JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Sur les fonctions holomorphes

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 1 (1885), p. 9-10.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1885_4_1__9_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les fonctions holomorphes;

PAR M. HERMITE.

MM. Briot et Bouquet ont établi, d'une manière élégante, dans leur Ouvrage *Sur la théorie des fonctions elliptiques* (p. 203), cette proposition si importante, qu'une fonction holomorphe dont le module est fini pour toute valeur de la variable est une constante. Je me propose de démontrer le théorème plus général que toute fonction holomorphe $f(z)$, telle que le rapport $\frac{f(z)}{z^n}$, soit fini pour z infiniment grand, est un polynôme du degré n en z. A cet effet, je partirai de la formule de Maclaurin :

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(0) + J,$$

où l'on a

$$J = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{x^{n+1} f(z)\, dz}{z^{n+1}(z-x)},$$

l'intégrale étant prise le long d'une circonférence de rayon r ayant son centre à l'origine, et qui contient à son intérieur le point dont l'affixe est la variable x.

J'emploierai ensuite cette expression qu'on obtient facilement de toute intégrale $\int F(z)\, dz$, effectuée le long d'une courbe de longueur σ, à savoir

$$\int F(z)\, dz = \lambda\sigma F(\zeta),$$

où ζ désigne l'affixe d'un point de la courbe, et λ le facteur de M. Darboux, dont le module a l'unité pour limite supérieure.

Nous pouvons ainsi écrire, en représentant par $\zeta = re^{i\theta}$ l'affixe d'un point de cette circonférence,

$$J = \frac{r x^{n+1} f(\zeta)}{\zeta^{n+1}(\zeta - x)}\lambda.$$

Mettons maintenant $\zeta e^{-i\theta}$ au lieu de r, et il viendra

$$J = \frac{x^{n+1} f(\zeta)}{\zeta^{n}(\zeta - x)}\lambda e^{-i\theta}.$$

Cela étant, j'observe que, la fonction $f(z)$ étant holomorphe, on peut faire croître au delà de toute limite la circonférence qui sert de contour pour l'intégration. Par là nous voyons qu'en supposant, comme nous l'avons admis, que $\frac{f(z)}{z^n}$ reste une quantité finie, lorsque le module de z augmente indéfiniment, on trouve $J = 0$; la fonction considérée est donc bien un polynôme du degré n.