JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

K. WEIERSTRASS

Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 2 (1886), p. 115-138.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1886_4_2__115_0>

Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle;

Par M. K. WEIERSTRASS.

Traduit par M. Léonce Laugel.

Désignons par $f(x)$, comme dans la Communication lue à l'Académie le 9 juillet de cette année, une fonction définie pour toutes les valeurs réelles de la variable x, uniforme, réelle et continue et dont la valeur absolue ait une limite supérieure finie G. Soit ensuite $\psi(x)$ une fonction transcendante entière à l'égard de laquelle nous nous contenterons d'abord de supposer qu'elle soit réelle pour toute valeur réelle de x, et qu'elle satisfasse à la condition

$$\psi(-x) = \psi(x).$$

Soient encore u et v des variables réelles indépendantes l'une de l'autre, et posons

$$\sqrt{\psi(u+vi)\,\psi(u-vi)} = \psi(u, v),$$

où l'on choisira pour la détermination du radical carré sa valeur positive; alors la valeur absolue de $\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}$ est égale à 1, et l'on a, par conséquent, a et b étant des grandeurs réelles,

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_a^b f(u)\psi(u+vi)\,du &= \int_a^b f(u)\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}\psi(u,v)\,du \\ &= \varepsilon G\int_a^b \psi(u,v)\,du, \end{aligned} \right.$$

ε désignant une grandeur complexe dont la valeur absolue est inférieure à 1.

Supposant alors que $\psi(x)$ soit une fonction de telle nature que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \psi(u,v)\,du$$

conserve une valeur finie pour toute valeur finie de v, on voit que

$$a_1,\quad a_2,\quad b_1,\quad b_2,\qquad (b_1 > a_1,\ b_2 > a_2)$$

étant des grandeurs positives, les intégrales

$$\int_{a_2}^{b_2} \psi(u,v)\,du,\quad \int_{-b_1}^{-a_1} \psi(u,v)\,du,$$

dont la seconde [puisque $\psi(-u,v) = \psi(u,v)$] est égale à

$$\int_{a_1}^{b_1} \psi(u,v)\,du,$$

deviennent infiniment petites lorsque a_1, b_1 deviennent infiniment grands. Ceci est encore vrai, en vertu de la précédente équation, des intégrales

$$\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\psi(u+vi)\,du,\quad \int_{a_2}^{b_2} f(u)\psi(u+vi)\,du,$$

et par conséquent l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi(u+vi)\,du$$

a une valeur finie et déterminée pour chaque valeur de v.

Je vais maintenant supposer en outre que l'intégrale

$$\int_{a_2}^{\infty} \psi(u, v)\, du,$$

lorsque a_2 devient infiniment grand, converge uniformément vers la limite o, pour toutes les valeurs de v dont la valeur absolue ne surpasse pas une limite fixée quelconque; alors, en vertu de l'équation (1), il en est de même de l'intégrale

$$\int_{a_2}^{+\infty} f(u)\, \psi(u + vi)\, du$$

et, lorsque a_1 devient infiniment grand, de

$$\int_{-\infty}^{-a_1} f(u)\, \psi(u + vi)\, du.$$

On peut donc, si V, g sont des grandeurs positives données, dont la première peut devenir aussi grande, la seconde aussi petite que l'on veut, déterminer deux grandeurs positives a_1 et a_2, telles que la valeur absolue de la différence

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi(u + vi)\, du - \int_{-a_1}^{a_2} f(u)\, \psi(u + vi)\, du$$

soit, pour toutes les valeurs de v, définie par la condition

$$-\mathrm{V} \leqq v \leqq \mathrm{V}$$

plus petite que g.

Soit maintenant $x = \xi + \xi' i$ une variable complexe et désignons, comme dans la première Communication, par k une constante positive, et par ω l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi(u)\, du$; alors, en vertu de ce qui précède, l'intégrale

$$\frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + ku)\, \psi\left(u - \frac{\xi' i}{k}\right) du = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u - x}{k}\right) du$$

est une grandeur finie uniforme pour toute valeur finie de x, que dans le Mémoire précité nous avons désignée par $F(x, k)$.

Il s'agit maintenant de faire voir que $F(x, k)$ est une fonction entière (transcendante) de la variable x.

Si l'on assigne à la valeur absolue de x une limite supérieure r, on peut, en prenant deux grandeurs positives g', g'' aussi petites que l'on voudra, en déterminer deux autres (a_1, a_2) telles que la somme

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-a_1} f(\xi + ku)\psi\left(u - \frac{\xi' i}{k}\right)du + \frac{1}{2\omega}\int_{a_2}^{\infty} f(\xi + ku)\psi\left(u - \frac{\xi' i}{k}\right)du$$

soit plus petite que g' pour toutes les valeurs de ξ et ξ', satisfaisant à la condition

$$\xi^2 + \xi'^2 \leqq r'^2.$$

Alors on a

$$F(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \varepsilon' g',$$

ε' désignant une grandeur dont la valeur absolue est plus petite que 1.

L'intégrale du second membre peut être développée en une série $\mathfrak{P}(x)$ constamment convergente, et en désignant par $G^{(n)}(x)$ la somme des n premiers termes de $\frac{1}{2k\omega}\mathfrak{P}(x)$, on peut prendre n suffisamment grand pour avoir

$$|F(x, k) - G^{(n)}(x)| < g' + g''$$

pour toutes les valeurs de x satisfaisant à la condition

$$|x| \leqq r.$$

Cela posé, on peut ensuite, à l'aide des considérations employées précédemment pour établir le théorème (C), faire voir que $F(x, k)$ est représentable sous la forme d'une série infinie dont les termes sont des fonctions rationnelles de x, et que cette série converge uniformément pour toutes les valeurs de x situées dans une région finie quelconque.

A cet effet, on prendra deux suites de grandeurs positives

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \ldots,$$
$$g_1, \quad g_2, \quad g_3, \quad \ldots$$

telles que $\lim\limits_{n=\infty} r_n = \infty$, et que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ ait une valeur finie; puis on déterminera une suite de fonctions entières rationnelles $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., de manière que, pour toutes les valeurs de x satisfaisant à la condition $|x| \leqq r$, on ait

$$(2) \qquad | F(x, k) + G_\nu(x) | < g_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty),$$

et l'on posera

$$(4) \qquad f_0(x) = G_1(x), \qquad f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x);$$

alors

$$(5) \qquad F(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} f_\nu(x).$$

Mais, en vertu d'un théorème dont j'ai donné autrefois (*Monatsberichte der Akademie aus dem Jahre*, 1880, p. 723) la démonstration d'une manière élémentaire, on peut, en s'appuyant sur ce que la série du second membre de l'équation (5) converge uniformément dans toute région finie, la transformer en une série de puissances $\mathfrak{P}(x)$ convergente pour toute valeur finie de x.

Si l'on prend

$$\psi(x) = e^{-x^2},$$

on aura

$$\psi(u, v) = e^{-u^2+v^2},$$

et cette fonction jouit de la propriété énoncée plus haut. Il en est encore de même si l'on pose

$$\psi(x) = e^{-(c_1x^2+c_2x^4+\ldots+c_\rho x^{2\rho})},$$

la constante c_ρ ayant une valeur positive, tandis que les $c_1, c_2, \ldots, c_{\rho-1}$ peuvent avoir des valeurs réelles quelconques.

Il existe donc effectivement, comme nous l'avons énoncé en établissant le théorème (A) de notre première Communication, une infinité de fonctions $\psi(x)$ de telle nature que les fonctions $F(x, k)$ qui s'y rattachent soient des fonctions transcendantes entières.

Soit maintenant $F(x, k)$ une fonction quelconque déterminée de cette nature; la série $\mathfrak{P}(x)$, qui peut la représenter, est transformable en une série procédant suivant des fonctions *sphériques* convergente pour toute valeur finie de x. En effet, en vertu du théorème connu de M. C. Neumann sur le développement d'une fonction analytique uniforme d'une variable complexe x, procédant suivant des fonctions sphériques de première espèce, on voit de suite que toute fonction (transcendante ou rationnelle) entière $G(x)$ est représentable par une série convergente pour toute valeur finie de la variable x et de la forme

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} C_\nu P^{(\nu)}(x) \quad (^1).$$

(1) On peut le démontrer, du reste, comme il suit. D'après la définition des fonctions sphériques, on a

$$|P^{(n)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2 - 1}|^n,$$

lorsqu'on détermine $\sqrt{x^2 - 1}$, en sorte que l'on ait

$$|x + \sqrt{x^2 - 1}| \geqq 1.$$

On a, de plus,

$$x^n = c_{n,0} P^{(n)}(x) + c_{n,1} P^{(n-2)}(x) + \ldots,$$

et, par suite, lorsque $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$ est une série constamment convergente, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_n \sum_\nu A_n c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x),$$

mais les $c_{n,\nu}$ sont des grandeurs positives, et $\sum_\nu c_{n,\nu} = 1$, d'où

$$\sum_\nu |c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2 - 1}|^n;$$

Les coefficients de cette série sont tels que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |C_\nu| r^\nu$$

ait une valeur finie pour chaque valeur positive de r.

En outre, la série est uniformément convergente pour toutes les valeurs de x situées dans une région finie [*voir* le Mémoire de M. Thomé : *Sur les séries procédant suivant des fonctions sphériques* (*Journal de Borchardt*, t. 66, p. 337)].

Cette dernière propriété de la série donne

$$\int_{-1}^{+1} G(x') P^{(n)}(x') dx' = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \int_{-1}^{+1} P^{(n)}(x') P^\nu(x') dx',$$

x' désignant une variable réelle; d'où l'on tire

$$C_\mu = \frac{2\mu+1}{2} \int_{-1}^{+1} G(x') P^{(n)}(x') dx' \quad (\mu = 0, 1, \ldots, \infty).$$

Pour la fonction $F(x, k)$, on a, par conséquent,

$$\begin{aligned} C_\nu &= \frac{2\nu+1}{2} \frac{1}{2k\omega} \int_{-1}^{+1} P^{(\nu)}(x') dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du \\ &= \frac{2\nu+1}{4\omega} \int_{-1}^{+1} P^{(\nu)}(x') dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku) \psi(u) du; \end{aligned}$$

---

d'où il suit que $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu} | A_n c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x) |$ est une grandeur finie, et qu'en posant (pour $\mu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$)

$$C_\mu = \sum_{n,\nu} c_{n,\nu} A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu+2\nu,\nu} A_{\mu+2\nu} \qquad (n - 2\nu = \mu),$$

on obtient l'équation

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu P^{(\mu)}(x).$$

d'où, en posant

$$\frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x'+u)\,P^{(\nu)}(x')\,dx' = f_\nu(u),$$

il vient

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du.$$

La fonction $f_\nu(u)$ est, ainsi que $f(u)$, une fonction partout continue dont la valeur absolue peut, au plus, devenir égale à $(2\nu+1)G$, car la valeur absolue de la fonction sphérique $P^\nu(x')$ ne peut surpasser 1 pour les valeurs de x' comprises dans l'intervalle $(-1 + \ldots + 1)$; mais, lorsque a est une grandeur quelconque positive, on a

$$\begin{aligned} C_\nu = {} & \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \\ & + \frac{1}{2\omega}\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \\ & + \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du; \end{aligned}$$

d'ailleurs,

$$\int_{a}^{\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \lesseqgtr (2\nu+1)G\int_{a}^{\infty} \psi(u)\,du,$$

$$\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \lesseqgtr (2\nu+1)G\int_{-\infty}^{-a} \psi(u)\,du.$$

Si donc k devient infiniment petit, on obtient

$$\lim_{k=0} C_\nu = f_\nu(0)\,\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a} \psi(u)\,du + \ldots,$$

les termes omis devenant infiniment petits lorsque a devient infiniment grand.

Comme on peut prendre a aussi grand qu'on veut, il vient

$$\lim_{k=0} C_\nu = f_\nu(0) = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,P^{(\nu)}(x)\,dx.$$

Posant

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(uk)\psi(u)\,du = \Phi_\nu(k)$$

et désignant par δ une petite grandeur réelle, on a

$$\Phi_\nu(k+\delta) - \Phi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a} [f_\nu(ku+\delta u) - f_\nu(ku)]\,\psi(u)\,du + \ldots,$$

les termes omis dans le second membre devenant aussi petits qu'on voudra lorsqu'on fait a suffisamment grand. Soit donc δ_1 une grandeur donnée aussi petite qu'on veut; on peut donner à a une valeur déterminée, telle que la valeur absolue de

$$\Phi_\nu(k+\delta) - \Phi_\nu(k) - \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a} [f_\nu(ku+\delta u) - f_\nu(ku)]\,\psi(u)\,du$$

soit plus petite que δ_1, et cela pour toute valeur de k, δ.

On peut ensuite, en prenant une seconde grandeur δ_2 qui peut devenir aussi petite que l'on voudra, assigner à δ, en valeur absolue, une limite supérieure δ', en sorte que

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} [f_\nu(ku+\delta u) - f_\nu(ku)]\,\psi(u)\,du,$$

soit en valeur absolue plus petit que δ_2 et par conséquent que

$$|\,\Phi_\nu(k+\delta) - \Phi_\nu(k)\,| < \delta_1 + \delta_2,$$

lorsque l'on a

$$|\,\delta\,| < \delta';$$

par conséquent $\Phi_\nu(k)$ est une fonction continue de k.

On a ainsi démontré ce théorème :

Soit $\psi(x)$ une fonction de la nature considérée et soit

$$F(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

on aura, pour toute valeur finie de la variable complexe x,

$$F(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_\nu(k) P^{(\nu)}(x), \tag{6}$$

lorsqu'on aura posé

$$\left\{ \begin{aligned} f_\nu(u) &= \frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x'+u) P^\nu(x') dx, \\ \Phi_\nu(k) &= \frac{1}{2\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku) \psi(u) du, \end{aligned} \right. \tag{7}$$

et les $\Phi_\nu(k)$ sont des fonctions continues de k.

Revenons au cas où x désigne une variable réelle et où l'on a

$$f(x) = \lim_{k=0} F(x, k).$$

Si la variation de x est restreinte à l'intervalle

$$-a \leqq x \leqq a,$$

a étant une grandeur positive quelconque, on peut, en prenant une grandeur positive g', aussi petite que l'on voudra, donner au paramètre k une valeur déterminée k' pour laquelle on ait

$$| f(x) - F(x, k') | < g'.$$

Désignant ensuite par R la plus grande valeur que puisse prendre en valeur absolue la grandeur

$$\sqrt{x^2 - 1} + x,$$

pour les valeurs considérées de x, on a

$$R = \left\{ \begin{aligned} 1 \text{ pour } a \leqq 1, \\ a + \sqrt{a^2 - 1} \text{ pour } a > 1; \end{aligned} \right.$$

on a donc, comme on l'a déjà remarqué,

$$| P^{\nu}(x) | \leqq R^{\nu}.$$

Or la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | \Phi_{\nu}(k') | R^{\nu}$$

a une valeur finie; il est donc toujours possible, en prenant une deuxième grandeur positive g'', de déterminer un entier positif n, tel que la valeur absolue de

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Phi_{\nu}(k') P^{\nu}(x)$$

soit plus petite que g''.

Posant alors

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Phi_{\nu}(k) P^{(\nu)}(x), \tag{8}$$

on a

$$| f(x) - G^{(n)}(x, k') | < g' + g'',$$

ce qui permet d'exprimer le théorème (B) de ma première Communication sous la forme suivante :

Soient a, g des grandeurs positives dont la première peut devenir aussi grande, la seconde aussi petite que l'on voudra, il sera toujours possible d'assigner, dans l'expression $G^{(n)}(x, k)$ *définie par la précédente équation, laquelle est une fonction rationnelle entière de degré n en x, au paramètre k et au nombre n des valeurs telles que pour toutes les valeurs de x, appartenant à l'intervalle*

$$(-a + \ldots + a),$$

la différence entre

$$f(x) \quad \text{et} \quad G^{(n)}(x, k)$$

soit $< g$ en valeur absolue.

L'expression précédemment développée de la fonction $F(x, k)$ a cet avantage essentiel sur l'expression en forme de série de puissances, que les coefficients de la première [les $\Phi_\nu(k)$] se présentent sous un aspect qui fait immédiatement reconnaître qu'ils sont des fonctions continues de k et que chacun d'eux a une limite que sa valeur absolue ne peut surpasser, quelle que soit la valeur de k, tandis qu'en même temps, pour toute valeur déterminée de k, on a toujours

$$\lim_{\nu=\infty} \Phi_\nu(k) = 0.$$

Nous avons donc ainsi triomphé de la difficulté qui se présente, comme on l'a vu dans ma première Communication, lorsqu'on définit la fonction $G(x)$ comme elle l'a été d'abord dans le théorème (B).

Nous avons jusqu'ici supposé, à l'égard de la fonction $f(x)$, que sa valeur absolue avait une limite supérieure finie. On peut s'affranchir de cette restriction lorsque l'on se propose seulement de déterminer une fonction entière rationnelle $G(x)$ qui, dans un intervalle donné $(x_1, \ldots, x_2)$, diffère assez peu de la fonction $f(x)$ pour que la valeur absolue de la différence

$$f(x) - G(x)$$

soit, pour chaque valeur de x considérée, inférieure à une limite quelconque assignée g.

En effet, définissons une fonction $f_1(x)$ de manière à avoir

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_1) \quad \text{quand} \quad x < x_1, \\ f_1(x) &= f(x) \quad \text{quand} \quad x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ f_1(x) &= f(x_2) \quad \text{quand} \quad x > x_2; \end{aligned}$$

$f_1(x)$ est alors de même nature que $f(x)$ considérée précédemment et l'on peut déterminer une fonction $G(x)$ qui, pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$, satisfasse à la condition

$$| f_1(x) - G(x) | < g;$$

d'où

$$| f(x) - G(x) | < g.$$

Or la seule hypothèse faite sur la fonction $f(x)$, dans la démonstration du théorème C de notre première Communication, est qu'il est possible, en prenant deux grandeurs quelconques positives a_ν, g_ν, de former une fonction entière rationnelle $G(x)$ pour laquelle on ait

$$| f(x) - G_\nu(x) | < g$$

(quand $-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu$).

Le théorème dont il s'agit est donc valable sans modification lorsque la fonction $f(x)$ est choisie de sorte qu'elle ait, pour toute valeur réelle finie de x, une valeur réelle finie déterminée et variant avec x d'une manière continue.

Il reste à voir maintenant les modifications qu'il y a lieu d'apporter aux théorèmes établis précédemment lorsque l'on n'impose plus à $f(x)$ la condition d'être une fonction partout continue. C'est la recherche que j'entreprendrai dans un Travail suivant.

On étendra aussi aux fonctions uniformes de plusieurs arguments réels cette étude, qui ne présente aucune difficulté lorsqu'il s'agit de fonctions partout continues.

Je vais maintenant prendre pour $f(x)$ une fonction périodique, c'est-à-dire une fonction qui ne change pas de valeur lorsqu'on augmente son argument d'une grandeur positive déterminée $2c$.

Dans ce cas, la fonction $F(x, k)$ correspondante peut être représentée sous la forme d'une série de Fourier convergente pour toute valeur complexe de x, et dont les coefficients sont des fonctions continues de la grandeur k.

L'équation (1) précédente donne

$$F(x + 2c, k) = F(x, k).$$

Si donc, en désignant par z une nouvelle variable complexe, on pose

$$\overline{F}(z) = F\left(\frac{c}{\pi i} \log z, k\right),$$

on voit que $\overline{F}(z)$ est une fonction analytique de z qui, dans tout le champ de variation de cette grandeur, ne présente que deux points critiques o et ∞, et que, par conséquent, elle est développable en une série constamment convergente de la forme

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu z^\nu.$$

Posons

$$z = e^{\frac{\pi x}{c} i},$$

on aura

$$\overline{F}(z) = F(z, k)$$

et, par suite,

$$F(x, k) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu e^{\frac{\nu \pi x}{c} i}$$

pour toute valeur finie de z.

Or ce développement de $F(x, k)$ converge uniformément dans tout domaine fini de la variable x; par conséquent, si l'on désigne encore par x' une variable réelle et par n un entier, on aura

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x', k) e^{\frac{-n x' \pi i}{c}} dx' = \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}\int_{-c}^{c} e^{\frac{(\nu-n)\pi x'}{c} i} dx' = C_n.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
2cC_n &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-c}^{c} e^{\frac{-n\pi x'}{c} i} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du \\
&= \frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{c} e^{\frac{-n\pi x'}{c} i} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\psi(u)\, du \\
&= \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) e^{\frac{-nku\pi i}{c}} du \int_{-c}^{c} f(x'+ku) e^{\frac{-n\pi}{c}(x'+ku) i} dx'.
\end{aligned}$$

Mais on a, en posant

$$f_1(x') = f(x') e^{\frac{-n\pi x'}{c} i}$$

et désignant par x_0 une grandeur indépendante de x',

$$\begin{aligned}\int_{-c}^{c} f_1(x')\,dx' &= \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x')\,dx' + \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\,dx' \\ &= \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\,dx' + \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x'+2c)\,dx' \\ &= \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\,dx' + \int_{c}^{x_0+c} f_1(x')\,dx' \\ &= \int_{x_0-c}^{x_0+c} f_1(x')\,dx' + \int_{-c}^{c} f_1(x'+x_0)\,dx'.\end{aligned}$$

On a donc

$$\int_{-c}^{c} f(x'+ku)e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku)i}\,dx' = \int_{-c}^{c} f(x')e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\,dx',$$

et par suite, si, v désignant une grandeur réelle quelconque, on pose

$$(9)\qquad \Phi(v) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u)e^{-uvi}\,du = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\infty}\psi(u)\cos(vu)\,du,$$

il vient

$$(10)\qquad C_n = \Phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\int_{-c}^{c}\frac{1}{2c}f(x')e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\,dx'.$$

Posant alors

$$(11)\qquad \begin{cases} A_n = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{-c}^{c} f(x')\cos\frac{n\pi}{c}x'\,dx', \\ A'_n = \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{-c}^{c} f(x')\sin\frac{n\pi}{c}x'\,dx', \end{cases}$$

on a

$$(12)\qquad C_n = (A_n - iA'_n)\,\Phi\left(\frac{n\pi k}{c}\right),$$

d'où

$$(13)\qquad F(x,k) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right)\left(A_n\cos\frac{n\pi}{c}x + A'_n\sin\frac{n\pi}{c}x\right).$$

D'après la formule précédente, $\Phi(v)$ est une fonction continue de v qui, pour $v = 0$, prend pour valeur 1.

Si, dans l'expression du second membre de la dernière équation, on fait $k = 0$, elle se réduit à

$$A_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{c}x + A'_n \sin\frac{n\pi}{c}x\right),$$

c'est-à-dire qu'elle prend la forme suivant laquelle est développable, d'après le théorème de Fourier, la fonction $f(x)$ en général (c'est-à-dire lorsqu'on fait abstraction de certaines fonctions spéciales qui n'ont pas encore été jusqu'ici suffisamment définies).

Mais il existe effectivement des fonctions $f(x)$ (M. du Bois-Reymond en a donné le premier un exemple) qui, pour certaines valeurs de x, lesquelles peuvent se rencontrer en nombre infini dans chaque intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$ aussi petit qu'on voudra, ne peuvent être représentées par la dernière série, et ceci nous prouve que, pour déterminer la limite vers laquelle converge la série du second membre de l'équation (13) lorsque k devient infiniment petit, on n'a pas inconditionnellement toujours le droit de poser $k = 0$ dans chaque terme de la série.

La série

$$\sum_{=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

est convergente, comme on l'a vu, pour toute valeur de z, à l'exception des deux valeurs 0 et ∞. La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

converge donc pour toute valeur finie de z.

Prenant alors, par exemple,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{c}x\right),$$

on aura

$$A_n = \frac{1}{n^2} A'_n = 0$$

et, par suite,

$$C_n = \frac{1}{n^2} \Phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right);$$

il s'ensuit que la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \Phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) z^n$$

est elle-même convergente pour toute valeur finie de z.

Dès lors, si l'on pose

$$(14) \qquad \chi(x, v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Phi(nv) e^{nxi},$$

cette expression, ainsi définie pour toute valeur finie complexe de x et pour toute valeur réelle de v, est une fonction analytique uniforme et qui, puisque $\Phi(-v) = \Phi(v)$, satisfait à la formule

$$(15) \qquad \chi(x, v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \Phi(nv) \cos nx = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(nv) \cos nx,$$

et l'on peut alors exprimer la fonction $F(x, k)$ sous la forme qui suit

$$(16) \qquad F(x, k) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, \frac{k\pi}{c}\right) dx'.$$

Soient de nouveau g', g'' des grandeurs données positives, aussi petites qu'on voudra, et k' une valeur déterminée de k fixée, de telle sorte que

$$|f(x) - F(x, k')|$$

soit, pour chaque valeur réelle de x, plus petit que g' : si l'on détermine alors un entier positif n, tel que la valeur absolue de

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\frac{\nu\pi}{c} x + A'_\nu \sin\frac{\nu\pi}{c} x\right)$$

soit pour toute valeur réelle de x plus petite que g'', et si l'on pose

$$(17)\quad f(x) = A_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \Phi\left(\frac{\nu k'\pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\frac{\nu\pi}{c}x + A'_\nu \sin\frac{\nu\pi}{c}x\right) + R_n,$$

la valeur absolue de R_n reste toujours plus petite que $g' + g''$.

D'où le théorème (D) :

Soit $f(x)$ une fonction définie, pour toute valeur réelle de x, uniforme et toujours continue à période réelle; on peut, en choisissant une grandeur positive g aussi petite que l'on voudra, la représenter d'une foule de manières par une série de Fourier finie *qui approche assez près de la fonction $f(x)$ pour que la différence entre les deux fonctions ne soit jamais pour aucune valeur de x plus grande que g.*

A l'aide de ce théorème, ainsi que des considérations employées pour établir le théorème (C), lorsque, par les fonctions dont il est question, $G_1(x)$, $G_2(x)$, ..., on entend des séries finies de Fourier ayant même période primitive que $f(x)$, on obtient le théorème suivant (E) :

Toute fonction $f(x)$ de la nature de celles considérées dans (D), *à période primitive $2c$, peut être représentée sous la forme d'une somme dont les termes sont tous des séries* finies *de Fourier à période $2c$.*

Ces séries convergent absolument *pour toute valeur finie de x et* uniformément *dans tout intervalle fini.*

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple simple, je prends

$$\psi(x) = e^{-x^2}.$$

Alors $2\omega = \sqrt{\pi}$ et

$$\Phi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-uvi}\,du = \frac{e^{-\frac{v^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u+\frac{vi}{2}\right)^2}du = e^{-\frac{v^2}{4}},$$

ce qui donne

$$(18) \qquad \chi(x, v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos\nu x,$$

et, si l'on pose

$$(19) \qquad q = e^{-\frac{v^2}{4}},$$

on a

$$(20) \qquad \chi(x, v) = \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, q\right),$$

$\vartheta_3(x, q)$ désignant la fonction de Jacobi

$$1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots;$$

on a donc

$$(21) \qquad F(x, k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\,\vartheta_3\left(\frac{x-x'}{2c}\pi, q\right)dx',$$

où

$$q = e^{-\frac{k^2\pi^2}{4c^2}}.$$

La formule du second membre de cette équation se trouve déjà dans Fourier (*Théorie analytique de la chaleur*, Chap. X).

Pour obtenir l'état thermique à un instant quelconque d'un anneau homogène infiniment mince, de longueur $2c$, qui ne rayonne pas de chaleur, lorsque ledit état est connu à un moment quelconque, il s'agit de déterminer une fonction Φ de deux variables réelles x et t, qui satisfasse à l'équation différentielle

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

dans laquelle μ désigne une constante positive, qui, considérée comme fonction de x, possède la période $2c$ et qui, pour $t = 0$, soit égale, dans l'intervalle

$$-c \leqq x \leqq c,$$

à une fonction arbitraire donnée $F(x)$, à laquelle on impose les seules conditions qu'elle soit continue et que $F(-c) = F(c)$.

Fourier trouve, pour expression de la fonction Φ ainsi définie,

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c} F(x')e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx' \\ &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x')\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx', \end{aligned}\right.$$

d'où

$$(23)\qquad \Phi = F(x, k),$$

lorsque la fonction $f(x)$ est prise de telle sorte qu'elle coïncide avec $F(x)$ dans l'intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$ et quand on prend

$$(24)\qquad k = 2\sqrt{\mu t}.$$

Pour démontrer que, pour $t = 0$, la fonction Φ est égale à $F(x)$ dans l'intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$, Fourier pose, dans chaque terme de son expression, $t = 0$; ce qui lui donne la série

$$\frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c} F(x')\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx',$$

dont il admet qu'elle représente toujours la fonction $F(x)$ dans l'intervalle donné.

Il est digne de remarque que, malgré les objections qui peuvent être faites aux procédés de Fourier, l'expression trouvée pour Φ est valable sans aucune exception. En effet, comme on l'a fait voir, on peut la transformer en $F(x, 2\sqrt{\mu t})$, ce qui nous donne, sans qu'il soit nécessaire de recourir au théorème de Fourier,

$$\lim_{t=0}\Phi = F(x).$$

Ensuite ses termes pris isolément satisfont à l'équation différentielle

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2},$$

et par conséquent Φ y satisfait également, parce qu'en effet la série dont il s'agit est une fonction analytique uniforme de x et de t, lorsqu'on impose à la grandeur t la condition d'avoir sa partie réelle positive et parce qu'en outre la série converge uniformément dans chaque domaine fini des grandeurs x et t.

Enfin la série ne change pas de valeur lorsqu'on y met $x + 2c$ à la place de x, et elle satisfait donc à toutes les conditions imposées à la fonction qu'elle doit représenter.

C'est une chose bien digne de remarque que, dans un problème de Physique mathématique où nous cherchons une fonction de deux variables qui, par leur nature physique même, ne peuvent évidemment avoir que des valeurs réelles, fonction qui, pour une valeur déterminée de l'un de ses arguments, doit devenir égale à une fonction arbitraire donnée de l'autre, nous obtenions pour cette fonction une expression qui se trouve être une fonction analytique de ces variables et qui, par suite, a encore un sens pour des valeurs complexes de ces dernières.

Désignons maintenant par n un entier positif et posons

$$\chi(x, v)_n = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos\nu x;$$

on tire de l'équation (18)

$$\chi(x, v) = \chi(x, v)_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos\nu x.$$

Pour les valeurs réelles de x, la valeur absolue du second terme du second membre de cette dernière équation, terme que nous appellerons R_n, n'est jamais supérieure à

$$2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2+2n\nu+\nu^2}{4} v^2},$$

d'où

$$R_n < e^{-\frac{n^2+2n}{4} v^2}\, 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}}.$$

Posons alors, dans l'équation connue,

$$1+2\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} e^{-\nu^2\tau\pi} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(1+2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2\pi}{\tau}}\right),$$

où τ désigne une grandeur positive, $\tau = \frac{v^2}{4\pi}$; on aura, pour v positif,

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{v} - 1 + \frac{4\sqrt{\pi}}{v}\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}};$$

donc

$$R_n < \frac{2\sqrt{\pi}}{v} e^{-\frac{(n+1)^2}{4}v^2}\left\{1 - \frac{v}{2\sqrt{\pi}} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}}\right\} e^{\frac{v^2}{4}}.$$

Posons maintenant, m désignant une grandeur positive,

$$v = \frac{2\sqrt{m\log(n+1)}}{n+1}, \tag{25}$$

on aura

$$R_n < \frac{(n+1)^{-m+1}}{2\sqrt{m\log(n+1)}}(1+[n]),$$

le symbole $[n]$ désignant une grandeur qui, pour une valeur infiniment grande de n, devient infiniment petite.

Prenant donc

$$m \geqq 1,$$

il vient

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0.$$

Mais alors

$$e^{-\frac{v^2}{4}} = e^{-\frac{m\log(n+1)}{(n+1)^2}} = (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}};$$

si donc on désigne par le symbole $\{n\}$

$$(n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}} \tag{26}$$

et si l'on pose

$$(27)\qquad \chi(x, n)\sum_{\nu=-1}^{n}\{n\}^{\nu^2}\cos\nu x = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\{n\}^{\nu^2}\cos\nu x,$$

il vient

$$\chi(x, v)_n = \chi(x, n).$$

De l'équation

$$F(x, k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, \frac{k\pi}{c}\right)dx'$$

on tire alors

$$F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, v\right)dx'$$
$$= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, u\right)dx' + R'_n,$$

R'_n désignant une grandeur qui devient infiniment petite pour n infiniment grand. Comme $\lim\limits_{n=\infty} v = 0$ et $\lim\limits_{v=0} F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = f(x)$, on a, par conséquent,

$$(28)\qquad f(x) = \lim_{n=\infty}\int_{-c}^{c} f(x')\chi\left(\frac{x-c'}{c}\pi, n\right)dx'.$$

Le théorème de Fourier, exprimé avec précision, dit que l'on a

$$(29)\qquad f(x) = \lim_{n=\infty}\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(x)\bar{\chi}\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right)dx',$$

où l'on a posé

$$(30)\qquad \bar{\chi}(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n}\cos\nu x.$$

A la place de cette équation, qui n'est pas valable dans tous les cas, on devra donc prendre la précédente, où la fonction $\bar{\chi}(x, n)$ est remplacée par une autre $\chi(x, n)$ qui, comme elle, a la forme

$$1 + 2(n, 1)\cos x + 2(n, 2)\cos 2x + \ldots + 2(n, n)\cos nx,$$

où (n, ν) désigne une grandeur positive dépendant de n et ν et qui dans $\overline{\chi}(x, n)$ se réduit à l'unité. Or, pour tout nombre déterminé ν,

$$\lim_{n=\infty}(n, \nu) = 1;$$

on peut donc prendre n suffisamment grand pour que les $(\nu + 1)$ premiers termes de $\chi(x, n)$ approchent des termes correspondants de $\overline{\chi}(x, n)$ d'aussi près que l'on voudra.

Les fonctions $\chi(x, n)$ de la forme et de la nature que l'on a vues plus haut et pour lesquelles l'équation (28) a lieu sans restriction peuvent être déduites de la fonction $\chi(x, n)$ qui dérive d'une fonction quelconque $\psi(u)$.

On peut toujours déterminer une grandeur positive v_n dépendant de n et telle que la différence

$$\chi(x, v_n) - \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \Phi(\nu, v_n)\cos\nu x$$

converge vers zéro lorsque n grandit sans limite, et alors

$$(31) \qquad \chi(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \Phi(\nu, v_n)\cos\nu x = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \Phi(\nu, v_n)\cos\nu x$$

sera une fonction de la nature considérée.

Il va sans dire qu'on n'obtient pas de cette manière toutes les fonctions possibles de l'espèce dont il s'agit.

Nous ferons remarquer, en terminant, que l'équation (28) a encore lieu pour les valeurs de x comprises *entre* $-c$ et $+c$, comme on le voit aisément, lorsque l'on prend pour $f(x)$ une fonction de x qui dans l'intervalle ($x = -c$ à $x = +c$) est uniforme et continue, sans qu'il soit nécessaire d'avoir $f(c) = f(-c)$. Dans ce cas, on devra, dans le premier membre de l'équation, écrire

$$\tfrac{1}{2}[f(-c) + f(+c)]$$

au lieu de $f(x)$.