JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

K. WEIERSTRASS

Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 2 (1886), p. 105-113.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1886_4_2__105_0>

Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle;

PAR M. K. WEIERSTRASS.

Traduit par M. LÉONCE LAUGEL.

Soit $f(x)$ une fonction uniforme réelle et continue pour toute valeur réelle de la variable x et dont la valeur absolue ait une limite supérieure finie; on sait qu'elle satisfait à l'équation suivante, dans laquelle u désigne une deuxième variable réelle et k une grandeur positive indépendante de x et de u,

$$(1)\qquad \lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

Le théorème qu'exprime cette équation est susceptible d'être aisément généralisé.

Soit une fonction quelconque $\psi(x)$ de même nature que $f(x)$, qui, ne changeant pas de signe, satisfasse à l'équation $\psi(-x) = \psi(x)$ et, en outre, à la condition suivante :

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx$$

conserve une valeur finie, qui sera désignée par ω. Si l'on pose

$$(2)\qquad F(x,k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

on aura

$$\lim_{k=0} F(x,k) = f(x). \tag{3}$$

Pour la démonstration des équations (1), (3), il y a lieu de faire la remarque suivante. Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des grandeurs positives, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$; on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k}\int_{-b_1}^{b_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du - \frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&= \frac{1}{k}\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{k}\int_{a_2}^{b_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
&= f(-b_1 - \ldots - a_1)\int_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \psi(u)\,du \\
&\quad + f(+a_2 + \ldots + b_2)\int_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \psi(u)\,du \quad [1].
\end{aligned}$$

Considérée conjointement avec les suppositions que nous avons faites sur les fonctions $f(x)$ et $\psi(x)$, cette équation nous apprend que l'intégrale

$$\frac{1}{k}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

si l'on y donne aux grandeurs x, k des valeurs déterminées et qu'ensuite a_1 et a_2 deviennent, indépendamment l'un de l'autre, infiniment grands, tend vers une limite finie et déterminée, et que, par conséquent, l'intégrale

$$\frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

est une grandeur parfaitement définie.

Cela posé, soit δ une grandeur positive qui peut être prise aussi

(1) Je désigne par $f(x_1, \ldots, x_r)$ une valeur moyenne entre la plus petite et la plus grande des valeurs que prend $f(x)$ dans l'intervalle de $x = x_1$ à $x = x_2$.

petite que l'on veut; on a

$$\begin{aligned}
F(x,k) = {} & \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{x-\delta} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x+\delta}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
& + \frac{1}{2k\omega}\int_{x-\delta}^{x} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int_{x}^{x+\delta} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du \\
= {} & \frac{1}{2\omega}f(-\infty-\ldots-x-\delta)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
& + \frac{1}{2\omega}f(x+\delta+\ldots+\infty)\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
& + \frac{1}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}}[f(x-ku)+f(x+ku)]\psi(u)\,du;
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
& F(x,k) - f(x) \\
& \quad = \frac{f(-\infty+\ldots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty}\psi(u)\,du \\
& \quad + \frac{1}{2\omega}\int_{0}^{\frac{\delta}{k}}[f(x-ku)+f(x+ku)-2f(x)]\psi(u)\,du \\
& \quad = \frac{f(-\infty+\ldots+\infty)-f(x)}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du \\
& \quad + \tfrac{1}{2}\varepsilon_1[f(x-\varepsilon\delta)+f(x+\varepsilon\delta)-2f(x)],
\end{aligned}$$

ε, ε_1 désignant des grandeurs positives comprises entre o et 1.

Soient maintenant x_1, x_2 deux valeurs quelconques déterminées de x, G la limite supérieure de la valeur absolue de $f(x)$ et g_1, g_2 deux grandeurs positives qui peuvent être prises aussi petites qu'on voudra. Nous pouvons d'abord donner à la grandeur δ une valeur assez petite pour que la grandeur absolue de

$$\tfrac{1}{2}[f(x-u)+f(x+u)-2f(x)]$$

soit toujours plus petite que g_1, lorsque x est compris dans l'intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$ et pendant que u l'est en même temps dans l'intervalle $(0, \ldots, \delta)$.

A-t-on attribué une telle valeur à δ, on peut ensuite déterminer une grandeur positive k', telle que, pour chaque valeur de k qui soit plus petite que k', on ait l'inégalité

$$\frac{2G}{\omega}\int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\,du < g_2;$$

alors, en vertu de l'équation précédente, la différence entre $F(x, k)$ et $f(x)$ est, en valeur absolue, plus petite que $g_1 + g_2$, et ceci est vrai pour chacune des valeurs considérées de x.

Ceci démontre non seulement que, pour chaque valeur considérée isolément de x, $F(x, k)$ se rapproche de la limite $f(x)$ lorsque k devient infiniment petit, mais encore que $F(x, k)$ converge *uniformément* vers cette limite pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle fini.

De l'équation (3) je tire une conséquence bien digne de remarque.

Parmi les fonctions $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus, il y en a une infinité qui sont des fonctions transcendantes entières et ont également cette propriété que les fonctions $F(x, k)$ correspondantes sont développables pour toute valeur déterminée de la grandeur k suivant les puissances de x en séries constamment convergentes.

Prend-on pour $\psi(x)$ une fonction de cette nature, par exemple $\psi(x) = e^{-x^2}$, on a le théorème suivant, qui me paraît remarquable et fécond :

A. *Soit $f(x)$ une fonction définie seulement pour les valeurs réelles de la variable x, uniforme et partout continue : on peut former d'une foule de manières une fonction transcendante entière $F(x, k)$, qui, outre x, contient un paramètre variable (positif) k, et telle que, pour toute valeur réelle de x, on ait l'équation*

$$\lim_{k=0} F(x, k) = f(x).$$

Avec la condition que la variable x reste comprise dans un intervalle fini, on peut, en outre, comme il a été vu, en prenant une grandeur g' aussi petite qu'on veut, donner au paramètre k une valeur k' assez petite pour que la différence entre $F(x, k')$ et $f(x)$ soit, en valeur absolue, plus petite que g' pour chaque valeur de x. Si l'on met alors $F(x, k')$ sous la forme d'une série de puissances

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

et si l'on désigne la somme des n premiers termes de cette série par $G(x)$, on peut, en prenant une autre grandeur positive g'', donner à n une valeur assez grande pour que la valeur absolue de

$$F(x, k') - G(x)$$

soit plus petite que g'' pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle considéré; et, par conséquent, la valeur absolue de $f(x) - G(x)$ sera plus petite que $g' + g''$.

On a, de la sorte, démontré le théorème suivant :

B. *Si $f(x)$ est une fonction de la nature considérée ci-dessus et si la variable x reste comprise dans un intervalle fini quelconque, on peut, en prenant une grandeur positive g, qui peut devenir aussi petite qu'on voudra, déterminer d'une foule de manières une fonction* ENTIÈRE RATIONNELLE, *qui, dans l'intervalle considéré, se rapproche de la fonction $f(x)$ assez près pour que la différence $f(x) - G(x)$ soit toujours plus petite que g en valeur absolue.*

Prenons maintenant deux suites infinies de grandeurs positives

$$\begin{array}{llll} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots, \\ g_1, & g_2, & g_3, & \ldots, \end{array}$$

telles que $\lim\limits_{n=\infty} a_n = \infty$ et que $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ ait une valeur finie; on peut alors, conformément à ce qui précède, déterminer une suite de fonctions entières rationnelles

$$G_1(x), \quad G_2(x), \quad G_3(x), \quad \ldots,$$

telles que (pour $\nu = 1, 2, \ldots, \infty$)

$$| f(x) - G_\nu(x) | < g_\nu$$

lorsque x reste compris dans l'intervalle $(-a_\nu \ldots a_\nu)$.

Posons

$$f_0(x) = G_1(x),$$
$$f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x),$$

on a

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) = G_{n+1}(x),$$

et, pour chaque valeur déterminée de x,

$$\lim_{n=\infty} G_{n+1}(x) = f(x);$$

ce qui donne

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x).$$

Soient maintenant x_1, x_2 deux valeurs quelconques de x déterminées finies; et des inégalités

$$\begin{vmatrix} f(x) - G_\nu(x) \end{vmatrix} < g_\nu \qquad (-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu),$$
$$\begin{vmatrix} f(x) - G_{\nu+1}(x) \end{vmatrix} < g_{\nu+1} \qquad (-a_{\nu+1} \leqq x \leqq a_{\nu+1}),$$

on tire, pour chaque valeur de x comprise dans l'intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$

$$| f_\nu(x) | < g_\nu + g_{\nu+1}$$

tant que ν est plus grand qu'un nombre déterminé ν' qui est défini par la condition suivante : tout intervalle $(-a_\nu, \ldots, a_\nu)$ pour lequel $\nu > \nu'$ doit contenir les deux valeurs x_1, x_2.

On a donc

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} |f_\nu(x)| < \sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} (g_\nu + g_{\nu+1}),$$

lorsque l'on a

$$x_1 \leqq x \leqq x_2.$$

Il s'ensuit que la série

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} f_\nu(x)$$

et, par conséquent, la série

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

convergent absolument dans tous les cas, et uniformément pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$. Or le choix des grandeurs x_1, x_2, n'est soumis à aucune restriction autre que d'avoir des valeurs réelles et les fonctions $f_\nu(x)$ en sont indépendantes.

La série précédente converge donc absolument pour toute valeur de x et uniformément dans tout intervalle

$$x_1 \leqq x \leqq x_2,$$

dont les limites ont des valeurs finies.

D'où le théorème suivant (C) :

Toute fonction $f(x)$ de la nature considérée peut être représentée d'une foule de manières par une série infinie dont les termes sont des fonctions entières rationnelles *de x. Cette série converge* absolument *pour toute valeur finie de x et* uniformément *dans chaque intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$ dont les limites sont des grandeurs finies.*

A propos du théorème (B), il est à remarquer que pour l'établir il est seulement nécessaire de choisir pour $\psi(x)$ une fonction transcendante entière, jouissant des propriétés que l'on a vues plus haut; mais il ne l'est nullement que $F(x, k)$ soit fonction entière de x, et cela n'est pas une conséquence nécessaire de la première hypothèse.

En effet, posons, a, b étant deux grandeurs réelles quelconques,

$$F_1(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_a^b f(u)\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

l'on aura pour les valeurs réelles de x

$$F(x, k) = F_1(x, k) + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{x-a}{k}}^{+\infty} f(x-ku)\psi(u)du$$
$$+ \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{b-x}{k}}^{\infty} f(x+ku)\psi(u)du.$$

Donc si a, b, x_1, x_2 satisfont à la condition

$$a < x_1 < x_2 < b,$$

et si g_1 désigne une grandeur positive prise aussi petite que l'on veut, on pourra fixer la valeur de k, de telle sorte que la valeur absolue de la différence $f(x) - F_1(x, k)$ soit plus petite que g_1 pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle $(x_1, \ldots, x_2)$.

Cela posé, comme $F_1(x, k)$ est toujours une fonction entière (transcendante) de x, nous pouvons ensuite, en prenant une nouvelle grandeur positive g_2, déterminer une fonction *entière rationnelle* $G(x)$, telle que dans l'intervalle $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$ on ait

$$| G(x) - F_1(x, k) | < g_2,$$

d'où

$$| f(x) - G(x) | < g_1 + g_2;$$

c'est ce qu'exprime le théorème (B).

Cette démonstration du théorème en question est, je crois, complètement rigoureuse, et peut suffire s'il s'agit seulement de montrer qu'il existe des fonctions *rationnelles entières* $G(x)$, qui, dans tous les points d'un intervalle donné, se rapprochent d'aussi près que l'on voudra d'une fonction donnée $f(x)$ et qu'elles peuvent être effectivement déterminées.

Mais la construction de pareilles fonctions, telle que nous l'avons indiquée précédemment, présente une lacune essentielle.

Posons en effet

$$F_1(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k_\nu) x^\nu,$$

où le symbole (k_ν) indique une fonction de k donnée par l'expression

$$(k_\nu) = \frac{(-1)^\nu}{2\nu!\,\omega k^\nu} \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku) \frac{d^\nu \psi(u)}{du^\nu} du,$$

et soit

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (k)_\nu x^\nu;$$

il existera à la vérité, quand δ est une grandeur positive donnée quelconque, des valeurs de k et de n pour lesquelles, dans l'intervalle $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$, on ait

$$| f(x) - G^{(n)}(x, k) | < \delta.$$

Mais, si δ devient infiniment petit, k le devient également, et malheureusement alors la considération de l'expression ci-dessus de $(k)_\nu$ ne nous apprend pas si, lorsque k devient infiniment petit, ladite expression tend vers une limite finie, ou du moins reste finie, condition absolument nécessaire pour que l'on puisse de la manière indiquée obtenir une représentation approchée utilisable de la fonction $f(x)$, pour une valeur aussi petite que l'on voudra de δ.

Je me propose de faire voir comment on peut lever cette difficulté dans une prochaine Communication.