JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. HUGONIOT

Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (seconde partie)

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 4 (1888), p. 153-167.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1888_4_4__153_0>

Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini (seconde Partie);

PAR H. HUGONIOT [1].

1. Dans la première Partie de ce Mémoire, j'ai étudié la propagation du mouvement dans un fluide indéfini en partant des équations de l'Hydrodynamique sous la forme qui leur a été donnée par Euler. Ces équations sont du premier ordre : c'est pourquoi on leur donne presque toujours la préférence sur celles qui ont été établies par Lagrange dans la Mécanique analytique, et qui sont du second ordre.

Les équations d'Euler présentent cependant un grave inconvénient : elles ne permettent en aucune façon de suivre la molécule fluide dans son mouvement, de sorte que, si l'on excepte les cas de régime permanent, leur intégration ne pourrait donner, sur la nature du mouvement, que des renseignements insuffisants.

En admettant que, dans le fluide considéré, il existait, entre la pression et la densité, une relation de la forme $\rho = F(p)$, on a trouvé, dans la première Partie de ce travail, pour expression analytique de la

[1] Ce Mémoire posthume, retrouvé dans les papiers laissés par M. Hugoniot, et dont la première Partie a été insérée dans le Volume précédent (t. III, p. 477), nous a été communiqué par M. Liouville. M. Léauté a bien voulu nous signaler l'erreur que nous avions commise en lui attribuant cette communication.

vitesse de propagation, la formule

$$\frac{dn}{dt} = \mathrm{N} \pm \sqrt{\frac{1}{\mathrm{F}'(p)}},$$

où N désigne la projection de la vitesse du fluide sur la normale à la surface de l'onde.

Mais il a été nécessaire de supposer que la fonction $\mathrm{F}(p)$ était la même pour tous les points du fluide, de sorte que l'on n'a pu traiter que le cas particulier où le fluide est homogène à l'instant initial. Quand il en est autrement, la fonction F dépend des coordonnées initiales; mais elle n'est pas déterminée pour chaque système de valeurs de x, y, z, de sorte que, l'équation $\rho = \mathrm{F}(p)$ ne pouvant être jointe aux quatre premières équations de l'Hydrodynamique, le nombre des fonctions inconnues se trouve supérieur à celui des équations.

Les équations de Lagrange font disparaître cette restriction; elles permettent ainsi de généraliser les résultats obtenus dans la première Partie du Mémoire; enfin elles conduisent à envisager d'une manière nouvelle le phénomène de la propagation du mouvement.

2. Je vais d'abord démontrer les équations de Lagrange en employant une méthode plus directe que celle dont leur auteur a fait usage.

Soient

x, y, z les coordonnées initiales d'une molécule du fluide;
D la densité initiale qui est fonction de x, y, z;
u, v, w les coordonnées de la molécule à l'instant t;
ρ la pression et p la densité à cet instant.

Il s'agit de déterminer les cinq fonctions inconnues u, v, w, ρ et p de x, y, z et t.

On obtient une première équation, dite *équation de continuité*, en exprimant que la densité d'un élément de masse est en raison inverse de son volume.

Considérons le parallélépipède élémentaire dont les arêtes sont, à l'instant initial, représentées par dx, dy, dz : le sommet ayant pour coordonnées initiales x, y, z est venu, à l'instant t, au point u, v, w; les trois sommets contigus ont alors pour coordonnées

$$\begin{array}{lll} u + \frac{\partial u}{\partial x}\,dx, & v + \frac{\partial v}{\partial x}\,dx, & w + \frac{\partial w}{\partial x}\,dx, \\ u + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy, & v + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy, & w + \frac{\partial w}{\partial y}\,dy, \\ u + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz, & v + \frac{\partial v}{\partial z}\,dz, & w + \frac{\partial w}{\partial z}\,dz. \end{array}$$

D'après un théorème bien connu sur la déformation d'un système de points, l'élément de volume qui affectait, à l'instant initial, la forme d'un parallélépipède constitue encore un parallélépipède à l'instant t. Son volume, primitivement égal à dx, dy, dz, est à l'instant t représenté par

$$dx\,dy\,dz \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \theta\,dx\,dy\,dz,$$

en représentant par θ le déterminant. Exprimant que la densité est en raison inverse du volume, on a

$$(1) \qquad \rho = \frac{D}{\theta},$$

ce qui constitue l'équation de continuité.

3. La conductibilité du fluide pour la chaleur est regardée comme négligeable; on suppose en outre que la vitesse d'une molécule ne subit jamais de variations brusques. Dans ces conditions, chaque élément de volume se détend en satisfaisant à la loi adiabatique, et il existe, entre sa pression et sa densité, une relation de la forme

$$(2) \qquad \rho = F(p),$$

la fonction F pouvant d'ailleurs varier avec x, y, z. Les équations (1) et (2), jointes aux trois équations du mouvement que l'on va déterminer plus loin, définissent les cinq fonctions inconnues ρ, p, u, v, w.

4. Lorsqu'à l'instant t on passe du point dont les coordonnées sont u, v, w au point dont les coordonnées sont $u + du$, $v + dv$, $w + dw$, les quantités x, y, z éprouvent des accroissements dx, dy, dz, liés aux précédents par les équations

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz, \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Le déterminant des seconds membres est précisément θ, de sorte que, en résolvant par rapport à dx, dy, dz, on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \theta\, dx &= du \frac{\partial\theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + dv \frac{\partial\theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + dw \frac{\partial\theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}, \\ \theta\, dy &= du \frac{\partial\theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + dv \frac{\partial\theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} + dw \frac{\partial\theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}, \\ \theta\, dz &= du \frac{\partial\theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} + dv \frac{\partial\theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} + dw \frac{\partial\theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}, \end{aligned}\right.$$

formules dont on trouvera plus loin l'application.

5. Considérons, à l'instant t, le parallélépipède élémentaire ayant son sommet au point u, v, w et dont les arêtes sont égales à du, dv, dw : sa masse est $\rho\, du\, dv\, dw$, et les composantes de sa vitesse sont $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$.

Désignant par X, Y et Z les composantes de la force extérieure, rapportée à l'unité de masse, l'équation du mouvement, projeté sur l'axe des x, est

$$\rho\, du\, dv\, dw \left(X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) + (p - p')\, dv\, dw = 0,$$

p désignant la pression au point u, v, w et p' ce que devient cette pression quand, v et w conservant la même valeur, u augmente de du. Les variations correspondantes de x, y, z sont, d'après (3),

$$dx = \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}du, \qquad dy = \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}du, \qquad dz = \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}du.$$

On a donc

$$p' = p + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\right)\frac{du}{\theta}.$$

On voit qu'on obtient les trois équations du mouvement sous la forme

$$(4)\quad \begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right) + \dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}} + \dfrac{\partial p}{\partial z}\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\right) = 0, \\[2ex] \rho\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right) + \dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}} + \dfrac{\partial p}{\partial z}\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\right) = 0, \\[2ex] \rho\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right) + \dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}} + \dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}} + \dfrac{\partial p}{\partial z}\dfrac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\right) = 0. \end{cases}$$

On peut aussi écrire ces équations de la manière suivante :

$$(5)\quad \begin{cases} \rho\left[\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial v}{\partial x} + \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\[2ex] \rho\left[\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial u}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial v}{\partial y} + \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right)\dfrac{\partial w}{\partial y}\right] + \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \\[2ex] \rho\left[\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right)\dfrac{\partial u}{\partial z} + \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right)\dfrac{\partial v}{\partial z} + \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right)\dfrac{\partial w}{\partial z}\right] + \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

La première équation (5) s'obtient en multipliant les trois équations (4) respectivement par $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial x}$, ajoutant et remarquant que

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}=0,$$

et de même pour les deux autres.

6. Les équations

$$\rho = \mathrm{F}(p), \qquad \rho = \frac{\mathrm{D}}{\theta}$$

permettent de ramener les équations (5) à un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre ne renfermant plus que trois fonctions inconnues.

On a en effet

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{d\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{\mathrm{D}}{\theta^2 \mathrm{F}'(p)}\frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

D'ailleurs

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x}=&\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\\ &+\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial z}\\ &+\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}.\end{aligned}$$

Il suffirait de substituer ces valeurs dans la première des équations (5) et d'y remplacer p par sa valeur en fonction de θ, puis d'opérer de la même manière sur les deux autres équations (5).

7. Je renvoie à la première Partie du Mémoire pour la définition de la vitesse de propagation d'un mouvement dans un autre. Si S représente la surface de l'onde à l'instant t, c'est-à-dire la surface qui, à cet instant t, sépare les deux mouvements compatibles, et si S_1 représente la surface de l'onde à l'instant $t + dt$, on mène la normale au point x, y, z de la surface S et l'on désigne par dn la portion de cette normale comprise entre S et S_1. Le rapport $\frac{dn}{dt}$ est la vitesse de propagation.

Mais la surface S peut être ici envisagée de deux manières différentes, soit comme le lieu de positions initiales des points simultanément atteints par les deux mouvements, soit comme le lieu de leurs positions actuelles. Dans le premier cas, l'équation de cette surface est une relation entre les coordonnées initiales x, y, z, dans le deuxième cas entre les coordonnées u, v, w. Il est clair que l'expression de la vitesse de propagation ne peut être la même dans les deux cas.

Pour éviter toute confusion, je continuerai à représenter par S la surface de l'onde, lieu des positions initiales des points atteints simultanément par les deux mouvements et je désignerai par S' la surface de l'onde, lieu de leurs positions à l'instant t. La vitesse de propagation relative à S sera $\frac{dn}{dt}$ et la vitesse de propagation relative à S' sera désignée par $\frac{dn'}{dt}$. Je calculerai d'abord la première de ces vitesses.

8. Les équations du mouvement étant supposées réduites, par la méthode du n° **6**, à un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre renfermant trois fonctions inconnues, u, v, w, soient $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ deux systèmes d'intégrales de ces équations représentant des mouvements compatibles. On suppose essentiellement que la continuité n'est pas troublée, de sorte que, tout le long de la surface de l'onde, les vitesses qui correspondent aux deux systèmes d'intégrales sont les mêmes. Posant donc

$$u_1 - u_2 = \mathrm{U}, \qquad v_1 - v_2 = \mathrm{V}, \qquad w_1 - w_2 = \mathrm{W},$$

on a, le long de la surface de l'onde, les équations

$$\mathrm{U} = 0, \qquad \mathrm{V} = 0, \qquad \mathrm{W} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} = 0.$$

Soient λ, μ, ν les cosinus directeurs de la normale au point x, y, z de la surface S; on a

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{\mu}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial U}{\partial z}}.$$

Différentiant d'ailleurs l'équation $U = 0$ le long de la normale, on trouve

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda\frac{\partial U}{\partial x} + \mu\frac{\partial U}{\partial y} + \nu\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0$$

ou, à cause des équations précédentes,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\lambda}\frac{dn}{dt}\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

Puisque $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, tout le long de la surface de l'onde, il faut qu'il en soit de même de $\frac{\partial U}{\partial x}$. On démontrerait de même que toutes les dérivées partielles de U, V, W sont nulles sur la surface de l'onde; de sorte qu'on a les douze équations

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial U}{\partial t} = 0, & \frac{\partial U}{\partial x} = 0, & \frac{\partial U}{\partial y} = 0, & \frac{\partial U}{\partial z} = 0; \\
\frac{\partial V}{\partial t} = 0, & \frac{\partial V}{\partial x} = 0, & \frac{\partial V}{\partial y} = 0, & \frac{\partial V}{\partial z} = 0; \\
\frac{\partial W}{\partial t} = 0, & \frac{\partial W}{\partial x} = 0, & \frac{\partial W}{\partial y} = 0, & \frac{\partial W}{\partial z} = 0.
\end{array}$$

9. Des équations précédentes, on en déduit d'autres qui doivent être satisfaites aussi en tous les points de la surface de l'onde. Je me bornerai à écrire celles qui concernent la fonction U. On a d'abord

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}} = \frac{\mu}{\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}},$$

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}} = \frac{\mu}{\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}},$$

$$\frac{\lambda}{\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}} = \frac{\mu}{\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z}} = \frac{\nu}{\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial t} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial t} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial t}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial t} + \frac{dn}{dt}\left(\lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = 0.$$

Des quatre dernières on tire

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right),$$

et l'on peut maintenant exprimer les dérivées secondes de U en fonction d'une seule d'entre elles, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} = \frac{\nu}{\lambda} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} = \frac{\mu\nu}{\lambda^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\mu^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\nu^2}{\lambda^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Il existe évidemment des relations analogues pour V et W.

10. Considérant la première des équations du mouvement, mise sous la forme

$$\theta F'(p)\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - X\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - Y\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - Z\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right] = \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

où l'on peut supposer $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ remplacé par son développement du n° **6**, et substituant successivement les deux systèmes d'intégrales u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2, puis faisant la différence, il reste, puisque les dérivées premières sont égales, de sorte qu'on peut continuer à les écrire sans indice,

$$\begin{aligned}
&\theta F'(p)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z}\\
&\qquad+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\\
&\qquad+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z};
\end{aligned}$$

et, en remplaçant toutes les dérivées secondes par leurs valeurs en fonction de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, il vient

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\theta F'(p)\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\\
&\quad=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial u}{\partial z}}\right)\\
&\qquad+\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial v}{\partial z}}\right)\\
&\qquad+\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\frac{\partial w}{\partial z}}\right).
\end{aligned}\right.$$

Les deux autres équations du mouvement conduisent à des équations toutes semblables; les seconds membres sont identiques à celui de l'équation (6), de sorte que l'on peut égaler les premiers membres; on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{\lambda}
&=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{\mu}\\
&=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{\lambda},
\end{aligned}$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$\frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}}{\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}}+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}}+\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}}}=\frac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}}{\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial x}}+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial y}}+\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial z}}}$$
$$=\frac{\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}}{\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial x}}+\mu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial y}}+\nu\dfrac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial z}}}.$$

Les équations précédentes, combinées avec l'équation (6), permettent d'en éliminer les dérivées secondes. Remarquant que la parenthèse du premier membre devient $\lambda\theta$ quand on remplace les dérivées secondes par les quantités proportionnelles, on obtient finalement

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)^2=\frac{1}{\theta^2 F'(p)}\left[\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial u}{\partial z}}\right)^2\right.$$
$$+\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial v}{\partial z}}\right)^2$$
$$\left.+\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial x}}+\mu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial y}}+\nu\frac{\partial\theta}{\partial\dfrac{\partial w}{\partial z}}\right)^2\right].$$

C'est l'expression cherchée de la vitesse de propagation. Elle dépend, comme on voit, des dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots,$ ainsi que la direction de la normale.

11. On arrive à des résultats bien différents en calculant la valeur $\frac{dn'}{dt}$ de la vitesse de propagation qui se rapporte à la surface de l'onde S', lieu des positions actuelles des points atteints à la fois par les deux mouvements.

Les douze équations du n° **8** sont satisfaites sur la surface de l'onde S'. Considérant, en particulier, l'équation $\frac{\partial U}{\partial x}=0$, et désignant par λ', μ',

ν' les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface S′, on a

$$(7) \qquad \lambda' \, du + \mu' \, dv + \nu' \, dw = 0,$$

du, dv, dw désignant les variations des coordonnées quand on se déplace infiniment peu sur la surface.

D'autre part, quand u, v, w augmentent de du, dv, dw, les coordonnées x, y, z subissent des variations données par les équations (3) du nº **4**. Exprimant que l'équation $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$ continue à avoir lieu quand on passe du point considéré sur la surface S′ au point infiniment voisin, on a

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\left(du \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} + dv \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} + dw \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y}\left(du \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} + dv \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} + dw \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial z}\left(du \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} + dv \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} + dw \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'équation (8) doit être identique à l'équation (7); les coefficients de du, dv, dw sont donc proportionnels; ainsi

$$\begin{aligned} &\frac{\lambda'}{\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial y}} \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial u}{\partial z}} \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial z}} \\ &= \frac{\mu'}{\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial x}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial y}} \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial v}{\partial z}} \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial z}} \\ &= \frac{\nu'}{\frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial x}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial y}} \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial \frac{\partial w}{\partial z}} \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial z}}, \end{aligned}$$

ou, à cause des relations du n° **9**,

$$\frac{\lambda'}{\lambda \dfrac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}} + \mu \dfrac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}} + \nu \dfrac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}}} = \frac{\mu'}{\lambda \dfrac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial x}} + \mu \dfrac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial y}} + \nu \dfrac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial z}}}$$

$$= \frac{\nu'}{\lambda \dfrac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial x}} + \mu \dfrac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial y}} + \nu \dfrac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial z}}}.$$

Posant, pour abréger,

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}} + \nu \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}} = A,$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial x}} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial y}} + \nu \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial z}} = B,$$

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial x}} + \mu \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial y}} + \nu \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial z}} = C,$$

les relations précédentes deviennent

$$\frac{\lambda'}{A} = \frac{\mu'}{B} = \frac{\nu'}{C}.$$

12. Si l'on considère l'équation $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, qui est satisfaite en un point de la surface S', il est visible que cette équation est encore satisfaite quand u augmente de $\lambda' dn'$, v de $\mu' dn'$ et w de $\nu' dn'$, et qu'en même temps t augmente de dt. On a donc, en tenant compte des relations (3) du n° **4**,

$$0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{dn'}{dt} \left[\lambda' \left(\frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial x}} \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial y}} \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial u}{\partial z}} \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial t} \right) \right.$$

$$+ \mu' \left(\frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial x}} \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial y}} \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial v}{\partial z}} \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial t} \right)$$

$$\left. + \nu' \left(\frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial x}} \frac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial y}} \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial t} + \frac{\partial \theta}{\partial \dfrac{\partial w}{\partial z}} \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial t} \right) \right] = 0.$$

Mais

$$\frac{\lambda}{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}} = \frac{\mu}{\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial t}} = \frac{\nu}{\dfrac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial t}}$$

et l'équation précédente peut s'écrire

$$\theta\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{1}{\lambda}\frac{dn'}{dt}(\lambda' A + \mu' B + \nu' C)\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} = 0.$$

On trouverait de même

$$\theta\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t} + \frac{1}{\lambda}\frac{dn'}{dt}(\lambda' A + \mu' B + \nu' C)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0,$$

et l'élimination de $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}$ donne

$$\theta^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2(\lambda' A + \mu' B + \nu' C)^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

D'autre part, on a trouvé au n° **9**

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dn}{dt}\right)^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^3}.$$

La comparaison de ces équations donne

$$\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2 = \frac{\theta^2\left(\dfrac{dn}{dt}\right)^2}{(\lambda' A + \mu' B + \nu' C)^2}.$$

Mais on a

$$\frac{\lambda'}{A} = \frac{\mu'}{B} = \frac{\nu'}{C} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\lambda' A}{A^2} = \frac{\mu' B}{B^2} = \frac{\nu' C}{C^2} = \frac{\lambda' A + \mu' B + \nu' C}{A^2+B^2+C^2};$$

d'où l'on déduit

$$(\lambda' A + \mu' B + \nu' C)^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

Donc

$$\left(\frac{dn'}{dt}\right)^2 = \frac{\theta^2\left(\frac{dn}{dt}\right)^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

Or on a trouvé au n° **10**

$$\left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2 F'(p)}(A^2+B^2+C^2),$$

et l'on obtient finalement, pour la vitesse de propagation,

$$\frac{dn'}{dt} = \pm\sqrt{\frac{1}{F'(p)}} = \pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}},$$

valeur identique à celle qui a été obtenue dans la première Partie du Mémoire, quand on rapportait la vitesse de propagation au fluide lui-même et non à des coordonnées fixes.