2x_2 u_1) \\ u_2 & x_2 u_1^2 - h^2 x_3 u_3^2 \\ u_3 & h^2 x_2 u_3^2 \end{array}\right|.$$

$$\rho \mathrm{H} \rho = (\rho \mathrm{H} \rho)^{-1} = \left|\begin{array}{ll} x_1 & hx_2 u_3 r_2 \\ x_2 & h^2 x_2^2 u_3^2 \\ x_3 & r_2^2 - h^2 u_3 (x_1^2 u_3 - x_2^2 u_2) \\ u_1 & -hx_2 u_3 (2r_2 + h^2 x_1 u_3) \\ u_2 & r_2^2 - h^2 u_3^2 (x_1^2 - x_2 x_3) \\ u_3 & h^2 x_2^2 u_3^2 \end{array}\right|.$$

Après avoir ainsi explicitement construit les diverses formes canoniques des crémoniennes à deux composantes crémoniques, nous allons rechercher les éléments, les connexes et les facteurs fondamentaux.

38. *Construction des éléments fondamentaux de* $\varpi E \varpi$.

Reportons-nous à l'expression (**34**) de

$$\varpi E \varpi = \begin{vmatrix} x_i & \varphi_i \\ u_i & \psi_i \end{vmatrix}.$$

Les éléments fondamentaux doivent évidemment être cherchés sur le connexe

$$r_1 = x_2 u_2 - x_3 u_3 = 0,$$

lequel contient les ∞ éléments adhérents à

$$\omega, \quad \omega', \quad \omega'', \quad \Omega, \quad \Omega' \quad \text{ou} \quad \Omega'',$$

côtés et sommets (**18**) du triangle des coordonnées.

On vérifie que $\varphi_i = \psi_i = 0$ pour les ∞ éléments adhérents à ω, Ω, Ω', ω'. Cherchons les autres éléments fondamentaux, c'est-à-dire ceux qui n'adhèrent ni à un côté, ni à un sommet du triangle des coordonnées.

Des deux équations $r_1 = \sum_i u_i x_i = 0$ résulte

$$(o) \qquad u_1 = 2x_2x_3, \qquad u_2 = -x_1x_3, \qquad u_3 = -x_1x_2,$$

omettant le facteur de proportionnalité.

Alors effectuant le remplacement dans φ_i et ψ_i, il vient

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_2 = 0, \qquad \varphi_3 = -x_1^2x_2^2(ex_1^2 + x_2x_3), \\ \psi_1 &= \psi_3 = 0, \qquad \psi_2 = -x_1x_2(ex_1^2 + x_2x_3). \end{aligned}$$

Pour que l'élément soit fondamental, x doit être sur la conique $ex_1^2 + x_2x_3 = 0$; alors les équations (o) donnent après suppression de $-x_1$

$$u_1 = 2ex_1, \qquad u_2 = x_3, \qquad u_3 = x_2$$

et (x, u) adhère à $ex_1^2 + x_2x_3 = 0$. Ainsi :

Théorème I. — *Les éléments fondamentaux de $\varpi \mathrm{E} \varpi$ sont tous les éléments adhérents à ω, ω', Ω, Ω' ou à la conique*

$$e x_1^2 + x_2 x_3 = 0.$$

Pour trouver les facteurs fondamentaux, nous employons une méthode expéditive. Les facteurs fondamentaux de $\varpi \mathrm{E} \varpi$ sont ceux qui se détachent de $\varpi \mathrm{E} \varpi[\mathrm{P}(x, u)]$, $\mathrm{P} = 0$ étant un connexe irréductible (lemme du n° **19**). Or, au lieu d'effectuer $\varpi \mathrm{E} \varpi$ dans P, je puis effectuer successivement ϖ, E et ϖ; il vient alors

$$\begin{aligned}
\varpi[\mathrm{P}] &= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \mathrm{P}',\\
\mathrm{E}\varpi[\mathrm{P}] &= u_1^{\alpha_1} u_3^{\alpha_2} \mathrm{E}[\mathrm{P}'],\\
\varpi \mathrm{E} \varpi[\mathrm{P}] &= (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} x_1^{\alpha_1} r_1^{\alpha_1} x_1^{\alpha_2} u_3^{\alpha_2} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \mathrm{P}''.
\end{aligned}$$

Les facteurs fondamentaux doivent donc être cherchés parmi les facteurs

$$x_1, \quad x_2, \quad u_3, \quad r_1.$$

On vérifie sans peine que la substitution $\varpi \mathrm{E} \varpi$ transforme les ∞^2 éléments du connexe $x_1 = 0$ en les ∞^2 éléments du même connexe; au contraire, $\varpi \mathrm{E} \varpi$ transforme respectivement les ∞^2 éléments du connexe

$r_1 = 0$, en l'élément focal (ω, Ω),

$u_3 = 0$, en les ∞ éléments adhérents à ω',

$x_2 = 0$, » » à la conique $e x_1^2 + x_2 x_3 = 0$:

d'où, tenant compte du lemme de **19**,

Théorème II. — *Les facteurs fondamentaux de $\varpi \mathrm{E} \varpi$ sont x_2, u_3, $r_1 = x_2 u_2 - x_3 u_3$. Soit* P *une forme mixte irréductible; pour qu'il se sépare de $\varpi \mathrm{E} \varpi[\mathrm{P}]$ les facteurs r_1, x_2, u_3, il faut et il suffit respectivement que le connexe* $\mathrm{P} = 0$ *contienne l'élément focal, les ∞ éléments adhérents à la conique $e x_1^2 + x_2 x_3 = 0$, les ∞ éléments adhérents au point ω'.*

39. *Construction des éléments et des facteurs fondamentaux de* $\rho E \varpi$.

Nous reportant à la forme de $\rho E \varpi$ (**35**) et suivant la méthode employée pour $\varpi E \varpi$, nous établissons aisément les propositions :

Théorème I. — *Les éléments fondamentaux de* $\rho E \varpi$ *sont tous les* ∞ *éléments adhérents à* Ω, Ω', ω, ω' *et au point* $\mathfrak{h}$ *dont les coordonnées sont* $\mathfrak{h}_1 = 0$, $\mathfrak{h}_2 = 4$, $\mathfrak{h}_3 = 1$.

Théorème II. — *Les facteurs fondamentaux de* $\rho E \varpi$ *sont* $x_1 u_3$ *et* x_2. *Soit* $P = 0$ *un connexe irréductible; pour qu'il se sépare de* $\rho E \varpi |P|$ *les facteurs* $x_1 u_3$ *et* x_2, *il faut et il suffit respectivement que* $P = 0$ *contienne l'élément focal et les* ∞ *éléments adhérents à la conique* $x_1^2 - x_2 x_3 + e x_2^2 = 0$.

40. *Construction des éléments et des facteurs fondamentaux de* $\varpi E \rho$.

Théorème I. — *Les éléments fondamentaux de* $\varpi E \rho$ *sont tous les* ∞ *éléments adhérents à* ω, Ω *et à la conique* $x_1^2 - x_2 x_3 + e x_2^2 = 0$.

Théorème II. — *Les facteurs fondamentaux de* $\varpi E \rho$ *sont* r_2, u_3, x_2. *Soit* $P = 0$ *un connexe irréductible; pour qu'il se sépare de* $\varpi E \rho [P]$ *le facteur* r_2, u_3, x_2 *il faut et il suffit respectivement que le connexe* $P = 0$ *contienne l'élément focal, les* ∞ *éléments adhérents à* ω', *les* ∞ *éléments adhérents au point* $\mathfrak{h}$ *déjà construit.*

40. *Construction des éléments et des facteurs fondamentaux de* $\rho H \rho$.

Théorème I. — *Les éléments fondamentaux de* $\rho H \rho$ *sont les* ∞ *éléments adhérents à* ω, *ou à* Ω.

Théorème II. — *Le facteur fondamental de* $\rho H \rho$ *est* $x_2 u_3$; *soit* $P = 0$ *un connexe irréductible; pour qu'il se sépare de* $\rho H \rho [P]$ *le facteur* $x_2 u_3$, *le connexe* $P = 0$ *doit (et cela suffit) contenir l'élément focal.*

41. Comme toute crémonienne s à deux composantes crémoniques est équivalente (**32**) à l'une des quatre crémoniennes qui viennent d'être construites

$$(o) \qquad \varpi E \varpi, \quad \rho E \varpi, \quad \varpi E \rho, \quad \rho H \rho,$$

il suffira de transformer par une linéaire convenable les éléments et les connexes fondamentaux d'une crémonienne du tableau (o) pour avoir les éléments et les connexes fondamentaux de s.

CINQUIÈME PARTIE.

CRÉMONIENNES A TROIS COMPOSANTES CRÉMONIQUES; ÉLÉMENTS, CONNEXES ET FACTEURS FONDAMENTAUX.

42. Soit s une crémonienne à *trois* composantes crémoniques; je vais encore profiter de l'équivalence pour amener s à une *forme canonique*, en multipliant s devant et derrière par des linéaires convenablement choisies.

Nous avons vu (**31**) que la primordiale puncto-ponctuelle de s est, eu égard à l'équivalence,

$$f = 0 = AB - K^2[y_2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - y_1(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)]^2,$$
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1, \qquad A = x_1^2 - x_2x_3,$$
$$K = \text{const.}, \qquad B = y_1^2 - y_2y_3.$$

Appelons σ la linéaire binaire de déterminant 1

$$\sigma = \begin{vmatrix} t_1 & \sigma[t_1] \\ t_2 & \sigma[t_2] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 & a_{11}t_1 + a_{12}t_2 \\ t_2 & a_{21}t_1 + a_{22}t_2 \end{vmatrix};$$

on pourra écrire

$$f = AB - K^2(y_2\sigma[x_1] - y_1\sigma[x_2])^2 = 0$$

ou, pour abréger,

$$f = AB - K^2P^2 = 0.$$

Appliquons pour la détermination des fonctions φ_i et ψ_i, qui définissent s, le calcul du nº **10**, et cherchons l'intersection des coniques

$$f(\underline{x}, y) = 0, \qquad f(\underline{x} + \underline{dx}, y) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(\underline{x} + \underline{dx}, y) = \mathrm{B}\, d\mathrm{A} - 2\mathrm{K}^2 \mathrm{P}\, d\mathrm{P} = 0,$$
$$f(\underline{x}, y) = \mathrm{B}.\mathrm{A} - \mathrm{K}^2 \mathrm{P}.\mathrm{P} = 0.$$

Omettons les deux points y' et y''' (**10** et **30**)

$$\mathrm{B} = \mathrm{P} = 0,$$

le point y sera sur la droite $(y''y)$ ou (ωy)

$$0 = \begin{vmatrix} d\mathrm{A} & d\mathrm{P} \\ 2\mathrm{A} & \mathrm{P} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_i \mathrm{A}_i dx_i & \sum\limits_i \mathrm{P}_i dx_i \\ \sum\limits_i \mathrm{A}_i x_i & \sum\limits_i \mathrm{P}_i x_i \end{vmatrix} = \mathrm{P}_1 r_1 + \mathrm{P}_2 r_2,$$

où l'on a posé

$$\mathrm{A}_i = \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_i}, \qquad \mathrm{P}_i = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i},$$
$$r_i = (\mathrm{A} u)_i, \qquad r_1 = \mathrm{A}_2 u_3 - \mathrm{A}_3 u_2, \qquad \ldots,$$

puisque d'ailleurs $\mathrm{P}_3 = 0$, et que $(x\, dx)_i$ peut être remplacé par u_i.

Or successivement

$$0 = \mathrm{P}_1 r_1 + \mathrm{P}_2 r_2 = y_2 \sigma[r_1] - y_1 \sigma[r_2],$$

$$(0') \quad \begin{cases} y_1 = \alpha\sigma[r_1] \\ y_2 = \alpha\sigma[r_2] \end{cases}, \qquad \alpha = \text{facteur de proportionnalité},$$

$$\mathrm{P}^2 = \begin{vmatrix} y_1 & \sigma[x_1] \\ y_2 & \sigma[x_2] \end{vmatrix}^2 = \alpha^2 \begin{vmatrix} \sigma[r_1] & \sigma[x_1] \\ \sigma[r_2] & \sigma[x_2] \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} r_1 & x_1 \\ r_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 \alpha^2 = 4\alpha^2 u_3^2 . \mathrm{A}^2,$$

puisque σ a l'unité pour déterminant. Nous avons ainsi, pour déterminer y_3, l'équation suivante, après suppression de $\alpha \mathrm{A}$,

$$\alpha\sigma[r_1^2] - \sigma[r_2] y_3 = 4\mathrm{K}^2 \alpha u_3^2 \mathrm{A};$$

d'où

$$\sigma[r_2]y_3 = \alpha\{\sigma[r_1^2] - 4K^2\alpha_3^2 A\}.$$

Pareillement (o') deviennent

$$\sigma[r_2]y_1 = \sigma[r_1 r_2],$$
$$\sigma[r_2]y_2 = \sigma[r_2^2];$$

c'est-à-dire

$$\varphi_1 = \sigma[r_1 r_2],$$
$$\varphi_2 = \sigma[r_2^2],$$
$$\varphi_3 = \sigma[r_1^2] - 4K^2 u_3^2 A.$$

On peut remarquer que le déterminant de la conique $f(x, y) = 0$ est $A^2(A - K^2\sigma[x_2^2])$ à un coefficient constant près. Nous prendrons donc pour la critique $\mathfrak{A}$, la conique $\mathfrak{A} = A - K^2\sigma[x_2^2] = 0$ (**24**).

43. Passons à la construction des fonctions ψ_i. La primordiale puncto-linéaire de s est, après départ prévu (**24**) du facteur A, comme un calcul aisé le montre,

$$F(x, v) = \mathfrak{A}B' - K^2 Q^2 = 0,$$
$$B' = 4v_2 v_3 - v_1^2,$$
$$Q = v_1\sigma[x_2] + 2v_3\sigma[x_1].$$

On verra, comme dans le calcul des φ_i, que la droite v doit passer par le point

$$\begin{vmatrix} d\mathfrak{A} & dQ \\ 2\mathfrak{A} & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_i \mathfrak{A}_i dx_i & \sum_i Q_i dx_i \\ \sum_i \mathfrak{A}_i x_i & \sum_i Q_i x_i \end{vmatrix} = Q_1 \mathfrak{r}_1 + Q_2 \mathfrak{r}_2 = 0;$$

$$\mathfrak{r}_i = (\mathfrak{A}u)_i, \qquad \mathfrak{A}_i = \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial x_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial Q}{\partial x_i}.$$

Or successivement

$$0 = Q_1 \mathfrak{r}_1 + Q_2 \mathfrak{r}_2 = \nu_1 \sigma[\mathfrak{r}_2] + 2\nu_3 \sigma[\mathfrak{r}_1] = 0;$$

$$(0) \quad \left\{ \begin{aligned} \nu_1 &= -\beta 2\sigma[\mathfrak{r}_1] \\ \nu_3 &= \quad \beta \ \sigma[\mathfrak{r}_2] \end{aligned} \right\}, \qquad \beta = \text{facteur de proportionnalité};$$

$$Q^2 = 16\beta^2 u_3^2 \mathfrak{A}^2.$$

Il reste pour déterminer ν_2 l'équation

$$\nu_2 \sigma[\mathfrak{r}_2] - \beta \sigma[\mathfrak{r}_1^2] = 4\beta K^2 u_3^2 \mathfrak{A};$$

d'où

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \sigma[\mathfrak{r}_2]\nu_1 = -2\sigma[\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2], \\ \psi_2 &= \sigma[\mathfrak{r}_2]\nu_2 = \sigma[\mathfrak{r}_1^2] + 4K^2 u_3^2 \mathfrak{A}, \\ \psi_3 &= \sigma[\mathfrak{r}_2]\nu_3 = \sigma[\mathfrak{r}_2^2]. \end{aligned}$$

En définitive

$$s = \left| \begin{array}{ll} x_1 & \sigma[r_1 r_2] \\ x_2 & \sigma[r_2^2] \\ x_3 & \sigma[r_1^2] - 4K^2 u_3^8 A \\ u_1 & -2\sigma[\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2] \\ u_2 & \sigma[\mathfrak{r}_1^2] + 4K^2 u_3^2 \mathfrak{A} \\ u_3 & \sigma[\mathfrak{r}_2^2] \end{array} \right|.$$

On peut remarquer d'ailleurs que

$$\sigma[r_2] = \sigma[\mathfrak{r}_2], \qquad \sigma[\mathfrak{r}_1] = \sigma[r_1] - 2K^2 u_3 \sigma[x_2].$$

Pour avoir s^{-1}, il suffit évidemment dans f de transposer x_i et y_i ou, ce qui revient au même, de changer σ en σ^{-1}.

44. Il s'agit maintenant de ramener s à une *forme canonique* simple.

Reprenons

$$f = AB - K^2 P^2 = 0,$$

$$P = y_2(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) - y_1(a_{21}x_1 + a_{22}x_2),$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1.$$

Toute monistique

$$\delta = \begin{vmatrix} t_1 & t_1 + \delta' t_2 \\ t_2 & \delta t_2 \\ t_3 & \delta_{31} t_1 + \delta_{32} t_2 - \delta^{-1} t_3 \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{31} = 2\delta' \delta^{-1} \\ \delta_{32} = \delta'^2 \delta^{-1} \end{array} \right\}$$

laisse invariable la forme binaire $t_1^2 - t_2 t_3$.

Effectuons dans $f = 0$, ce qui est licite vu l'équivalence, une monistique b de la forme δ sur les x_i et une monistique c de la forme δ sur les y_i. Il vient pour f

$$AB - K^2 P'^2 = 0,$$

$$P' = -a_{21} x_1 y_1 + x_2 y_2 (a_{12} bc - a_{21} b' c' + a_{11} cb' - a_{22} bc') \\ + x_1 y_2 (a_{11} c - a_{21} c') - x_2 y_1 (a_{22} b + a_{21} b').$$

Si $a_{21} \neq 0$, il suffit de poser

$$a_{11} c = a_{21} c', \qquad a_{22} b = -a_{21} b', \qquad bc = a_{21}^2,$$

ce qui détermine toujours b, c, b', c' et d'une façon admissible (bc ni nul ni ∞), pour que P' devienne au signe près $a_{21}(x_1 y_1 + x_2 y_2)$ et alors, modifiant convenablement la valeur de K,

$$f = AB - K^2 (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = 0.$$

Cela revient à faire dans l'expression de s (**43**)

$$\sigma = \begin{vmatrix} t_1 & -t_2 \\ t_2 & t_1 \end{vmatrix}.$$

Appelons π cette *forme canonique*.

Si $a_{21} = 0$, $a_{11} a_{22} = 1$; alors les équations

$$a_{11} c = a_{22} b, \qquad a_{12} bc + a_{11} cb' - a_{22} bc' = 0$$

donnent pour b, c, b', c' des valeurs acceptables (bc ni nul ni infini) et telles qu'à un coefficient constant près P′ deviennc $x_2 y_1 - x_1 y_2$. Alors, modifiant convenablement la valeur de K,

$$f = \mathrm{AB} - \mathrm{K}^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 = 0;$$

pour avoir cette seconde forme canonique ξ, il suffit donc dans s (**43**) de faire $\sigma = 1$.

45. On obtient d'ailleurs, en faisant respectivement dans s

$$\sigma = 1 \qquad \text{et} \qquad \sigma = | \; t_1 \quad t_2 \quad -t_2 \quad t_1 \; |,$$

$$\xi = \xi^{-1} = \left| \begin{array}{ll} x_1 & r_1 r_2 \\ x_2 & r_2^2 \\ x_3 & r_1^2 - 4\mathrm{K}^2 u_3^2 \mathrm{A} \\ u_1 & -2\mathfrak{r}_1 r_2 \\ u_2 & \mathfrak{r}_1^2 + 4\mathrm{K}^2 u_3^2 \mathfrak{A} \\ u_3 & r_2^2 \end{array} \right|;$$

$$\mathfrak{A} = \mathrm{A} - \mathrm{K}^2 x_2^2, \qquad \mathfrak{r}_1 = r_1 - 2\mathrm{K}^2 u_3 x_2;$$

$$\pi = \pi^{-1} = \left| \begin{array}{ll} x_1 & -r_1 r_2 \\ x_2 & r_1^2 \\ x_3 & r_2^2 - 4\mathrm{K}^2 u_3^2 \mathrm{A} \\ u_1 & 2r_1 \mathfrak{r}_2 \\ u_2 & \mathfrak{r}_2^2 + 4\mathrm{K}^2 u_3^2 \mathfrak{A} \\ u_3 & r_1^2 \end{array} \right|,$$

$$\mathfrak{A} = \mathrm{A} - \mathrm{K}^2 x_1^2, \qquad \mathfrak{r}_2 = r_2 + 2\mathrm{K}^2 x_1 u_3.$$

46. Décomposons ξ en un produit de crémoniques. Partons de sa primordiale puncto-ponctuelle

$$f = \mathrm{AB} - \mathrm{K}^2(x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 = 0$$

et appelons e et k les deux linéaires

$$e = e^{-1} = \begin{vmatrix} x_1 & u_1 \\ x_2 & u_3 \\ x_3 & u_2 \\ u_1 & x_1 \\ u_2 & x_3 \\ u_3 & x_2 \end{vmatrix}, \qquad k = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & -\frac{1}{4}K^{-2}x_2 \\ x_3 & x_3 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -4K^2u_2 \\ u_3 & u_3 \end{vmatrix}.$$

Faisant usage du théorème du n° **11**, je trouve successivement pour les primordiales :

Puncto-ponctuelle de $\rho\xi\rho$,

$$x_2x_3y_2y_3 - K^2(x_2y_1 - x_1y_2)^2 = 0;$$

puncto-linéaire de $\rho\xi\rho$,

$$4K^2x_1v_1v_3 + 4K^2x_2v_2v_3 - x_3v_1^2 = 0;$$

linéo-ponctuelle de $e\rho\xi\rho e$,

$$4K^2u_1y_1y_2 + 4K^2u_3y_2y_3 - u_2y_1^2 = 0;$$

linéo-ponctuelle de $\varpi e\rho\xi\rho e$,

$$4K^2u_1y_1 + 4K^2u_3y_3 - u_2y_2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$4K^2y_1 = x_1, \qquad -y_2 = x_2, \qquad 4K^2y_3 = x_3,$$

c'est-à-dire la monistique

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & -\frac{1}{4}K^{-2}x_2 \\ x_3 & x_3 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -4K^2u_2 \\ u_3 & u_3 \end{vmatrix} = k.$$

On a ainsi

$$\varpi e \rho \xi \rho e = k;$$
$$\xi = \rho e \varpi k e \rho.$$

Nous avons ainsi décomposé ξ en un produit de *trois* crémoniques ρ, $e\varpi ke$, ρ, dont *deux* équivalentes à ρ et *une* à ϖ.

47. Décomposons π en un produit de crémoniques. Partons encore de la primordiale

$$f = \text{AB} - \text{K}^2(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = 0,$$

conservons les notations précédentes et posons de plus

$$k' = \left| \begin{array}{cc} x_1 & -4\text{K}^2 x_1 \\ x_2 & 4\text{K}^2 x_2 \\ x_3 & x_3 - x_2 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -u_2 - u_3 \\ u_3 & -4\text{K}^2 u_3 \end{array} \right|.$$

Je trouve successivement, faisant usage du théorème du n° **11**, pour les primordiales :

Puncto-ponctuelle de $\rho\pi$,

$$\text{A} y_2 y_3 - \text{K}^2(x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 = 0;$$

puncto-linéaire de $\rho\pi$,

$$-\text{A} v_1^2 - 4\text{K}^2 x_1 x_2 v_1 v_3 + 4\text{K}^2 x_1^2 v_2 v_3 = 0;$$

puncto-ponctuelle de $e\rho\pi$,

$$-\text{A} y_1^2 - 4\text{K}^2 x_1 x_2 y_1 y_2 + 4\text{K}^2 x_1^2 y_2 y_3 = 0;$$

puncto-ponctuelle de $\varpi e \rho\pi$,

$$-\text{A} y_2 - 4\text{K}^2 x_1 x_2 y_1 + 4\text{K}^2 x_1^2 y_3 = 0;$$

puncto-linéaire de $e\varpi e\rho\pi$,

$$-\mathrm{A}v_3 - 4\mathrm{K}^2 x_1 x_2 v_1 + 4\mathrm{K}^2 x_1^2 v_2 = 0;$$

puncto-linéaire de $e\varpi e\rho\pi\varpi$,

$$(x_3 - x_2)v_3 - 4\mathrm{K}^2 x_1 v_1 + 4\mathrm{K}^2 x_2 v_2 = 0;$$

on tire de là

$$y_1 = -4\mathrm{K}^2 x_1, \qquad y_2 = 4\mathrm{K}^2 x_2, \qquad y_3 = x_3 - x_2,$$

c'est-à-dire la monistique

$$\begin{vmatrix} x_1 & -4\mathrm{K}^2 x_1 \\ x_2 & 4\mathrm{K}^2 x_2 \\ x_3 & x_3 - x_2 \\ u_1 & u_1 \\ u_2 & -u_2 - u_3 \\ u_3 & -4\mathrm{K}^2 u_3 \end{vmatrix} = k'.$$

De l'égalité

$$e\varpi e\rho\pi\varpi = k'$$

on tire

$$\pi = \rho e\varpi e k' \varpi.$$

Ainsi π est le produit des trois crémoniques ρ, $e\varpi e k'$ et ϖ, dont *deux* sont équivalentes à ϖ et *une* à ρ.

48. Théorème. — *Les éléments fondamentaux de ξ sont les ∞ éléments adhérents au point ω, à la droite Ω, ou aux deux coniques* A *ou* $\mathfrak{A}$.

Il suffit de se reporter à l'expression de ξ pour voir qu'il faut chercher les éléments fondamentaux sur le connexe

$$r_2 = x_2 u_1 + 2x_1 u_3 = 0.$$

Ce connexe contient les ∞ éléments adhérents à ω ou à Ω, mais aucun des autres ∞ éléments adhérents à un point ou à une droite. Pour les ∞ éléments adhérents à ω ou Ω, on vérifie qu'ils sont tous fondamentaux, $\varphi_i = \psi_i = 0$.

Cherchons s'il existe encore d'autres éléments fondamentaux. Des équations

$$r_2 = x_2 u_1 + 2x_1 u_3 = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0,$$

on tire, omettant le facteur de proportionnalité,

$$(0) \qquad u_1 = -2x_1 x_2, \qquad u_2 = 2x_1^2 - x_2 x_3, \qquad u_3 = x_2^2.$$

On ne peut avoir à la fois $u_i = 0$, puisque x n'est pas en ω par hypothèse.

Remplaçons, dans φ_i et ψ_i, u_i par leurs valeurs tirées de (o) : il vient

$$\begin{gathered} \varphi_1 = \varphi_2 = \psi_2 = \psi_3 = 0, \\ -r_1 = 2x_2 \mathrm{A}, \qquad -\mathfrak{r}_1 = 2x_2 \mathfrak{A}, \\ \varphi_3 = \psi_2 = 4x_2^2 \mathrm{A} \mathfrak{A}. \end{gathered}$$

Ainsi x ne pouvant être ni en ω, ni sur Ω, doit être sur A ou $\mathfrak{A}$ pour que (x, u) soit fondamental.

Si x est sur A, il vient des (o)

$$u_1 = -2x_1, \qquad u_2 = x_3, \qquad u_3 = x_2;$$

c'est-à-dire que u_i est proportionnel à $\mathrm{A}_i = \dfrac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_i}$, et (x, u) adhère à A.

Si x est sur $\mathfrak{A}$, les équations (o) donnentencore

$$u_1 = -2x_1, \qquad u_2 = x_3 + 2\mathrm{K}^2 x_2, \qquad u_3 = x_2;$$

u_i est donc proportionnel à $\mathfrak{A}_i = \dfrac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x_i}$, et (x, u) adhère à $\mathfrak{A}$.

Le théorème est ainsi démontré dans toutes ses parties.

49. Nous allons chercher les facteurs fondamentaux de ξ, c'est-à-dire ceux (**19**) qui se séparent de $\xi[\mathrm{P}]$, P étant une forme mixte irréductible. D'ailleurs, puisque

$$\xi = \rho e \varpi k e \rho,$$

au lieu d'effectuer dans P la crémonienne ξ, nous pouvons effectuer successivement ρ, e, ϖ, ... Disons, pour abréger le langage, qu'une crémonienne s *introduit* des facteurs (fondamentaux évidemment) si ces facteurs se séparent de $s[\mathrm{P}]$, P étant une forme mixte irréductible. De plus, une crémonienne produit $s's$ introduit les facteurs fondamentaux de s et les transformées par s des facteurs fondamentaux s', déjà introduits par s'. Cela posé, on voit que les divers facteurs qui peuvent être introduits sont :

Pour ρ	x_2		
ρe	x_3		
$\rho e\varpi$	x_1	x_2	u_3
$\rho e\varpi k$	x_1	x_2	u_3
$\rho e\varpi ke$	u_1	u_3	x_2
$\rho e\varpi ke\rho$ ou ξ	x_2	u_3	r_2

il suffit, pour le voir, de se reporter aux expressions de ρ(**16**), e(**46**), ϖ(**16**), k(**46**).

Ainsi les facteurs fondamentaux de ξ doivent être cherchés dans la suite

$$r_2, \quad x_2, \quad u_3.$$

Si (x, u) est sur $r_2 = 0$, $(y, v) = \xi[(x, u)]$ coïncide avec l'élément focal, car alors

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_1 = \psi_3 = 0.$$

Si (x, u) est sur le connexe $x_2 = 0$, il vient

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = 2u_1 u_3, &&\varphi_2 = 4u_3^2, &&\varphi_3 = u_1^2 - 4\mathrm{K}^2 u_3^2, \\ &\psi_1 = \ldots\ldots, &&\ldots\ldots\ldots, &&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

on obtient en fonction de $u_1 : u_3$ la représentation paramétrique des coordonnées d'un point de $\mathfrak{A}$ et de la tangente en ce point; (y, v) adhère donc à $\mathfrak{A}$.

De même, si (x, u) est sur le connexe $u_3 = 0$, (y, v) adhère à A. Ainsi :

Théorème. — *Les facteurs fondamentaux de* ξ *sont* r_2, x_2 et u_3.

Pour que r_2 se sépare de $\xi[\mathrm{P}]$, il faut et il suffit que le connexe $\mathrm{P}=0$ contienne l'élément focal. Pour que de $\xi[\mathrm{P}]$ se sépare le facteur x_2 ou u_3, il faut et il suffit que $\mathrm{P}=0$ contienne les ∞ éléments adhérents à $\mathfrak{A}$ ou à A respectivement.

50. Cherchons les éléments fondamentaux de π, lesquels sont évidemment situés sur le connexe $r_1=0$; ce connexe contient d'ailleurs les ∞ éléments adhérents aux points ω, ω', ω'' ou aux droites Ω, Ω', Ω''.

Nous vérifions aisément, en tenant compte de $K^2-1\neq 0$, puisque $\mathfrak{A}$ est indécomposable, que sont, parmi les ∞ éléments précités, fondamentaux l'élément (ω', Ω'') et les ∞ éléments adhérents à ω ou à Ω.

Cherchons maintenant s'il existe des éléments fondamentaux non adhérents à un côté, ou à un sommet du triangle des coordonnées.

Des deux équations

$$0=r_1=x_2u_2-x_3u_3=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3$$

on tire, en omettant un facteur de proportionnalité,

$$(\mathrm{o})\qquad u_1=-2x_2x_3,\qquad u_2=x_1x_3,\qquad u_3=x_1x_2;$$

d'où

$$r_2=-2x_2\mathrm{A},\qquad \mathfrak{r}_2=-2x_2\mathfrak{A},$$
$$\varphi_3=\psi_2=4x_2^2\mathrm{A}\mathfrak{A}.$$

Pour que l'élément (x, u) soit fondamental, il faut que x soit :

Ou bien sur A, et alors les équations (o) montrent que u_i est proportionnel à A_i;

Ou bien sur $\mathfrak{A}$, et alors les équations (o) montrent que u_i est proportionnel à $\mathfrak{A}_i$.

Ainsi (x, u) adhère à A ou à $\mathfrak{A}$.

L'élément (ω', Ω'') cité plus haut comme fondamental adhère d'ailleurs aussi à A et à $\mathfrak{A}$. Ainsi :

THÉORÈME. — *Les éléments fondamentaux de π sont les ∞ éléments adhérents à A, $\mathfrak{A}$, ω ou Ω.*

51. Cherchons les facteurs fondamentaux de

$$\pi = \rho e \varpi e k' \varpi,$$

par la méthode déjà employée pour ξ.

On voit que la substitution

ρ introduit le facteur................	x_2			
ρe................................	u_3			
$\rho e \varpi$................................	x_1	x_2	u_3	
$\rho e \varpi e$................................	u_1	u_3	x_2	
$\rho e \varpi e k'$................................	u_1	u_3	x_2	
$\rho e \varpi e k' \varpi$ ou π......................	x_1	x_2	r_1	u_3

Les facteurs fondamentaux de π doivent donc être cherchés dans la suite

$$x_1, \quad x_2, \quad u_3, \quad r_1.$$

Pour $x_1 = 0$,

$$\varphi_1 = u_1 u_2, \qquad \varphi_2 = u_2^2, \qquad \varphi_3 = u_1^2 - 4K^2 u_2 u_3.$$
$$\psi_1 = \ldots, \qquad \ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Il y a donc ∞^2 points y et par suite ∞^2 éléments $\pi|(x, u)|$, (x, u) étant l'élément courant du connexe $x_1 = 0$. Le facteur x_1 n'est donc pas fondamental.

Au contraire, on vérifie, comme plus haut (49), que π transforme respectivement les ∞^2 éléments du connexe

$r_1 = 0$ en le seul élément focal (ω, Ω),

$x_2 = 0$ en les ∞ éléments adhérents à $\mathfrak{A}$.

$u_3 = 0$ » » A.

Ainsi :

Théorème. — *Les facteurs fondamentaux de π sont x_2, u_3 et r_1. Soit $P = 0$ l'équation d'un connexe irréductible. Pour qu'il se sépare de $\pi[P]$ les facteurs x_2, u_3, r_1 respectivement, il faut et il* *suffit que le connexe* $P = 0$ *contienne les* ∞ *éléments adhérents à* $\mathfrak{A}$, *les* ∞ *éléments adhérents à* A, *l'élément focal.*

Nous avons ainsi établi les divers résultats annoncés dans l'Introduction et réuni les données nécessaires pour la construction, dans un second Mémoire, des groupes crémoniens quadratiques et d'ordre fini.