JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. DE SAINT-GERMAIN

Sur une application des équations de Lagrange

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 129-134.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__129_0>

Sur une application des équations de Lagrange;

Par M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Les problèmes de Dynamique qu'on peut résoudre complètement, et pour lesquels l'emploi des équations de Lagrange offre un réel avantage, ne sont pas si nombreux qu'il n'y ait quelque intérêt à en signaler un, même des plus simples. Il s'agit de trouver le mouvement d'un point M, assujetti à rester sur un cône donné et sollicité par deux forces dirigées, l'une vers le sommet O du cône, l'autre suivant la perpendiculaire MN abaissée du point M sur une droite OZ issue du point O; les deux forces sont inversement proportionnelles, la première au cube de MO, la seconde au cube de MN.

Je suppose la masse du mobile égale à l'unité, je fais $OM = r$, $MN = p$, et je représente les deux forces par $\frac{A}{r^3}$ et $\frac{B}{p^3}$: on voit qu'il existe une fonction des forces, $V = \frac{A}{2r^2} + \frac{B}{2p^2}$.

La position du point M sur le cône peut être définie par sa distance r au sommet, et par un paramètre λ qui caractérise la génératrice OM; à des variations infiniment petites, dr et $d\lambda$, des coordonnées r et λ correspond pour le point M un déplacement dont l'expression est de la forme

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 Q\, d\lambda^2},$$

Q étant une fonction de λ qui dépend de la nature du cône : la force vive du mobile sera donc, avec les notations de Lagrange,

$$2T = r'^2 + r^2 Q \lambda'^2.$$

La perpendiculaire p est de la forme $\frac{r}{\sqrt{P}}$, P étant une nouvelle fonction de λ; et la fonction des forces devient

$$V = -\frac{A + BP}{2r^2}.$$

Celle des équations de Lagrange qui contient les dérivées relatives à r est donc

$$(1)\qquad \frac{dr'}{dt} - Qr\lambda'^2 + \frac{A + BP}{r^3} = 0.$$

Au lieu de la seconde équation, j'écris l'intégrale des forces vives, qui est une conséquence de cette équation et de la précédente,

$$(2)\qquad r'^2 + r^2 Q \lambda'^2 - \frac{A + BP}{r^2} - h = 0.$$

Si je désigne par ρ, α, β, P_0 les valeurs initiales de r, r', $r\lambda'\sqrt{Q}$, P, j'aurai pour la valeur de h

$$(3)\qquad h = \alpha^2 + \beta^2 - \frac{A + BP_0}{\rho^2}.$$

Additionnons membre à membre les équations (1) et (2), après avoir multiplié par r tous les termes de la première : il se fait de grandes réductions et il reste

$$r\frac{dr'}{dt} + r'^2 - h = 0.$$

On peut intégrer deux fois de suite, et, en supposant $t = 0$ à l'époque initiale, on a, sous forme finie, l'une des intégrales du problème

$$(4)\qquad r^2 = \rho^2 + 2\rho\alpha t + ht^2.$$

Ensuite je tire de cette équation

$$t = \frac{-\rho\alpha \pm \sqrt{hr^2 + \rho^2(\alpha^2 - h)}}{h}, \quad dt = \frac{\pm r\,dr}{\sqrt{hr^2 + \rho^2(\alpha^2 - h)}},$$

je remplace dans l'équation (2) r' et λ' par $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d\lambda}{dt}$, puis dt par la valeur ci-dessus, et j'obtiens entre r et λ une équation dans laquelle les variables se séparent, et qui peut s'écrire

$$(5) \qquad \frac{dr}{r\sqrt{hr^2 + \rho^2(\alpha^2 - h)}} = \frac{\pm d\lambda\sqrt{Q}}{\sqrt{A + BP - \rho^2(\alpha^2 - h)}}.$$

C'est la seconde intégrale du problème, et il est évident qu'on ne peut effectuer la quadrature du second membre sans particulariser les fonctions P et Q.

L'équation (5) peut être considérée comme l'équation de la trajectoire sur le cône; le premier membre est essentiellement réel, puisqu'il est égal à $\frac{dt}{r^2}$; le second membre doit aussi être réel, et cette condition montrera entre quelles limites peut varier λ. Au point dont les coordonnées sont r et λ, la trajectoire fait avec la génératrice du cône l'angle i défini par l'équation

$$(6) \qquad \tang^2 i = \frac{r^2 Q\,d\lambda^2}{dr^2} = \frac{A + BP - \rho^2(\alpha^2 - h)}{hr^2 + \rho^2(\alpha^2 - h)}.$$

L'équation (4), qui donne la valeur explicite de r^2 en fonction du temps, présente cette circonstance remarquable qu'elle ne dépend pas de la nature du cône; sa discussion, si élémentaire qu'il n'y a pas lieu de la développer ici, apprend comment varie la distance du mobile au point O, et si cette distance peut s'annuler; dans ce cas, le mobile se précipitera au sommet du cône avec une vitesse infinie, rencontrant sous un angle généralement fini les génératrices qui y concourent; il sera soumis à une force infinie, et l'on ne peut dire ce qu'il deviendra ultérieurement sans faire des hypothèses nécessairement arbitraires. L'équation (4) montre que, quand le phénomène se produit, c'est au bout d'un temps fini, après lequel l'équation elle-même cesse d'être applicable, puisque, en général, elle donnerait pour r des valeurs imaginaires; il y a dans les formules une discontinuité sur laquelle il serait peu utile d'insister.

Je signalerai deux cas particuliers où les résultats se simplifient : 1° quand $h = \alpha^2$, l'équation (4) donne pour r la valeur très simple $\rho + \alpha t$; il faut remarquer que, si cette formule donne pour r des valeurs négatives, elles ne sont acceptables qu'en vertu d'une hypothèse convenable sur ce qui se passe quand le mobile se précipite au sommet du cône; l'équation (5) se simplifie, sans qu'on puisse encore effectuer l'intégration.

Le second cas remarquable est celui où h et α sont nuls; r reste constant et la trajectoire est une courbe sphérique qui dépend de la nature du cône : la loi du mouvement sera fournie par l'équation (2), qui donne ici

$$dt = \pm \frac{d\rho}{\rho^2}\sqrt{\frac{C}{A - B\rho}}.$$

La pression du mobile sur le cône n'est pas donnée par les équations de Lagrange : le moyen le plus simple de la calculer est de se servir de trois axes rectangulaires dont l'un coïncide avec OZ, et dont l'origine soit en O. Soient $F(x, y, z) = 0$ l'équation du cône, N la pression qu'il supporte; on peut écrire les trois équations

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{Ax}{r^3} - \dfrac{Bx}{p^3} - \dfrac{N\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cdots}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si l'on différentie deux fois par rapport à t l'équation du cône, à laquelle satisfont les coordonnées du mobile, on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2} + x'^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \ldots + 2x'y'\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Remplaçant $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ par leurs valeurs (7), et tenant compte de ce que $F(x, y, z)$ est homogène, on trouve

$$N\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}=\frac{Bz}{p^3}\frac{\partial F}{\partial z}+x'^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\ldots+2x'y'\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y};$$

on n'aura qu'à calculer x, y, z et leurs dérivées premières en fonction de r, λ, r', λ', c'est-à-dire, en définitive, en fonction de r et de λ, pour avoir la valeur explicite de N.

Appliquons nos calculs au cas où le cône, rapporté aux axes que je viens d'indiquer, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Le paramètre λ qui caractérise une génératrice sera celui qui entre dans l'équation du cône homofocal au cône donné et passant par la génératrice considérée, soit

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}-\frac{y^2}{\lambda-b^2}-\frac{z^2}{\lambda+c^2}=0.$$

Je suppose $a^2>b^2$; on sait que λ doit être compris entre ces deux quantités pour que les cônes considérés se coupent. Leurs équations, jointes à la relation $x^2+y^2+z^2=r^2$, nous donnent

$$x^2=\frac{a^2r^2(a^2-\lambda)}{(a^2-b^2)(a^2+c^2)},\quad y^2=\frac{b^2r^2(\lambda-b^2)}{(a^2-b^2)(b^2+c^2)},\quad z^2=\frac{c^2r^2(c^2+\lambda)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)};$$

on calculera T et p et l'on en déduira les fonctions P et Q. Nous n'avons rien de particulier à dire sur l'équation qui lie r et t; quant à l'équation (5) de la trajectoire, elle devient, en remplaçant A par sa valeur tirée de la relation (3),

$$\frac{\rho\,dr}{r\sqrt{hr^2+\rho^2(\alpha^2-h)}}$$
$$=\frac{\pm\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{(a^2-\lambda)(\lambda-b^2)(\lambda+c^2)}\sqrt{\beta^2\rho^2+\dfrac{Bc^2(a^2+c^2)(b^2+c^2)(\lambda-\lambda_0)}{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-c^2\lambda)(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-c^2\lambda_0)}}}.$$

Il n'y a lieu à discuter que le signe de la quantité sous le dernier radical; cette quantité, positive pour $\lambda = a^2$, peut être positive ou négative pour $\lambda = b^2$; dans le second cas, elle s'annule pour une certaine valeur de λ, et la trajectoire serpente entre deux génératrices répondant à cette valeur et situées du même côté du plan des xz; dans le cas contraire, λ varie alternativement de a^2 à b^2, et la trajectoire fait le tour du cône. On verra que, si elle s'étend indéfiniment, elle admet une asymptote rectiligne. Mais je me hâte de terminer en donnant la valeur de N déduite de la formule générale

$$N = \frac{a^2b^2c^2}{\lambda^2 r^4}\left|\frac{B(a^2+c^2)(b^2+c^2)(\lambda^2+2c^2\lambda-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2)}{(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-c^2\lambda)^2} - A + \varphi'^2\chi^2 - h\right|.$$