JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G.-H. HALPHEN

Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 11-85.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__11_0>

Sur un problème concernant les équations différentielles linéaires;

PAR M. G.-H. HALPHEN.

INTRODUCTION.

Si, entre diverses solutions d'une même équation différentielle linéaire, solutions d'ailleurs inconnues, il existe une relation connue, quel profit peut-on en tirer pour l'intégration?

A cette question, d'un caractère si indéterminé, la réponse est que, *en général, on peut trouver explicitement, sans aucune intégration, les solutions qui figurent dans la relation donnée.* Effectivement, si l'on différentie continuellement cette relation, en abaissant les dérivées des inconnues au-dessous de l'ordre de l'équation différentielle, on parviendra à des relations en nombre suffisant pour déterminer ces inconnues par des équations simultanées. Ce raisonnement, tout élémentaire, ne suppose même pas que l'équation différentielle soit linéaire. Toutefois, quand il s'agit d'une équation linéaire, la conclusion se complète : *si la relation donnée a lieu entre des solutions en nombre égal à l'ordre de l'équation, cette équation s'intègre complètement.*

Ces généralités, on en conviendra sans peine, ne sont guère instructives. Elles laissent dans l'obscurité les cas d'exception; elles entraînent à des calculs impraticables, sauf pour des exemples faits exprès et dénués d'intérêt. La méthode désirable devra, au contraire, fournir d'elle-même des exemples intéressants, et mettre en lumière les cas exceptionnels.

Pour ce but, je restreins la question au cas où la relation donnée est algébrique par rapport aux quantités inconnues.

Désignons, d'une manière générale, par la notation $\chi_p(y)$ un polynôme homogène, de degré p, *à coefficients constants*, formé avec diverses indéterminées y_1, y_2, ... Considérons ces indéterminées comme des solutions d'une équation différentielle linéaire donnée; et, les lettres λ représentant des fonctions de la variable indépendante, toutes connues, supposons donnée la relation

$$(1) \qquad \lambda_0\chi_{p_0}(y) + \lambda_1\chi_{p_1}(y) + \lambda_2\chi_{p_2}(y) + \ldots = \lambda.$$

Chacun des polynômes $\chi_p(y)$ satisfait à une équation différentielle linéaire que l'on peut former; c'est l'équation aux puissances $p^{\text{ièmes}}$ des solutions de la proposée. La relation donnée peut donc être envisagée comme ayant lieu entre les solutions de diverses équations linéaires données. Sa forme linéaire rend aisée la discussion du résultat. En général, Y_0, Y_1, Y_2, ... étant des solutions inconnues de diverses équations linéaires données (sans second membre) toutes différentes, et ces solutions satisfaisant à la relation

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots = \lambda,$$

on pourra déterminer ces solutions en résolvant un système d'équations simultanées du premier degré, sauf le cas d'exception suivant : s'il existe un ou plusieurs systèmes de solutions Z_0, Z_1, Z_2, ... des mêmes équations respectivement, qui satisfassent à la relation

$$Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots = 0;$$

alors les Y dépendront d'une équation différentielle linéaire, à second membre, dont l'ordre égalera le nombre des systèmes Z.

Appliquant ceci à l'équation (1), où chaque produit $\lambda\chi(y)$ est une quantité telle que Y, nous pouvons conclure de la sorte : Étant donnée une relation algébrique entre les solutions inconnues d'une équation différentielle linéaire, on en déduira, en fonction de la variable indépendante, l'expression de polynômes entiers, homogènes et à coefficients constants, composés avec ces solutions. Ceci est dit sous réserve des cas exceptionnels, dont je parlerai plus loin.

Par ces considérations, le problème général, concernant les relations algébriques données entre les solutions inconnues, est ramené à ce cas particulier : *Intégrer une équation différentielle linéaire, quand on connaît, en fonction de la variable indépendante, l'expression d'un polynôme entier, homogène, à coefficients constants, formé avec les solutions inconnues.*

C'est à ce problème qu'est consacré le présent Mémoire. J'y emploierai une méthode nouvelle fondée sur la considération des covariants des formes algébriques. Mais examinons ici ce qu'indique l'analyse générale, rappelée au début et fondée seulement sur l'élimination.

Soient n l'ordre de l'équation différentielle, p le degré du polynôme χ, et, en outre,

$$N = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}{1.2.3\ldots p}.$$

On donne l'expression explicite de χ en fonction de la variable indépendante; soit λ cette fonction. Les dérivations successives donnent

$$(2)\quad \chi = \lambda,\quad \sum_m y'_m \frac{\partial \chi}{\partial y_m} = \lambda',\quad \sum_m y''_m \frac{\partial \chi}{\partial y_m} + \sum_{m,i} y'_m y'_i \frac{\partial^2 \chi}{\partial y_m \partial y_i} = \lambda'',\quad \ldots.$$

Les équations obtenues ainsi contiennent, dans leurs premiers membres, les polaires de χ, formées avec les $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$. Le nombre total de ces polaires, la forme χ y comprise, est N. Si l'on s'arrête à la dérivée d'ordre N, on a des équations en nombre $N+1$, qui permettent l'élimination de toutes ces polaires. Le résultat de l'élimination est ainsi une équation linéaire, d'ordre N, à laquelle doit satisfaire λ. C'est l'*équation aux puissances $p^{\text{ièmes}}$*. Par hypothèse, λ satisfait à cette équation.

Il est manifeste que toute dérivation ultérieure est dès lors superflue. Les équations résultant des $N-1$ premières dérivations sont seules à considérer. Avec la proposée $\chi = \lambda$, on a, en tout, N équations. Si ν est le nombre des quantités y figurant dans χ, ces quantités, avec leurs dérivées, donnent $n\nu$ inconnues, qu'on pourra trouver par là si $n\nu$ ne dépasse pas N.

Prenons, pour ν, son maximum n. Le nombre n^2 n'est supérieur à N que si p est moindre que 3. Donc, en général, *la connaissance, en fonction de la variable indépendante, d'un polynôme $\chi(y)$, de degré au moins égal à* 3, *entraîne l'intégration complète de l'équation*, sauf d'abord le cas d'exception où ce polynôme ne contient pas autant d'indéterminées qu'il y a d'unités dans l'ordre de l'équation. En ce cas particulier, on trouve seulement pareil nombre de solutions. Mais, en outre, l'analyse précédente fait encore connaître un autre cas d'exception: c'est celui dans lequel les $N - 1$ premières dérivations conduisent à moins de $N - 1$ équations distinctes.

En ce cas, l'équation aux puissances $p^{\text{ièmes}}$ s'abaisse à un ordre $N - k$, moindre que N, et il existe, entre les solutions de l'équation proposée, k relations homogènes, à coefficients constants, et du degré p. Le nombre des équations (2) est seulement $N - k$; mais il existe, en même temps, k systèmes d'équations analogues, où λ est réduit à zéro. On démontre très facilement que ces équations permettent de trouver les inconnues y, toutes les fois que les k polynômes, analogues à χ, ne sont pas les produits d'un même polynôme du second degré par d'autres polynômes. Ainsi, le degré de χ étant au moins égal à 3, voici le seul cas où l'on ne puisse trouver, par l'élimination, les solutions qui figurent dans χ : c'est le cas où l'expression de ce polynôme par la variable indépendante se réduit à zéro, où ce polynôme se décompose en facteurs dont l'un est du second degré, où enfin c'est ce dernier facteur qui est nul. Il s'agit, on le voit, d'une équation différentielle linéaire entre les solutions de laquelle existe une relation quadratique à coefficients constants, et sur laquelle, en définitive, on ne fournit aucun autre renseignement.

Cette exception se range dans le cas où le degré du polynôme χ est égal à 2, cas auquel la conclusion précédente ne peut s'appliquer. La connaissance d'une forme quadratique, composée avec les solutions, n'entraîne pas l'intégration. Elle conduit à faire connaître les solutions qui y figurent dans le cas seulement où ces solutions sont en nombre au plus égal à $\frac{n+1}{2}$. Par exemple, pour une équation du troisième ordre, la connaissance du produit de deux solutions suffira pour faire trouver ces deux solutions, sauf encore le cas où trois solutions quelconques sont liées par une relation quadratique à coefficients constants, et dans lequel une quadrature sera nécessaire.

Pour les formes quadratiques, on le voit, le problème est d'une nature toute spéciale. J'ai rencontré, dans l'étude de ce problème particulier, de nombreux résultats que je crois dignes d'intérêt, mais que je me réserve de traiter à part dans un autre travail.

Revenons au problème où l'on donne la relation (1), contenant au moins deux polynômes χ distincts. Des considérations de même nature font reconnaître que les dérivations successives fournissent assez d'équations pour déterminer les inconnues. En résumé, étant donnée une relation algébrique entre diverses solutions d'une équation différentielle linéaire, l'élimination suffit à faire connaître ces solutions, sauf un cas d'exception unique : celui où la relation consiste en un polynôme du second degré, homogène, à coefficients constants, égalé à zéro.

Le Mémoire actuel est divisé en trois Parties contenant successivement la *Théorie générale*, les *Équations du second ordre*, les *Équations du troisième ordre*.

I. — THÉORIE GÉNÉRALE.

INTÉGRALES NON LINÉAIRES.

1. En même temps qu'une équation linéaire quelconque, j'aurai ici à considérer son *adjointe*. Rappelons succinctement, d'après Lagrange, ce que c'est que deux fonctions linéaires adjointes.

Les lettres g_0, g_1, ..., γ_0, γ_1, ... désignant des fonctions *données* de la variable indépendante x; y et η des fonctions *indéterminées* de cette même variable, considérons les deux combinaisons linéaires

$$G(y) = g_0 y^{(n)} + n g_1 y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} g_2 y^{(n-2)} + \ldots + n g_{n-1} y' + g_n y,$$

$$\Gamma(\eta) = \gamma_0 \eta^{(n)} + n \gamma_1 \eta^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} \gamma_2 \eta^{(n-2)} + \ldots + n \gamma_{n-1} \eta' + \gamma_n \eta.$$

Ces deux fonctions $G(y)$, $\Gamma(\eta)$ sont dites *adjointes* l'une de l'autre, s'il existe une troisième fonction $B(y, \eta)$, linéaire et homogène par rapport à $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ d'une part, par rapport aussi à $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$ d'autre part, telle qu'on ait *identiquement*, c'est-à-dire quelles que soient les deux fonctions y, η,

$$(3) \qquad \eta G(y) + (-1)^{n-1} y \Gamma(\eta) = B'(y, \eta).$$

Cette condition détermine complètement l'une des deux fonctions $G(y)$, $\Gamma(\eta)$ quand on se donne l'autre arbitrairement. La liaison est exprimée par l'un ou l'autre des deux systèmes suivants, à volonté,

$$\begin{array}{ll}
\gamma_0 = g_0, & g_0 = \gamma_0, \\
\gamma_1 = - g_1 + g_0', & g_1 = - \gamma_1 + \gamma_0', \\
\gamma_2 = g_2 - 2 g_1' + g_0'', & g_2 = \gamma_2 - 2\gamma_1' + \gamma_0'', \\
\gamma_3 = - g_3 + 3 g_2' - 3 g_1'' + g_0''', & g_3 = - \gamma_3 + 3\gamma_2' - 3\gamma_1'' + \gamma_0''', \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

La loi de ces équations est manifeste, et elle peut se résumer encore ainsi :

$$\Gamma(\eta) = (g_0 \eta)^{(n)} - n (g_1 \eta)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} (g_2 \eta)^{n-2} + \ldots + (-1)^n n (g_{n-1} \eta)' + (-1)^{n-1} g_n \eta,$$

$$G(y) = (\gamma_0 y)^{(n)} - n (\gamma_1 \eta)^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} (\gamma_2 y)^{n-2} + \ldots + (-1)^n n (\gamma_{n-1} \eta)' + (-1)^{n-1} \gamma_n y.$$

Les deux fonctions $G(y)$, $\Gamma(\eta)$ étant composées de la sorte, la relation (3) est vérifiée par une fonction **B**, qui, écrite sous l'une ou l'autre des formes

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l}
B = \beta_0 y^{(n-1)} - \beta_1 y^{(n-2)} + \beta_2 y^{(n-3)} + \ldots + (-1)^n \beta_{n-2} y' + (-1)^{n-1} \beta_{n-1} y, \\
(-1)^{n-1} B = b_0 \eta^{(n-1)} - b_1 \eta^{(n-2)} + b_2 \eta^{(n-3)} + \ldots + (-1)^n b_{n-2} \eta' + (-1)^{n+1} b_{n-1} \eta,
\end{array} \right.$$

a les coefficients suivants :

$$
(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\beta_0 &= g_0 z,\\
\beta_1 &= (g_0 z)' - n g_1 z,\\
\beta_2 &= (g_0 z)'' - n(g_1 z)' + \frac{n(n-1)}{1.2} g_2 z,\\
\beta_3 &= (g_0 z)''' - n(g_1 z)'' + \frac{n(n-1)}{1.2}(g_2 z)' - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} g_3 z,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
b_0 &= \gamma_0 y,\\
b_1 &= (\gamma_0 y)' - n\gamma_1 y,\\
b_2 &= (\gamma_0 y)'' - n(\gamma_1 y)' + \frac{n(n-1)}{1.2}\gamma_2 y,\\
b_3 &= (\gamma_0 y)''' - n(\gamma_1 y)'' + \frac{n(n-1)}{1.2}(\gamma_2 y)' - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\gamma_3 y,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Si, au lieu de laisser z indéterminée, on remplace cette lettre par une solution particulière de l'équation $\Gamma(z) = 0$, il résulte de (3) que, en égalant B à une constante arbitraire, on obtient une intégrale première de l'équation $G(y) = 0$.

2. Supposons z remplacée successivement par n solutions, distinctes entre elles, de l'équation $\Gamma(z) = 0$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Soient abréviativement

$$B_1 = B(y, z_1),\quad B_2 = B(y, z_2),\quad \ldots,\quad B_n = B(y, z_n).$$

Prenons un polynôme, de degré quelconque, homogène, à coefficients constants, où les indéterminées soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$. En égalant à une constante arbitraire ce polynôme $\chi(B)$, on aura encore une intégrale première de l'équation $G(y) = 0$. Cette intégrale, on le voit, est homogène et du même degré par rapport à $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ que $\chi(B)$ par rapport aux lettres B. Les coefficients sont des fonctions de la variable indépendante. De telles intégrales ont déjà été envisagées par M. Darboux dans un travail très remarquable [1] auquel j'emprunterai plus loin un résultat important.

Ce qu'il faut tout d'abord observer dans cette intégrale, que je désignerai par F, c'est la composition du coefficient de la plus haute puissance de $y^{(n-1)}$. D'après la première forme de B et l'expression de β_0, si p est le degré de F, le coefficient de $[y^{(n-1)}]^p$ est égal à $g_0^p\chi(\eta)$. Si donc, sans connaître d'ailleurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, on connaît l'expression en x d'un polynôme homogène, à coefficients constants et de degré p, où les indéterminées soient les solutions η de $\Gamma(\eta) = 0$, on connaîtra du même coup le premier coefficient d'une intégrale F, du même degré p, pour $G(y) = 0$.

Au moyen des formules (5), on peut reconnaître, et je montrerai d'ailleurs plus loin d'une autre manière et complètement, qu'en général, le premier coefficient de F étant connu, tous les autres s'en déduisent explicitement. Donc, quand on connaît l'expression en x d'un polynôme $\chi(\eta)$, on en conclut explicitement une intégrale première F pour l'équation $G(y) = 0$ Cette intégrale est du même degré en $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ que $\chi(\eta)$ en $\eta_1, \eta_2, \ldots$.

La fonction $\chi(\eta)$ sera dite la *source* de l'intégrale F.

3. Quels peuvent être les cas d'exception où la source ne détermine pas l'intégrale sans ambiguïté? En un tel cas, deux intégrales distinctes, d'un même degré p, auront une source commune. Leur différence sera donc une intégrale, de ce même degré p, ayant zéro pour source. Donc le seul cas d'exception est celui où, entre les solutions de $\Gamma(\eta) = 0$, il existe une ou plusieurs relations homogènes, à coefficients constants, et du degré p. Et manifestement, si k est le nombre des relations, linéairement distinctes entre elles, qui existent entre les η, les coefficients de l'intégrale F dépendent, quand la source est donnée, d'une équation différentielle linéaire de l'ordre k.

Cette exception n'a jamais lieu pour les équations du second ordre. C'est ce qu'on retrouvera tout à l'heure par un calcul direct.

4. Poursuivons, pour le moment, les considérations générales, et

---

[1] *Sur les systèmes d'équations linéaires à une seule variable indépendante* (*Comptes rendus*, t. XC, p. 524 et 596).

supposons connue une intégrale F, du degré p, ayant pour source $\chi(\eta)$.

Envisageons une *forme réduite* (ou canonique) de $\chi(\eta)$, obtenue par une substitution linéaire, les nouvelles indéterminées ζ étant données par des relations, telles que

$$\zeta_s = \alpha_{s,1}\eta_1 + \alpha_{s,2}\eta_2 + \ldots + \alpha_{s,n}\eta_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit, avec ces indéterminées,

$$\chi(\eta) = A\zeta_1^{q_1}\zeta_2^{q_2}\ldots\zeta_n^{q_n} + A'\zeta_1^{q'_1}\zeta_2^{q'_2}\ldots\zeta_n^{q'_n} + \ldots = \Phi(\zeta).$$

Posons de même

$$(6) \qquad z_s = \alpha_{s,1}B_1 + \alpha_{s,2}B_2 + \ldots + \alpha_{s,n}B_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

La fonction $\chi(B)$ acquiert la forme réduite $\Phi(z)$. Les quantités z, combinaisons linéaires, à coefficients constants, formées avec les quantités B, sont encore des fonctions linéaires de $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$, à coefficients dépendant de x. La formule (6) est donc le symbole d'une substitution linéaire, concernant les lettres $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$, et qui fait acquérir à F la forme réduite $\Phi(z)$. Si cette forme réduite ne peut être obtenue que d'un nombre limité de manières ou, en d'autres termes, si elle est *déterminée*, on pourra la trouver, connaissant F, par des opérations purement algébriques. Ces opérations feront connaître les z, qui sont des intégrales premières de $G(y) = 0$. Si, en outre, la forme réduite contient n indéterminées, on aura n intégrales premières, et l'intégration sera complète.

Au lieu de prendre chaque intégrale z, retenons-y seulement le coefficient de $y^{(n-1)}$. Ce coefficient, pour z_s, est

$$g_0(\alpha_{s,1}\eta_1 + \alpha_{s,2}\eta_2 + \ldots + \alpha_{s,n}\eta_n),$$

c'est-à-dire $g_0\eta$, où η est une solution de $\Gamma(\eta) = 0$. Donc chaque quantité z fournit immédiatement une solution de $\Gamma(\eta) = 0$. Par conséquent, nous pouvons conclure ainsi :

Si, en fonction de la variable indépendante, on connaît l'expression *d'un polynôme à coefficients constants, homogène et du degré p par rapport aux solutions d'une équation différentielle linéaire donnée, on peut trouver explicitement et sans intégration toutes ces solutions, pourvu qu'entre les solutions de la même équation différentielle il n'existe aucune relation homogène du degré p, et à coefficients constants.*

A ce théorème fait exception le cas où le polynôme proposé n'est pas susceptible d'une forme réduite déterminée, ou, en d'autres termes, se reproduit par UNE INFINITÉ *de substitutions linéaires. Les polynômes du second degré sont compris dans ce cas d'exception.* En outre des polynômes du second degré, ces formes exceptionnelles constituent des catégories très restreintes, dont la recherche appartient à la pure Algèbre. Avec trois indéterminées, il n'existe que le type $z_1^{q_1} z_2^{q_2} z_3^{q_3}$. Si le polynôme $\chi(\eta)$ appartient à ce type, il est aisé de reconnaître que les solutions η se trouveront par une quadrature. Des circonstances analogues ont lieu pour le cas d'un plus grand nombre d'indéterminées; mais je ne veux pas y insister. Quant à ce qui concerne les polynômes du second degré, j'ai dit dans l'introduction que je les exclus formellement ici.

Revenons à l'intégrale F, supposée susceptible d'une forme réduite déterminée $\Phi(z)$. Les quantités z sont des covariants linéaires, irrationnels de F, où $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ sont envisagées comme des indéterminées; du moins, si les z ne sont pas égaux respectivement aux covariants, ils leur sont proportionnels, c'est-à-dire que, un covariant linéaire canonique de F étant

$$Z = \mu y^{(n-1)} + \mu_1 y^{(n-2)} + \ldots + \mu_{n-2} y' + \mu_n y,$$

la quantité z correspondante sera νZ, ν étant une fonction des coefficients, mais indépendante de $y^{(n-1)}, \ldots, y', y$, et la même pour tous les covariants linéaires.

Je préciserai ce fait plus loin, après avoir introduit la notion du *multiplicateur* qui correspond à chaque intégrale.

MULTIPLICATEURS.

5. Égalée à une constante arbitraire, une intégrale F est entièrement équivalente à l'équation $G(y) = 0$. Donc sa dérivée F' doit être divi-

sible par $G(y)$, et, puisque F' et G contiennent $y^{(n)}$ seulement à la première puissance, le quotient est un polynôme entier et homogène en $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ comme F. Le degré de ce polynôme est inférieur d'une unité à celui de F. Ce polynôme M est le *multiplicateur* correspondant à l'intégrale F, de même que η est le multiplicateur correspondant à l'intégrale $B(y, \eta)$.

Le calcul direct peut prouver aussi l'existence et fournir l'expression de ce multiplicateur. Ayant, en effet, $F = \chi(B)$, où χ n'a que des coefficients constants, nous aurons F' au moyen de la relation (3),

$$B'(y, \eta_s) = B'_s = \eta_s G(y);$$

par conséquent,

$$F' = \sum_s B'_s \frac{\partial \chi}{\partial B_s} = G(y) \sum \eta_s \frac{\partial \chi}{\partial B_s}. \tag{7}$$

En considérant dans F séparément les lettres $y^{(n-1)}, \ldots, y', y$, et x qui figure dans les coefficients, et prenant à ce point de vue les dérivées partielles, on a, d'après l'expression (4) de B,

$$\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = g_0 \sum \eta_s \frac{\partial \chi}{\partial B_s}.$$

De là résulte, d'après (7), l'expression du multiplicateur M, d'ailleurs évidente,

$$g_0 M = \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}}.$$

6. En second lieu, développant F' et remplaçant $G(y)$ par son expression explicite, on transforme (7) en la relation suivante :

$$\tag{8} \left\{ \begin{aligned} & g_0 \left[\frac{\partial F}{\partial x} + y^{(n-1)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-2)}} + y^{(n-2)} \frac{\partial F}{\partial y^{(n-3)}} + \ldots + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + y' \frac{\partial F}{\partial y} \right] \\ & = \frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} \left[n g_1 y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1.2} g_2 y^{(n-2)} + \ldots + n g_{n-1} y' + g_n y \right], \end{aligned} \right.$$

Cette relation, dont les deux membres sont entiers et homogènes par rapport à $y^{(n-1)}, \ldots, y', y$ et du même degré que F, se décompose en autant d'équations qu'il y a de coefficients dans F. Ces équations, si l'on y considère les coefficients de F comme des inconnues, sont différentielles, linéaires et sans second membre. C'est de l'intégration d'un tel système que dépend la découverte d'une intégrale F.

Si l'on éliminait toutes les inconnues, sauf le coefficient de $[y^{(n-1)}]^p$, on obtiendrait une équation finale dont, comme on l'a vu, les solutions ont la forme $g_0^p\chi(\eta)$. C'est donc l'équation aux puissances $p^{\text{ièmes}}$ de $\Gamma\left(\frac{\eta}{g_0}\right) = 0$.

Dans un pareil système, en général, toutes les inconnues s'expriment explicitement en fonction linéaire et homogène de l'une des inconnues et de ses dérivées. On a donc la confirmation du fait annoncé plus haut : tous les coefficients d'une intégrale de F s'expriment explicitement en fonction linéaire et homogène du premier coefficient et de ses dérivées.

Dans tout système d'équations linéaires, l'exception a lieu seulement si l'équation finale, par rapport à l'une des inconnues, est d'ordre inférieur à celui du système. Ici l'exception a lieu seulement quand l'équation aux puissances $p^{\text{ièmes}}$ est d'ordre moindre que N (*Introd.*). Le calcul direct confirme bien les prévisions.

7. Appliquons cette analyse au cas le plus simple, celui où l'équation considérée est du second ordre. En ce cas, F est une forme *binaire*, aux indéterminées y', y,

$$F = a_0 y'^p + pa_1 y'^{p-1} y + \frac{p(p-1)}{1.2} a_2 y'^{p-2} y^2 + \ldots + pa_{p-1} y' y^{p-1} + a_p y^p.$$

Le système qui se déduit de (8) est le suivant :

$$(9)\qquad \begin{cases} g_0(a'_0 + pa_1) = 2pg_1 a_0, \\ g_0[a'_1 + (p-1)a_2] = 2(p-1)g_1 a_1 + g_2 a_0, \\ g_0[a'_2 + (p-2)a_3] = 2(p-2)g_1 a_2 + 2g_2 a_1, \\ g_0[a'_3 + (p-3)a_4] = 2(p-3)g_1 a_3 + 3g_2 a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_0(a'_{p-1} + a_p) = 2g_1 a_{p-1} + (p-1)g_2 a_{p-2}, \\ g_0 a'_p = pg_2 a_{p-1}. \end{cases}$$

Ces équations montrent bien que le cas d'exception ne peut jamais se produire quand il s'agit d'équations du second ordre. Effectivement, si l'on donne une solution a_0, on peut déduire immédiatement a_1 de la première équation, puis a_2 de la seconde, etc.

On peut vérifier par ces équations le théorème sur les invariants et les covariants des intégrales, auquel j'ai fait allusion et qui sera démontré plus loin. Supposons d'abord p un nombre pair et considérons l'invariant quadratique de F,

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = {} & a_0 a_p - p a_1 a_{p-1} \\ & + \frac{p(p-1)}{1.2} a_2 a_{p-2} + \ldots + \frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{2} \frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{p}{2}} a_{\frac{p}{2}}^2. \end{aligned}$$

Sa dérivée peut s'écrire

$$\mathrm{I}' = a'_0 a_p - p a'_1 a_{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2} a'_2 a_{p-2} - \ldots + p a'_{p-1} a_1 + a'_p a_0.$$

En substituant les expressions de $a'_0, a'_1, \ldots, a'_p$ tirées de (9), nous obtenons

$$g_0 \mathrm{I}' = 2 p g_1 \mathrm{I}.$$

Posant, pour abréger,

$$u = e^{-\int \frac{g_1}{g_0} dx}, \tag{10}$$

on voit que $u^{2p}\mathrm{I}$ est une constante. En d'autres termes, l'*invariant quadratique de la forme* u^pF *est une constante*. Plus généralement, soit J une fonction quelconque de $a_0, a_1, \ldots, a_p$; on aura, d'après les équations (9), cette expression de la dérivée J',

$$\mathrm{J}' = \left\{ \begin{aligned} & \frac{2g_1}{g_0}\left[p a_0 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_0} + (p-1) a_1 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_1} + (p-2) a_2 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_2} + \ldots\right] \\ & + \frac{g_2}{g_0}\left[a_0 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_3} + \ldots\right] \\ & - \left[p a_1 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_0} + (p-1) a_2 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_1} + (p-2) a_3 \frac{\partial \mathrm{J}}{\partial a_2} + \ldots\right]. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant J est invariant de F, on a, d'après les propriétés des invariants, la réduction suivante :

$$J' = 2m\frac{g_1}{g_0}J,$$

où m est le *poids* de cet invariant. D'ailleurs le double de ce poids est égal à p fois le degré de J par rapport aux lettres $a_0, a_1, \ldots, a_p$. Donc *tout invariant de* u^pF *est une constante*.

Cette propriété du système (9) méritait d'être signalée : Quelles que soient g_0, g_1, g_2, *le système* (9), *dont l'ordre est* $(p+1)$, *a toujours* $(p-2)$ *intégrales qui sont fournies par les invariants de la forme binaire du degré* p. Le cas $p=2$ fait exception, bien entendu.

Pour vérifier de même la propriété des covariants, modifions les équations (9) en posant

$$u^p a_s = \alpha_s.$$

Le type général des équations (9) devient, à cause de (10),

$$(11)\qquad g_0[\alpha'_s + (p-s)\alpha_{s+1}] = (p-2s)g_1\alpha_s + sg_2\alpha_{s-1}.$$

Soit maintenant un covariant H de la forme u^pF,

$$H = A_0 y'^q + qA_1 y'^{q-1}y + \frac{q(q-1)}{1.2}A_2 y'^{q-2}y^2 + \ldots + qA_{q-1}y'y^{q-1} + A_q y^q.$$

Calculant, d'après (11), la dérivée d'un coefficient de H, nous aurons

$$g_0 A'_s = \left\{\begin{array}{l} g_1\left[p\alpha_0\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_0} + (p-2)\alpha_1\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_1} + (p-4)\alpha_2\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_2}\right] \\ \quad + g_2\left(\alpha_0\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_1} + 2\alpha_1\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_2} + 3\alpha_2\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_3} + \ldots\right) \\ \quad - \left[p\alpha_1\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_0} + (p-1)\alpha_2\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_1} + (p-2)\alpha_3\frac{\partial A_s}{\partial\alpha_2} + \ldots\right]. \end{array}\right.$$

D'après les propriétés des covariants, cette équation se réduit à

$$g_0 A'_s = (q-2s)g_1 A_s + sg_2 A_{s-1} - (q-s)g_0 A_s.$$

Cette dernière ne diffère de (11) que par le changement des lettres p en q et α en A. Donc H est le produit d'une intégrale par u^q : *tout covariant de* u^pF, *du degré* q, *divisé par* u^q, *est une intégrale.*

8. On pourrait encore, et d'une manière analogue, prouver le même théorème pour les équations de tous les ordres, par le moyen du système que représente l'égalité (8); mais je préfère me borner à la démonstration simple et profonde qu'a donnée M. Darboux, auteur de ce beau théorème.

Nous avons composé F au moyen de $\chi(B)$. Cette dernière est une forme, à coefficients constants, et aux indéterminées $B_1, B_2, \ldots, B_n$, et nous avons posé

$$(12)\qquad B_1 = B(y, \eta_1), \quad B_2 = B(y, \eta_2), \quad \ldots, \quad B_n = B(y, \eta_n).$$

En regardant $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ comme les indéterminées dans la forme F, ainsi que nous l'avons fait jusqu'à présent, nous voyons que F est une transformée de $\chi(B)$ par une substitution linéaire (12), pour l'expression de laquelle on recourra à la formule (4). D'après les formules (5), le déterminant Δ de cette substitution est égal à g_0^n, multiplié par le déterminant composé avec $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ et les $(n-1)$ premières dérivées. Ce dernier a pour expression $e^{n\int \frac{\gamma_1}{\gamma_0} dx}$, ce qui, d'après les relations entre les g et les γ, coïncide avec $g_0^{-n} e^{n\int \frac{g_1}{g_0} dx}$. Ainsi le déterminant de la substitution (12) est

$$\Delta = u^{-n}.$$

Désignons généralement par la lettre a les coefficients de F, par $\bar{a}$ ceux de χ. Soit maintenant un covariant de F, représenté par $U(a, y)$, la lettre y tenant ici la place de $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y', y$. Si m est le poids de ce covariant, on aura identiquement, en vertu de la substitution (12),

$$U(a, y) = \Delta^m U(\bar{a}, B) = u^{-nm} U(\bar{a}, B).$$

Comme $U(\bar{a}, B)$ est une fonction à coefficients constants, formés avec des intégrales B, elle est elle-même une intégrale. Donc le covariant U, de la forme F, multiplié par u^{nm}, est une intégrale. Soit q le degré de U par rapport aux lettres $y^{n-1}, \ldots, y', y$, et soit r son degré par rapport aux coefficients a; on a, comme on sait,

$$nm = pr - q.$$

Le même covariant, calculé pour la forme u^pF sera u^{pr}U. Donc :

THÉORÈME I. — *Si* F *est une intégrale du degré p, tout covariant de u^pF du degré q, est égal au produit de u^q par une intégrale du degré q. La lettre u désigne la fonction*

$$u = e^{-\int \frac{g_1}{g_0} dx}.$$

Tout invariant de u^pF est une constante.

M. Darboux a étendu aussi cette proposition aux contrevariants. Pour exposer le nouveau théorème, envisageons les quantités $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, définies par les relations (5), et mettons-y en évidence la quantité η en écrivant $\beta_0(\eta), \beta_1(\eta), \ldots, \beta_{n-1}(\eta)$. Si nous y remplaçons successivement η par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, nous aurons n^2 fonctions de x, par le moyen desquelles s'expriment linéairement toutes les quantités $\beta(\eta)$.

En effet, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ désignant des constantes, on a

$$\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \ldots + c_n\eta_n,$$

et il en résulte

$$(13)\quad \beta_s(\eta) = c_1\beta_s(\eta_1) + c_2\beta_s(\eta_2) + \ldots + c_n\beta_s(\eta_n), \quad (s = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Comparons cette substitution (13) à celle que nous avons envisagée précédemment

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{B}_s = \mathrm{B}(y, \eta_s) &= \beta_0(\eta_s)y^{(n-1)} - \beta_1(\eta_s)y^{(n-2)} \\ &\quad + \beta_2(\eta_s)y^{(n-3)} + \ldots + (-1)^{n-1}\beta_{n-1}(\eta_s)y. \end{aligned}\right.$$

Ces deux substitutions sont les *transposées* l'une de l'autre, de telle sorte que si l'on considère $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n$ comme remplacés par $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y$ suivant (14), en même temps $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont remplacés par $\beta_0(\eta), -\beta_1(\eta), \beta_2(\eta), \ldots, (-1)^{n-1}\beta_{n-1}(\eta)$ suivant l'inverse de la substitution (13), transposée de la précédente. Donc, $B_1, B_2, \ldots, B_n$, d'une part, et $c_1, c_2, \ldots, c_n$, de l'autre, considérées comme indéterminées *contragrédientes*, se remplacent en même temps par $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y$ pour les premières, par $\beta_0(\eta), -\beta_1(\eta), \ldots, (-1)^{n-1}\beta_{n-1}(\eta)$ pour les secondes. Soit donc $V(a, y, \beta)$ un contrevariant (si les y n'y entrent pas) ou un covariant mixte de F, du poids m; on aura

$$V(a, y, \beta) = \Delta^m V(\bar{a}, B, c) = u^{-nm} V(\bar{a}, B, c);$$

par conséquent, $u^{nm} V(a, y, \beta)$ est constant. C'est une intégrale du système des deux équations $G(y) = 0$, $\Gamma(\eta) = 0$. Il en résulte que : *tout covariant mixte de u^pF, formé avec les indéterminées contragrédientes $\beta_0, -\beta_1, +\beta_2, \ldots, (-1)^{n-1}\beta_{n-1}$ qui correspondent, dans cet ordre, à $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \ldots, y$; du degré q' par rapport aux β, et du degré q par rapport aux y, est le produit de $u^{q-q'}$ par une intégrale du système* $G(y) = 0$, $\Gamma(\eta) = 0$.

9. Voici maintenant une autre proposition analogue, concernant les multiplicateurs. Nous avons trouvé (n° 5) pour le multiplicateur M, qui correspond à F, la double expression

$$M = \frac{1}{g_0}\frac{\partial F}{\partial y^{(n-1)}} = \sum_s \eta_s \frac{\partial f}{\partial B_s}.$$

On peut passer de l'une à l'autre de ces expressions au moyen de la substitution (12), remplaçant les B par les y dans le polynôme $\sum \eta_s \frac{\partial f}{\partial B_s}$, du degré $(p-1)$ par rapport aux B. Soient α les coefficients de M, exprimé par les y, et $\bar{\alpha}$ les coefficients dans la seconde forme. Prenons un invariant $W(\alpha)$ de M, nous aurons

$$W(\alpha) = \Delta^m W(\bar{\alpha}) = u^{-nm} W(\bar{\alpha}).$$

Ici $W(\bar{\alpha})$ n'est pas une constante; car les coefficients de $\sum \eta_s \frac{\partial f}{\partial B_s}$ ne sont pas constants : ils sont linéaires et homogènes par rapport aux η.

Si donc W est du degré r par rapport aux coefficients α, $W(\bar{\alpha})$ est un polynôme homogène, et du degré r, par rapport aux η; c'est la source d'un multiplicateur du degré $(r-1)$. Dans $u^p F$, le premier coefficient, celui de $(y^{(n-1)})^p$, est $u^p g_0^p \chi_p(\eta)$. C'est aussi, au facteur numérique près p, le premier coefficient, celui de $[y^{(n-1)}]^{p-1}$ dans $u^p g_0 M$. Si l'on calcule l'invariant W pour $u^p g_0 M$, on obtiendra le résultat précédent, multiplié par $u^{pr} g_0^r$. D'ailleurs, d'après les propriétés des invariants, $mn = (p-1)r$. L'invariant actuel aura donc la forme $u^r g_0^r \chi_r(\eta)$, puisque $W(\bar{\alpha})$ est un polynôme de la définition $\chi_r(\eta)$. Donc :

Théorème II. — M *étant un multiplicateur, du degré* $p-1$, *tout invariant de* $u^p g_0 M$, *du degré* r *par rapport aux coefficients est égal au premier coefficient de* $u^r F_1$, F_1 *étant une intégrale du degré* r. *C'est, en même temps, le premier coefficient de* $u^r g_0 M_1$, M_1 *étant un multiplicateur du degré* $(r-1)$.

10. Jusqu'à présent, nous avons considéré les multiplicateurs comme obtenus par les intégrales correspondantes. Les coefficients d'une intégrale F se déduisent de la source par le moyen des équations simultanées, qui sont représentées ensemble dans la relation (8). A des facteurs numériques près, les coefficients du multiplicateur reproduisent une partie des coefficients de l'intégrale, ceux qui contiennent $y^{(n-1)}$. Si donc on voulait déduire de la source seulement le multiplicateur, non l'intégrale, il faudrait éliminer d'abord un certain nombre d'inconnues. Cette opération, très simple pour le second ordre, et qui se fait entre les deux dernières équations (9), se complique déjà pour le troisième ordre. Comme ce sont précisément les complications de calcul que nous avons ici à éviter, et que, d'ailleurs, nous voulons opérer avec les multiplicateurs, il nous importe de savoir calculer directement leurs coefficients. Je vais en donner le moyen.

11. Soit un polynôme entier et homogène, composé avec y et ses dérivées, où l'on regarde y comme une fonction indéterminée de x. Les coefficients de ce polynôme U sont des fonctions données de x. Je dirai que U est irréductible si, dans chacun de ses termes, la dérivée de y, de l'ordre le plus élevé pour ce terme (y compris zéro), a un exposant au moins égal à 2. Ainsi

$$U = Ay'^3 + Cyy'^2 + Dy^3$$

est irréductible; si l'on y ajoutait le terme Ey^2y', U ne serait pas irréductible.

Un polynôme, de la définition de U, c'est-à-dire entier et homogène par rapport à y et ses dérivées, est une *dérivée exacte* quand il existe un autre polynôme analogue V, du même degré et d'ordre inférieur d'une unité, tel qu'on ait $U = V'$, quelle que soit la fonction y.

La proposition suivante est presque évidente : *Un polynôme irréductible, qui est, en même temps, une dérivée exacte, est identiquement nul.* En effet, dans V' la dérivée de l'ordre le plus élevé n'entre que linéairement, ce qui est en contradiction avec l'irréductibilité de U.

Voici la seconde proposition sur le même sujet : *Tout polynôme entier et homogène* U *est réductible à la somme d'un polynôme entier, homogène, du même degré et irréductible, et d'une dérivée exacte.*

Pour le prouver, soit, dans un terme de U, ρ l'ordre le plus élevé des dérivées. Dans ce terme $y^{(\rho)}$ figure linéairement, sans quoi ce terme serait irréductible, par définition. Distinguons maintenant deux cas :

1° $y^{(\rho-1)}$ figure dans le même terme, que j'écris alors $a(y^{(\rho-1)})^m y^{(\rho)}$, et où la lettre a peut représenter le produit d'un coefficient par diverses autres dérivées de y, toutes d'ordre moindre que $(\rho - 1)$. L'égalité

$$a(y^{(\rho-1)})^m y^{(\rho)} = \frac{1}{m+1}\left[a(y^{(\rho-1)})^{m+1}\right]' - \frac{1}{m+1}a'(y^{(\rho-1)})^{m+1}$$

opère la réduction; car la dernière partie du second membre ne contient que des termes irréductibles.

2° $y^{(\rho-1)}$ ne figure pas dans le terme considéré, que j'écris alors $ay^{(\rho)}$. L'égalité

$$ay^{(\rho)} = (ay^{(\rho-1)})' - a'y^{(\rho-1)}$$

réduit le terme proposé à d'autres qui, contenus dans la dernière partie du second membre, sont d'ordre inférieur à ρ. En opérant ensuite sur chacun de ces derniers par l'un ou l'autre des deux procédés, on opérera la réduction. Remarquons d'ailleurs que la première proposition entraîne cette conséquence : *la réduction ne peut s'effectuer que d'une seule manière*. Ainsi tout polynôme U peut s'écrire, d'une seule manière, sous la forme $U = V' + W$, où W est irréductible. Cette dernière partie W est la partie irréductible de U.

La conséquence finale est celle-ci : *Pour qu'un polynôme* U *soit une dérivée exacte, il faut et il suffit que sa partie irréductible n'existe pas.*

12. Revenons maintenant à une fonction linéaire $G(y)$, pour en chercher un multiplicateur M, entier, homogène, du degré $(p-1)$, par rapport à $y^{(n-1)}, \ldots, y', y$. D'après la proposition précédente, *la condition nécessaire et suffisante pour que* M *soit effectivement un multiplicateur consiste en ce que la partie irréductible du produit* MG *ait tous ses coefficients nuls.*

La seule observation qu'il y ait à ajouter porte sur le nombre des conditions ainsi trouvées : il faut, en effet, s'assurer que toutes ces conditions sont indépendantes, et qu'elles déterminent complètement le multiplicateur.

Pour composer une forme irréductible du degré p, on n'a qu'à augmenter d'une unité l'exposant de la dérivée la plus élevée figurant dans chaque terme d'une forme quelconque, du même ordre, et du degré $(p-1)$. Or MG est du degré p et ne contient $y^{(n)}$ que linéairement. Donc sa partie irréductible est d'ordre $(n-1)$ et contient juste autant de termes que M. On aura donc juste autant d'équations qu'il y a de coefficients dans M.

La suite de ce Mémoire présentera l'application de cette dernière théorie (III, nos **30** et suivants).

II. — ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES.

13. Pour les équations du second ordre, le problème que nous traitons ici se pose en ces termes : *intégrer l'équation, quand on connaît le produit de plusieurs solutions*. Quand il s'agit de *deux* solutions, le problème est réduit aux quadratures par une méthode des plus simples, et dont notamment M. Hermite a fait usage pour l'équation de Lamé. Je n'ai pas à rappeler ici cette méthode; on peut la remplacer par une autre, qui se rattache aux théories actuelles, et qui, bien entendu, mène aux mêmes calculs pour ce cas, mais qui s'applique aussi, quel que soit le nombre des solutions dont on connaît le produit.

L'équation proposée étant $\Gamma(\eta) = 0$, et le produit proposé $\chi(\eta)$ comprenant p racines, on forme, par le moyen des équations (9), l'intégrale F dont $\chi(\eta)$ est la source

$$F = a_0 y'^p + p a_1 y'^{p-1} y + \ldots + p a_{p-1} y' y^{p-1} + a_p y^p.$$

Supposons F décomposée en facteurs

$$F = a_0 (y' - z_1 y)(y' - z_2 y) \ldots (y' - z_p y).$$

Chacun de ces facteurs est proportionnel à une intégrale linéaire $B(y, \eta_s)$. D'après l'expression (4) de B, on a donc

$$\frac{(g_0 \eta_s)' - 2 g_1 \eta_s}{g_0 \eta_s} = z_s.$$

Il en résulte, pour chaque racine z, une solution

$$\eta = \frac{1}{g_0} e^{\int \left(z + \frac{2 g_1}{g_0}\right) dx}.$$

Donc, en tous les cas, le problème peut être résolu par des quadratures. Cette méthode s'applique quand il s'agit de *deux* solutions, et aussi quand il s'agit des cas singuliers relatifs à plus de deux solutions. Par exemple, si l'on donne le produit de quatre solutions sans avertir que ce produit est précisément le produit des carrés de deux solutions; alors, en appliquant la méthode générale dont il sera question tout à l'heure, on sera, par le calcul même, averti de cette circonstance, et il faudra recourir à la solution précédente. Mais, ces cas singuliers étant laissés de côté, toutes les fois que le produit considéré est composé de *trois* solutions distinctes, au moins, *toute quadrature devient superflue.* En effet, la forme F admet alors des covariants linéaires, rationnels ou irrationnels, et ces covariants fournissent les solutions sans aucune intégration.

Formes cubiques.

14. Intégrer l'équation du second ordre

$$0 = \Gamma(\eta) = \gamma_0 \eta'' + 2\gamma_1 \eta' + \gamma_2 \eta,$$

connaissant le produit $\varphi(x)$ de trois solutions.

Par les équations (9) nous déterminons a_1, a_2, a_3 coefficients de l'intégrale F du troisième degré, dont le premier coefficient est $a_0 = g_0^3 \varphi(x)$. Nous considérons ensuite la forme cubique

$$f = u^3 \mathrm{F}.$$

Prenons le covariant cubique Q et le discriminant R de F, et désignons en même temps par q, r les mêmes formes pour f. Nous aurons

$$q = u^9 \mathrm{Q}, \quad r = u^{12} \mathrm{R}.$$

Q et R étant pris, quant aux facteurs numériques, comme dans Clebsch (*Theorie der bin. alg. Formen*, p. 127), nous savons que

$$\left(q \pm f\sqrt{-\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = u^3 \left(\mathrm{Q} \pm \mathrm{F}\sqrt{-\frac{\mathrm{R}}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

est un covariant linéaire. En le divisant par u, on a (n° **8**, th. I) une intégrale linéaire. En prenant ensuite le coefficient de y' et le divisant par g_0, on a une solution η de l'équation proposée. Pour avoir ce coefficient, il suffit de limiter Q et F chacun à leur premier terme. Prenant ces termes et écrivant explicitement R, remplaçant aussi u par son expression, nous avons

$$\eta = \frac{1}{g_0^3} e^{\int \frac{\gamma_1}{\gamma_0} dx} \big(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3$$
$$\pm a_0 \sqrt{a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 + 4a_3 a_1^3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3}\,\big)^{\frac{1}{3}}.$$

Telle est la solution du problème : la formule donne deux solutions distinctes exprimées en fonction des quantités a_0, a_1, a_2, a_3, qui sont ainsi déterminées :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \gamma_0^3 \varphi(x), & & \\
3a_1 &= -a_0' + 6\frac{g_1}{\gamma_0}a_0, & g_1 &= -\gamma_1 + \gamma_0', \\
2a_2 &= -a_1' + 4\frac{g_1}{\gamma_0}a_1 + \frac{g_2}{\gamma_0}a_0, & g_2 &= \gamma_2 - 2\gamma_1' + \gamma_0''. \\
a_3 &= -a_2' + 2\frac{g_1}{\gamma_0}a_2 + 2\frac{g_2}{\gamma_0}a_1, & &
\end{aligned}$$

On ne manquera pas d'observer que la quantité soumise au radical du second degré, étant égale à l'invariant R, ne diffère pas de u'^2. On a, par conséquent,

$$\frac{1}{\gamma_0^2} e^{2\int \frac{\gamma_1}{\gamma_0} dx} = \frac{1}{(a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 + 4a_3 a_1^3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{6}}},$$

en sorte que la quadrature qui subsiste est encore superflue, et que *la formule définitive, dégagée de toute quadrature, est*

$$(15)\qquad \eta = \frac{1}{\gamma_0}\left(a_0 \pm \frac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{\sqrt{a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 + 4a_3 a_1^3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Désignant par η_1 et par η_2 respectivement les solutions qui correspondent aux signes $+$ et $-$, on voit que les trois solutions dont le produit fait $\varphi(x)$ sont, au facteur numérique près $\sqrt[3]{2}$, les suivantes, où ω désigne une racine cubique primitive de l'unité : $\eta_1 + \eta_2$, $\eta_1 + \omega\eta_2$, $\eta_1 + \omega^2\eta_2$. On a, en effet,

$$\tfrac{1}{2}(\eta_1^3 + \eta_2^3) = \frac{a_0}{\gamma_0^3} = \varphi(x).$$

Nous pouvons encore observer ici une application, soit du théorème I concernant les covariants des intégrales, soit du théorème II relatif aux invariants des multiplicateurs. Le covariant hessien de f a pour premier coefficient $u^6(a_0 a_2 - a_1^2)$. Ce covariant étant du second degré, il en résulte que $\frac{a'}{g_0^2}(a_0 a_2 - a_1^2)$ est le produit de *deux* solutions. On a la même conséquence en prenant le discriminant du multiplicateur. Cette conséquence se vérifie ainsi :

$$\eta_1\eta_2 = \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{\gamma_0^2}\left(\frac{4}{a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 + 4a_3 a_1^3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Application.

15. Appliquons ce résultat à l'équation numérique suivante, où ψ désigne un polynôme du second degré,

$$\psi\eta'' + \tfrac{3}{2}\psi'\eta' + \tfrac{4}{9}\psi''\eta = 0, \quad \psi = \psi_0 x^2 + 2\psi_1 x + \psi_2.$$

C'est, comme on voit, une équation hypergéométrique. Il s'agit de l'intégrer sachant qu'il y a trois solutions dont le produit est égal à $\frac{1}{\psi}$. Voici les calculs :

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 = \psi, \quad \gamma_1 = \tfrac{3}{4}\psi', \quad \gamma_2 = \tfrac{4}{9}\psi'',\\
&g_0 = \psi, \quad g_1 = \tfrac{1}{4}\psi', \quad g_2 = -\tfrac{1}{18}\psi'',\\
&a_0 = \psi^2, \quad a_1 = -\tfrac{1}{6}\psi\psi', \quad a_2 = \tfrac{1}{18}\psi\psi'', \quad a_3 = -\tfrac{1}{108}\psi'\psi''.
\end{aligned}$$

et pour vérification $g_0 a_3' = 3g_2 a_2$.

$$a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3 = -2a_1(a_0 a_2 - a_1^2),$$

$$\begin{aligned}
&a_0^2 a_3^2 + 4a_0 a_2^3 + 4a_3 a_1^3 - 3a_1^2 a_2^2 - 6a_0 a_1 a_2 a_3\\
&\quad = \frac{1}{a_0^2}(a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)^2 + \frac{4}{a_0^2}(a_0 a_2 - a_1^2)^3 = \frac{4a_2}{a_0}(a_0 a_2 - a_1^2)^2.
\end{aligned}$$

La formule (15) se réduit à

$$\eta = \frac{1}{\gamma_0}\left(a_0 \pm a_1\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Substituant et omettant un facteur constant, on a finalement

$$\eta = \psi^{-\frac{1}{2}}\left(\psi' \pm 2\sqrt{\psi_0\psi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

On remarquera, dans cet exemple, que le produit des *deux* solutions η_1, η_2 fait aussi $\frac{1}{\varphi}$, à un facteur constant près.

Formes biquadratiques.

16. Intégrer l'équation du second ordre $\mathrm{F}(\eta) = 0$, connaissant le produit $\varphi(x)$ de quatre solutions.

Par les équations (9) nous déterminons a_1, a_2, a_3, a_4 coefficients de l'intégrale F du quatrième degré dont le premier coefficient est $a_0 = g_0^4\varphi(x)$. Nous considérons ensuite la forme biquadratique f

$$f = u^4 \mathrm{F}.$$

Soient H, I, J le hessien et les deux invariants de F; h, i, j les mêmes formes pour f (avec les mêmes coefficients numériques que dans Clebsch, *Th. der Formen*, p. 146). On aura

$$h = u^8 \mathrm{H}, \quad i = u^8 \mathrm{I}, \quad j = u^{12} \mathrm{J}.$$

Soient ρ, ρ', ρ'' les racines de $\rho^3 - \frac{i}{2}\rho - \frac{j}{3} = 0$. D'après M. Cayley, on sait que les facteurs linéaires t de f se mettent ainsi sous la forme de covariants

$$t = \left[(\rho' - \rho'')\sqrt{h + \rho f} + (\rho'' - \rho)\sqrt{h + \rho' f} + (\rho - \rho')\sqrt{h + \rho'' f}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

En opérant sur F, prenant les racines σ, σ', σ'' de

$$\sigma^3 - \frac{\mathrm{I}}{2}\sigma - \frac{\mathrm{J}}{3} = 0,$$

et posant

$$\mathrm{T} = \left[(\sigma' - \sigma'')\sqrt{\mathrm{H} + \sigma \mathrm{F}} + (\sigma'' - \sigma)\sqrt{\mathrm{H} + \sigma' \mathrm{F}} + (\sigma - \sigma')\sqrt{\mathrm{H} + \sigma'' \mathrm{F}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

on aura $t = u^4 \mathrm{T}$. Pour avoir une intégrale linéaire, il faut diviser t par ug_0. Donc, pour obtenir une solution η, il faut prendre le coefficient de y' dans $\frac{u^3 \mathrm{T}}{g_0}$.

Ici encore on remarque que la quantité u, à un facteur numérique près, est égale à $I^{-\frac{1}{8}}$ ou $J^{-\frac{1}{12}}$, puisque i et j sont des constantes (th. I, n° **8**). Il n'y a donc aucune quadrature. Mettant pour le premier coefficient de H son expression explicite, nous avons le résultat suivant.

Solution. — *Ayant déterminé a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 par les équations suivantes :*

$$\begin{aligned}
a_0 &= \gamma_0^4 \varphi(x),\\
4a_1 &= -a_0' + \frac{8g_1}{\gamma_0} a_0\\
3a_2 &= -a_1' + \frac{6g_1}{\gamma_0} a_1 + \frac{g_2}{\gamma_0} a_0, \qquad g_1 = -\gamma_1 + \gamma_0',\\
2a_3 &= -a_2' + \frac{4g_1}{\gamma_0} a_2 + \frac{2g_2}{\gamma_0} a_1, \qquad g_2 = \gamma_2 - 2\gamma_1' + \gamma_0,\\
a_4 &= -a_3' + \frac{2g_1}{\gamma_0} a_3 + \frac{3g_2}{\gamma_0} a_2,\\
0 &= -a_4' + \frac{4g_2}{\gamma_0} a_3 \quad \text{(pour vérification)},
\end{aligned}$$

et posé

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2} I &= a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2,\\
\tfrac{1}{6} J &= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4,
\end{aligned}$$

on obtiendra quatre solutions η de l'équation proposée, par la formule

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned}
\eta = \frac{1}{\gamma_0 J^{\frac{1}{4}}} \Big[&(\sigma' - \sigma'')\sqrt{2(a_0 a_2 - a_1^2) + \sigma a_0}\\
&\pm (\sigma'' - \sigma)\sqrt{2(a_0 a_2 - a_1^2) + \sigma' a_0}\\
&\pm (\sigma - \sigma')\sqrt{2(a_0 a_2 - a_1^2) + \sigma'' a_0}\Big]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \right.$$

où les quantités σ, σ', σ'' sont les racines de l'équation

$$(17) \qquad \sigma^3 - \tfrac{1}{2} I \sigma - \tfrac{1}{3} J = 0.$$

Remarque. — *Le rapport $J^2 : I^3$ est une constante.*

On peut encore présenter la solution sous une autre forme en employant, au lieu des facteurs linéaires de F, ses covariants canoniques.

Voici alors le résultat : *σ étant une racine de l'équation* (17), *on obtient deux solutions η par l'équation*

$$(16\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma_0^8 I^4 \eta^8 + [2(3I\sigma + 2J)(a_0 a_2 - a_1^2) - (I\sigma + 2J)a_0\sigma]\gamma_0^4 I^2 \eta^4 \\ &\qquad + \tfrac{1}{12}(I\sigma - 2J)(3I\sigma + 2J)[2(a_0 a_2 - a_1^2) + \sigma a_0]^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

17. *A posteriori*, la formule (16) peut être vérifiée; à cet effet, je vais prouver que, γ_0, a_0, a_1, a_2, J étant des fonctions de x à volonté, et I étant égal à $J^{\frac{2}{3}}$, sauf un facteur constant, les quatre fonctions η données par la formule (16) satisfont à une même équation linéaire du second ordre, et que leur produit fait $\frac{a_0}{\gamma_0^4}$, à un facteur constant près.

Posons, pour abréger,

$$2(a_0 a_2 - a_1^2) = a_0 \xi;$$

$$\sigma' - \sigma'' = \alpha^2, \quad \sigma'' - \sigma = \beta^2, \quad \sigma - \sigma' = \gamma^2,$$

$$\sigma + \xi = a^2, \quad \sigma' + \xi = b^2, \quad \sigma'' + \xi = c^2;$$

d'où résulte

$$\alpha^2 = b^2 - c^2, \quad \beta^2 = c^2 - a^2, \quad \gamma^2 = a^2 - b^2.$$

L'une des quantités η données par (16) s'écrit ainsi

$$\eta_0 = \frac{1}{\gamma_0}\left(\frac{a_0}{J}\right)^{\frac{1}{4}}\sqrt{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

en vertu de l'identité

$$\begin{aligned} &a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 \\ &\quad = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

Nous obtenons successivement trois autres η en changeant successivement le signe de l'une des quantités a, b, c. De là

$$\frac{\eta_1^2}{\eta_0^2} = \frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} = -\frac{(a+b)^2(a+c)^2}{\beta^2\gamma^2}.$$

et, en précisant à volonté le signe de η_1 (i désignant maintenant $\sqrt{-1}$),

$$\frac{\eta_1}{\eta_0} = \frac{(a+b)(a+c)}{i\beta\gamma}. \tag{17}$$

Semblablement,

$$\frac{\eta_2}{\eta_0} = \frac{(b+c)(b+a)}{i\gamma\alpha}, \quad \frac{\eta_3}{\eta_0} = \frac{(c+a)(c+b)}{i\alpha\beta}.$$

De là résulte

$$\frac{\eta_1\eta_2\eta_3}{\eta_0^3} = \frac{i(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = \frac{i\alpha^2\beta^2\gamma^2}{[(a-b)(b-c)(c-a)]^2} = i\frac{a_0\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\sigma_0^6 J\eta_0^4},$$

$$\eta_0\eta_1\eta_2\eta_3 = \frac{ia_0\alpha^2\beta^2\gamma^2}{\sigma_0^6 J} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{I^3}{6J^2}-1}\,\frac{a_0}{\sigma_0^6}. \tag{18}$$

Cette égalité, d'après la supposition que $J^2 : I^3$ est constant, prouve déjà que le produit des quantités η diffère de $\frac{a_0}{\sigma_0^6}$ seulement par un facteur constant.

L'égalité (17) peut s'écrire

$$i\beta\gamma\frac{\eta_1}{\eta_0} = a^2 + ab + bc + ca,$$

et les suivantes d'une manière analogue. En retranchant membre à membre les équations sous cette forme, on obtient

$$\alpha\eta_2 = \beta\eta_1 + i\gamma\eta_0,$$
$$\alpha\eta_3 = \gamma\eta_1 - i\beta\eta_0.$$

La constance du rapport $J^2 : I^3$ implique aussi la constance des rapports de σ, σ', σ'' entre elles. Donc α, β, γ ont des rapports constants. Donc les dernières relations indiquent que η_2 et η_3 sont fonctions linéaires, à coefficients constants, de η_0, η_1. Donc ces quatre quantités satisfont à une même équation linéaire du second ordre. La vérification est donc complète.

Pour achever, on peut encore donner explicitement, en fonction de

η_0 et η_1 par exemple, les solutions canoniques, celles que fourniraient l'équation (16 *bis*). A cet effet, il suffit de substituer, dans (18), les expressions de η_2 et η_3, puis de réduire la forme biquadratique à être bicarrée. Voici le résultat :

Si l'on pose

$$z_0 = \frac{1}{2}\left[-\frac{J(\beta+i\gamma)^2}{\alpha^4\beta^2\gamma^2}\right]^{\frac{1}{4}}(\eta_0+\eta_1),$$

$$z_1 = \frac{1}{2}\left[-\frac{J(\beta-i\gamma)^2}{\alpha^4\beta^2\gamma^2}\right]^{\frac{1}{4}}(\eta_0-\eta_1),$$

les deux quantités z_0, z_1 sont deux solutions de l'équation proposée (*car les facteurs sont constants*), *et elles satisfont à la relation*

$$(19)\qquad z_0^4+z_1^4+2\,\frac{2\zeta-\zeta'-\zeta''}{\zeta''-\zeta'}\,z_0^2z_1^2=\frac{a_0}{\gamma_0^4}=\varphi(x).$$

18. Avant de faire une application numérique de ces résultats, je vais indiquer une légère modification qu'on peut apporter au calcul pour tous les cas où il s'agit d'une équation du second ordre.

Cette modification provient de ce fait bien connu que l'équation $G(y)=0$ se transforme en son adjointe $\Gamma(\eta)=0$ par la substitution $y=u^2g_0\eta$, de même que, dans les formes binaires, les contrevariants coïncident avec les covariants.

Faisons simultanément

$$u=e^{\int\frac{g_1}{g_0}dx},\quad v=e^{-\int\frac{\gamma_1}{\gamma_0}dx},\quad uvg_0=uv\gamma_0=1.$$

Donner $\chi_p(\eta)=\varphi(x)$ revient à donner $\chi_p(y)=v^{-2p}\gamma_0{}^p\varphi(x)$. On peut donc calculer une intégrale $\mathfrak{F}$, de $\Gamma(\eta)=0$, avec la source $v^{-2p}\gamma_0{}^p\varphi(x)$. Son premier coefficient sera $A_0=v^{-2p}\varphi(x)$. Au lieu de $\mathfrak{F}$, calculons directement $f_1=v^p\mathfrak{F}$; ce sera, d'après le théorème I, une forme à invariants constants. Dans un covariant linéaire de f_1, soit k_1 le coefficient de η'; alors $v^{-1}\gamma_0{}^1k_1$ est une solution y; par suite, vk_1 est une solution η.

Nous avons déjà, au n° **7**, donné les équations qui déterminent les coefficients de f_1. Elles ont pour type (11)

$$\gamma_0[\alpha'_s + (p-s)\alpha'_{s+1}] = (p-2s)\gamma_1\alpha_s + s\gamma_2\alpha_{s-1}.$$

Par cette méthode la solution du problème pour $p=4$ se présente ainsi :

Ayant déterminé $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ par les équations

$$v = e^{\int \frac{\gamma_1}{\gamma_0}dx},$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= v^{-4}\varphi(x),\\
4\alpha_1 &= -\alpha'_0 + \frac{4\gamma_1}{\gamma_0}\alpha_0,\\
3\alpha_2 &= -\alpha'_1 + \frac{2\gamma_1}{\gamma_0}\alpha_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_0}\alpha_0,\\
2\alpha_3 &= -\alpha'_2 + \ldots\ldots + \frac{2\gamma_2}{\gamma_0}\alpha_1,\\
\alpha_4 &= -\alpha'_3 - \frac{2\gamma_1}{\gamma_0}\alpha_3 + \frac{3\gamma_2}{\gamma_0}\alpha_2,\\
0 &= -\alpha'_4 - \frac{4\gamma_1}{\gamma_0}\alpha_4 + \frac{4\gamma_2}{\gamma_0}\alpha_3 \quad \text{(pour vérification)},
\end{aligned}$$

puis, ayant exprimé I, J, σ *par les* α, *comme on l'a fait plus haut par les quantités* a, *on aura la solution sous la forme*

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
\eta = v\Big[&(\sigma'-\sigma'')\sqrt{2(\alpha_0\alpha_2-\alpha_1^2)} + \sigma\alpha_0\\
&\pm(\sigma''-\sigma)\sqrt{2(\alpha_0\alpha_2-\alpha_1^2)} + \sigma'\alpha_0\\
&\pm(\sigma-\sigma')\sqrt{2(\alpha_0\alpha_2-\alpha_1^2)} + \sigma''\alpha_0\Big]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

Les quantités I *et* J *seront des constantes.*

Application. — Digression sur l'équation de Lamé.

19. *Intégrer l'équation suivante, où ψ désigne un polynôme du troisième degré,*

$$(21)\quad \psi\eta'' + \tfrac{1}{2}\psi'\eta' - \tfrac{1}{32}\psi''\eta = 0, \qquad \psi = \psi_0x^3 + 3\psi_1x^2 + 3\psi_2x + \psi_3,$$

sachant que quatre solutions ont un produit constant.

Voici les calculs :

$$\gamma_0 = \psi, \quad \gamma_1 = \tfrac{1}{4}\psi', \quad \gamma_2 = -\tfrac{1}{32}\psi'', \quad c = \psi^{-\frac{1}{4}}, \quad \varphi(x) = 1.$$

$$\alpha_0 = \psi, \quad \alpha_1 = 0,$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2^5.3}\psi'', \quad \alpha_3 = \frac{1}{2^6.3}\psi''', \quad \alpha_4 = \frac{1}{2^{10}.3}\,\frac{3\psi''^2 - 8\psi'\psi'''}{\psi};$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{I} = \frac{1}{2^8.3}(\psi''^2 - 2\psi'\psi''') = \frac{3}{2^6}(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2),$$

$$\frac{1}{6}\mathrm{J} = \frac{1}{2^{12}.3^3}(3\psi'\psi''\psi''' - 3\psi\psi'''^2 - \psi''^3) = \frac{1}{2^{10}}(3\psi_0\psi_1\psi_2 - 2\psi_1^3 - \psi_0^2\psi_3).$$

Si l'on fait $\sigma = \frac{1}{8}(\psi_0\tau + \psi_1)$, on trouve ici pour transformée de (17) l'équation $\psi(\tau) = 0$, en sorte que l'on a

$$\sigma' - \sigma'' = \tfrac{1}{8}\psi_0(\tau' - \tau''), \quad \ldots.$$

D'autre part,

$$2(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2) + \sigma\alpha_0 = \tfrac{1}{8}\psi_0\psi(\tau - x).$$

De la sorte, en omettant un facteur constant $(\frac{1}{8}\psi_0)^{\frac{3}{4}}$, on a, d'après (20),

$$\eta = \left[(\tau' - \tau'')\sqrt{\tau - x} \pm (\tau'' - \tau)\sqrt{\tau' - x} \pm (\tau - \tau')\sqrt{\tau'' - x}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Cette formule fournit quatre solutions de l'équation proposée; τ, τ', τ'' sont les racines de l'équation $\psi(\tau) = 0$.

Conformément au calcul fait plus haut, si l'on pose

$$\tau' - \tau'' = \alpha^2, \quad \tau'' - \tau = \beta^2, \quad \tau - \tau' = \gamma^2,$$
$$\tau - x = a^2, \quad \tau' - x = b^2, \quad \tau'' - x = c^2,$$

on peut écrire les solutions sous la forme

$$\eta_0 = \sqrt{(a - b)(b - c)(c - a)},$$

$$\eta_1 = \eta_0\frac{(a + b)(a + c)}{i\beta\gamma},$$

$$\eta_2 = \eta_0\frac{(b + c)(b + a)}{i\gamma\alpha},$$

$$\eta_3 = \eta_0\frac{(c + a)(c + b)}{i\alpha\beta},$$

et l'on a

$$\chi_0\chi_1\chi_2\chi_3 = i\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Les relations linéaires entre ces solutions et la forme canonique du produit s'écrivent exactement ici comme dans le cas général (n° **17**); il faut seulement mettre $\varphi(x) = 1$. Il y a encore pour ce produit une autre forme, valable aussi dans le cas général, mais qui, dans cet exemple, offre un intérêt particulier.

Si nous posons

$$\chi_0 = -\psi^{\frac{1}{4}}\alpha\beta\gamma\zeta_0,$$

$$\tau\chi_0 - i\beta\gamma\chi_1 = -\psi^{\frac{1}{4}}\alpha\beta\gamma\zeta_1;$$

l'expression du produit donne

$$\zeta_0(\zeta_1 - \tau\zeta_0)(\zeta_1 - \tau'\zeta_0)(\zeta_2 - \tau''\zeta_0) = 1$$

ou, en d'autres termes,

$$\zeta_0^4\psi\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_0}\right) = 1.$$

Cette formule va servir de fondement à une transformation de l'équation (21) qui mérite d'être signalée.

20. Pour faire cette transformation, il nous est nécessaire de connaître la valeur exacte du déterminant $\zeta_0\zeta_1' - \zeta_1\zeta_0'$, qui, d'après l'équation proposée (21), ne diffère de $\psi^{-\frac{1}{2}}$ que par un facteur numérique. D'après les expressions de χ_0 et χ_1, on a

$$2\frac{\chi_0'}{\chi_0} = \frac{a'-b'}{a-b} + \frac{b'-c'}{b-c} + \frac{c'-a'}{c-a} = \frac{a+b+c}{2abc},$$

$$2\frac{\chi_1'}{\chi_1} = \frac{a-b-c}{2abc}.$$

De là résulte immédiatement, abc étant égal à $\sqrt{-\psi(x)}$,

$$\zeta_0\zeta_1' - \zeta_1\zeta_0' = \frac{1}{2\sqrt{\psi(x)}}.$$

Semblablement, les deux solutions qui font acquérir au produit la forme canonique (19) donnent lieu au déterminant

$$(22)\qquad z_0 z_1' - z_1 z_0' = \sqrt{\frac{\psi_0(z_1' - z_0')}{\psi(x)}}.$$

21. En désignant par L, M, λ, μ des constantes, envisageons les deux équations, à la même variable indépendante,

$$\psi\eta'' + \tfrac{1}{2}\psi'\eta' + (\mathrm{L}\psi'' + \lambda)\eta = 0,$$

$$\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y' + (\mathrm{M}\psi'' + \mu)y = 0.$$

La nouvelle inconnue y, bien entendu, est ici sans aucun lien avec celle que la même lettre a précédemment représentée.

Je me propose de transformer la seconde équation en prenant, pour variable indépendante, au lieu de x, le rapport

$$\xi = \frac{\eta_1}{\eta_0}$$

de deux solutions de la première.

D'après la première, on aura, h étant une constante,

$$\eta_1'\eta_0 - \eta_1\eta_0' = h\psi^{-\frac{1}{2}}.$$

De là résulte, pour la transformation,

$$\frac{d\xi}{dx} = h\psi^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-2},$$

$$y' = h\psi^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-2}\frac{dy}{d\xi},$$

$$y'' = h^2\psi^{-1}\eta_0^{-4}\frac{d^2y}{d\xi^2} - h\psi^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-3}\left(\tfrac{1}{2}\eta_0\psi' + 2\eta_0'\psi\right)\frac{dy}{d\xi},$$

$$h^2\eta_0^{-4}\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2h\psi^{\frac{1}{2}}\eta_0^{-3}\eta_0'\frac{dy}{d\xi} + (\mathrm{M}\psi'' + \mu)y = 0.$$

La première équation peut être écrite d'une manière analogue. La supposant écrite et éliminant ψ'', j'ai

$$h^2\eta_0^{-4}\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2h\psi^{\frac{1}{2}}\eta_0^{-3}\eta_0'\frac{dy}{d\xi}$$
$$+\left[\frac{\mu\mathrm{L} - \lambda\mathrm{M}}{\mathrm{L}} + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}\left(2h\psi^{\frac{1}{2}}\eta_0^{-3}\eta_0'\frac{1}{\eta_1}\frac{d\eta_1}{d\xi} - h^2\eta_0^{-4}\frac{1}{\eta_1}\frac{d^2\eta_1}{d\xi^2}\right)\right]y = 0.$$

Faisant maintenant disparaître η'_0 par le moyen de l'égalité

$$\eta'_0 = h\,\psi^{\frac{1}{2}}\,\eta_0^{-2}\frac{d\eta_0}{d\xi}$$

et donnant à η la valeur particulière η_0, j'obtiens la forme

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} - 2\frac{d\eta_0}{\eta_0\,d\xi}\frac{dy}{d\xi} + \left\{\frac{\mu L - \lambda M}{h^2 L}\eta_0^4 + \frac{M}{L}\left[2\left(\frac{d\eta_0}{\eta_0\,d\xi}\right)^2 - \frac{d^2\eta_0}{\eta_0^2\,d\xi^2}\right]\right\}y = 0.$$

La transformation est achevée, sauf à exprimer explicitement η_0 en fonction de ξ. Or c'est ce que nous savons faire si la première équation coïncide avec celle que nous avons étudiée tout à l'heure. Faisons cette supposition, c'est-à-dire

$$L = -\frac{1}{32}, \quad \lambda = 0.$$

Deux solutions quelconques η_0, η_1 donnent lieu à une forme biquadratique, égale à l'unité; donc on a

$$\eta_0^4\chi\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right) = 1,$$

où χ est un polynôme du quatrième degré. Donc

$$\eta_0 = \chi^{-\frac{1}{4}}(\xi).$$

Je changerai la notation de la constante M, en écrivant

$$M = \frac{1 - 4m^2}{2^5.3},$$

et aussi l'inconnue en prenant Y au lieu de y,

$$(23)\qquad y = \eta_0^{2m+1}\,Y = \chi^{-\frac{1+2m}{4}}\,Y.$$

Le calcul n'offre plus aucune difficulté et donne pour résultat la transformée

$$(24)\qquad \chi\frac{d^2Y}{d\xi^2} - (m-1)\frac{d\chi}{d\xi}\frac{dY}{d\xi} + \left[\frac{(2m-1)(m-1)}{6}\frac{d^2\chi}{d\xi^2} + \frac{\mu}{h^2}\right]Y = 0.$$

J'ai pris arbitrairement les solutions η_0 et η_1; si je les choisis et que, par exemple, mon choix se porte sur les solutions ζ_0, ζ_1 (nº **19**), alors χ se réduit au polynôme du troisième degré ψ lui-même. J'ai calculé (nº **20**) la constante h pour ce cas; elle est égale à $\frac{1}{2}$. En résumé, j'ai obtenu la transformation suivante :

$\psi(x)$ étant un polynôme du troisième degré dont les racines sont τ, τ', τ'', le changement de variables

$$(25)\quad \begin{aligned} \xi &= \tau - \left(\sqrt{\tau - x} + \sqrt{\tau' - x}\right)\left(\sqrt{\tau - x} + \sqrt{\tau'' - x}\right), \\ y &= \left[\left(\sqrt{\tau - x} - \sqrt{\tau' - x}\right)\left(\sqrt{\tau' - x} - \sqrt{\tau'' - x}\right)\left(\sqrt{\tau'' - x} - \sqrt{\tau - x}\right)\right]^{m - \frac{1}{2}} Y \end{aligned}$$

transforme l'équation

$$(26)\qquad \psi(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{2}\psi'(x)\frac{dy}{dx} + \left[\frac{1 - 4m^2}{2^3.3}\psi''(x) + \mu\right]y = 0$$

en cette autre

$$(27)\quad \psi(\xi)\frac{d^2 Y}{d\xi^2} - (m-1)\psi'(\xi)\frac{dY}{d\xi} + \left[\frac{(2m-1)(m-1)}{6}\psi''(x) + 4\mu\right]Y = 0.$$

La signification de la relation liant ξ et x, au point de vue de la théorie des fonctions elliptiques, ne saurait échapper au lecteur. Si l'on suppose $\mu = 0$, $m = \frac{1}{2}$, y et Y se confondent; ces quantités sont égales, sauf des facteurs constants, aux intégrales $\int^x \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$, $\int^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{\psi(\xi)}}$. Pour déterminer le rapport des facteurs constants, il suffit de faire x infiniment grand, et l'on a immédiatement ce résultat : *la relation* (25) *est équivalente à celle-ci*

$$\int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = 2\int_\infty^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{\psi(\xi)}}.$$

Je reviendrai plus loin à la considération des fonctions elliptiques. Pour le moment, je m'arrête encore aux propriétés algébriques de l'équation (24).

22. D'après l'analyse qui a conduit à cette équation (24), on voit que toute substitution linéaire $\left| \xi, \dfrac{a\xi+b}{a'\xi+b'} \right|$ effectuée sur ξ a pour effet de changer l'équation différentielle en elle-même, sauf changement de la constante h, et sauf, bien entendu, changement du polynôme χ, du quatrième degré, en son transformé. Je vais utiliser cette propriété *projective* en prenant maintenant deux variables indépendantes η_0, η_1 et considérant Y comme une fonction de ces variables, homogène et du degré zéro. Je reviens alors à l'inconnue primitive y, qui, d'après (23), sera homogène et du degré $(2m-1)$. Au polynôme $\chi(\xi)$ je substitue une forme biquadratique homogène θ; je pose ainsi en même temps

$$y = \eta_0^{2m-1}\mathrm{Y}, \quad \theta = \eta_0^4\chi.$$

Je dénote par des indices les dérivées partielles, ainsi

$$\theta_0 = \frac{\partial\theta}{\partial\eta_0}, \quad \theta_{00} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta_0^2}, \quad \theta_{01} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\eta_0\,\partial\eta_1}, \quad \ldots.$$

En différentiant, j'ai

$$y_1 = \eta_0^{2m-2}\frac{d\mathrm{Y}}{d\xi}, \quad y_{11} = \eta_0^{2m-3}\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\xi^2}, \quad \ldots,$$

et de même pour les dérivées de χ, ce qui conduit d'abord à la forme

$$\theta y_{11} - (m-1)\theta_1 y_1 + \frac{(2m-1)(m-1)}{6}\theta_{11} y + \frac{\mu}{h^2}\eta_0^2 y = 0.$$

Mais les relations d'homogénéité

$$\begin{aligned}
\theta &= \tfrac{1}{12}(\theta_{11}\eta_1^2 + 2\theta_{01}\eta_0\eta_1 + \theta_{00}\eta_0^2), \\
\theta_1 &= \tfrac{1}{3}(\theta_{11}\eta_1 + \theta_{01}\eta_0), \\
y_1 &= \frac{1}{2m-2}(y_{11}\eta_1 + y_{01}\eta_0), \\
y &= \frac{1}{(2m-1)(2m-2)}(y_{11}\eta_1^2 + 2y_{01}\eta_0\eta_1 + y_{00}\eta_0^2)
\end{aligned}$$

donnent lieu, toutes réductions faites, à la forme définitive suivante :

$$(28) \qquad \theta_{00}y_{11} - 2\theta_{01}y_{01} + \theta_{11}y_{00} + \frac{12\mu}{h^2}y = 0.$$

Cette transformée est surtout remarquable par ce fait qu'elle ne contient pas la constante m. Son caractère projectif est d'ailleurs en évidence, car l'ensemble des trois premiers termes, pour deux fonctions homogènes quelconques, est un covariant.

Prenons pour les deux variables η_0, η_1 celles qui font acquérir à θ la forme bicarrée

$$(29)\qquad \theta = \eta_0^4 - 2A\eta_0^2\eta_1^2 + \eta_1^4,$$

et dont le coefficient A a été donné précédemment [n° **17**, équat. (19)]. En tenant compte d'une des relations d'homogénéité et posant, en outre,

$$\frac{(2m-1)(2m-2)}{3}A - \frac{\mu}{h^2} = (2m-1)(2m-2)\nu,$$

nous mettons l'équation (28) sous la forme

$$(30)\qquad \eta_0^2 y_{11} + 2A\eta_0\eta_1 y_{01} + \eta_1^2 y_{00} = (2m-1)(2m-2)\nu y,$$

très propre à faire connaître les cas où y est un polynôme entier.

Le degré de y étant $(2m-1)$, ces cas peuvent avoir lieu si m est entier, ou moitié d'un entier.

23 Soit d'abord m entier, et supposons

$$y = a_0\eta_0^{2m-1} + (2m-1)a_1\eta_0^{2m-2}\eta_1 + \frac{(2m-1)(2m-2)}{1.2}a_2\eta_0^{2m-3}\eta_1^2 + \ldots + a_{2m-1}\eta_1^{2m-1}.$$

En employant le symbole des combinaisons

$$C_p^q = \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q},$$

on trouve, par l'identification des deux membres de (30), deux systèmes d'équations, distincts entre eux, contenant l'un les coefficients a

d'indices pairs, l'autre ceux d'indices impairs; ce sont les suivants :

$$
\begin{array}{llll}
\nu a_0 & = a_2, & & \\
\nu C^2_{2m-1} a_2 & = C^2_{2m-3} a_4 & + 2AC^1_{2m-3} a_2 & + a_0, \\
\nu C^4_{2m-1} a_4 & = C^4_{2m-3} a_6 & + 2AC^3_{2m-3} a_4 & + C^2_{2m-3} a_2, \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
\nu C^{2m-4}_{2m-1} a_{2m-4} & = C^{2m-4}_{2m-3} a_{2m-2} & + 2AC^{2m-5}_{2m-3} a_{2m-4} & + C^{2m-6}_{2m-3} a_{2m-6}, \\
\nu C^{2m-2}_{2m-1} a_{2m-2} & = & + 2AC^{2m-3}_{2m-3} a_{2m-2} & + C^{2m-4}_{2m-3} a_{2m-4}, \\
\nu C^1_{2m-1} a_1 & = C^1_{2m-3} a_3 & + 2Aa_1, & \\
\nu C^3_{2m-1} a_3 & = C^3_{2m-3} a_5 & + 2AC^2_{2m-3} & + C^1_{2m-3} a_1, \\
\nu C^5_{2m-1} a_5 & = C^5_{2m-3} a_7 & + 2AC^4_{2m-3} a_5 & + C^3_{2m-3} a_3, \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
\nu C^{2m-3}_{2m-1} a_{2m-3} & = C^{2m-3}_{2m-3} a_{2m-1} & + 2AC^{2m-4}_{2m-3} a_{2m-3} & + C^{2m-5}_{2m-3} a_{2m-5}, \\
\nu C^{2m-1}_{2m-1} a_{2m-1} & = C^{2m-3}_{2m-3} a_{2m-3}. & &
\end{array}
$$

D'après la propriété $C^q_p = C^{p-q}_p$, il est manifeste que ces deux systèmes se changent l'un dans l'autre si l'on échange a_0, a_{2m-1} entre eux, a_2 et a_{2m-3}, a_4 et a_{2m-5}, ..., a_{2m-2} et a_1. Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que l'un et l'autre système soient possibles s'exprime par une seule équation, qu'il est inutile d'écrire ici sous forme de déterminant, et qui est du degré m par rapport au coefficient ν. Cette équation satisfaite, on pourra prendre à volonté un coefficient pair et un coefficient impair. De là le résultat suivant :

Si la constante μ est choisie parmi les racines d'une certaine équation, dont le degré est m, l'équation (28) *est satisfaite par un polynôme y contenant deux coefficients arbitraires* a, b. *Si θ est mis sous la forme bicarrée* (29), *y peut s'écrire*

$$y = \mathrm{a}\eta_0 f(\eta_0^2, \eta_1^2) + \mathrm{b}\eta_1 f(\eta_1^2, \eta_0^2),$$

où f est un polynôme entier homogène, du degré $(m-1)$.

Pour une telle valeur de μ, l'équation (26), *où la constante m a la même signification, s'intègre algébriquement.*

24. On voit pour quelle raison je me suis cru autorisé à introduire ici cette digression concernant l'équation (26). En permutant les η, on aura quatre solutions y dont le produit symétrique sera une fonction entière de x; par conséquent, nous obtenons une classe d'équations pour chacune desquelles le produit de quatre solutions est un polynôme entier, et qui pourraient être intégrées par l'application des procédés généraux exposés dans ce Mémoire.

Dans le cas qui nous occupe, l'équation (27) admet pour solution générale un faisceau de polynômes entiers en ξ, du degré $(2m-1)$. D'après le coefficient du second terme, la *jacobienne* de ce faisceau est χ^{2m-1}; par conséquent, le problème consistant à déterminer μ et qui se résout, comme on l'a vu, par une équation du degré m, coïncide avec ce problème de pure Algèbre : *Étant donnée une forme biquadratique, trouver un faisceau de formes de degré impair* $(2m-1)$, *admettant pour jacobienne la puissance* $(m-1)^{\text{ième}}$ *de la forme biquadratique.*

M. Cyparissos Stephanos a consacré un Mémoire d'une haute importance [1] au problème général consistant à chercher les faisceaux qui ont une jacobienne donnée. Il s'agit ici d'un cas particulier de ce problème. Ce savant géomètre a fait voir que, *si une forme y appartient à un faisceau ayant* Θ *pour jacobienne, le covariant*

$$\Theta_{00}y_{11} - 2\Theta_{01}y_{01} + \Theta_{11}y_{00}$$

est divisible par y. Par l'équation (28) nous avons obtenu une proposition analogue coïncidant avec la précédente pour le cas $m=2$, à savoir : *Si la forme* y, *de degré impair* $(2m-1)$, *appartient à un faisceau ayant pour jacobienne la puissance* $(m-1)^{\text{ième}}$ *d'une forme biquadratique* θ, *le covariant* $\theta_{00}y_{11} - 2\theta_{01}y_{01} + \theta_{11}y_{00}$ *reproduit la forme* y, *et réciproquement.*

25. Il nous suffira d'appliquer les équations du n° **23** à un exemple, le plus simple, $m=2$.

$$\nu a_0 = a_2,\quad 3\nu a_2 = 2\mathrm{A}a_2 + a_0,$$
$$3\nu^2 - 2\mathrm{A}\nu - 1 = 0,$$
$$\mathrm{A} - \frac{\mu}{2h^2} = 3\nu,\quad \frac{\mu}{2h^2} = \sqrt{\mathrm{A}^2+3}.$$

(1) *Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne* (*Savants étrangers*, t. XXVII).

Remplaçant h par l'expression qui résulte de (22) et A par celle qui résulte de (19), nous aurons

$$\mu = \frac{\psi_0}{4}\sqrt{\tau^2 + \tau'^2 + \tau''^2 - \tau\tau' - \tau'\tau'' - \tau''\tau} = \frac{3}{4}\sqrt{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}.$$

Envisageant la forme biquadratique $\eta_0^4\psi\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)$, nous voyons figurer ici, sous le radical, son invariant quadratique, et nous pouvons conclure en toute généralité que, θ étant un polynôme de quatrième degré, et y une forme cubique appartenant à un faisceau dont θ est la jacobienne, on a

$$\theta_{00}y_{11} - 2\theta_{01}y_{01} + \theta_{11}y_{00} = \pm 2\sqrt{\frac{3I}{2}}\,y,$$

formule dans laquelle I est l'invariant quadratique de θ. Ce résultat s'accorde avec ce qu'on savait déjà sur ce sujet (¹).

26. J'ai encore à examiner les cas où, dans (30), y est un polynôme entier, quand m est la moitié d'un entier impair. Mettant $2n$ au lieu de $(2m-1)$, supposons

$$y = a_0\eta_0^{2n} + 2na_1\eta_0^{2n-1}\eta_1 + \frac{2n(2n-1)}{1.2}a_2\eta_0^{2n-2}\eta_1^2 + \ldots + a_{2n}\eta_1^{2n}.$$

On trouve ici, comme pour le cas précédent, deux systèmes distincts contenant l'un les coefficients pairs, l'autre les coefficients impairs. Mais ces deux systèmes diffèrent entre eux. Pour abréger, j'omets de les écrire : ils suivent la même loi que dans le cas précédent, mais la différence porte sur les équations extrêmes. Ici l'on pourra trouver la constante de manière à rendre possible seulement un des deux systèmes au choix ; l'autre n'aura pour solution qu'un ensemble de coefficients nuls. Chacun des deux systèmes présente une symétrie par rapport aux coefficients également distants des extrêmes, en sorte que l'équation relative au coefficient ν se décompose. Voici finalement le résultat :

L'équation (28) *admet pour solution* y *un polynôme entier et homo-*

(¹) *Voir*, par exemple, le Mémoire cité de M. Stephanos, p. 40 et 43.

gène de degré pair $2n$, si la constante μ est une racine d'une quelconque de quatre équations, dont trois sont du degré $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ suivant la parité de n, la quatrième du degré $\frac{n}{2}+1$ ou $\frac{n-1}{2}$.

Si ψ est mis sous la forme biquadratique (29), les formes de y sont les suivantes, où $T_s(a, b)$ désigne une fonction homogène, de degré s en a, b et symétrique par rapport à ces lettres.

1° *n pair. — Si μ est racine de l'équation de degré $\frac{n}{2}+1$,*

$$y = T_n(\eta_0^2, \eta_1^2).$$

Si μ est racine d'une des trois autres équations, y a l'une des formes suivantes, dont chacune est relative à une équation

$$y = (\eta_0^2 - \eta_1^2) T_{n-1}(\eta_0^2, \eta_1^2),$$
$$y = \eta_0 \eta_1 T_{n-1}(\eta_0^2, \eta_1^2),$$
$$y = \eta_0 \eta_1 (\eta_0^2 - \eta_1^2) T_{n-2}(\eta_0^2, \eta_1^2).$$

2° *n impair. — La quatrième forme correspond à la racine de l'équation du degré $\frac{n-1}{2}$; les trois autres aux racines des trois autres équations.*

La constante μ étant ainsi choisie, l'équation (26), où l'on remplace $(2m-1)$ par $2n$, a une solution particulière algébrique.

27. Appliqués à l'exemple $n = 1$, les calculs que je viens d'indiquer donnent facilement le résultat que voici : l'équation

$$\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y' + (\mu - \tfrac{1}{12}\psi'')y = 0$$

a pour solution particulière $y = \sqrt{\tau - x}$ si l'on prend $\mu = \frac{\psi_0}{12}(\tau' + \tau'' - 2\tau)$. La permutation des racines donne les deux autres cas; le quatrième n'existe pas à cause de $\frac{n-1}{2} = 0$.

Pour $n = 2$, voici le résultat : l'équation

$$\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y' + (\mu - \tfrac{1}{4}\psi'')y = 0$$

a pour solution particulière $y = \sqrt{(\tau - x)(\tau' - x)}$, si l'on prend

$\mu = \frac{\psi_0}{4}(2\tau'' - \tau - \tau')$; par permutation on a deux autres cas; enfin, si l'on prend $2\mu = \pm\sqrt{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}$, on aura la solution

$$y = x + \frac{\psi_1 \pm \sqrt{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}}{\psi_0}.$$

28. L'équation (26), qui, si l'on y remplace $(2m-1)$ par $2n$, s'écrit

$$\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y' + \left[\mu - \frac{n(n+1)}{24}\psi''\right] y = 0,$$

n'est, en réalité, pas autre chose que l'équation de Lamé. Que l'on y fasse

$$\psi(x) = x(1-x)(1-k^2x), \quad x = \operatorname{sn}^2 u,$$

et qu'on prenne u pour variable indépendante, on obtiendra la transformée

$$\frac{d^2y}{du^2} = \left[n(n+1)k^2\operatorname{sn}^2 u + \frac{1+k^2}{3} - 4\mu\right] y,$$

ou encore, si l'on fait

$$\psi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3, \quad x = pu:$$
$$\frac{d^2y}{du^2} = [n(n+1)pu - \mu]\, y.$$

Les cas dont nous nous sommes occupé en dernier lieu, ceux où n est un nombre entier, sont précisément ceux qu'a considérés Lamé. La méthode employée ici est très différente de celle qu'a employée Lamé, et ne conduit pas moins à la même conclusion, relativement à l'existence de quatre équations distinctes pour l'inconnue μ (¹). Quant au cas précédent, celui où m est entier, c'est-à-dire où n est la moitié d'un entier impair, la conclusion, nous l'avons vu, consiste en ce qu'on

(¹) *Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux* (*Journal de Math.*, 1re sér., t. IV, p. 141).

peut déterminer μ comme racine d'une équation de degré $(n + \frac{1}{2})$, de sorte que la solution générale de (26) soit algébrique. Pour l'équation de Lamé, cette conclusion se transforme en ceci : la solution générale est le produit de $\left(p'\frac{u}{2}\right)^{-n}$ par un polynôme entier, du degré $2n$, par rapport à $p\frac{u}{2}$. J'avais déjà formulé cette conclusion et donné la transformée (27) dans d'autres occasions ([1]). Antérieurement, M. Brioschi avait fait connaître une première indication sur ce sujet ([2]), et conclu nettement plus tard ([3]). M. Appell a traité aussi le cas $n = \frac{1}{2}$ ([4]). Les géomètres verront avec plaisir, je pense, dans l'analyse actuelle, la réunion de ces deux cas de l'équation de Lamé, en apparence si différents, et qui viennent coïncider avec ce problème algébrique : *θ étant une forme biquadratique binaire, trouver une autre forme y telle que le covariant $\theta_{00}y_{11} - 2\theta_{01}y_{01} + \theta_{11}y_{00}$ reproduise y.*

29. On pourrait vouloir poursuivre la série de ces recherches, et demander d'intégrer une équation du second ordre connaissant le produit de *cinq*, ou *six*, ou un nombre quelconque de solutions. Les formes de degré impair, à partir du cinquième inclusivement, ont des covariants linéaires rationnels. Donc en général, le produit d'un nombre impair de solutions étant connu, l'équation s'intègre algébriquement et *rationnellement*, ce qui constitue une différence essentielle avec le cas où il s'agit de trois solutions seulement. Pour rencontrer des circonstances différentes, il faudra recourir aux formes binaires exceptionnelles, dont les covariants linéaires rationnels sont identiquement nuls.

De même, pour les formes de degré pair, à partir du sixième inclusivement, il existe des covariants quadratiques rationnels, et, par suite,

---

([1]) *Sur les invariants des équations différentielles linéaires du quatrième ordre* (*Acta mathematica*, t. III, p. 379); et *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables* (*Savants étrangers*, t. XXVIII, p. 105).

([2]) *Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 315.

([3]) *Ibid.*, t. XCI, p. 319.

([4]) *Ibid.*, t. XCII, p. 1007.

des covariants linéaires dont l'irrationnalité est seulement du second degré. Par suite, en général, le produit connu d'un nombre pair de solutions conduit à l'intégration par l'extraction d'une racine carrée. Les formes binaires exceptionnelles dont les covariants quadratiques sont nuls fourniront seules des exemples contradictoires.

Si l'on voulait épuiser le sujet en suivant cette voie, on retrouverait les formes *polyédriques* dont l'intervention est déjà bien connue dans la théorie des équations linéaires du second ordre. Mais je n'ai pas l'intention d'y revenir ici, et je vais aborder l'application de ma théorie générale aux équations du troisième ordre.

III. — ÉQUATIONS DU TROISIÈME ORDRE.

Multiplicateurs quadratiques.

30. Laissant de côté, comme je l'ai déjà dit, les formes quadratiques, nous rencontrons pour premier problème, dans les équations du troisième ordre, celui-ci : *Intégrer une équation linéaire du troisième ordre, connaissant, en fonction de la variable indépendante, l'expression d'une forme cubique ternaire composée avec trois solutions inconnues.*

Le principe de la solution peut se résumer ainsi : *Calculer pour l'équation adjointe l'intégrale qui a pour source la fonction donnée, et réduire cette intégrale, forme cubique ternaire, à la forme canonique. Les covariants linéaires canoniques fournissent immédiatement les solutions cherchées.*

Cette solution est ainsi basée sur une des théories algébriques les plus parfaites que nous possédions, celle des formes cubiques ternaires. Il s'agit ici de la dégager explicitement pour la réduire en formules susceptibles d'applications immédiates.

Au lieu des intégrales cubiques, je considérerai les multiplicateurs quadratiques correspondants, ce qui est plus simple. J'ai indiqué (n° **12**) le procédé général pour trouver les équations déterminant un multiplicateur. Il est fondé sur la *réduction* des produits $wy^{m}y'^{m'}y''^{m''}\ldots$, où w est une fonction quelconque de la variable indépendante. Les formules de cette réduction pour les produits cubiques ternaires sont les suivantes :

$$
(31)\quad \left\{
\begin{aligned}
wy^2y' &= -\tfrac{1}{3}w'y^3 && +\tfrac{1}{3}(wy^3)',\\
wy^2y'' &= -2wyy'^2+\tfrac{1}{3}w''y^3 && +(wy^2y'-\tfrac{1}{3}w'y^3)',\\
wy^2y''' &= wy'^3+3w'yy'^2-\tfrac{1}{3}w'''y^3 && +(wy^2y''-wyy'^2-w'y^2y'+\tfrac{1}{3}w''y^3)',\\
wyy'y'' &= -\tfrac{1}{2}wy'^3-\tfrac{1}{2}w'yy'^2 && +\tfrac{1}{2}(wyy'^2)',\\
wyy'y''' &= -wyy''^2+\tfrac{5}{6}w'y'^3+\tfrac{1}{2}w''yy'^2 && +(wyy'y''-\tfrac{1}{3}wy'^3-\tfrac{1}{2}w'yy'^2)',\\
wyy''y''' &= -\tfrac{1}{2}wy'y''^2-\tfrac{1}{2}w'yy''^2 && +\tfrac{1}{2}(wyy''^2)'.
\end{aligned}
\right.
$$

Parmi les produits qu'on aura à considérer ici, ceux qui ne figurent pas dans les six équations immédiatement s'en déduisent par un changement des accents. Par exemple, pour réduire wy'^2y''', on n'a qu'à changer y en y' et, par suite, y' en y'', y'' en y''' dans la seconde formule.

La forme linéaire $G(y)$ et le multiplicateur quadratique $M(y)$ étant représentés par

$$
\begin{aligned}
G(y) &= g_0y'''+3g_1y''+3g_2y'+g_3y,\\
M(y) &= py''^2+qy'^2+ry^2+2hy'y''+2lyy''+2myy',
\end{aligned}
$$

nous effectuons le produit MG; nous réduisons tous les termes suivant les formules précédentes, et nous égalons à zéro les coefficients des termes irréductibles, c'est-à-dire fournis par la première partie des seconds membres de (31). Ceci, nous l'avons vu (n° **12**), doit fournir six équations différentielles pour les coefficients de M. Voici ces équations (en face et à gauche de chacune d'elles, j'ai indiqué la quantité irréductible dont on a égalé à zéro le coefficient) :

$$
(32)\quad \left\{
\begin{array}{l|l}
y''^3 & 3g_0h+(g_0p)'-9g_1p=0,\\
y'y''^2 & g_0l+(g_0h)'-6g_1h+2g_0q-3g_2p=0,\\
yy''^2 & 2g_0m+(g_0l)'-6g_1l-g_3p=0,\\
y'^3 & g_0r+\tfrac{5}{3}(g_0m)'-3g_1m-3g_2l\\
 & \qquad -2(g_2h)'-g_3h+\tfrac{1}{3}(g_0q)''-(g_1q)'+3g_2q=0,\\
yy'^2 & 3(g_0r)'-6g_1r+(g_0m)''-3(g_1m)'\\
 & \qquad +6g_2m-3(g_2l)'-4g_3l-(g_3h)'+g_3q=0,\\
y^3 & (g_0r)'''-3(g_1r)''+3(g_2r)'\\
 & \qquad -3g_3r+2(g_3m)'-2(g_3l)''=0.
\end{array}
\right.
$$

De ces six équations, les quatre premières donnent explicitement h, l, m, r en fonction linéaire de p, q et des dérivées de p, q. En substituant dans les deux dernières, on aura deux équations linéaires simultanées aux inconnues p, q. L'élimination de q entre ces dernières conduirait à l'équation finale en p, qui est du dixième ordre : c'est l'équation aux cubes (multipliés par g_0^3) des solutions de l'adjointe $\Gamma(\eta) = 0$. Généralement, par le moyen des deux dernières équations, on pourra exprimer q en fonction linéaire de p et de ses dérivées. Suivant l'hypothèse, on connaît p; donc par là on peut trouver le multiplicateur explicitement.

31. Nous savons que le cas d'exception est celui où l'équation en p est d'ordre inférieur à 10. Il importe de reconnaître comment le calcul mettra ce cas en évidence. Mais, pour ce but, je vais faire d'abord une simplification.

J'ai pris G sous la forme *complète*, afin d'avoir immédiatement les éléments les plus commodes pour les applications, où tout changement est d'habitude fort gênant. Mais, pour une théorie générale, cet avantage disparaît, et l'on n'a que l'inconvénient d'allonger les calculs. Pour faire l'élimination, je supposerai donc $g_0 = 1$, $g_1 = 0$. La première hypothèse est évidemment permise, la seconde implique seulement un changement de y en αy, α étant une fonction convenablement choisie. Ce changement, fait dans G et dans M, n'altère pas la propriété qu'a le produit d'être une exacte dérivée. On pourrait aussi, par un changement de la variable indépendante, supposer $g_2 = 0$; mais ce changement, sans simplifier beaucoup, présente plusieurs inconvénients, et je ne le ferai pas. Dans le résultat final, comme on verra, il me sera facile de revenir à la supposition que g_0 et g_1 sont quelconques.

Dans les équations (32), je fais donc $g_0 = 1$, $g_1 = 0$, je tire h, l, m, r des quatre premières, et je substitue dans les deux dernières. J'ordonne le résultat par rapport aux dérivées de q, et je mets dans le second membre les termes qui contiennent p ou ses dérivées. Ces termes étant inutiles pour mon but, je m'abstiens de les reproduire, et je les désigne par des majuscules. Ainsi A, B, C, D vont signifier des fonctions linéaires de $p, p', p'', \ldots$.

En outre, je fais disparaître g_3 en introduisant à sa place la quantité v

$$v = 3g_2' - 2g_3.$$

Les équations qui résultent de ce calcul sont les suivantes

$$q''' + 3g_2 q' + \left(\tfrac{3}{2}g_2' + \tfrac{9}{10}v\right)q = \mathrm{A}, \tag{33}$$

$$21vq'' + 7v'q' + (27g_2v + v'')q = \mathrm{B}, \tag{34}$$

provenant respectivement de la sixième et de la cinquième équation.

32. Ici déjà s'offre un premier cas particulier, celui où v est identiquement nul. On le voit, en ce cas, l'équation finale en p se réduit à $\mathrm{B} = 0$, qui est seulement du septième ordre, et q ne peut être trouvé, en fonction de p, que par l'équation (33), du troisième ordre. Ce dernier fait est la conséquence du précédent. Trois relations cubiques homogènes, à coefficients constants, linéairement distinctes entre elles, ont lieu entre les η. Donc, de toute nécessité, il existe entre ces quantités une relation quadratique homogène, à coefficients constants. C'est bien, en effet, là ce que signifie l'égalité $v = 0$, et v est cet invariant qui, pour la première fois, a été signalé par M. Laguerre ([1]). L'équation (33), d'où dépend q, coïncide avec les proposées $\mathrm{G}(y) = 0$, $\Gamma(\eta) = 0$ (qui, en ce cas, coïncident entre elles), sauf le second membre A. Il y a donc lieu de revenir à la proposée, qui se ramène à l'équation du second ordre

$$z'' + \tfrac{3}{4}g_2 z = 0.$$

En effet, on prouve aisément que les solutions η sont les produits de deux solutions z entre elles. Le problème proposé, en ce cas particulier, consiste donc à intégrer cette équation du second ordre, quand on connaît le produit de six solutions, et nous n'avons plus à nous en occuper.

33. Supposant désormais v différent de zéro, nous pouvons, par

---

([1]) *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, p. 116 et 224.

deux dérivations, réduire le système (33), (34) à ne contenir que q et q'. Dans ce calcul s'introduit une nouvelle combinaison δ :

$$\delta = 27 g_2 v^2 + 7 v'^2 - 6 v v'',$$

qui est un invariant fondamental, fournissant avec v tous les autres invariants. Voici le résultat de ce calcul :

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} & 4\delta q' + \left(\frac{1}{2}\delta' + \frac{3^4.7}{10} v^3\right) q = C, \\ & \left(28\delta v' - \frac{3^4.7}{2} v\delta' - \frac{3^5.7^2}{10} v^4\right) q' \\ & \quad + \left(2^2\, 3^3 g_2 v\delta + 4\delta v'' - \frac{21}{2} v\delta'' - \frac{3^4.7^2}{10} v^3 v'\right) q = D. \end{aligned}\right.$$

Le second cas particulier s'offre maintenant : c'est celui où le déterminant des coefficients de q et q' est nul. En introduisant les deux invariants δ_1 et θ

$$\delta_1 = 3 v\delta' - 8\delta v', \quad \theta = 2\delta\delta'_1 - 3\delta_1\delta',$$

on trouve ce déterminant sous la forme

$$(36)\qquad \Omega = 7\theta - \frac{3^4.7^2}{2} v^3 \delta_1 - \frac{3^9.7^3}{100} v^7 + \frac{1}{v}\left(\frac{7}{4}\delta_1^2 - 16\delta^3\right).$$

Il y faut observer que $\left(\frac{7}{4}\delta_1^2 - 16\delta^3\right)$ est divisible par v, en sorte que Ω est une fonction entière des coefficients g_2, g_3 et de leurs dérivées. L'égalité $\Omega = 0$ exprime qu'entre les η il existe une relation cubique, homogène, à coefficients constants. Si elle a lieu, q se trouve donné par une seule des équations (35), à volonté, et le multiplicateur se trouvera par le moyen d'une quadrature. Dans le cas opposé, les équations (35) simultanées donnent explicitement q, et le multiplicateur sera trouvé sans quadrature. Arrêtons-nous un instant sur l'équation $\Omega = 0$. Elle présente cette circonstance qu'exprimant une propriété de $\Gamma(\eta) = 0$, elle contient les coefficients de l'adjointe $G(y) = 0$. Mais la théorie des invariants, à laquelle je renvoie ([1]), nous enseigne que les

[1] Voir mon Mémoire sur la *Réduction des équations différentielles*, déjà cité, chap. III.

invariants $\theta, v, \theta_1, \Theta$ sont communs aux deux équations, sauf changement de signe pour les trois derniers seulement. Il n'y a donc qu'à effectuer ce changement ici. De plus, j'ai annoncé que, le calcul fait, je rétablirais les coefficients g_0, g_1. Effectivement, renvoyant le lecteur à la même théorie, j'énonce le résultat suivant :

Ayant posé

$$v = 3\left(\frac{g_2}{g_0}\right)' - 2\frac{g_3}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0}\right)'' - 6\frac{g_1}{g_0}\left(\frac{g_1}{g_0}\right)' + 6\frac{g_1 g_2}{g_0^2} - 4\left(\frac{g_1}{g_0}\right)^3,$$

$$\theta = 27v^2\left[\frac{g_2}{g_0} - \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2 - \left(\frac{g_1}{g_0}\right)'\right] + 7v'^2 - 6vv'',$$

$$\theta_1 = 3v\theta' - 8\theta v', \quad \Theta = 2\theta\theta'_1 - 3\theta_1\theta',$$

1° *on exprime que trois solutions y de $G(y) = 0$ sont liées par une relation cubique, homogène, à coefficients constants, au moyen de la relation*

$$\Omega_1 = 7\Theta + \frac{3^4 \cdot 7^2}{2} v^3 \theta_1 - \frac{3^9 \cdot 7^3}{100} v^7 + \frac{1}{v}\left(\frac{7}{4}\theta_1^2 - 16\theta^3\right) = 0;$$

2° *par la relation* (36) $\Omega = 0$, *on exprime que la même propriété a lieu pour l'équation adjointe* $\Gamma(\eta) = 0$.

Quand on emploie, comme je l'ai fait déjà, la notion de *courbe attachée à l'équation*, c'est-à-dire lieu du point dont les coordonnées homogènes dans le plan sont trois solutions y, alors $\Omega_1 = 0$ exprime que cette courbe est du troisième degré, $\Omega = 0$ exprime qu'elle est de troisième classe. Ce sont, à un autre point de vue, les équations différentielles des courbes, soit du troisième degré, soit de la troisième classe, de même que $v = 0$ est l'équation différentielle des coniques.

34. Revenons au multiplicateur M, qui peut maintenant être envisagé comme étant connu, sa source p étant donnée.

D'après le théorème II (n° 9), un invariant de $u^s g_0 M$, du degré m par rapport aux coefficients est de la forme $u^m g_0 p'$, où p' est le premier coefficient d'un multiplicateur M′ du degré $(m-1)$. Comme M est quadratique, le seul invariant est le discriminant, et l'on a $m = 3$. Donc *le discriminant de $u^3 g_0 M$ est le premier coefficient de $u^3 g_0 M'$, M' étant un autre multiplicateur quadratique.* Il serait inutile de chercher un nouveau multiplicateur par le moyen du discriminant de $u^3 g_0 M'$; car *toute forme du faisceau $u^3 g_0(\varkappa M + \lambda M')$ a pour discriminant une fonction appartenant au faisceau $u^3 g_0(\varkappa p + \lambda p')$; il est, par conséquent, la source d'un multiplicateur appartenant au faisceau $\varkappa M + \lambda M'$.* En effet, F étant l'intégrale cubique qui correspond à M, le hessien de $u^3 F$ a la forme $u^3 F'$, où F' est une nouvelle intégrale cubique. C'est la conséquence du théorème I (nº **8**). Il suffit de jeter les yeux sur le hessien d'une forme cubique pour reconnaître que M' est le multiplicateur correspondant à F'. La proposition résulte alors de ce fait connu que, *dans le faisceau composé d'une forme cubique ternaire et de sa hessienne, chaque forme a pour hessienne une forme du faisceau.*

C'est précisément sur cette propriété qu'est fondée la réduction des formes cubiques ternaires. On cherche, dans le faisceau, une forme qui coïncide avec sa hessienne; elle est décomposable en facteurs linéaires, qui sont les covariants linéaires de la forme canonique. Cette recherche pourra se faire sur les multiplicateurs; on cherchera, dans le faisceau $u^3 g_0(\varkappa M + \lambda M')$, une forme dont le discriminant soit $u^3 g_0(\varkappa p + \lambda p')$, et la solution s'ensuivra. Nous voyons toutefois cette solution tomber en défaut si ce multiplicateur cherché est justement M. Traitons d'abord ce cas particulier, qui exigera des quadratures.

PRODUIT DE TROIS SOLUTIONS.

35. On sera averti qu'on est en présence de ce cas particulier si l'on sait d'avance que la fonction donnée est le produit de trois solutions. Si, au contraire, on connaît l'expression d'une forme cubique composée avec trois solutions, sans savoir que cette forme est le produit de trois facteurs linéaires, on s'en apercevra par cette circonstance que le discriminant de $u^3 g_0 M$ reproduira $u^3 g_0 p$ (à un facteur constant près). Notons que la même circonstance se présente encore dans le cas que caractérise l'équation $\Omega = 0$, si p n'est pas nul. En effet, en ce cas, il existe un multiplicateur à source zéro, par suite une infinité de multiplicateurs ayant une même source. Mais le calcul du multiplicateur, comme on l'a vu plus haut, fait nécessairement reconnaître ce cas, lorsqu'il a lieu, et nous n'avons pas à insister sur ce point.

La méthode à suivre est analogue à celle du n° **13**. L'intégrale F étant le produit de trois intégrales linéaires B, il suffit de considérer, dans F, les termes en y'' et y'; soit donc

$$F = a_0 y''^3 + 3a_1 y''^2 y' + 3a_2 y'' y'^2 + a_3 y'^3 + \ldots,$$

on considérera l'équation

$$a_0 z^3 + 3a_1 z^2 + 3a_2 z + a_3 = 0$$

pour en conclure la solution

$$\eta = \frac{1}{g_0 u^3} e^{\int z\,dx}.$$

Les coefficients a_0, a_1, a_2 sont connus immédiatement par le multiplicateur; quant à a_3, il se conclut aisément de la partie qui, dans les formules (31), est composée de dérivées exactes. Le multiplicateur étant

$$M = py''^2 + 2hy'y'' + qy'^2 + \ldots,$$

on a, en définitive,

$$a_0 = \tfrac{1}{3} g_0 p, \quad a_1 = \tfrac{1}{3} g_0 h, \quad a_2 = \tfrac{1}{3} g_0 q,$$
$$a_3 = \tfrac{1}{3}\{6g_2 h + 3g_1 q - (g_0 q)' - 2g_0 m\}.$$

APPLICATION.

36. Voici un exemple numérique : *Intégrer l'équation*

$$\Gamma(\eta) = \eta''' - \frac{3}{x^2}\eta' + \left(\frac{3}{x^3} + k^3\right)\eta = 0,$$

où k est une constante, sachant qu'une forme cubique, composée avec trois solutions η, a pour expression $k^3 + \frac{1}{x^3}$.

On a

$$G(y) = y''' - \frac{3}{x^2}y' + \left(\frac{3}{x^3} - k^3\right)y,$$

$$p = k^3 + \frac{1}{x^3}, \quad q = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^3} - k^3\right), \quad r = \frac{1}{x^4}\left(k^3 + \frac{1}{x^3}\right),$$

$$h = -\frac{1}{x^4}, \quad l = -\frac{1}{x^2}\left(k^3 + \frac{1}{x^3}\right), \quad m = -\left(\frac{k^6}{2} + \frac{1}{x^6}\right).$$

Le discriminant $pqr + 2hlm - pm^2 - ql^2 - rh^2$ se réduit à

$$-\frac{k^{12}}{4}\left(k^3 + \frac{1}{x^3}\right),$$

circonstance qui avertit de ce fait : *la forme cubique est le produit de trois solutions*. L'équation en z est la suivante :

$$\left(\frac{1}{x^3} + k^3\right)z^3 - \frac{3}{x^4}z^2 + \frac{3}{x^2}\left(\frac{1}{x^3} - k^3\right)z + \left(\frac{1}{x^3} - k^3\right)^2 = 0$$

ou, sous une autre forme,

$$\frac{(xz - 1 - k^3x^3)^3 - k^6x^6z^3}{x^6(1 - k^3x^3)} = 0.$$

Il en résulte, ω étant une racine cubique de l'unité,

$$z = -\frac{1 - k^3x^3}{x(1 - \omega^2k^2x^2)} = \frac{d}{dx}\left[-\omega kx + \log\left(\omega k + \frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\eta = \left(\omega k + \frac{1}{x}\right)e^{-\omega kx}.$$

Les trois racines cubiques ω donnent les trois solutions, dont le produit est égal à $k^3 + \frac{1}{x^3}$ (¹).

(¹) Cet exemple est emprunté à mon *Mémoire sur la réduction des équations différentielles* (p. 180); la même méthode peut s'appliquer à l'équation

$$\eta''' - \frac{n^2 - 1}{x^2}\eta' + \left(\frac{n^2 - 1}{x^3} + k^3\right)\eta = 0,$$

où n est un entier premier avec 3; il y a trois solutions dont le produit est rationnel.

Forme cubique ternaire.

37. Traitons maintenant le cas général du problème. J'admets comme bien connue la théorie des formes cubiques ternaires, et je rappelle d'abord les formules dont je vais faire usage.

J'emploie les mêmes notations et, pour les invariants et covariants, les mêmes facteurs numériques que l'on trouve dans Clebsch (*Vorlesungen über Geometrie*, bearb. und herausgegeben von Lindemann, p. 562 et suiv.). Je mets seulement les indices 0, 1, 2 aux indéterminées au lieu de 1, 2, 3, pour rappeler que ces indéterminées sont ici

$$x_0 = y, \quad x_1 = y', \quad x_2 = y''.$$

La forme cubique est désignée par f, ses invariants du quatrième et du sixième degré par S et T respectivement, sa hessienne par Δ, l'expression numérique de Δ est le déterminant des dérivées secondes de f, divisé par 36. Il y a, en outre, à considérer un covariant φ, dont l'expression est la suivante : le produit $-2.3^4\varphi$ est égal au déterminant des dérivées secondes de f, *bordé* par les dérivées premières de Δ. Enfin un autre covariant ψ intervient, à savoir

$$\psi = -\tfrac{3}{4}\varphi - \tfrac{1}{12}\mathrm{T}f^2 + \tfrac{1}{8}\mathrm{S}\,\Delta f$$

et ce dernier est un *combinant* pour le faisceau (f, Δ).

Avec les invariants S, T est composée une forme binaire, biquadratique et équianharmonique aux indéterminées $\varkappa, \lambda$, que je désigne par $\mathrm{U}(\varkappa, \lambda)$, et qui dans Clebsch est désignée par la lettre G :

$$\mathrm{U}(\varkappa, \lambda) = \varkappa^4 - \mathrm{S}\varkappa^2\lambda^2 - \tfrac{1}{3}\mathrm{T}\varkappa\lambda^3 - \tfrac{1}{12}\mathrm{S}^2\lambda^4.$$

Voici, par le moyen de ces éléments, les résultats que j'ai à rappeler :

1° La hessienne $\Delta_{\varkappa\lambda}$ de la forme $\varkappa f + \lambda\Delta$ est égale à

$$\Delta_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \varkappa}\Delta - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \lambda}f\right). \tag{37}$$

2° Si $\varkappa:\lambda$ est racine de $\mathrm{U} = 0$, la forme $\varkappa f + \lambda\Delta$ est décomposable en facteurs linéaires X_0, X_1, X_2, qui sont des covariants irrationnels.

3° Les fonctions symétriques de ces facteurs sont exprimées ainsi :

$$
(38)\quad \left\{
\begin{aligned}
&X_0^3+X_1^3+X_2^3 = \frac{1}{3-\frac{1}{2}S\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}}\left[\left(1-\frac{1}{2}S\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)f-2\frac{\lambda}{\varkappa}\Delta\right],\\
&X_0^3X_1^3X_2^3 = \frac{1-\frac{3}{2}S\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}}{3^3\left(3-\frac{1}{2}S\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)^3}\left(f+\frac{\lambda}{\varkappa}\Delta\right)^3,\\
&X_0^3X_1^3+X_1^3X_2^3+X_2^3X_0^3-\frac{1}{12}\left(X_0^3+X_1^3+X_2^3\right)^2\\
&\qquad = -\frac{4}{\left(3-\frac{1}{2}S\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)^2}\frac{\lambda^3}{\varkappa^3}\psi.
\end{aligned}
\right.
$$

38. Soit maintenant F une intégrale cubique de $G(y)$. Nous prenons, pour la forme f, d'après le théorème I, n° 8, $f=u^3F$. Le multiplicateur quadratique correspondant est M; nous prenons la forme quadratique $A=u^3g_0M$, et nous avons

$$A=\frac{\partial f}{\partial x_2}.$$

Nous faisons ensuite $\Delta=u^3F'$ et F′ est une nouvelle intégrale cubique; le multiplicateur correspondant étant désigné par M′, nous considérons la forme quadratique $A'=u^3g_0M'=\dfrac{\partial\Delta}{\partial x_2}$.

Soient p et p' les coefficients de y''^2 dans M et M′ respectivement. Les coefficients correspondants dans A et A′ sont

$$
\begin{aligned}
a_{22} &= u^3g_0p = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_2^3},\\
a'_{22} &= u^3g_0p' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A'}{\partial x_2^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial^3 \Delta}{\partial x_2^3}.
\end{aligned}
$$

De là résulte que a'_{22} est égal au déterminant des dérivées secondes de A, divisé par 12, ce qui peut encore s'exprimer ainsi. Posant

$$A=\Sigma a_{ij}x_ix_j$$

et employant les lettres α pour les coefficients de la forme adjointe, savoir

$$\alpha_{00} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad \alpha_{01} = a_{02}a_{12} - a_{01}a_{22}, \quad \ldots,$$

on aura

$$a'_{22} = \tfrac{2}{9}\Sigma\, a_{ij}\alpha_{ij}.$$

Pour obtenir le coefficient de $y''^6 = x_2^6$ dans le covariant φ, on n'a qu'à remplacer, dans le déterminant qui représente ce covariant, f par $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ et Δ par $\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Delta}{\partial x_2^2}$. Il en résulte, pour ce coefficient, l'expression

$$\frac{2}{3^2}\Sigma\alpha_{ij}a'_{i2}a'_{j2},$$

où les lettres a' représentent les coefficients de la forme A'

$$A' = \Sigma\, a'_{ij}x_i x_j.$$

D'après la théorie générale, nous aurons à prendre, dans les covariants X, les coefficients de $y'' = x_2$. Il nous faudra donc remplacer, dans les formules, f et Δ par $\frac{1}{3}a_{22}$, $\frac{1}{3}a'_{22}$ et φ par le coefficient que nous venons de considérer. A cause de l'homogénéité, nous pouvons multiplier les deux premiers par 3, le second par 3^2. Ainsi

$$\left.\begin{array}{l} f \\ \Delta \\ \varphi \end{array}\right\} \text{ seront remplacés respectivement par } \left\{\begin{array}{l} a_{22} = u^3 g_0 p, \\ a'_{22} = u^3 g_0 p', \\ \frac{2}{3^2}\Sigma\alpha_{ij}a'_{i2}a'_{j2}. \end{array}\right.$$

Il reste à exprimer les deux invariants S, T par les coefficients de A et A'. Pour y parvenir, on n'aura qu'à calculer le discriminant de $\varkappa A + \lambda A'$; il s'exprime par a'_{22} et a_{22} comme $\Delta_{\varkappa\lambda}$ par Δ et f, au moyen de la relation (37). On connaîtra ainsi la forme $U(\varkappa, \lambda)$ et le problème sera résolu.

59. Je vais introduire une modification qui simplifie les calculs dans les applications et rend, en outre, les formules symétriques. Au lieu de prendre la forme A', j'en considère une autre quelconque A_1, du faisceau $\varkappa A + \lambda A'$, et l'on conçoit que l'on puisse parfois en apercevoir immédiatement une qui soit plus simple.

Soient ainsi deux formes conjuguées A et A_1; posons

$$
\begin{aligned}
A &= \Sigma a_{ij} x_i x_j, & A_1 &= \Sigma b_{ij} x_i x_j,\\
P &= a_{22}, & P_1 &= b_{22},\\
D &= \tfrac{2}{9} \Sigma a_{ij} \alpha_{ij}, & D_1 &= \tfrac{2}{9} \Sigma b_{ij} \beta_{ij},\\
C &= \tfrac{2}{3} \Sigma \alpha_{ij} b_{ij}; & C_1 &= \tfrac{2}{3} \Sigma \beta_{ij} a_{ij}.
\end{aligned}
$$

Les lettres β désignent les coefficients de la forme adjointe de A_1, comme α précédemment pour A.

Soit D_{ll_1} le discriminant, calculé comme D et D_1, pour la forme $lA + l_1 A_1$. Ce discriminant est une fonction comprise dans le faisceau $lP + l_1 P_1$. Il est d'ailleurs composé linéairement avec D, C, C_1, D_1. Donc C et C_1, comme D et D_1, sont comprises dans le même faisceau. Désignant par σ, ω, ϖ, t et les mêmes lettres affectées de l'indice 1 des coefficients constants, j'aurai donc

$$
\begin{aligned}
D &= \sigma P + \omega P_1, & D_1 &= \sigma_1 P_1 + \omega_1 P,\\
\tfrac{1}{3} C &= \varpi P + tP_1, & \tfrac{1}{3} C_1 &= \varpi_1 P_1 + t_1 P.
\end{aligned}
$$

La forme A', considérée tout à l'heure, appartient au faisceau (A, A_1). Nous avons donc

$$\varkappa P + \lambda D = lP + l_1 P_1,$$

d'où résulte

$$l = \varkappa + \sigma\lambda, \quad l_1 = \omega\lambda.$$

Par cette substitution $U(\varkappa, \lambda)$ se change en une forme $V(l, l_1)$, et, d'après (37), nous aurons

$$D_{ll_1} = \tfrac{1}{3}\left(P_1 \frac{\partial V}{\partial l} - P \frac{\partial V}{\partial l_1}\right).$$

D'ailleurs nous avons aussi

$$D_{ll_1} = l^3 D + l^2 l_1 C + l l_1^2 C_1 + l_1^3 D_1.$$

Il suffit maintenant d'identifier ces deux formes de D_{u_1} pour trouver entre les coefficients ci-dessus les relations

$$\sigma + t = 0, \quad \sigma_1 + t_1 = 0, \quad \varpi + \varpi_1 = 0.$$

Nous aurons donc définitivement

$$D = \sigma P + \omega P_1, \qquad D_1 = \quad \sigma_1 P_1 + \omega_1 P,$$
$$\tfrac{1}{3} C = \varpi P - \sigma P_1, \quad \tfrac{1}{3} C_1 = - \varpi P_1 - \sigma_1 P.$$

En outre, la forme V étant équianharmonique, il y aura encore entre les coefficients la relation

$$\omega\omega_1 - 4\sigma\sigma_1 = 3\varpi^2,$$

et cette forme elle-même sera

$$V(l, l_1) = \omega l^4 - 4\sigma l^3 l_1 - 6\varpi l^2 l_1^2 + 4\sigma l l_1^3 - \omega_1 l_1^4.$$

La comparaison des formes U, V donne aisément les expressions de S, T.

$$\tfrac{1}{2} S = 3(\sigma^2 + \omega\varpi), \quad \tfrac{1}{3} T = 2\sigma^3 + 3\omega\varpi\sigma - \sigma_1\omega^2.$$

En désignant par k une constante arbitraire, et faisant $z = k u g_0 \eta$, nous aurons, au moyen des formules (38), les expressions des fonctions symétriques composées avec les quantités z. Écrivons d'abord la seconde

$$(z_0 z_1 z_2)^3 = \frac{k^3\left(1 - \frac{3}{2} S \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)}{3^3\left(3 - \frac{1}{2} S \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)^3} \left(P + \frac{\lambda}{\varkappa} D\right)^3.$$

Choisissant k par la condition

$$k\left(1 - \frac{3}{2} S \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 3\varkappa\left(3 - \frac{1}{2} S \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right),$$

la formule se réduit à

$$(39) \qquad z_0 z_1 z_2 = l P + l_1 P_1,$$

où $l:l_1$ est racine de $V(l, l_1) = 0$. La première formule pourra s'écrire de même

$$(40) \qquad z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 = mP + m_1 P_1,$$

et les coefficients constants m, m_1 sont à calculer. La substitution directe donne immédiatement, à cause de l'expression de S,

$$m_1^3 = (6l_1)^3 \frac{(\omega l - \sigma l_1)^2}{9 l_1^2(\sigma^2 + \omega w) - (\omega l - \sigma l_1)^2}.$$

Par symétrie, il en résulte une formule analogue pour m^3 : il n'y a qu'à échanger l, l_1 ; ω, ω_1 ; σ, σ_1 et changer le signe de w. Mais ce résultat est insuffisant, car l'une seulement des deux racines cubiques de m^3, m_1^3 peut être arbitrairement choisie : l'autre doit s'en déduire. Pour lever cette difficulté, il suffit de calculer le rapport $m : m_1$, d'après (38).

On trouve ainsi, par substitution directe,

$$\frac{m}{m_1} = \frac{\omega l^2 - 4\sigma l l_1 - 3 w l_1^2}{2 l_1(\sigma l_1 - \omega l)}.$$

En même temps a lieu la formule symétrique

$$\frac{m_1}{m} = \frac{\omega_1 l_1^2 - 4\sigma_1 l_1 l + 3 w l^2}{2 l(\sigma_1 l - \omega_1 l_1)}.$$

La concordance de ces deux formules se vérifie aisément, en vertu de $V = 0$, et il sera plus simple de les remplacer par l'égalité symétrique

$$\frac{m^2}{m_1^2} = \frac{(\sigma_1 l - \omega_1 l_1) l_1}{(\sigma l_1 - \omega l) l},$$

qui suffit à fixer les rapports des racines cubiques de m^3 et m_1^3. Dans la suite du calcul j'introduirai encore une constante μ qui est exprimée symétriquement ainsi :

$$\mu = \frac{\sigma l_1 - \omega l}{l_1 m_1^2} = \frac{\sigma_1 l - \omega_1 l_1}{l m^2}.$$

Remarquons aussi que la constante k donne lieu à l'égalité

$$\frac{k}{\varkappa\left(3-\frac{1}{2}S\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\right)}=-\frac{m_1}{2l_1}.$$

Il en résulte que la troisième équation (38) nous donne, en désignant par $\bar{\psi}$ le coefficient à retenir dans le covariant ψ :

$$z_0^3z_1^3+z_1^3z_2^3+z_2^3z_0^3-\frac{1}{12}(z_0^3+z_1^3+z_2^3)^2=\frac{1}{\omega^2\mu}\bar{\psi}.$$

Il reste à trouver l'expression explicite de $\bar{\psi}$. D'après tout ce qui précède, nous avons d'abord

$$(41)\quad\left\{\begin{aligned}\bar{\psi}=&-\frac{3}{4}\frac{2}{3^2}\sum\alpha_{ij}a'_{i2}a'_{j2}-\frac{1}{4}(2\sigma^3+3\omega w\sigma-\sigma_1\omega^2)P^2\\&+\frac{3}{4}(\sigma^2+\omega w)(\sigma P+\omega P_1)P.\end{aligned}\right.$$

La forme A', à laquelle appartiennent les coefficients a', est égale à $\sigma A+\omega A_1$. Il en résulte d'abord

$$\begin{aligned}\Sigma\alpha_{ij}a'_{i2}a'_{j2}&=\omega^2\Sigma\alpha_{ij}b_{i2}b_{j2}+\tfrac{1}{3}\sigma(\sigma a_{22}+2\omega b_{22})\Sigma a_{ij}\alpha_{ij}\\&=\omega^2\Sigma\alpha_{ij}b_{i2}b_{j2}+\tfrac{3}{2}\sigma(\sigma P+2\omega P_1)(\sigma P+\omega P_1).\end{aligned}$$

D'autre part, on vérifie sans peine l'égalité

$$\Sigma\alpha_{ij}b_{i2}b_{j2}=b_{22}\Sigma\alpha_{ij}b_{ij}-(\alpha_{00}\beta_{11}-2\alpha_{01}\beta_{01}+\alpha_{11}\beta_{00}).$$

La quantité

$$Q=\alpha_{00}\beta_{11}-2\alpha_{01}\beta_{01}+\alpha_{11}\beta_{00}$$

va subsister dans la formule définitive. En substituant dans (41) et faisant toutes les réductions dont on peut abréger le calcul par raison de symétrie, on trouve

$$\frac{1}{\omega^2}\bar{\psi}=\frac{1}{6}Q+\frac{1}{4}(\sigma P_1^2+\sigma_1P^2).$$

Donc enfin nous avons pour dernière formule

$$(42)\quad z_0^3 z_1^3 + z_1^3 z_2^3 + z_3^3 z_0^3 = \frac{1}{\mu}\left[\tfrac{1}{6}Q + \tfrac{1}{4}(\sigma P_1^2 + \sigma_1 P_2)\right] + \tfrac{1}{12}(mP + m_1 P_1)^2.$$

Les égalités (39), (40) et (42) déterminent trois quantités z qui sont respectivement égales à trois quantités $ug_0\eta$, et le problème est complètement achevé.

Pour formuler le plus simplement possible le résultat acquis, faisons les observations suivantes :

1° Si nous prenons les discriminants et les invariants C sans les coefficients numériques qui se sont introduits ici, en écrivant comme il est d'usage

$$D = \tfrac{1}{3}\Sigma a_{ij}\alpha_{ij}, \quad C = \Sigma \alpha_{ij} b_{ij}, \quad \ldots,$$

il faudra mettre $\frac{2}{3}\sigma$, $\frac{2}{3}\omega$, ... à la place de σ, ω. Ce changement ne modifie en rien l, l_1, m, m_1. Il faut seulement remplacer μ par $\frac{2}{3}\mu$.

2° Si, au lieu d'opérer sur A et A_1, on opère sur ρA et ρA_1 (ρ étant une fonction quelconque), D, C sont remplacés par $\rho^3 D$, $\rho^3 C$, ... et Q par $\rho^4 Q$. On pourra conserver les formules précédentes en changeant seulement Q, si l'on change en même temps les quantités z. Je ferai un tel changement dans l'énoncé en prenant $\rho = \frac{1}{u^3 g_0}$, de façon que le calcul porte sur les multiplicateurs eux-mêmes. Voici le résultat final.

40. Problème. — *Intégrer l'équation*

$$\Gamma(\eta) = \gamma_0\eta''' + 3\gamma_1\eta'' + 3\gamma_2\eta' + \gamma_3\eta = 0,$$

sachant qu'une forme cubique ternaire, composée avec trois solutions η, et à coefficients constants, a pour expression $\varphi(x)$.

Solution. — *On prendra la fonction adjointe $G(y)$ et, par les formules (32), on calculera un multiplicateur M du second degré pour $G(y)$, avec $3\gamma_0^2\varphi(x)$ pour coefficient de y''^2. Soit M ce multiplicateur*

$$M = \Sigma a_{ij} y^{(i)} y^{(j)}, \quad a_{22} = 3\gamma_0^2\varphi(x) = P.$$

Ce multiplicateur a un conjugué M_1

$$M_1 = \Sigma b_{ij} y^{(i)} y^{(j)}, \quad b_{22} = 3\gamma_0^2 \varphi_1(x) = P_1,$$

jouissant des propriétés suivantes :

Si l'on désigne par α, β *les coefficients des formes adjointes à* M, M_1

$$\alpha_{00} = a_{11} a_{22} - a_{12}^2, \quad \alpha_{01} = a_{02} a_{12} - a_{01} a_{22}, \quad \ldots,$$

et qu'on prenne les invariants

$$D = \tfrac{1}{3} \Sigma a_{ij} \alpha_{ij}, \quad C = \Sigma b_{ij} \alpha_{ij}, \quad C_1 = \Sigma a_{ij} \beta_{ij}, \quad D_1 = \tfrac{1}{3} \Sigma b_{ij} \beta_{ij},$$

on aura entre ces quantités les relations suivantes où σ, ω, w, ... *désignent des constantes*

$$\begin{aligned} aD &= \sigma P + \omega P_1, & aD_1 &= \sigma_1 P_1 + \omega_1 P, \\ \tfrac{1}{3} aC &= w P - \sigma P_1, & \tfrac{1}{3} aC_1 &= - w P_1 - \sigma_1 P. \end{aligned}$$

La quantité a *sera égale à* $\frac{1}{\gamma_0^3} e^{6\int \frac{\gamma_1}{\gamma_0} dx}$ *et les coefficients constants satisferont à la relation*

$$(43) \qquad \omega\omega_1 - 4\sigma\sigma_1 = 3w^2.$$

On obtiendra donc le conjugué M_1 *en calculant le discriminant* D *de* M, *et prenant pour source* P_1 *une fonction arbitraire du faisceau* (aD, P).

On calculera, en outre, la fonction

$$Q = \alpha_{00}\beta_{11} - 2\alpha_{01}\beta_{01} + \alpha_{11}\beta_{00}.$$

On prendra une racine $l : l_1$ *de l'équation, à coefficients constants,*

$$\omega l^4 - 4\sigma l^3 l_1 - 6 w l^2 l_1^2 + 4\sigma_1 l l_1^3 - \omega_1 l_1^4 = 0,$$

et deux autres constantes m, m_1 *déterminées par les relations concor-*

dantes

$$m = 6l\left[\frac{(\omega_1 l_1 - \sigma_1 l)^2}{9l^2(\sigma_1^2 - \omega_1\varpi) - (\omega_1 l_1 - \sigma_1 l)^2}\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$m_1 = 6l_1\left[\frac{(\omega l - \sigma l_1)^2}{9l_1^2(\sigma^2 + \omega\varpi) - (\omega l - \sigma l_1)^2}\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{m^2}{m_1^2} = \frac{(\sigma_1 l - \omega_1 l_1)l}{(\sigma l_1 - \omega l)l_1},$$

et enfin une dernière constante μ.

$$\mu = \frac{\sigma l_1 - \omega l}{l_1 m_1^2} = \frac{\sigma_1 l - \omega_1 l_1}{l m^2}.$$

En fonction de ces diverses quantités, on aura trois solutions η de l'équation proposée, au moyen des racines de l'équation algébrique

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma_0^6\eta^9 - (mP + m_1P_1)\gamma_0^4\eta^6 \\ &\quad + \left[\frac{9a}{4\mu} + \frac{1}{4\mu}(\sigma P_1^2 + \sigma_1 P^2) + \tfrac{1}{12}(mP + m_1P_1)^2\right]\gamma_0^2\eta^3 \\ &\qquad\qquad - (lP + l_1P_1)^3 = 0. \end{aligned}\right.$$

APPLICATION.

41. La solution qui vient d'être exposée n'est pas en défaut dans le cas où $\varphi(x)$ est identiquement nul. C'est à ce cas particulier que se rapporte l'application numérique suivante :

Intégrer l'équation

$$\psi\eta''' + \tfrac{3}{2}\psi'\eta'' + \tfrac{4}{9}\psi''\eta' - \tfrac{1}{81}\psi'''\eta = 0,$$

où ψ désigne un polynôme du troisième degré

$$\psi = \psi_0 x^3 + 3\psi_1 x^2 + 3\psi_2 x + \psi_3,$$

sachant qu'il existe entre trois solutions η une relation homogène du troisième degré, à coefficients constants.

L'adjointe est ici

$$\mathrm{G}(y) = \psi y''' + \tfrac{3}{2}\psi' y'' + \tfrac{1}{9}\psi'' y' - \tfrac{7}{162}\psi''' y.$$

On pourra aisément, par les équations (32), vérifier le multiplicateur ayant les coefficients suivants :

$$p = 0,\quad q = \psi,\quad r = \tfrac{1}{6}\psi'',\quad h = 0,\quad l = -2\psi,\quad m = -\psi',$$
$$\mathrm{M} = \psi y'^2 + \tfrac{1}{6}\psi'' y^2 - 4\psi y y'' - 2\psi' y y'.$$

Le discriminant de M est $-4\psi^3$; la quantité a est égale à $\frac{1}{\psi}$. Les multiplicateurs conjugués ont donc, pour coefficient de y''^2, la quantité ψ^2.

Voici les coefficients de l'un de ces multiplicateurs :

$$p = 3\psi^2,\quad q = \tfrac{3}{4}\psi'^2 - \tfrac{1}{72}\psi\psi'',\quad r = \frac{\psi''^2}{2^4.3^2} - \frac{\psi'\psi'''}{2^3.3^4},$$
$$h = \tfrac{3}{2}\psi\psi',\quad l = -\tfrac{5}{36}\psi\psi'',\qquad m = \frac{\psi\psi'''}{2^3.3^3} - \frac{5\psi'\psi''}{2^3.3^2}.$$

On peut abréger les calculs en écrivant les deux multiplicateurs ainsi :

$$\mathrm{M} = \psi y'^2 + \tfrac{1}{6}\psi'' y^2 - 4(\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y')y,$$
$$\mathrm{M}_1 = 3(\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y')^2 - \tfrac{1}{72}\psi\psi'' y'^2 + \tfrac{1}{72}\left(\frac{\psi''^2}{2} - \frac{\psi'\psi'''}{9}\right)y^2$$
$$- \tfrac{5}{18}(\psi y'' + \tfrac{1}{2}\psi' y')\psi'' y + \frac{\psi\psi'''}{2^2.3^3} y y'.$$

En faisant alors

$$y'' + \frac{1}{2}\frac{\psi'}{\psi} y' = x_2,\quad y' = x_1,\quad y = x_0,$$

on n'altère pas les formes qu'il faut calculer, et l'on opère sur des coefficients plus simples :

$$a_{22} = 0, \qquad a_{11} = \psi, \qquad a_{00} = \psi'',$$
$$a_{12} = 0, \qquad a_{02} = -2\psi, \qquad a_{01} = 0,$$
$$\alpha_{22} = \tfrac{1}{6}\psi\psi'', \qquad \alpha_{11} = -4\psi^2, \qquad \alpha_{00} = 0,$$
$$\alpha_{12} = 0, \qquad \alpha_{02} = 2\psi^2, \qquad \alpha_{01} = 0,$$
$$b_{22} = 3\psi^2, \quad b_{11} = -\frac{\psi\psi''}{72}, \quad b_{00} = \frac{1}{72}\left(\frac{\psi'^2}{2} - \frac{\psi'\psi'''}{9}\right),$$
$$b_{12} = 0, \qquad b_{02} = -\frac{5\psi\psi''}{18}, \quad b_{01} = \frac{\psi\psi''}{2^3.3^3}.$$

Parmi les coefficients β, quatre seulement sont nécessaires :

$$\beta_{11} = \frac{1}{2^3.3^3}\left(\frac{\psi^2\psi''^2}{3} - \psi^2\psi'\psi'''\right), \quad \beta_{00} = -\tfrac{1}{24}\psi^3\psi'',$$
$$\beta_{02} = \frac{5}{2^5.3^4}\psi^2\psi''^2, \qquad \beta_{01} = -\tfrac{1}{72}\psi^3\psi'''.$$

$$D_1 = a_{22}\alpha_{22} + a_{21}\alpha_{21} + a_{20}\alpha_{20} = -4\psi^3,$$
$$D_1 = b_{02}\beta_{02} + b_{01}\beta_{01} + b_{00}\beta_{00} = \frac{\psi^3}{2^6 3^6}(3\psi'\psi''\psi''' - \psi''^3 - 3\psi\psi'''^2)$$
$$= \frac{\psi^3}{2^4.3^3}(3\psi_0\psi_1\psi_2 - 2\psi_1^3 - \psi_0^2\psi_3),$$
$$C = \alpha_{ij}b_{ij} = 0,$$
$$C_1 = \Sigma a_{ij}\beta_{ij} = \frac{\psi^3}{2^4 3^3}(\psi''^2 - 2\psi'\psi''') = \frac{\psi^3}{2^2.3}(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2),$$
$$Q = \alpha_{00}\beta_{11} - 2\alpha_{01}\beta_{01} + \alpha_{11}\beta_{00} = \tfrac{1}{6}\psi^3\psi''.$$

On a, d'ailleurs,

$$a = \frac{1}{\psi}, \quad P = 0, \quad P_1 = 3\psi^2.$$

Il en résulte

$$\omega = -\tfrac{1}{3}, \quad \sigma = 0,$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2^4 3^4}(3\psi_0\psi_1\psi_2 - 2\psi_1^3 - \psi_0^2\psi_3), \quad \varpi = -\frac{1}{2^2.3^3}(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2).$$

et, d'après (43),

$$\omega_1 = -\frac{1}{2^6.3^4}(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2)^2.$$

Si l'on fait $l_1 = 12$, $l = \psi_0 t + \psi_1$, l'équation $V(l, l_1) = 0$ se change en celle-ci :

$$(45)\qquad \psi_0 t^4 + 4\psi_1 t^3 + 6\psi_2 t^2 + 4\psi_3 t + \frac{4\psi_1\psi_3 - 3\psi_2^2}{\psi_0} = 0,$$

dont la forme est remarquable; son premier membre a pour dérivée $\psi(t)$.

On trouve ensuite

$$\left(\frac{6l_1}{m_1}\right)^3 = 1 + \frac{9(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2)}{(\psi_0 t + \psi_1)^2}, \quad \frac{1}{\mu m_1^2} = -\frac{l_1}{\omega l} = \frac{9}{\psi_0 t + \psi_1}.$$

Changeant η^3 en $m_1\eta^3$, et divisant tous les termes de (44) par ψ^6, il reste

$$(46)\qquad \eta^9 - 6\eta^6 + 3\left(3\frac{\psi_0 x + \psi_1}{\psi_0 t + \psi_1} + 1\right)\eta^3 + 1 - \frac{9(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2)}{(\psi_0 t + \psi_1)^2} = 0.$$

Trois solutions η sont données par l'équation (46), *où t est une racine quelconque de* (45).

Le dernier terme de (46) peut s'écrire encore d'une autre manière :

$$(47)\qquad 1 - \frac{9(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2)}{(\psi_0 t + \psi_1)^2} = \frac{3\psi_0\psi'(t)}{(\psi_0 t + \psi_1)^2} - 8,$$

c'est ce qu'on voit immédiatement par l'égalité

$$\psi''^2 - 2\psi'\psi''' = 36(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2).$$

Digression sur une équation du troisième ordre.

42. Je vais entreprendre maintenant un calcul dont le but est de vérifier cette solution, puis de faire connaître les propriétés d'une classe d'équations à laquelle appartient celle que je viens d'intégrer.

Pour abréger l'écriture, je mettrai partout dans ce qui suit :

$$\eta_0^3 = z_0, \quad \eta_1^3 = z_1, \quad \eta_2^3 = z_2.$$

J'envisage ces trois quantités z déterminées par (46), en sorte que, posant

$$3S_1 = z_0 + z_1 + z_2, \quad 3S_2 = z_0 z_1 + z_1 z_2 + z_2 z_0, \quad S_3 = z_0 z_1 z_2,$$

on ait pour définition des z

$$(48) \qquad S_1 = 2, \quad S_2 = \frac{3\psi''(x)}{\psi''(t)} + 1, \quad S_3 = 8 - \frac{18\psi'''\psi'(t)}{\psi''(t)^2},$$

où t est une racine de (45).

La première partie du calcul suivant a pour but d'exprimer $\psi(x)$ en fonction des z. A cet effet, je calcule d'abord les deux quantités

$$(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2) \quad \text{et} \quad (3\psi_0\psi_1\psi_2 - 2\psi_1^3 - \psi_0^2\psi_3).$$

Les expressions de S_3 et S_1 me donnent, sous forme homogène,

$$(49) \qquad \psi'''\psi'(t) = \frac{\psi''(t)^2}{18}(S_1^3 - S_3).$$

Observons maintenant que l'équation (45) peut s'écrire

$$(50) \qquad \psi''(t)\psi(t) - \tfrac{1}{2}\psi'(t)^2 = 0,$$

comme on peut le vérifier sans calcul, grâce à cette propriété que les premiers membres possèdent, de reproduire $\psi(t)$ par une dérivation. D'après (50), on peut transformer (49) en cette autre :

$$(51) \qquad 3\psi'''^2\psi(t) = \frac{\psi''(t)^3}{2^3 . 3^3}(S_1^3 - S_3)^2.$$

Prenant les expressions (49) et (51) de $\psi'''\psi'(t)$ et de $\psi'''^2\psi(t)$ pour les substituer dans l'identité

$$(52) \quad 3\psi'''^2\psi(t) + \psi''^3(t) - 3\psi'(t)\psi''(t)\psi''' = 2^2 . 3^3(\psi_0^2\psi_3 + 2\psi_1^3 - 3\psi_0\psi_1\psi_2),$$

nous trouvons ce résultat

$$2^8 3^6 \frac{\psi_0^2\psi_3 + 2\psi_1^3 - 3\psi_0\psi_1\psi_2}{\psi''(t)^3} = S_3^2 + \tfrac{5}{2}S_3 S_1^3 - \tfrac{1}{8}S_1^6.$$

D'autre part, suivant (47) et (48), nous avons aussi

$$2^5.3^4 \frac{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}{\psi''(t)^2} = S_1^3 + 8S_3.$$

L'expression de S_2 nous donne $\psi''(x)$ qui, sous forme homogène, sera

$$(53) \qquad \psi''(x) = \frac{4S_2 - S_1^2}{12}\psi''(t).$$

L'identité

$$\psi''^2(x) - 2\psi'''\psi'(x) = 2^2.3^2(\psi_1^2 - \psi_0\psi_2)$$

donne $\psi'(x)$, et enfin l'identité (52), où l'on mettra x au lieu de t, donnera $\psi(x)$. Son expression, rendue homogène, prend la forme

$$\psi(x) = \frac{\psi''(t)^3}{2^4.3^7}(4S_2^3 - 3S_2^2S_1^2 + 4S_3S_1^3 - 6S_1S_2S_3 + S_3^2);$$

la parenthèse contient le discriminant de $(z^3 - 3S_1z^2 + 3S_2z - S_3)$; par suite,

$$(54) \qquad \psi(x) = -\frac{\psi''(t)^3}{2^3.3^7}[(z_0 - z_1)(z_1 - z_2)(z_2 - z_0)]^2.$$

Remarquons, en passant, que cette expression simple du discriminant conduit, pour la résolution de l'équation du troisième degré (46), suivant la méthode usitée, à un résultat peu compliqué que voici :

$$\eta^3 = 2 + A + B,$$

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}\left[1 + \frac{\psi_1^2 - \psi_0\psi_2}{(\psi_0 t + \psi_1)^2} - 2\frac{\psi_0 x + \psi_1}{\psi_0 t + \psi_1}\right] \pm 3\sqrt[2]{\frac{3\psi_0\psi(x)}{(\psi_0 t + \psi_1)^3}}},$$

où les deux racines cubiques doivent être extraites de manière que $A + B$ reste fini pour x infini.

43. En différentiant les équations (48), nous avons

$$z_0\frac{\tau'_0}{\tau_0}+z_1\frac{\tau'_1}{\tau_1}+z_2\frac{\tau'_2}{\tau_2}=0,$$

$$z_0(z_1+z_2)\frac{\tau'_0}{\tau_0}+z_1(z_2+z_0)\frac{\tau'_1}{\tau_1}+z_2(z_0+z_1)\frac{\tau'_2}{\tau_2}=\frac{3\psi_0}{\psi_0 t+\psi_1},$$

$$\frac{\tau'_0}{\tau_0}+\frac{\tau'_1}{\tau_1}+\frac{\tau'_2}{\tau_2}=0.$$

Le déterminant de ces équations aux inconnues $\frac{\tau'}{\tau}$ est la racine carrée R du discriminant

$$(55)\qquad R=(z_0-z_1)(z_1-z_2)(z_2-z_0)=2.3^3\left[-\frac{\psi_0^2\psi(x)}{(\psi_0 t+\psi_1)^3}\right]^{\frac{1}{2}},$$

comme on vient de le trouver. Les inconnues s'expriment ainsi :

$$\frac{\tau'_0}{\tau_0}=\frac{1}{R}\,\frac{3\psi_0}{\psi_0 t+\psi_1}(z_1-z_2);$$

les autres formules se déduisent par permutation circulaire sur les indices 0, 1, 2.

Soit Y une fonction quelconque de τ; sa dérivée par rapport à x sera donnée par l'égalité

$$(56)\quad RY'=\frac{3\psi_0}{\psi_0 t+\psi_1}[Y_0\tau_0(z_1-z_2)+Y_1\tau_1(z_2-z_0)+Y_2\tau_2(z_0-z_1)],$$

$$Y_0=\frac{\partial Y}{\partial\tau_0},\quad Y_1=\frac{\partial Y}{\partial\tau_1},\quad Y_2=\frac{\partial Y}{\partial\tau_2}.$$

En prenant deux fois de suite la dérivée de la même manière, on obtient une égalité de cette forme

$$R[R(RY')']'=\left(\frac{3\psi_0}{\psi_0 t+\psi_1}\right)^3 L,$$

où L contient seulement les lettres τ, z et les dérivées partielles de Y; son expression sera écrite plus loin. Si maintenant on tient compte de (55) qui donne, à un facteur constant près, $\psi(x)^{\frac{1}{2}}$ pour R, on a facilement, au lieu de la dernière égalité,

$$\psi Y''' + \tfrac{3}{2}\psi' Y'' + \tfrac{1}{2}\psi'' Y' = -\frac{1}{2^3.3^6}\left[-\frac{(\psi_0 t + \psi_1)^3}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{2}} L.$$

En vertu de (53) et (56), nous avons semblablement une égalité de la forme

$$\psi'' Y' = \frac{1}{2^2.3^4}\left[-\frac{(\psi_0 t + \psi_1)^3}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{2}} M$$

et, d'après (55),

$$\psi''' Y = \frac{1}{3^2}\left[-\frac{(\psi_0 t + \psi_1)^3}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{2}} R.$$

De là résulte

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi Y''' + \tfrac{3}{2}\psi' Y'' + (\tfrac{1}{2} + \alpha)\psi'' Y' + \beta\psi''' Y \\ &\quad = -\frac{1}{9}\left[-\frac{(\psi_0 t + \psi_1)^3}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{2}}(L - 18\alpha M - 2^3.3^4.\beta R Y).\end{aligned}\right.$$

La quantité L provient de l'opération

$$\eta_0(z_1 - z_2)\frac{\partial}{\partial\eta_0} + \eta_1(z_2 - z_0)\frac{\partial}{\partial\eta_1} + \eta_2(z_0 - z_1)\frac{\partial}{\partial\eta_2},$$

répétée trois fois de suite. Elle se compose de trois parties suivant l'ordre des dérivées partielles qui y figurent. Dénotant ces dérivées par des indices et écrivant seulement le type de chaque sorte de terme, nous aurons

$$L = L_3 + L_2 + L_1,$$

$$L_3 = \left\{\begin{aligned} &Y_{000}\eta_0^3(z_1 - z_2)^3 \\ &+ 3Y_{001}\eta_0^2\eta_1(z_1 - z_2)^2(z_2 - z_0) \\ &+ 3Y_{011}\eta_0\eta_1^2(z_1 - z_2)(z_2 - z_0)^2 \\ &+ 6Y_{012}\eta_0\eta_1\eta_2(z_1 - z_2)(z_2 - z_0)(z_0 - z_1)\end{aligned}\right\} \begin{array}{c} + 6 \text{ autres termes} \\ \text{par permutation des indices,}\end{array}$$

$$L_2 = \left\{\begin{aligned} &3Y_{00}\eta_0^2(z_1 - z_2)[(z_1 - z_2)^2 + 3(2z_1z_2 - z_1z_0 - z_2z_0)] \\ &- 3Y_{12}\eta_1\eta_2[(z_0 - z_1)(z_1 - z_2)(z_2 - z_0) \\ &\qquad + 3(z_1 - z_2)(3z_0^2 - z_0z_1 - z_1z_2 - z_2z_0)]\end{aligned}\right\} + 4 \text{ autres termes.}$$

$$L_1 = Y_0\eta_0[(z_1 - z_2)^3 + 9(z_1 - z_2)(z_0^2 - 2z_0z_1 - 2z_0z_1)] + 2 \text{ autres termes.}$$

La quantité M est simplement

$$M = Y_0 \chi_0 (z_1 - z_0)[10(z_1 z_2 + z_2 z_0 + z_0 z_1) - z_0^2 - z_1^2 - z_2^2] + 2 \text{ termes}.$$

Enfin R est déjà connu. On vérifiera sans peine, en formant le coefficient de Y_0, l'identité

$$L_1 + M + 8R(Y_0 \chi_0 + Y_1 \chi_1 + Y_2 \chi_2) = 0,$$

d'après laquelle la parenthèse du second membre de (57) pourra s'écrire

$$L_3 + L_2 - (18\alpha + 1)M - 8(81\beta Y + Y_0 \chi_0 + Y_1 \chi_1 + Y_2 \chi_2)R.$$

Si l'on suppose $Y = c_0 \chi_0 + c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2$, où les c sont des constantes arbitraires, et, en outre, $\alpha = -\frac{1}{18}$, $\beta = -\frac{1}{81}$, cette quantité sera nulle. Quant au premier membre de (57), il devient

$$\psi Y''' + \tfrac{3}{2}\psi' Y'' + \tfrac{4}{9}\psi'' Y' - \tfrac{1}{81}\psi''' Y;$$

c'est précisément celui de l'équation différentielle dont nous étions partis d'abord. *La solution de cette équation est ainsi vérifiée.*

44. Je vais maintenant envisager une équation plus générale. Je ferai

$$\alpha = -\frac{n^2}{18}, \quad \beta = -\frac{n(n+3)(4n-3)}{2^2 \cdot 3^4},$$

et le premier membre de (57) prendra la forme

$$G(Y) = \psi Y''' + \frac{3}{2}\psi' Y'' + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n^2}{9}\right)\psi'' Y' - \frac{n(n+3)(4n-3)}{2^2 \cdot 3^4}\psi''' Y.$$

Supposant, en outre, que Y soit une fonction homogène en χ_0, χ_1, χ_2, et du degré $(4n-3)$, j'aurai, à cause de cette homogénéité,

$$G(Y) = -\frac{1}{9}\left[-\frac{(\psi_0 t + \psi_1)^3}{\psi(x)}\right]^{\frac{1}{2}} [L_3 + L_2 + (n^2 - 1)M$$
$$+ 2(n-1)(n+4)R(Y_0 \chi_0 + Y_1 \chi_1 + Y_2 \chi_2)].$$

L'équation aux dérivées partielles, obtenue ici comme transformée de $G = 0$, peut revêtir des formes diverses à cause de l'homogénéité attribuée à Y. Pour reconnaître l'identité de deux formes, d'apparence différente, le plus simple est de les ramener toutes deux à ne contenir que des dérivées du troisième ordre par le moyen des égalités

$$(4n-5)(4n-4)Y_i = Y_{00i}\eta_0^2 + 2Y_{12i}\eta_1\eta_2 + \ldots,$$
$$(4n-5)Y_{ij} = Y_{0ij}\eta_0 + \ldots.$$

Le premier membre étant écrit sous l'une ou l'autre des formes symboliques

$$U = [\Sigma A_i\eta_i Y_i]^{(3)} + [\Sigma B_i\eta_i Y_i]^{(2)} + (n-1)\Sigma C_i\eta_i Y_i,$$
$$4(4n-5)U = [\Sigma P_i\eta_i Y_i]^{(3)},$$

on aura

$$(58)\quad \begin{cases} P_{000} = 4(4n-5)A_{000} + 4B_{00} + C_0, \\ P_{001} = 4(4n-5)A_{001} + \frac{4}{3}(B_{00} + 2B_{01}) + \frac{1}{3}(2C_0 + C_1), \\ P_{012} = 4(4n-5)A_{012} + \frac{4}{3}(B_{01} + B_{12} + B_{20}) + \frac{1}{3}(C_0 + C_1 + C_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Mettons, pour les coefficients A, B, C, ceux de la forme ci-dessus, en observant que les derniers peuvent s'écrire ainsi

$$C_0 = (n+1)\gamma_0 + 2(n+4)R,$$

où γ_0 est le coefficient de $Y_0\eta_0$ dans M. Prenons maintenant les nouveaux coefficients suivants :

$$A'_{000} = A_{000} + \frac{R}{8} + \frac{\gamma_0}{16},$$

$$A'_{001} = A_{001} + \frac{R}{8} + \frac{1}{16}\,\frac{2\gamma_0 + \gamma_1}{3},$$

$$A'_{012} = A_{012} + \frac{R}{8} + \frac{1}{16}\,\frac{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2}{3};$$

$$B'_{00} = B_{00} + \frac{21}{8}R + \frac{9}{16}\gamma_0,$$

$$B'_{01} = B_{01} + \frac{21}{8}R + \frac{9}{16}\,\frac{\gamma_0 + \gamma_1}{2};$$

$$C'_0 = 0.$$

En mettant ces coefficients A′, B′, C′ dans (58), au lieu de A, B, C, on trouve les mêmes quantités P. *Nous avons donc, pour transformée de* $G(Y) = 0$, *cette équation* (écrite symboliquement)

$$(59) \qquad \Sigma A'_i(\eta_i Y_i)^{(3)} + [\Sigma B'_i \eta_i Y_i]^{(2)} = 0,$$

dans les coefficients de laquelle la constante n a disparu.

Voici quels sont les coefficients, en mettant, pour abréger,

$$R = (z_0 - z_1)(z_1 - z_2)(z_2 - z_3),$$

$$S = 10(z_0 z_1 + z_1 z_2 + z_2 z_0) - (z_0^2 + z_1^2 + z_2^2);$$

$$A'_{000} = (z_1 - z_2)^3 + \frac{R}{8} + \frac{S}{16}(z_1 - z_2),$$

$$A'_{001} = (z_1 - z_2)^2(z_2 - z_0) + \frac{R}{8} + \frac{S}{16}\,\frac{2z_1 - z_2 - z_0}{3},$$

$$A'_{011} = (z_1 - z_2)(z_2 - z_0)^2 + \frac{R}{8} - \frac{S}{16}\,\frac{2z_0 - z_2 - z_1}{3},$$

$$A'_{012} = \tfrac{9}{8}R;$$

$$B'_{00} = 3(z_1 - z_2)^3 + 9(z_1 - z_2)(2z_1 z_2 - z_1 z_0 - z_2 z_0) + \tfrac{21}{8}R + \tfrac{9}{16}S(z_1 - z_2),$$

$$B'_{01} = -\tfrac{9}{2}(z_0 - z_1)(3z_2^2 - z_0 z_1 - z_0 z_2 - z_1 z_2) + \tfrac{9}{8}R - \tfrac{9}{32}S(z_0 - z_1).$$

Il faut avoir soin d'observer que les autres coefficients se déduisent des précédents par permutation circulaire des indices, en sorte que l'échange de deux indices produit un changement des signes. Ainsi, en échangeant les indices 0, 1, on change A'_{011} en $-A'_{001}$, B'_{01} en $-B'_{01}$, etc.

15. L'équation (59) jouit de la propriété suivante : *elle admet pour solutions une infinité de polynômes entiers par rapport aux variables* η.

Soit n un entier quelconque, positif et premier avec 3 : *il existe trois de ces polynômes, ayant pour degré* $4n - 3$. *Si n est multiple de* 3, *plus* 1, *ces trois polynômes ont les formes*

$$\eta_0 F(z_0, z_1, z_2), \quad \eta_1 F(z_1, z_2, z_0), \quad \eta_2 F(z_2, z_0, z_1),$$

où F *est un polynôme entier du degré* $\frac{4(n-1)}{3}$, *symétrique par rapport aux deux dernières lettres. Si n est multiple de* 3, *plus* 2, *les formes sont* $\eta_0^2 F(z_0, z_1, z_2), \ldots$, *où* F *est du degré* $\frac{4n-5}{3}$ *et jouit de la même symétrie.*

Par conséquent, l'*équation*

$$(60) \qquad \psi Y''' + \frac{3}{2}\psi' Y'' + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n^2}{9}\right)\psi'' Y' - \frac{n(n+3)(4n-3)}{2^2 . 3^3}\psi''' Y = 0,$$

où ψ *est un polynôme du troisième degré, et n un entier, premier avec* 3, *est intégrable algébriquement* (on va voir dans un instant que n peut être négatif).

Cette proposition me semble difficile à établir sur l'équation (60) elle-même. Je l'ai démontrée dans mon *Mémoire sur la réduction des équations différentielles* [1] à propos de l'équation qui se déduit de (60), quand on prend, pour variable indépendante, l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{\psi}}$. La théorie des fonctions elliptiques fournit, pour cet objet, des procédés très faciles. Mais la proposition admise, on a, par l'équation (59), un moyen assez simple de déterminer le polynôme F dans chaque cas particulier. Il suffit, en effet, en substituant l'intégrale à coefficients indéterminés, de prendre un petit nombre de termes pour déterminer les coefficients. De plus, si l'on substitue $\eta_0 F$ ou $\eta_0^2 F$, suivant le cas, dans le premier membre de (59), le résultat contient le facteur

$$\eta_0(z_1 - z_2) \quad \text{ou} \quad \eta_0^2(z_1 - z_2),$$

et, ce facteur supprimé, il reste un polynôme entier par rapport aux z seulement, symétrique en z_1, z_2. J'ai vérifié de cette manière et par un calcul très rapide, pour le cas $n = 2$, la solution

$$Y = \eta_0^2(z_0 - 5z_1 - 5z_2),$$

trouvée autrement dans le Mémoire cité; j'ai calculé encore cette autre,

---

[1] Page 291.

pour $n = 4$,

$$Y = \eta_0 z_0 \left[\frac{z_0^3}{13} + 3 z_0 \; z_1 + z_2 \right.$$
$$\left. - 15 z_0 (z_1^2 + z_2^2) + 24 z_0 z_1 z_2 + 7 (z_1 + z_2)^3 \right].$$

46. L'équation (1) se change en son adjointe quand on change n en $-n$; si l'on appelle Y, Z deux solutions de (10), on aura une solution ϖ de l'adjointe ainsi

$$\varpi = \psi^{\frac{1}{2}} (YZ' - ZY').$$

Si maintenant on tient compte de ce que $\psi^{\frac{1}{2}}$ diffère de R seulement par un facteur constant, et que l'on fasse usage de la formule (56), on reconnaîtra l'exactitude de l'énoncé suivant :

L'équation (59) *admet encore une infinité de solutions rationnelles, d'une seconde forme, comme il suit : soient* Z, T *deux des polynômes, de la première forme, et du même degré* $4n - 3$, *on en déduira la solution*

$$Y = \frac{\left| \begin{array}{l} \eta_0 \eta_1 (2 z_2 - z_0 - z_1)(Z_0 T_1 - Z_1 T_0) + \eta_1 \eta_2 (2 z_0 - z_1 - z_2)(Z_1 T_2 - Z_2 T_1) \\ \qquad + \eta_2 \eta_0 (2 z_1 - z_2 - z_0)(Z_2 T_0 - Z_0 T_2) \end{array} \right|}{(z_0 + z_1 + z_2)^{4n}}.$$

Cette équation Y *est aussi une solution de l'équation* (60) *quand on y a changé n en $-n$, et que l'on considère les* η *comme exprimés en x par le moyen des relations* (48). On peut alors supprimer le dénominateur de Y, qui est une constante.

D'après la forme de la solution ainsi trouvée pour l'équation différentielle (60), dans laquelle n est entier, positif ou négatif, et premier avec 3, il est manifeste que le produit des trois solutions particulières envisagées est fonction entière de x. Ainsi *cette équation a toujours des multiplicateurs quadratiques à coefficients entiers.*

CONCLUSION.

Si l'on voulait poursuivre la série naturelle de ces recherches, soit sur les équations du troisième ordre, soit sur les équations d'ordre supérieur, on rencontrerait la circonstance déjà signalée pour les équations du second ordre au n° **29** de ce Mémoire. Les formes ternaires, au-dessus du troisième degré, admettent, suivant la parité de leur degré, des covariants rationnels, soit linéaires, soit quadratiques, et les formes quaternaires présentent la même circonstance pour le troisième degré inclusivement. C'est donc seulement par la théorie des formes singulières que l'on pourra trouver de nouveaux exemples d'équations différentielles intégrables algébriquement et cependant irréductibles. Ainsi, malgré l'apparente étendue du sujet proposé en tête du présent Mémoire, une fois les formes quadratiques exclues, si l'on met de côté aussi les formes singulières, dont les covariants linéaires ou quadratiques sont identiquement nuls, on n'a pas d'autres cas à traiter que ceux mêmes dont l'étude vient d'être faite. Quant au problème concernant les formes quadratiques, j'ai l'intention de le traiter dans un autre Mémoire.