JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. APPELL

Sur l'inversion des intégrales abéliennes

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 245-279.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__245_0>

Sur l'inversion des intégrales abéliennes;

PAR M. P. APPELL.

1. Dans leur *Theorie der Abelschen Functionen,* MM. Clebsch et Gordan généralisent le problème de l'inversion, en intégrant un système d'équations aux dérivées partielles dans les premiers membres desquelles entrent les intégrales abéliennes de première espèce et des intégrales normales de troisième espèce; ils indiquent une méthode pour passer, par continuité, de ce cas à celui où certaines intégrales de troisième espèce sont remplacées par des intégrales normales de seconde espèce. Des exemples de l'intégration d'un pareil système avaient été donnés auparavant par Rosenhain (*Mémoires des Savants étrangers,* 1851) et par Clebsch, à l'occasion de ses recherches sur les courbes de genre 0 et 1 ([1]) (*Journal de Crelle,* t. 64). Enfin M. Elliot (*Annales de l'École Normale,* 2e série, t. XI), en étendant la méthode de Riemann, telle qu'elle a été exposée par M. Briot, a intégré un système d'équations où figurent les intégrales de première espèce avec des intégrales *normales* de *deuxième* et *troisième* espèce. Il reste donc à étudier un système d'équations aux dérivées partielles dans les premiers membres desquelles entrent non seulement des intégrales *normales* de seconde espèce, mais encore les dérivées d'ordre quelconque de ces intégrales par rapport au paramètre. C'est l'intégration d'un tel système qui fait

([1]) *Voir* les *Leçons de Géométrie,* par A. Clebsch, recueillies et complétées par F. Lindemann, traduites par A. Benoist, t. III.

l'objet de ce Mémoire; elle permet de démontrer un théorème général dont voici l'énoncé :

I. *Soient x et y deux variables imaginaires liées par une relation algébrique et $\varphi_1(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; il existe toujours un certain nombre $(n-1)$ d'autres fonctions rationnelles de x et y*

$$\varphi_2(x,y),\quad \varphi_3(x,y),\quad \ldots,\quad \varphi_n(x,y),$$

possédant la propriété suivante : le système d'équations différentielles

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_1(x_1,y_1)\,dx_1 + \varphi_1(x_2,y_2)\,dx_2 + \ldots + \varphi_1(x_n,y_n)\,dx_n = du_1, \\ \varphi_2(x_1,y_1)\,dx_1 + \varphi_2(x_2,y_2)\,dx_2 + \ldots + \varphi_2(x_n,y_n)\,dx_n = du_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1,y_1)\,dx_1 + \varphi_n(x_2,y_2)\,dx_2 + \ldots + \varphi_n(x_n,y_n)\,dx_n = du_n \end{cases}$$

définit les n points analytiques

$$(x_1,y_1),\quad (x_2,y_2),\quad \ldots,\quad (x_n,y_n)$$

en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, de telle façon que les n valeurs

$$\mathrm{R}(x_1,y_1),\quad \mathrm{R}(x_2,y_2),\quad \ldots,\quad \mathrm{R}(x_n,y_n)$$

que prend une fonction rationnelle quelconque $\mathrm{R}(x,y)$ en ces points sont racines d'une équation ALGÉBRIQUE *à coefficients* UNIFORMES *en $u_1, u_2, \ldots, u_n$.*

Nous examinerons d'abord le cas le plus simple, celui où la relation algébrique qui lie les deux variables x et y est de genre o ou 1. La méthode, que nous emploierons pour le cas général où le genre est un nombre p quelconque, sera la même que pour ces deux cas simples. Cette méthode est différente de celle que M. Elliot a suivie dans les Mémoires précédemment cités; elle est, avec des modifications qui seront indiquées plus loin, l'extension de la méthode employée par Clebsch (*loc. cit.*).

2. Occupons-nous d'abord du cas où le genre p de la relation algébrique

$$F(x,y)=0 \tag{2}$$

qui lie x à y est égal à *zéro*. La courbe, représentée par l'équation (2), est alors unicursale; les coordonnées x et y d'un de ses points peuvent s'exprimer en fonction rationnelle d'un paramètre t qui est lui-même une fonction rationnelle de x et y, et les intégrales abéliennes correspondantes deviennent des intégrales de fonctions rationnelles de t. Dans ce cas, le théorème général I, énoncé au nº **1**, se réduit à la proposition élémentaire suivante :

II. *Soit* $R_1(t)$ *une fonction rationnelle de* t; *on peut toujours lui associer* $(n-1)$ *autres fonctions rationnelles*

$$R_2(t),\ R_3(t),\ \ldots,\ R_n(t),$$

de telle façon que les n *fonctions* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *des* n *variables* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *définies par les équations différentielles*

$$\left\{\begin{array}{l} R_1(t_1)\,dt_1+R_1(t_2)\,dt_2+\ldots+R_1(t_n)\,dt_n=du_1,\\ R_2(t_1)\,dt_1+R_2(t_2)\,dt_2+\ldots+R_2(t_n)\,dt_n=du_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ R_n(t_1)\,dt_1+R_n(t_2)\,dt_2+\ldots+R_n(t_n)\,dt_n=du_n \end{array}\right. \tag{3}$$

soient racines d'une équation algébrique à coefficients UNIFORMES *en* $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Soit, par exemple,

$$R_1(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{(t-1)^2}=\frac{t^3-t+1}{t^2(t-1)^2}; \tag{4}$$

il suffira d'associer à $R_1(t)$ les deux fonctions rationnelles

$$R_2(t)=\frac{1}{t^2},\quad R_3(t)=\frac{1}{(t-1)^2}.$$

Les équations différentielles, telles que (3), seront alors

$$(3')\quad \begin{cases} R_1(t_1)\,dt_1 + R_1(t_2)\,dt_2 + R_1(t_3)\,dt_3 = du_1, \\ R_2(t_1)\,dt_1 + R_2(t_2)\,dt_2 + R_2(t_3)\,dt_3 = du_2, \\ R_3(t_1)\,dt_1 + R_3(t_2)\,dt_2 + R_3(t_3)\,dt_3 = du_3 \end{cases}$$

ou, plus simplement,

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dt_1}{t_1} + \dfrac{dt_2}{t_2} + \dfrac{dt_3}{t_3} = d(u_1 - u_2 - u_3), \\[2mm] \dfrac{dt_1}{t_1^2} + \dfrac{dt_2}{t_2^2} + \dfrac{dt_3}{t_3^2} = du_2, \\[2mm] \dfrac{dt_1}{(t_1-1)^2} + \dfrac{dt_2}{(t_2-1)^2} + \dfrac{dt_3}{(t_3-1)^2} = du_3, \end{cases}$$

en retranchant de la première la somme des deux dernières et remarquant que

$$R_1(t) - R_2(t) - R_3(t) = \frac{1}{t}.$$

Si l'on intègre et si l'on pose

$$u_1 - u_2 - u_3 + C_1 = v_1, \quad C_2 - u_2 = v_2, \quad C_3 - u_3 = v_3,$$

C_1, C_2, C_3 désignant les constantes d'intégration, il vient

$$(6)\quad t_1 t_2 t_3 = e^{v_1}, \quad \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = v_2, \quad \frac{1}{t_1 - 1} + \frac{1}{t_2 - 1} + \frac{1}{t_3 - 1} = v_3;$$

d'où l'on tire facilement les fonctions symétriques élémentaires

$$t_1 + t_2 + t_3, \quad t_2 t_3 + t_1 t_3 + t_1 t_2, \quad t_1 t_2 t_3$$

en fonction uniforme de v_1, v_2, v_3, c'est-à-dire de u_1, u_2, u_3. Mais, pour suivre une méthode qui s'applique à tous les cas, formons directement le polynôme du troisième degré

$$(7)\quad \Phi(t) = A_0 t^3 + A_1 t^2 + A_2 t + A_3 = A_0 (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3),$$

qui admet pour racines t_1, t_2, t_3. D'après l'identité

$$\Phi'(t) = \Phi(t)\left(\frac{1}{t-t_1} + \frac{1}{t-t_2} + \frac{1}{t-t_3}\right),$$

les équations (6) s'écrivent

$$(8)\quad \Phi(0) + A_0 e^{v_1} = 0, \quad \Phi'(0) + v_2 \Phi(0) = 0, \quad \Phi'(1) + v_3 \Phi(1) = 0.$$

On a ainsi trois équations homogènes et linéaires par rapport à A_0, A_1, A_2, A_3; l'élimination de ces coefficients entre ces équations (8) et l'équation

$$A_0 t^3 + A_1 t^2 + A_2 t + A_3 = 0$$

fournira, sous forme de déterminant, l'équation

$$\begin{vmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \\ e^{v_1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & v_2 \\ 3+v_3 & 2+v_3 & 1+v_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

qui admet pour racines t_1, t_2, t_3.

Je terminerai par une dernière remarque sur l'exemple qui nous occupe. Il est évident que l'on peut, sans changer les conclusions relatives à la nature des intégrales des équations (3'), remplacer l'une quelconque des fonctions $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$ par une combinaison linéaire homogène à coefficients constants de toutes ces fonctions. Voici alors comment on pourra, sans avoir recours à la décomposition en fractions simples, déterminer les deux fonctions qu'il faut, dans les équations (3'), associer à la fonction $R_1(t)$ donnée par l'équation (4). Cette fonction $R_1(t)$ est une fonction rationnelle de t devenant nulle à l'infini, admettant pour dénominateur

$$t^2(t-1)^2,$$

avec cette circonstance particulière que le résidu de $R_1(t)$ relatif au pôle $t=1$ est égal à zéro. Formons la fonction rationnelle la plus générale qui remplisse toutes ces conditions; un calcul bien facile montre qu'elle pourra s'écrire

$$\frac{A(t^2 - t + 1) + B(t-1)^2 + Ct^2}{t^2(t-1)^2}$$

avec trois coefficients arbitraires A, B, C, ou encore

$$A R_1(t) + B R_2(t) + C R_3(t);$$

on voit que les fonctions rationnelles qui multiplient A, B, C sont précisément celles qui entrent dans les équations (3').

3. La même méthode d'intégration s'applique au cas général où l'on prend n équations différentielles de la forme suivante, dont un cas particulier est indiqué par Clebsch [1] :

$$(9)\quad \begin{cases} d\log\dfrac{t_1-a_i}{t_1-a'_i} + d\log\dfrac{t_2-a_i}{t_2-a'_i} + \ldots + d\log\dfrac{t_n-a_i}{t_n-a'_i} = du_i & (i = 1, 2, \ldots, q), \\[2ex] \left.\begin{aligned} &\frac{dt_1}{(t_1-b_j)^2} + \frac{dt_2}{(t_2-b_j)^2} + \cdots + \frac{dt_n}{(t_n-b_j)^2} = du_{j,1} \\ &\frac{dt_1}{(t_1-b_j)^3} + \frac{dt_2}{(t_2-b_j)^3} + \cdots + \frac{dt_n}{(t_n-b_j)^3} = du_{j,2} \\ &\frac{dt_1}{(t_1-b_j)^{\alpha_j+1}} + \frac{dt_2}{(t_2-b_j)^{\alpha_j+1}} + \cdots + \frac{dt_n}{(t_n-b_j)^{\alpha_j+1}} = du_{j,\alpha_j} \end{aligned}\right\} & (j = 1, 2, \ldots, r), \end{cases}$$

où

$$n = q + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r.$$

Toutes les quantités a_i sont différentes les unes des autres et différentes des a'_i; mais un certain nombre de ces dernières $a'_1, \ldots, a'_q$ peuvent être égales entre elles. Les quantités b_j sont différentes les unes des autres, mais peuvent être égales aux a_i, a'_i.

En effectuant l'intégration, désignant respectivement par

$$C_i,\ C_{j,1},\ C_{j,2},\ \ldots,\ C_{j,\alpha_j}$$

---

(1) *Voir* Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 64, p. 58.

les constantes d'intégration, et posant

$$v_i = C_i + u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$
$$v_{j,k} = C_{j,k} - k u_{j,k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

on a les équations

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{(t_1 - a_i)(t_2 - a_i)\ldots(t_n - a_i)}{(t_1 - a'_i)(t_2 - a'_i)\ldots(t_n - a'_i)} = e^{v_i} & (i = 1, 2, \ldots, q), \\[2ex] \left.\begin{aligned} &\frac{1}{t_1 - b_j} + \frac{1}{t_2 - b_j} + \ldots + \frac{1}{t_n - b_j} = v_{j,1} \\ &\frac{1}{(t_1 - b_j)^2} + \frac{1}{(t_2 - b_j)^2} + \ldots + \frac{1}{(t_n - b_j)^2} = v_{j,2}, \\ &\frac{1}{(t_1 - b_j)^{\alpha_j}} + \frac{1}{(t_2 - b_j)^{\alpha_j}} + \ldots + \frac{1}{(t_n - b_j)^{\alpha_j}} = v_{j,\alpha_j} \end{aligned}\right\} & (j = 1, 2, \ldots, r). \end{cases}$$

On peut alors former, de la façon suivante, un polynôme de degré n

$$\Phi(t) = A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \ldots + A_n = A_0(t - t_1)(t - t_2)\ldots(t - t_n)$$

qui admet pour racines $t_1, t_2, \ldots, t_n$. On a identiquement

$$\Phi'(t) = \Phi(t) \sum \frac{1}{t - t_1},$$

en employant le signe Σ pour désigner une sommation étendue aux n quantités $t_1, t_2, \ldots, t_n$. On en conclut, par la différentiation,

$$\Phi''(t) = \Phi'(t) \sum \frac{1}{t - t_1} - \Phi(t) \sum \frac{1}{(t - t_1)^2},$$
$$\Phi'''(t) = \Phi''(t) \sum \frac{1}{t - t_1} - 2\Phi'(t) \sum \frac{1}{(t - t_1)^2} + 2\Phi(t) \sum \frac{1}{(t - t_1)^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Phi^{(k+1)}(t) = \Phi^{(k)}(t) \sum \frac{1}{t - t_1} - k\Phi^{(k-1)}(t) \sum \frac{1}{(t - t_1)^2} + \ldots + (-1)^k 1.2\ldots k\, \Phi(t) \sum \frac{1}{(t - t_1)^{k+1}}.$$

Ceci posé, les équations (10) fournissent n équations linéaires et homogènes entre les coefficients

$$A_0, A_1, \ldots, A_n$$

du polynôme $\Phi(t)$. En effet, les q premières de ces équations (10) peuvent s'écrire

$$(11) \qquad \Phi(a_i) - \Phi(a_i')e^{v_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

ce qui sont déjà q équations entre les coefficients en question. Les autres relations (10) pourront s'écrire, en vertu des identités précédentes,

$$(11') \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi'(b_j) + v_{j,1}\Phi(b_j) = 0, \\ \Phi''(b_j) + v_{j,1}\Phi'(b_j) + v_{j,2}\Phi(b_j) = 0, \\ \Phi'''(b_j) + v_{j,1}\Phi''(b_j) + 2v_{j,2}\Phi'(b_j) + 2v_{j,3}\Phi(b_j) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi^{(\alpha_j)}(b_j) + v_{j,1}\Phi^{(\alpha_j-1)}(b_j) + \ldots + 1.2\ldots\alpha_j v_{j,\alpha_j}\Phi(b_j) = 0, \end{array} \right.$$

où

$$j = 1, 2 \ldots r;$$

on a ainsi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r,$$

équations linéaires nouvelles entre $A_0, A_1, \ldots, A_n$ qui, avec les équations (11), forment le système annoncé de n équations. En adjoignant à ces équations (11) et (11') la suivante

$$A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

on aura $(n+1)$ équations linéaires homogènes entre $A_0, A_1, \ldots, A_n$; le déterminant des coefficients de ces quantités doit être nul. En égalant ce déterminant à zéro, on obtient une équation de degré n en t, ayant pour racines les fonctions cherchées $t_1, t_2, \ldots, t_n$, et pour coefficients des fonctions uniformes des quantités v_i et $v_{j,k}$, c'est-à-dire des quantités u_i et $u_{j,k}$. Ces fonctions uniformes admettent q groupes de périodes conjuguées.

4. On conclut facilement de ce qui précède le théorème II relatif à une fraction rationnelle quelconque $R_1(t)$.

En effet, nous pouvons toujours supposer que, dans l'intégrale

$$\int R_1(t)\,dt,$$

$R_1(t)$ soit infiniment petit de l'ordre $\frac{1}{t^2}$ pour t infini; car, s'il en était autrement, en désignant par τ un nombre quelconque qui ne soit pas un pôle de $R_1(t)$, il suffirait de faire le changement de variable

$$t = \tau + \frac{1}{t'}$$

pour que, dans la nouvelle intégrale

$$-\int R_1\left(\tau + \frac{1}{t'}\right)\frac{dt'}{t'^2},$$

le coefficient de dt' soit de l'ordre de $\frac{1}{t'^2}$ pour t' infini. Supposons donc que cette condition soit réalisée pour $R_1(t)$; alors la somme des résidus de $R_1(t)$ est nulle. Si donc nous décomposons $R_1(t)$ en fractions simples, nous obtiendrons une décomposition de la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} R_1(t) = {} & \sum_{i=1}^{i=q} \mathcal{A}_i\left(\frac{1}{t-a_i} - \frac{1}{t-a'_i}\right) \\ & + \sum_{j=1}^{j=r}\left[\frac{\mathcal{B}_{j,1}}{(t-b_j)^2} + \frac{\mathcal{B}_{j,2}}{(t-b_j)^3} + \ldots + \frac{\mathcal{B}_{j,\alpha_j}}{(t-b_j)^{\alpha_j+1}}\right], \end{aligned}\right.$$

où les quantités a_i, a'_i, b_j remplissent les conditions indiquées à la page 250, à propos des équations (9); certains des coefficients $\mathcal{B}_{j,k}$ peuvent être nuls, mais les derniers de chaque groupe $\mathcal{B}_{1,\alpha_1}$, $\mathcal{B}_{2,\alpha_2}$, ..., $\mathcal{B}_{r,\alpha_r}$ sont différents de zéro. Or il est évident que l'on peut, sans changer la nature des intégrales de l'équation (9), remplacer l'une quelconque d'entre elles par une combinaison linéaire à coefficients constants de cette équation avec les autres. Nous pourrons, par exemple, en conservant toutes les autres équations (9), remplacer la première de ces équations par celle-ci

$$R_1(t_1)\,dt_1 + R_1(t_2)\,dt_2 + \ldots + R_1(t_n)\,dt_n = dU_1,$$

où $R_1(t)$ désigne la fonction rationnelle (12), et où l'on pose

$$U_1 = \sum_{i=1}^{i=q} \mathcal{A}_i u_i + \sum_{j=1}^{j=r} (\mathcal{B}_{j,1} u_{j,1} + \mathcal{B}_{j,2} u_{j,2} + \ldots + \mathcal{B}_{j,\alpha_j} u_{j,\alpha_j}).$$

On obtient ainsi un système d'équations de la forme (3), dont les intégrales sont racines d'une équation algébrique à coefficients uniformes en u_1, u_2, u_3, ... ou en U_1, u_2, u_3, ...; ce qui démontre le théorème II (page 247).

D'après cela, les fonctions $R_2(t)$, $R_3(t)$, ..., $R_n(t)$ que l'on associe à la fonction donnée $R_1(t)$ pour pouvoir appliquer ce théorème II sont les coefficients de $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, ..., $\mathcal{A}_q$ et des quantités $\mathcal{B}_{j,1}$, $\mathcal{B}_{j,2}$, ..., $\mathcal{B}_{j,\alpha}$ ($j = 1, 2, \ldots, r$) dans la formule de décomposition (12); le nombre $(n-1)$ de ces fonctions est donc

$$n - 1 = q - 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r.$$

Ce nombre $(n-1)$ ne constitue évidemment qu'un minimum; en effet on pourra, une fois formé un système d'équations différentielles, tel que (3), possédant les propriétés indiquées, en déduire un autre système contenant une fonction inconnue de plus t_{n+1} et une expression rationnelle de plus $R_{n+1}(t)$; il suffira pour cela de prendre, par exemple,

$$R_{n+1}(t) = \frac{1}{t-c} - \frac{1}{t-d},$$

où c désigne une constante qui n'est un pôle d'aucune des autres fractions rationnelles $R_1(t)$, $R_2(t)$, ..., $R_n(t)$.

Dans chaque cas particulier, on verra immédiatement quelle est la valeur du nombre q des quantités a_1, a_2, ..., a_q qui figurent dans la formule de décomposition (12). Par exemple, si

$$R_1(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} - \frac{3}{t+3},$$

il faudra écrire

$$R_1(t) = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+3}\right) + \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right) + \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\right),$$

et q sera égal à 3; les fonctions à associer à $R_1(t)$ seront au nombre de deux :

$$R_2(t) = \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}, \quad R_3(t) = \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}.$$

Si

$$R_1(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3},$$

q sera égal à 2, et il suffira d'associer à $R_1(t)$ la seule fonction

$$R_2(t) = \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}.$$

5. Considérons maintenant le cas où le genre p de la relation algébrique (2) est égal à l'*unité*. On pourra alors exprimer les coordonnées x et y d'un point de la courbe représentée par l'équation (2) en fonction doublement périodique d'un paramètre t, de telle manière qu'à chaque point de la courbe corresponde une seule valeur de t à des multiples près des périodes. Les périodes étant désignées par $2K$ et $2\sqrt{-1}K'$, les expressions de x et y seront des *fonctions rationnelles* de $\operatorname{sn}^2 t$ et $D_t \operatorname{sn}^2 t$, et inversement ces deux quantités

$$\operatorname{sn}^2 t, \quad D_t \operatorname{sn}^2 t$$

seront des *fonctions rationnelles* de x et y. Dans ce cas, le théorème général I peut s'énoncer comme il suit :

III. *Étant donnée une fonction elliptique $f_1(t)$ aux périodes $2K$ et $2\sqrt{-1}K'$, on peut toujours lui associer un certain nombre $(n-1)$ d'autres fonctions de même nature $f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n(t)$, de telle façon qu'en posant les équations différentielles*

$$(3) \qquad f_i(t_1)\,dt_1 + f_i(t_2)\,dt_2 + \ldots + f_i(t_n)\,dt_n = du_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les valeurs que prend une fonction elliptique quelconque aux mêmes périodes pour $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$ soient racines d'une équation algébrique à coefficients UNIFORMES *en $u_1, u_2, \ldots, u_n$.*

6. Pour démontrer ce théorème, faisons, avec M. Hermite,

$$Z(t) = \frac{d \log H(t)}{dt},$$

et désignons par $Z'(t)$, $Z''(t)$, ... les dérivées successives de $Z(t)$. Nous allons d'abord effectuer l'intégration du système suivant d'équations dont un cas particulier a été traité par Clebsch (*Journal de Crelle*, t. 64, p. 233) :

$$(14)\left\{\begin{array}{ll} dt_1 + dt_2 + \ldots + dt_n = du, & \\ d\log\frac{H(t_1-a_i)}{H(t_1-a'_i)} + d\log\frac{H(t_2-a_i)}{H(t_2-a'_i)} + \ldots + d\log\frac{H(t_n-a_i)}{H(t_n-a'_i)} = du_i & (i = 1, 2, \ldots, q), \\ Z'(t_1-b_j)\,dt_1 + Z'(t_2-b_j)\,dt_2 + \ldots + Z'(t_n-b_j)\,dt_n = du_{j.1} & \\ Z''(t_1-b_j)\,dt_1 + Z''(t_2-b_j)\,dt_2 + \ldots + Z''(t_n-b_j)\,dt_n = du_{j.2} & (j = 1, 2, \ldots, r). \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ Z^{(\alpha_j)}(t_1-b_j)\,dt_1 + Z^{(\alpha_j)}(t_2-b_j)\,dt_2 + \ldots + Z^{(\alpha_j)}(t_n-b_j)\,dt_n = du_{j.\alpha_j} & \end{array}\right.$$

Ces équations sont analogues aux équations (9); leur nombre

$$1 + q + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r$$

est supposé égal à n; les constantes a_i, a'_i, b_j sont assujetties aux mêmes conditions que dans les équations (9). Effectuant l'intégration et supposant les constantes d'intégration ajoutées à u, u_i, $u_{j.k}$, nous obtenons les équations

$$(15)\left\{\begin{array}{ll} t_1 + t_2 + \ldots + t_n = u, & \\ \frac{H(t_1-a_i)H(t_2-a_i)\ldots H(t_n-a_i)}{H(t_1-a'_i)H(t_2-a'_i)\ldots H(t_n-a'_i)} = e^{u_i} & (i = 1, 2, \ldots, q), \\ Z(t_1-b_j) + Z(t_2-b_j) + \ldots + Z(t_n-b_j) = u_{j.1}, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (j = 1, 2, \ldots, r). \\ Z^{(\alpha_j-1)}(t_1-b_j) + Z^{(\alpha_j-1)}(t_2-b_j) + \ldots + Z^{(\alpha_j-1)}(t_n-b_j) = u_{j.\alpha_j} & \end{array}\right.$$

Nous allons montrer que les valeurs que prend une fonction elliptique quelconque de périodes $2K$ et $2\sqrt{-1}K'$ aux points t_1, t_2, ..., t_n

sont racines d'une équation algébrique à coefficients uniformes en u, u_i, $u_{j,k}$. Pour cela, nous formerons un polynôme en $\operatorname{sn}^2 t$ et $D_t \operatorname{sn}^2 t$ qui s'annule pour $t = t_1, t_2, \ldots, t_n$, et dont les coefficients sont uniformes en u, u_i, $u_{j,k}$. Ce polynôme pourrait être obtenu par la méthode employée par Clebsch (*loc. cit.*); j'emploierai une méthode un peu différente qui s'étendra plus facilement aux intégrales abéliennes.

Nous pouvons toujours supposer qu'aucune des constantes a_i, a'_i, b_j ne soit de la forme

$$(16) \qquad 2m\mathrm{K} + (2m'+1)\sqrt{-1}\,\mathrm{K}' \qquad (m, m' \text{ entiers}),$$

car, s'il en était ainsi, il suffirait de changer $t_1, t_2, \ldots, t_n$ en $t_1 + \lambda$, $t_2 + \lambda, \ldots, t_n + \lambda$ et a_i, a'_i, b_j en $a_i + \lambda$, $a'_i + \lambda, \ldots, b_j + \lambda$, la constante λ étant choisie de telle manière qu'aucune des quantités $a_i + \lambda$, $a'_i + \lambda$, $b_j + \lambda$ ne soit de la forme (16).

Cela posé, considérons la fonction de t

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(t) &= \mathrm{C}e^{-(n+1)\frac{\pi t\sqrt{-1}}{2\mathrm{K}}} \\ &\times \frac{\mathrm{H}(t-t_1)\mathrm{H}(t-t_2)\ldots\mathrm{H}(t-t_n)\mathrm{H}\left[t+u-(n+1)\sqrt{-1}\,\mathrm{K}'\right]}{\Theta^{n+1}(t)}; \end{aligned} \right.$$

en vertu de la première des équations (15),

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = u,$$

cette fonction $\Phi(t)$ admet, par rapport à t, les deux périodes $2\mathrm{K}$ et $2\sqrt{-1}\,\mathrm{K}'$, ainsi qu'il résulte immédiatement des propriétés fondamentales des fonctions H et Θ. De plus, cette fonction (17) s'annule aux points

$$t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n,\ (n+1)\sqrt{-1}\,\mathrm{K}' - u$$

et aux homologues de ces points.

D'après un théorème de M. Hermite (Note à la troisième édition de Lacroix, p. 427), cette fonction $\Phi(t)$ est de la forme

$$(17') \qquad \Phi(t) = \mathrm{F}(z) + z'\,\mathrm{F}_1(z),$$

où

$$(18) \qquad z = \operatorname{sn}^2 t, \quad z' = D_t \operatorname{sn}^2 t = 2 \operatorname{sn} t \operatorname{cn} t \operatorname{dn} t,$$

F et F_1 étant des polynômes de degrés respectifs $\frac{n}{2}$ et $\frac{n}{2} - 1$ si n est *pair*, $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{n-3}{2}$ si n est *impair*. Dans le premier cas (n pair), on aura

$$F(z) = A_0 z^{\frac{n}{2}} + A_1 z^{\frac{n}{2}-1} + \ldots + A_{\frac{n}{2}}, \quad F_1(z) = A_{\frac{n}{2}+1} z^{\frac{n}{2}-1} + \ldots + A_n,$$

et dans la deuxième (n impair),

$$F(z) = A_0 z^{\frac{n-1}{2}} + A_1 z^{\frac{n-1}{2}-1} + \ldots + A_{\frac{n+1}{2}}, \quad F_1(z) = A_{\frac{n+1}{2}+1} z^{\frac{n-3}{2}} + \ldots + A_n;$$

donc, dans les deux cas, l'expression (17') de la fonction $\Phi(t)$ contient d'une façon linéaire et homogène $(n+1)$ coefficients

$$(19) \qquad A_0, A_1, \ldots, A_n.$$

Ces coefficients sont des fonctions uniformes des quantités $u, u_i, u_{i,k}$ comme nous allons le montrer. Écrivons d'abord que la fonction (17') s'annule pour $t = (n+1)\sqrt{-1}K' - u$; nous aurons l'équation

$$(20) \qquad F(\zeta) + \zeta' F_1(\zeta) = 0,$$

en désignant par ζ et ζ' ce que deviennent z et z' quand on y remplace t par $(n+1)\sqrt{-1}K' - u$.

Lorsque les coefficients (19) vérifient cette équation linéaire (20), la fonction (17') admet, dans un parallélogramme des périodes, le zéro $(n+1)\sqrt{-1}K' - u$ et n autres zéros $t_1, t_2, \ldots, t_n$ vérifiant la relation

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = u,$$

d'après un théorème de Liouville, qui est un cas particulier du théorème d'Abel [1]. La première des équations (15) étant vérifiée, il reste

[1] BRIOT et BOUQUET, *Traité des fonctions elliptiques*, p. 242, théorème V.

à exprimer que les zéros $t_1, t_2, \ldots, t_n$ vérifient les autres équations (15).

D'après l'expression (17) de $\Phi(t)$, celles des équations (15) qui contiennent les quantités a_i, a'_i peuvent s'écrire

$$(21)\quad \Phi(a_i) = e^{\frac{(n+1)\pi\sqrt{-1}}{2K}(a_i - a'_i)} \frac{\Theta^{n+1}(a'_i)}{\Theta^{n+1}(a_i)} \frac{\mathrm{H}[a_i + u - (n+1)K'\sqrt{-1}]}{\mathrm{H}[a'_i + u - (n+1)K'\sqrt{-1}]} \Phi(a'_i),$$

où

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ q;$$

ces relations fournissent q nouvelles équations linéaires entre les coefficients (19) de la fonction Φ. Enfin, celles des équations (15) qui contiennent les quantités b_j fournissent

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

équations linéaires entre ces mêmes coefficients.

En effet, l'équation (17) donne par la différentiation les identités suivantes dans lesquelles on a fait, pour abréger,

$$\psi(t) = \mathrm{Z}[t + u - (n+1)\sqrt{-1}\,\mathrm{K}'] - (n+1)\frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)} - (n+1)\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}},$$

et dans lesquelles le signe Σ indique une sommation étendue aux n zéros $t_1, t_2, \ldots, t_n$,

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \Phi(t)[\Sigma \mathrm{Z}(t - t_1) + \psi(t)],\\
\Phi''(t) &= \Phi'(t)[\Sigma \mathrm{Z}(t - t_1) + \psi(t)] + \Phi(t)[\Sigma \mathrm{Z}'(t - t_1) + \psi'(t)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi^{(\alpha_j)}(t) &= \Phi^{(\alpha_j-1)}(t)[\Sigma \mathrm{Z}(t - t_1) + \psi(t)] + \ldots\\
&\quad + \Phi(t)[\Sigma \mathrm{Z}^{(\alpha_j-1)}(t - t_1) + \psi^{(\alpha_j-1)}(t)];
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, d'après le dernier groupe des équations (15), les relations suivantes :

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&\Phi'(b_j) + \Phi(b_j)[u_{j,1} - \psi(b_j)] = 0,\\
&\Phi''(b_j) + \Phi'(b_j)[u_{j,1} - \psi(b_j)] - \Phi(b_j)[u_{j,2} + \psi'(b_j)] = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Phi^{(\alpha_j)}(b_j) + \Phi^{(\alpha_j-1)}(b_j)[u_{j,1} - \psi(b_j)] + \ldots\\
&\qquad \pm \Phi(b_j)[u_{j,\alpha_j} + \psi^{(\alpha_j-1)}(b_j)] = 0,
\end{aligned}\right.$$

avec $j = 1, 2, \ldots, r$.

Les équations (20), (21) et (22) forment un système de

$$1 + q + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r,$$

c'est-à-dire de n équations linéaires et homogènes entre les $(n+1)$ coefficients (19), équations qui permettent de déterminer les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux en fonctions uniformes des u, u_i, $u_{j,k}$. La fonction $\Phi(t)$, (17'), qui s'annule pour

$$t = t_1, \quad t_2 \ldots t_n, \quad (n+1)\sqrt{-1}\,K' - u,$$

est ainsi complètement déterminée; on pourrait l'écrire sous forme de déterminant en égalant à zéro le déterminant des coefficients de

$$A_0, \; A_1, \; A_2, \; \ldots, \; A_n$$

dans l'équation

$$(23) \qquad F(z) + z' F_1(z) = 0$$

et dans les équations (20), (21) et (22). Soit (23) l'équation obtenue de cette manière, équation dont les coefficients sont uniformes en u, u_i, $u_{j,k}$. Si nous rendons cette équation rationnelle en z en l'écrivant

$$F^2(z) - z'^2 F_1^2(z) = 0,$$

nous aurons une équation en z de degré $(n+1)$ qui admettra pour racines

$$z_1 = \mathrm{sn}^2 t_1, \;\; z_2 = \mathrm{sn}^2 t_2, \;\; \ldots, \;\; z_n = \mathrm{sn}^2 t_n, \;\; z_{n+1} = \mathrm{sn}^2 [(n+1)\sqrt{-1}\,K' - u].$$

Par une simple division, on pourra débarrasser l'équation de cette dernière racine z_{n+1}, et il restera une équation en z de degré n ayant pour racines $z_1, z_2, \ldots, z_n$. L'équation (23) donnera ensuite les valeurs de z' correspondant aux valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Soit alors $R(z, z')$ une fonction rationnelle quelconque de z et z'; les valeurs

$$(24) \qquad R(z_1, z_1'), \; R(z_2, z_2'), \; \ldots, \; R(z_n, z_n')$$

que prend cette fonction rationnelle aux points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont racines d'une équation algébrique à coefficients uniformes en $u, u_i, u_{j,k}$. En effet, d'après (23), on a pour chaque valeur de $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$z'_i = -\frac{F(z_i)}{F_1(z_i)},$$

et les valeurs (24) sont rationnelles en $z_1, z_2, \ldots, z_n$; elles sont donc racines d'une équation de degré n à coefficients uniformes en $u, u_i, u_{j,k}$, puisqu'il en est ainsi de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Mais $R(z, z')$ est l'expression générale d'une fonction elliptique aux périodes $2K$ et $2\sqrt{-1}K'$: donc enfin les valeurs que prend une fonction elliptique de périodes $2K$ et $2\sqrt{-1}K'$ aux points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont racines d'une équation algébrique à coefficients uniformes en $u, u_i, u_{j,k}$. Ce qui démontre la proposition générale que nous avions en vue au sujet des équations (14) et (15).

7. Il sera maintenant facile de déduire de là la démonstration du théorème III, § 3.

En effet, soit donnée une fonction elliptique quelconque $f_1(t)$; la décomposition de cette fonction en éléments simples nous donnera

$$\begin{aligned} f_1(t) = \text{const.} &+ \sum_{i=1}^{i=q} \mathcal{A}_i[Z(t-a_i) - Z(t-a'_i)] \\ &+ \sum_{j=1}^{j=r} [\mathcal{B}_{j,1} Z'(t-b_j) + \mathcal{B}_{j,2} Z''(t-b_j) + \ldots + \mathcal{B}_{j,\alpha_j} Z^{(\alpha_j)}(t-b_j)]. \end{aligned}$$

Or nous pouvons, sans changer la nature des intégrales des équations (14), remplacer l'une d'entre elles par une combinaison linéaire et homogène de cette équation avec les autres. Nous pouvons, en particulier, remplacer la seconde des équations (14) par

$$f_1(t_1)\,dt_1 + f_1(t_2)\,dt_2 + \ldots + f_1(t_n)\,dt_n = dU_1,$$

où U_1 a la valeur

$$U_1 = u\,\text{const.} + \sum_{i=1}^{i=q} \mathcal{A}_i u_i + \sum_{j=1}^{j=r} [\mathcal{B}_{j,1} u_{j,1} + \ldots + \mathcal{B}_{j,\alpha_j} u_{j,\alpha_j}].$$

Donc le théorème III est démontré de la même façon que le théorème II relatif aux fonctions rationnelles l'a été à la page 253.

Des remarques analogues à celles qui ont été faites au sujet du théorème II (p. 254) trouveraient encore leur place ici; je ne m'y arrêterai pas.

8. Pour faire tout d'abord l'application de la méthode précédente à un exemple simple, prenons les deux équations différentielles

$$(25)\qquad \begin{cases} dt_1 + dt_2 = du, \\ k^2 \operatorname{sn}^2 t_1\, dt_1 + k^2 \operatorname{sn}^2 t_2\, dt_2 = du_1. \end{cases}$$

L'application immédiate de la méthode montre que nous nous trouvons dans un cas où l'une des quantités appelées b_j dans les équations (14) est égale à $2K'\sqrt{-1}$. Nous verrons comment le calcul se présente dans ce cas, sans qu'il soit nécessaire de faire le changement que nous avons indiqué à la page 257, pour éviter toute forme d'indétermination dans les équations générales. En effectuant l'intégration et posant

$$v = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} u - u_1,$$

les équations deviennent

$$(25')\qquad \begin{cases} t_1 + t_2 = u, \\ \dfrac{\Theta'(t_1)}{\Theta(t_1)} + \dfrac{\Theta'(t_2)}{\Theta(t_2)} = v. \end{cases}$$

La fonction

$$\Phi(t) = \frac{H(t - t_1)H(t - t_2)\Theta(t + u)}{\Theta^3(t)},$$

qui admet les périodes $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$, peut s'écrire

$$\Phi(t) = A + Bz + Cz',$$

où

$$z = \operatorname{sn}^2 t, \quad z' = \frac{d \operatorname{sn}^2 t}{dt}.$$

Égalant les deux valeurs de la dérivée logarithmique $\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}$, il vient, en faisant

$$t = \varepsilon + \sqrt{-1}\,\mathrm{K}',$$

$$\frac{\mathrm{B}z' + \mathrm{C}z''}{\mathrm{A} + \mathrm{B}z + \mathrm{C}z'} + 3\mathrm{Z}(\varepsilon) = \frac{\Theta'(\varepsilon - t_1)}{\Theta(\varepsilon - t_1)} + \frac{\Theta'(\varepsilon - t_2)}{\Theta(\varepsilon - t_2)} + \mathrm{Z}(\varepsilon + u).$$

Lorsque ε tend vers zéro, le second membre tend vers la limite

$$\mathrm{Z}(u) - v;$$

quant au premier, il se présente sous la forme indéterminée $-\infty + \infty$; mais, dans le voisinage de $\varepsilon = 0$, on a

$$z = \frac{1}{k^2\varepsilon^2} + \ldots,\quad z' = -\frac{2}{k^2\varepsilon^3} + \ldots,\quad z'' = \frac{6}{k^2\varepsilon^4} + \ldots,\quad \mathrm{Z}(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \ldots;$$

on conclut que, lorsque ε tend vers zéro, le premier membre tend vers $-\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{C}}$. On a donc

$$\mathrm{B} = 2\mathrm{C}[\mathrm{Z}(u) - v].$$

Enfin la fonction $\Phi(t)$ s'annule pour $t = \sqrt{-1}\,\mathrm{K}' - u$, ce qui donne

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}\zeta + \mathrm{C}\zeta' = 0,$$

où ζ et ζ' sont ce que deviennent z et z' pour $t = \sqrt{-1}\,\mathrm{K}' - u$. L'équation $\Phi(t) = 0$, qui a pour racines t_1, t_2 et $(\sqrt{-1}\,\mathrm{K}' - u)$, est donc

$$(26)\qquad 2[\mathrm{Z}(u) - v](z - \zeta) + z' - \zeta' = 0,$$

et la question se trouve ainsi résolue. Si l'on veut former l'équation du second degré, qui admet pour racines

$$z_1 = \mathrm{sn}^2 t_1,\quad z_2 = \mathrm{sn}^2 t_2,$$

il suffit de rendre l'équation (26) rationnelle en z, en isolant z' et élevant au carré.

Cette équation, après suppression du facteur $z - \zeta$, sera l'équation du second degré cherchée. On trouve ainsi, tout calcul fait,

$$k^2(z_1+z_2) = 1 + k^2 - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u} + \left[\frac{\mathrm{H}'(u)}{\mathrm{H}(u)} - v\right]^2,$$

$$k^4 z_1 z_2 = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u}\left[\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} - v\right]^2;$$

les seconds membres sont des fonctions uniformes de u et u_1 qui admettent deux groupes de périodes conjuguées, à savoir pour u les périodes $2\mathrm{K}$ et $2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$, et pour u_1 les périodes de l'intégrale de seconde espèce $2\mathrm{J}$ et $2\mathrm{J}'\sqrt{-1}$ multipliées par k^2.

En appliquant à l'intégration des équations (25) la méthode de Clebsch, on trouve les résultats sous une forme un peu différente. Ainsi l'on obtient, par exemple,

$$k^4 z_1 z_2 = \left\{\frac{1}{\operatorname{sn} u}\left[v - 2\frac{\Theta'\left(\frac{u}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{u}{2}\right)}\right] + k^2 \operatorname{sn}^2\frac{u}{2}\right\}^2.$$

Les deux expressions ainsi trouvées sont identiques, en vertu de la relation

$$k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}^2\frac{u}{2} = 2\frac{\Theta'\left(\frac{u}{2}\right)}{\Theta\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)},$$

que l'on déduit facilement de la formule de décomposition en éléments simples de la fonction

$$\frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cn}\alpha \operatorname{dn}\alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2\alpha}.$$

Pour traiter un deuxième exemple, dans lequel les éléments différentiels admettent des pôles d'un ordre supérieur au second, prenons les équations

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} &dt_1 + dt_2 + dt_3 = du,\\ &pt_1\,dt_1 + pt_2\,dt_2 + pt_3\,dt_3 = du_1,\\ &p't_1\,dt_1 + p't_2\,dt_2 + p't_3\,dt_3 = du_2,\end{aligned}\right.$$

où la fonction pt est la fonction introduite par M. Weierstrass [1]. L'intégration de ces équations donne immédiatement

$$(27') \quad \left\{ \begin{aligned} & t_1 + t_2 + t_3 = u, \\ & \frac{\sigma' t_1}{\sigma t_1} + \frac{\sigma' t_2}{\sigma t_2} + \frac{\sigma' t_3}{\sigma t_3} = -u_1, \\ & pt_1 + pt_2 + pt_3 = u_2. \end{aligned} \right.$$

Pour suivre la méthode générale, considérons la fonction elliptique de t

$$\Phi(t) = \frac{\sigma(t-t_1)\sigma(t-t_2)\sigma(t-t_3)\sigma(t+u)}{\sigma^4 t},$$

qui s'annule aux points t_1, t_2, t_3, $-u$ et qui admet le pôle d'ordre 4, $t=0$. La méthode de M. Hermite pour la décomposition en éléments simples donne ici, avec les nouvelles notations,

$$\Phi(t) = A + Bpt + Cp't + Dp''t,$$

et la question est de déterminer les coefficients A, B, C, D en fonction de u, u_1, u_2, de telle façon que la fonction $\Phi(t)$ s'annule pour $t = t_1, t_2, t_3, -u$. Soit, pour cela,

$$F(t) = \sigma^4 t \Phi(t) = \sigma(t-t_1)\sigma(t-t_2)\sigma(t-t_3)\sigma(t+u);$$

les équations (27') donneront

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{F'(0)}{F(0)} = u_1 + \frac{\sigma' u}{\sigma u}, \\ & \frac{F''(0)}{F(0)} - \left[\frac{F'(0)}{F(0)}\right]^2 = -u_2 - pu, \end{aligned} \right.$$

comme on le voit, en faisant $t = 0$ dans les expressions

$$\frac{d \log F(t)}{dt}, \quad \frac{d^2 \log F(t)}{dt^2}.$$

---

[1] *Die elliptische Functionen*, nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor Weierstrass, bearbeitet und herausgegeben von H.-A. Schwarz. (Göttingen, 1881).

Or il est facile d'exprimer les premiers membres des équations (28) en fonction des coefficients A, B, C, D. En effet, on a, dans un certain domaine de $t = 0$,

$$pt = \frac{1}{t^2} + \frac{g_2}{20}t^2 + \ldots, \quad p't = -\frac{2}{t^3} + \frac{g_2}{10}t + \ldots, \quad p''t = \frac{6}{t^4} + \frac{g_2}{10} + \ldots$$

et, pour toutes les valeurs de t,

$$\sigma^3 t = t^3\left(1 - \frac{g_2}{2^3.3.5}t^4 + \ldots\right);$$

donc on a, dans un certain domaine de $t = 0$,

$$F(t) = \sigma^3 t\,\Phi(t) = 6D - 2Ct + Bt^2 + Et^4 + \ldots;$$

par suite,

$$\frac{F'(0)}{F(0)} = -\frac{C}{3D}, \quad \frac{F''(0)}{F(0)} = \frac{B}{3D}.$$

Les équations (28) donnent alors

$$C = -3D\left(u_1 + \frac{\sigma'u}{\sigma u}\right),$$

$$B = 3D\left[\left(u_1 + \frac{\sigma'u}{\sigma u}\right)^2 - u_2 - pu\right];$$

enfin, en écrivant que $\Phi(t)$ s'annule pour $t = -u$, on a

$$A + Bpu - Cp'u + Dp''u = 0;$$

on obtient ainsi trois équations pour déterminer les rapports des coefficients A, B, C au coefficient D. Remplaçant A, B, C par les valeurs tirées de ces relations, on a, pour l'équation cherchée $\Phi(t) = 0$,

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} 3\left[\left(u_1 + \frac{\sigma'u}{\sigma u}\right)^2 - u_2 - pu\right](pt - pu) \\ \qquad + 3\left(u_1 + \frac{\sigma'u}{\sigma u}\right)(p't + p'u) + p''t - p''u = 0. \end{array}\right.$$

Cette équation admet pour racines $t = t_1, t_2, t_3, -u$. On voit que ses coefficients sont uniformes en u, u_1, u_2 et possèdent, par rapport à u et u_1, deux groupes de périodes, à savoir : pour u, les périodes 2ω et $2\omega'$, et pour u_1, les périodes correspondantes -2η et $-2\eta'$.

Si, dans l'équation (29), on isole le terme en $p't$, puis qu'on élève les deux membres au carré, de façon à avoir une équation rationnelle en pt, cette équation rationnelle sera du quatrième degré, et, après suppression du facteur $pt - pu$, on aura une équation du troisième degré ayant pour racines pt_1, pt_2 et pt_3. L'un des coefficients de cette équation nous est connu *a priori*, car, d'après la troisième des équations (27'), la somme des racines est égale à u_2.

9. Après avoir ainsi examiné les cas où le genre p de la relation algébrique (2) est égal à 0 ou 1, nous allons nous occuper du cas général où le genre p est quelconque; la méthode que nous suivrons sera la même que pour ces deux cas particuliers. Nous emploierons les notations suivantes pour désigner les intégrales abéliennes relatives à la courbe de degré m et de genre p représentée par l'équation (2).

Les p intégrales normales de première espèce seront désignées par

$$u^{(1)}(x,y),\quad u^{(2)}(x,y),\quad \ldots,\quad u^{(p)}(x,y);$$

l'intégrale normale de troisième espèce qui admet les deux points critiques logarithmiques (ξ,η) et (ξ',η') sera désignée par

$$\prod_{\xi',\eta'}^{\xi,\eta}(x,y);$$

enfin l'intégrale normale de seconde espèce qui admet le pôle simple $x=\xi$, $y=\eta$ avec le résidu $+1$, par

$$Z(x,y;\xi,\eta);$$

les dérivées de cette intégrale par rapport au paramètre ξ seront appelées

$$Z'(x,y;\xi,\eta),\quad Z''(x,y;\xi,\eta),\quad \ldots.$$

Ces intégrales s'expriment, comme il est connu, à l'aide des fonctions Θ à p arguments. Soit, en adoptant les notations de M. Briot (*Théorie des fonctions abéliennes*, p. 114), $\Theta(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ ou plus simplement $\Theta(u_i)$ la fonction Θ principale formée avec les périodes normales des intégrales de première espèce; on aura

$$\prod_{\xi',\eta'}^{\xi,\eta}(x,y) = \log \frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\xi,\eta) + h_i]\,\Theta[-u^{(i)}(\xi',\eta') + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\xi',\eta') + h_i]\,\Theta[-u^{(i)}(\xi,\eta) + h_i]},$$

où

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(\alpha_k, \beta_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les $(p-1)$ points $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_{p-1}, \beta_{p-1})$ étant arbitraires: la fonction Π ne dépend pas de ces $(p-1)$ points. L'intégrale de seconde espèce sera alors

$$Z(x,y;\xi,\eta) = -\frac{d\Pi}{d\xi} = -\frac{d}{d\xi}\log\frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\xi,\eta) + h_i]}{\Theta[-u^{(i)}(\xi,\eta) + h_i]}.$$

10. Cela posé, considérons le système d'équations suivantes analogues aux équations (15)

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{ll}
u^{(i)}(x_1,y_1) + u^{(i)}(x_2,y_2) + \ldots + u^{(i)}(x_n,y_n) = u_i & (i = 1, 2, \ldots, p), \\
\prod_{\xi'_j,\eta'_j}^{\xi_j,\eta_j}(x_1,y_1) + \prod_{\xi'_j,\eta'_j}^{\xi_j,\eta_j}(x_2,y_2) + \ldots + \prod_{\xi'_j,\eta'_j}^{\xi_j,\eta_j}(x_n,y_n) = u_{p+j} & (j = 1, 2, \ldots, q), \\
\left.\begin{array}{l}
Z(x_1,y_1;a_k,b_k) + Z(x_2,y_2;a_k,b_k) + \ldots + Z(x_n,y_n;a_k,b_k) = u_{k,1} \\
Z'(x_1,y_1;a_k,b_k) + Z'(x_2,y_2;a_k,b_k) + \ldots + Z'(x_n,y_n;a_k,b_k) = u_{k,2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Z^{(\nu_k-1)}(x_1,y_1;a_k,b_k) + Z^{(\nu_k-1)}(x_2,y_2;a_k,b_k) + \ldots + Z^{(\nu_k-1)}(x_n,y_n;a_k,b_k) = u_{k,\nu_k}
\end{array}\right\} & (k = 1, 2, \ldots, r),
\end{array}\right.$$

où

$$p + q + \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = n.$$

Tous les points (ξ_j, η_j) sont différents les uns des autres, mais un certain nombre des points (ξ'_j, η'_j) peuvent coïncider. Les points (a_k, b_k) sont différents les uns des autres, mais peuvent coïncider avec les points (ξ_j, η_j), (ξ'_j, η'_j). On a ainsi n équations définissant les n points analytiques

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

en fonction des quantités

$$(31) \qquad u_i,\ u_{p-j},\ u_{k,1},\ u_{k,2},\ \ldots,\ u_{k,\gamma_k},$$

de telle façon que les valeurs acquises par une fonction rationnelle de x et y en ces n points sont racines d'une équation à coefficients uniformes par rapport aux quantités (31).

Pour le démontrer, nous formerons l'équation d'une courbe

$$\Phi(x, y) = 0,$$

dont les coefficients sont uniformes par rapport aux quantités (31), et qui coupe la courbe

$$(2) \qquad F(x, y) = 0$$

aux n points

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

et en des points connus.

Nous pouvons, pour simplifier les raisonnements, imaginer qu'on a fait sur la courbe donnée (2) une transformation unidéterminative qui transforme les points singuliers en points doubles ou de rebroussements; nous pouvons aussi supposer que, en vertu de cette transformation, aucun des points (ξ_j, η_j), (ξ'_j, η'_j), (a_k, b_k) ne coïncide avec un point critique. Soit alors d le nombre total de points doubles et de rebroussements de la courbe donnée $F = 0$ de degré m; coupons cette courbe par une courbe adjointe $\Psi = 0$ de degré $\mu > m - 3$.

On sait (¹) qu'on peut, sans changer le système des points d'intersection de la courbe Ψ avec F, remplacer la courbe Ψ par une autre

$$(32) \qquad \Phi(x, y) = 0$$

(¹) *Leçons de Géométrie de Clebsch*, traduction française, t. II, p. 130 et suiv.

de même degré, mais ne renfermant plus d'une façon linéaire et homogène que

$$\mu m - 2d - p + 1$$

coefficients. Lorsque ces coefficients varient, la courbe $\Phi = 0$ coupe la courbe $F = 0$ en

$$\mu m - 2d$$

points variables, parmi lesquels p sont déterminés quand on connaît les

$$\mu m - 2d - p$$

autres. Prenons pour μ le plus petit entier satisfaisant aux deux conditions

$$\mu > m - 3, \quad \mu m - 2d \geq n + p;$$

μ étant ainsi déterminé, nous assujettirons la courbe $\Phi = 0$ à passer par

$$\mu m - 2d - (n + p)$$

points fixes (a', b'), (a'', b''), ... de la courbe F; ce qui détermine

$$\mu m - 2d - (n + p)$$

des coefficients qui figurent dans Φ en fonction linéaire et homogène des autres. Après cette détermination, l'équation de la courbe (32) contiendra, d'une façon linéaire et homogène, $(n + 1)$ coefficients A_0, $A_1, A_2, \ldots, A_n$; cette courbe coupera la courbe donnée F en $(n + p)$ points variables, parmi lesquels p sont déterminés quand on connaît les n autres. Soient

$$(x_1, y_1), \; (x_2, y_2), \; \ldots, \; (x_n, y_n); \; (x'_1, y'_1), \; (x'_2, y'_2), \; \ldots, \; (x'_p, y'_p)$$

les $(n + p)$ points d'intersection variables de la courbe $\Phi = 0$ avec la courbe $F = 0$. D'après le théorème d'Abel, les relations qui déterminent p de ces points en fonction des n autres sont

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & u^{(i)}(x_1, y_1) + u^{(i)}(x_2, y_2) + \ldots + u^{(i)}(x_n, y_n) \\ & \qquad + u^{(i)}(x'_1, y'_1) + \ldots + u^{(i)}(x'_p, y'_p) = K_i, \end{aligned} \right.$$

où

$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

les K_i étant des constantes indépendantes des coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ qui figurent dans Φ. Assujettissons les points

$$(34) \qquad (x'_1, y'_1),\ (x'_2, y'_2),\ \ldots,\ (x'_p, y'_p)$$

à vérifier les p équations

$$(35) \qquad \left\{ \begin{aligned} & u^{(i)}(x'_1, y'_1) + u^{(i)}(x'_2, y'_2) + \ldots \\ & \qquad + u^{(i)}(x'_p, y'_p) = K_i - u_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces équations déterminent les points (34) en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_p$; l'expression des coordonnées de ces points en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ constitue le problème d'inversion de Jacobi, et l'on sait, d'après Riemann, exprimer toute fonction rationnelle symétrique des p points (34) en fonction uniforme de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ par des quotients de fonctions Θ à p arguments.

Les points (34) étant ainsi déterminés, les équations (33) se réduisent à

$$(33') \qquad \left\{ \begin{aligned} & u^{(i)}(x_1, y_1) + u^{(i)}(x_2, y_2) + \ldots \\ & \qquad + u^{(i)}(x_n, y_n) = u_i \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

c'est-à-dire aux p premières des équations (30). En écrivant que la courbe $\Phi(x, y) = 0$ passe par les points (34), on aura p relations

$$\Phi(x'_i, y'_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

que nous remplacerons par les relations équivalentes

$$(36) \qquad x_1'^{\,i-1}\Phi(x'_1, y'_1) + x_2'^{\,i-1}\Phi(x'_2, y'_2) + \ldots + x_p'^{\,i-1}\Phi(x'_p, y'_p) = 0,$$

où

$$i = 1, 2, \ldots, p.$$

Ces équations (36) fournissent p relations entre les constantes $A_0, A_1, \ldots, A_n$ qui figurent linéairement dans l'équation $\Phi(x, y) = 0$; et, dans ces équations, les coefficients de $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont des fonctions symétriques des p points (34), c'est-à-dire des fonctions abéliennes de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ exprimables à l'aide des fonctions Θ. Nous pouvons donc dire que les équations (36) sont p relations linéaires et homogènes entre $A_0, A_1, \ldots, A_n$ à coefficients uniformes en $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

En vertu de ces relations (36), les p premières des équations (30) sont vérifiées par les n points variables

$$(37) \qquad (x_1, y_1), \; (x_2, y_2), \; \ldots, \; (x_n, y_n),$$

où la courbe $\Phi(x, y) = 0$ coupe la courbe donnée. En écrivant que ces n points (37) vérifient aussi les autres équations (30), nous aurons, entre ces mêmes coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$, $n - p$ autres relations linéaires qui, avec les relations (36), détermineront complètement les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux et qui permettront, par suite, d'écrire l'équation de la courbe cherchée $\Phi(x, y) = 0$. Voici comment nous obtiendrons ces $(n - p)$ relations linéaires.

Dans l'expression $\Phi(x, y)$, attribuons aux coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ des valeurs *déterminées* quelconques indépendantes de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et, par suite, ne vérifiant pas les équations (36), et désignons par $\Phi_1(x, y)$ l'expression déterminée ainsi obtenue. Sur les μm points d'intersection des courbes $\Phi = 0$, $\Phi_1 = 0$ avec la courbe donnée, il y en a $(\mu m - n - p)$ qui sont les mêmes pour les deux courbes : par conséquent, la fraction rationnelle

$$(38) \qquad \frac{\Phi(x, y)}{\Phi_1(x, y)}$$

a $(n + p)$ zéros et $(n + p)$ infinis; les $(n + p)$ zéros sont les points (37) qui varient avec les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ de Φ et les points (35) qui dépendent de $u_1, u_2, \ldots, u_p$; les $(n + p)$ infinis sont des points fixes indépendants de $u_1, u_2, \ldots, u_p$, à savoir les $(n + p)$ points d'intersection de la courbe fixe $\Phi_1(x, y) = 0$ qui sont distincts des points d'intersection de $\Phi = 0$ avec la courbe donnée $F = 0$; désignons ces $(n + p)$ infinis fixes par

$$(39) \qquad (s_1, t_1), \; (s_2, t_2), \; \ldots, \; (s_n, t_n), \; (s'_1, t'_1), \; \ldots, \; (s'_p, t'_p).$$

La fraction rationnelle (38) pourra s'écrire ainsi

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\Phi(x,y)}{\Phi_1(x,y)} &= \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x'_k, y'_k) + C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(s'_k, t'_k) + C_i\right]} \\ &\quad \times \prod_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} \frac{\Theta[u^{(i)}(x_\varkappa, y_\varkappa) - u^{(i)}(x,y) + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(s_\varkappa, t_\varkappa) - u^{(i)}(x,y) + h_i]}, \end{aligned}\right.$$

où les C_i ont la signification que leur donne Briot (*Théorie des fonctions abéliennes*, Chap. XII) et où les h_i ont la même valeur que précédemment (p. 268). Cette forme de la fraction (40) résulte des propriétés connues de la fonction $\Theta[u^{(i)}(x,y) - C_i]$, telles qu'elles ont été indiquées par Riemann. En effet, le premier facteur

$$(41)\quad \frac{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(x'_k, y'_k) + C_i\right]}{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(s'_k, t'_k) + C_i\right]}$$

s'annule lorsque le point (x,y) coïncide avec l'un des p points (x'_k, y'_k) et devient infini lorsque $x = s'_k$, $y = t'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Chacun des n autres facteurs, tels que

$$\frac{\Theta[u^{(i)}(x_\varkappa, y_\varkappa) - u^{(i)}(x,y) + h_i]}{\Theta[u^{(i)}(s_\varkappa, t_\varkappa) - u^{(i)}(x,y) + h_i]},$$

admet un seul zéro $x = x_\varkappa$, $y = y_\varkappa$ et un seul infini $x = s_\varkappa$, $y = t_\varkappa$; ce qui démontre l'équation (40). Mais, en vertu des relations (35), le facteur (41) s'écrit

$$\frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) + u_i - K_i + C_i]}{\Theta\left[u^{(i)}(x,y) - \sum_{k=1}^{k=p} u^{(i)}(s'_k, t'_k) + C_i\right]};$$

donc, en posant, pour simplifier l'écriture,

$$
(42)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Lambda(x,y) = {} & \Phi_1(x,y)\,\frac{\theta\left[u^{(i)}(x,y)+u_i-\mathrm{K}_i+\mathrm{C}_i\right]}{\theta\left[u^{(i)}(x,y)-\sum_{k=1}^{k=p}u^{(i)}(s'_k,t'_k)+\mathrm{C}_i\right]}\\
& \times\prod_{\kappa=1}^{\kappa=n}\frac{\theta\left[-u^{(i)}(x,y)+h_i\right]}{\theta\left[u^{(i)}(s_\kappa,t_\kappa)-u^{(i)}(x,y)+h_i\right]},
\end{aligned}
\right.
$$

on a

$$
(43)\qquad \Phi(x,y)=\Lambda(x,y)\prod_{\kappa=1}^{\kappa=n}\frac{\theta\left[u^{(i)}(x_\kappa,y_\kappa)-u^{(i)}(x,y)+h_i\right]}{\theta\left[-u^{(i)}(x,y)+h_i\right]},
$$

$\Lambda(x,y)$ étant une fonction entièrement connue, uniforme en u_1, u_2, ..., u_p.

D'après cette forme de $\Phi(x,y)$, celles des équations (30) qui contiennent les intégrales de troisième espèce peuvent s'écrire

$$
(44)\qquad \Phi(\xi_j,\eta_j)=\Phi(\xi'_j,\eta'_j)\,\frac{\Lambda(\xi_j,\eta_j)}{\Lambda(\xi'_j,\eta'_j)}\,e^{u_{p+j}}\qquad (j=1,2,\ldots,q),
$$

et l'on a ainsi q équations linéaires homogènes nouvelles entre les coefficients A_0, A_1, ..., A_n de Φ, les coefficients de ces équations étant uniformes en u_1, u_2, ..., u_p; u_{p+1}, u_{p+2}, ..., u_{p+q}.

Enfin, pour exprimer que les points (x_1,y_1), ..., (x_n,y_n) vérifient celles des équations (30) qui contiennent les intégrales de seconde espèce, nous remarquerons que l'équation (43) donne par la différentiation par rapport à x les identités suivantes, où l'on désigne par $M(x,y)$ la fonction rationnelle

$$
\frac{d\log\Lambda(x,y)}{dx},
$$

et où le signe Σ indique une sommation étendue aux n points (x_1,y_1),

$(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$,

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned}
\Phi'(x,y) &= \Phi(x,y)\left[M(x,y) - \Sigma Z(x_1, y_1; x, y)\right],\\
\Phi''(x,y) &= \Phi'(x,y)\left[M(x,y) - \Sigma Z(x_1, y_1; x, y)\right]\\
&\quad + \Phi(x,y)\left[M'(x,y) - \Sigma Z'(x_1, y_1; x, y)\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi^{(\nu_k)}(x,y) &= \Phi^{(\nu_k-1)}\left[M - \Sigma Z\right] + (\nu_k - 1)\Phi^{(\nu_k-2)}\left[M' - \Sigma Z'\right] + \ldots\\
&\quad + \Phi(x,y)\left[M^{(\nu_k-1)}(x,y) - \Sigma Z^{(\nu_k-1)}(x_1, y_1; x, y)\right].
\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, suivant la notation indiquée (p. 267 et 268),

$$Z^{(\nu)}(x_1, y_1; x, y)$$

désigne la dérivée

$$\frac{d^\nu Z(x_1, y_1; x, y)}{dx^\nu}.$$

En remplaçant, dans les identités (45), x et y par a_k, b_k, ces identités deviennent, en vertu du dernier groupe des équations (30),

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned}
\Phi'(a_k, b_k) &= \Phi(a_k, b_k)\left[M(a_k, b_k) - u_{k,1}\right],\\
\Phi''(a_k, b_k) &= \Phi'(a_k, b_k)\left[M(a_k, b_k) - u_{k,1}\right]\\
&\quad + \Phi(a_k, b_k)\left[M'(a_k, b_k) - u_{k,2}\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Phi^{(\nu_k)}(a_k, b_k) &= \Phi^{(\nu_k-1)}(a_k, b_k)\left[M(a_k, b_k) - u_{k,1}\right]\\
&\quad + (\nu_k - 1)\Phi^{(\nu_k-2)}(a_k, b_k)\left[M'(a_k, b_k) - u_{k,2}\right] + \ldots\\
&\quad + \Phi(a_k, b_k)\left[M^{(\nu_k-1)}(a_k, b_k) - u_{k,\nu_k}\right],
\end{aligned}\right.$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, r.$$

On a ainsi $(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r)$ équations linéaires homogènes entre A_0, $A_1, \ldots, A_n$, et les coefficients de ces équations sont uniformes en u_1, $u_2, \ldots, u_{p+q}$; $u_{k,1}, u_{k,2}, \ldots, u_{k,\nu_k}$.

En résumé, les équations (36), (44) et (46), au nombre de

$$p + q + \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = n,$$

fournissent n relations linéaires et homogènes pour déterminer les rapports des quantités $A_0, A_1, \ldots, A_n$ à l'une d'entre elles. En égalant à zéro le déterminant des coefficients de $A_0, A_1, \ldots, A_n$ dans ces équations et dans l'équation $\Phi(x, y) = 0$, on aura, sous forme de déterminant, l'équation cherchée

$$(47) \qquad \Phi(x, y) = 0$$

d'une courbe de degré μ coupant la courbe donnée $F = 0$ en des points connus et aux n points (37).

On en conclut immédiatement que les abscisses de ces n points sont racines d'une équation de degré n à coefficients uniformes en u_1, $u_2, \ldots, u_{p,q}$; $u_{k,1}, \ldots, u_{k,\nu_k}$. En effet, par l'élimination de y entre l'équation (47) et l'équation de la courbe donnée $F(x, y) = 0$, on obtiendra une équation de degré $m\mu$ en x qui admettra pour racines les abscisses des points (37), des points (34), des points singuliers et enfin des points fixes (a', b'), (a'', b''), ... (p. 270). En divisant le premier membre de cette équation par les polynômes en x qui admettent pour racines les abscisses des points (34), des points singuliers et des points fixes (a', b'), (a'', b''), ..., on obtiendra l'équation annoncée de degré n ayant pour racines les abscisses des points (37).

D'une façon générale, soit

$$z = R(x, y),$$

$R(x, y)$ étant une fonction rationnelle quelconque de x et y. Les valeurs que prend cette fonction z aux points d'intersection des deux courbes

$$\Phi = 0, \quad F = 0$$

sont racines d'une équation de degré $m\mu$ qui, après suppression des facteurs étrangers, fournira une équation de degré n en z ayant pour racines

$$R(x_1, y_1), \ R(x_2, y_2), \ \ldots, \ R(x_n, y_n);$$

les coefficients de cette équation seront uniformes en $u_1, u_2, \ldots, u_{p,q}$,

$u_{k.1}, u_{k.2}, \ldots, u_{k,\nu_k}$; ils contiendront rationnellement les variables $u_{k.1}$, $u_{k.2}, \ldots, u_{k.\nu_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$, comme arguments de fonctions exponentielles les variables $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_{p+q}$, et comme arguments de fonctions Θ les variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$. La nature des groupes de périodes simultanées de ces coefficients résulte immédiatement de la forme des équations (30); nous ne nous y arrêterons pas.

Le théorème que nous avions en vue est donc démontré pour ces équations (30).

11. Il sera maintenant facile d'établir le théorème général I, énoncé à la page 246. En effet, soit $\varphi_1(x, y)$ une fonction rationnelle quelconque de x et y; l'intégrale

$$\int \varphi_1(x, y)\, dx \tag{48}$$

pourra être décomposée en intégrales normales de *première, deuxième* et *troisième* espèce; on pourra, de plus, par une transformation unidéterminative, amener les pôles et les points critiques logarithmiques des intégrales de deuxième et troisième espèce à être distincts des points critiques de la relation algébrique (2). Alors l'intégrale (48) sera de la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=p} \mathrm{A}_i\, u^{(i)}(x, y) + \sum_{j=1}^{j=q} \mathfrak{B}_j \prod_{\xi'_j, \eta'_j}^{\xi_j, \eta_j}(x, y) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{k=r} \big[\mathfrak{C}_{k.1}\, Z(x, y; a_k, b_k) \\ &\qquad + \mathfrak{C}_{k.2}\, Z'(x, y; a_k, b_k) + \ldots + \mathfrak{C}_{k.\nu_k}\, Z^{(\nu_k - 1)}(x, y; a_k, b_k)\big]. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Or on peut, sans changer la nature des intégrales des équations (30), remplacer l'une quelconque d'entre elles par une combinaison linéaire à coefficients constants de cette équation avec les autres. On peut, par exemple, en conservant toutes les autres, remplacer la *dernière* d'entre elles par

$$\int \varphi_1(x_1, y_1)\, dx_1 + \int \varphi_1(x_2, y_2)\, dx_2 + \ldots + \int \varphi_1(x_n, y_n)\, dx_n = U,$$

en faisant

$$(50)\quad \begin{cases} U = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=p} \mathcal{A}_i u_i + \sum_{j=1}^{j=q} \mathcal{B}_j u_{p+j} \\ \qquad + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=r} (\mathcal{C}_{k,1} u_{k,1} + \mathcal{C}_{k,2} u_{k,2} + \ldots + \mathcal{C}_{k,\nu_k} u_{k,\nu_k}). \end{cases}$$

On obtient ainsi un système d'équations de la forme (1) possédant la propriété indiquée dans l'énoncé du théorème I. Ce théorème est donc démontré.

On voit, en outre, quelles sont les fonctions rationnelles $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$, $\ldots$, $\varphi_n(x, y)$ qu'il faut associer à la fonction donnée $\varphi_1(x, y)$: ce sont les dérivées par rapport à x des p intégrales de première espèce et de toutes les intégrales de deuxième et troisième espèce qui figurent dans l'expression (49) de l'intégrale (48), à l'exception de la *dernière*,

$$Z^{(r+1)}(x, y; a_r, b_r),$$

d'entre elles. On montrerait, comme nous l'avons fait à propos des courbes unicursales (p. 254), que le nombre $(n-1)$ des fonctions φ_2, φ_3, $\ldots$, φ_n à associer à φ_1 est un minimum, et qu'il peut être dépassé autant qu'on le veut.

12. Nous avons supposé, pour plus de simplicité, dans l'énoncé du théorème I (p. 246), qu'une seule fonction rationnelle $\varphi_1(x, y)$ est donnée arbitrairement, et nous venons de montrer comment on peut déterminer les $(n-1)$ autres fonctions

$$\varphi_2(x, y), \quad \varphi_3(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x, y)$$

à associer à celle-là.

La méthode que nous avons suivie à cet effet permet de démontrer la proposition plus générale suivante :

Étant données k fonctions rationnelles de x et y linéairement indépendantes

$$\varphi_1(x, y), \quad \varphi_2(x, y), \quad \ldots, \quad \varphi_k(x, y),$$

on peut leur associer un certain nombre $(n-k)$ *d'autres fonctions rationnelles*

$$\varphi_{k+1}(x,y),\ \varphi_{k+2}(x,y),\ \ldots,\ \varphi_n(x,y),$$

de façon que les fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *définies par les équations* (1) *possèdent les propriétés indiquées dans l'énoncé du théorème I.*

Nous n'insisterons pas davantage sur cette généralisation facile du théorème I.