JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M.-N. VANECEK

Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure analogue à celle de Mac-Laurin

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 9 (1883), p. 269-272.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1883_3_9__269_0>

Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure analogue à celle de Mac-Laurin;

PAR M. M.-N. VANĚČEK.

1. En écrivant dans cette Note *un polyèdre* P *de forme variable à n faces*, on entend que toutes ses faces $F_1, F_2, \ldots, F_n$ enveloppent respectivement des surfaces développables $S_1, S_2, \ldots, S_n$, de classe $s_1, s_2, \ldots, s_n$, et que toutes ses arêtes (c'est-à-dire des droites de rencontre de deux faces successives) $\overline{F_1F_2}, \overline{F_2F_3}, \ldots, \overline{F_{n-1}F_n}$, moins une (savoir $\overline{F_nF_1}$), rencontrent respectivement des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, d'ordre $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ [1].

Si le polyèdre P *varie ainsi, l'arête libre* $\overline{F_1F_n}$ *engendrer une surface gauche* X *qui sera du degré*

$$(a) \qquad 2s_1 s_1 \ldots s_n c_1 \ldots c_{n-1}.$$

On verra que cette formule est vraie pour la surface S_k, de classe s_k, si elle est vraie pour une droite quelconque D (surface développable de première classe) remplaçant la surface S_k. La droite qui joint le point où la face F_{k-1} rencontre la courbe C_{k-1} avec le point où la face F_{k+1} perce la courbe C_k, engendre une surface Y de classe y, quand l'arête

[1] On entend dans toute cette Note, excepté dans le dernier alinéa, les lignes à double courbure.

libre $\overline{F_1F_n}$ rencontre continuellement une droite quelconque P. Les plans tangents communs aux surfaces Y et S_k donnent les points où la droite P perce la surface X. On peut déterminer la classe y de la surface Y comme il suit : On prend une droite quelconque D, et, quand la face F_k l'enveloppe, l'arête libre $\overline{F_1F_n}$ engendre une surface gauche U d'ordre u. Les points où la surface U perce la droite P donnent les plans tangents de la surface Y, qui passent par la droite D. Donc $y = u$. Mais la surface U est la surface X, quand on remplace la surface S_k par la droite D. Donc, etc.

On démontrerait d'une manière analogue que la formule (a) est vraie pour la courbe C_k, quand elle est vraie pour une droite quelconque D, remplaçant la courbe C_k.

Au cas où toutes les surfaces $S_1, \ldots, S_n$ et toutes les courbes $C_1, \ldots, C_{n-1}$ sont des droites, la surface X est du deuxième degré. Alors la formule (a) est vraie.

Tous les plans de la surface S_n sont multiples plans tangents d'ordre

$$s_1 s_2 \ldots s_{n-1} c_1 \ldots c_{n-1}$$

de la surface X.

2. *Si trois polyèdres variables* P, P′, P″ *à* n, n', n'' *faces ont la première face commune qui enveloppe une surface développable* S_1 *d'ordre* s_1, *c'est-à-dire* $F_1 \equiv F'_1 \equiv F''_1$ *et* $S_1 \equiv S'_1 \equiv S''_1$, *les dernières faces* F_n, $F'_{n'}$, $F''_{n''}$ *se rencontrent en un point qui parcourt une courbe d'ordre* (¹)

$$(b) \qquad 3 s_1 s_2 \ldots s_n s' \ldots s'_{n'} s''_2 s''_3 \ldots s''_{n''} c_1 \ldots c_{n-1} c'_1 \ldots c'_{n'-1} c''_1 \ldots c''_{n''-1}.$$

(¹) Chasles (*Aperçu historique*, p. 404, seconde édition) indique la construction suivante de la courbe du troisième ordre :

« Quand les quatre faces d'un tétraèdre mobile sont assujetties à passer respectivement par quatre droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et que trois sommets du tétraèdre doivent se trouver sur trois autres droites, placées aussi d'une manière quelconque dans l'espace, le quatrième sommet du tétraèdre parcourra une courbe à double courbure du troisième degré. »

Il est évident que cette construction est impossible. Au cas particulier du théorème **2**, on aura une construction semblable à celle de Chasles, savoir :

Quand quatre faces d'un tétraèdre mobile sont assujetties à passer respectivement par quatre droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et que

Nous ne démontrons pas ce théorème et les théorèmes suivants, parce qu'il suffit d'employer la même voie, comme dans le précédent.

3. En désignant par γ, γ', γ'' les points où les dernières faces F_n, $F'_{n'}$, $F''_{n''}$ des polyèdres P, P', P'' rencontrent respectivement les courbes C_n, $C'_{n'}$, $C''_{n''}$ d'ordre c_n, $c'_{n'}$, $c''_{n''}$, on obtiendra :

Si trois polyèdres variables P, P', P'' *ont la première face commune qui enveloppe une surface développable* S_1 *d'ordre* s_1, *le plan* $\gamma\gamma'\gamma''$ *enveloppe une surface développable de classe*

$$(c) \qquad 3 s_1 s_2 \ldots s_n s'_2 \ldots s'_{n'} s''_1 \ldots s''_{n''} c_1 \ldots c_n c'_1 \ldots c'_{n'} c''_1 \ldots c''_{n''}.$$

4. En prenant, au lieu de la surface développable S_1, une surface quelconque S_1 de classe s_1, on obtiendra au cas 2 *une surface* d'ordre (b) et au cas 3 une surface de classe (c).

5. On peut déduire les théorèmes suivants, d'après le principe de dualité des théorèmes précédents.

Désignons par γ_0 chaque point où la première face F_1 du polyèdre P, de forme variable à n faces, perce une courbe quelconque C_0 d'ordre c_0 et par γ_n chaque point où la dernière face F_n de ce polyèdre rencontre une courbe quelconque C_n d'ordre c_n. *La droite* $\gamma_0\gamma_n$ *remplit une surface gauche du degré*

$$(a') \qquad 2 s_1 s_2 \ldots s_n c_0 c_1 \ldots c_{n-1} c_n,$$

quand le polyèdre P varie de manière déterminée.

Si les premières faces F_1, F'_1, F''_1 *des polyèdres variables* P, P', P'' *se coupent sur une courbe* C *d'ordre* c, *les dernières faces* F_n, $F'_{n'}$, $F''_{n''}$ *se coupent en un point qui parcourt une courbe d'ordre*

$$(b') \qquad 3 s_1 \ldots s_n s'_1 \ldots s'_{n'} s''_1 \ldots s''_{n''} c c_1 \ldots c_{n-1} c'_1 \ldots c'_{n'-1} c'' \ldots c''_{n''-1}.$$

---

trois *arêtes* situées dans une face F_1 du tétraèdre doivent rencontrer trois autres droites placées aussi d'une manière quelconque dans l'espace, le sommet où se coupent trois autres faces du tétraèdre parcourra une courbe à double courbure du troisième ordre.

Et, en remplaçant la courbe C par *une surface* quelconque C d'ordre c, on obtiendra *une surface* d'ordre (b').

Lorsque les premières faces F_1, F'_1, F''_1 des polyèdres variables P, P', P'' se coupent sur une courbe C d'ordre c, le plan $\gamma\gamma'\gamma''$ enveloppe une surface développable de classe

$$(c') \qquad 3s_1\ldots s_n s'_1\ldots s'_{n'} s''_1\ldots s''_{n''} c_1\ldots c_{n-1} c_n c'_1\ldots c'_{n'} c''_1\ldots c''_{n''},$$

et pour une surface quelconque C d'ordre c, au lieu de la courbe C, on aura une surface de classe (c').

6. On peut généraliser enfin le théorème dû à Mac-Laurin (¹) sur la génération des courbes planes de la manière suivante :

Si un polygone, de forme variable, se meut de manière que tous ses côtés enveloppent respectivement des courbes $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$ de classe c'_1 $c'_2\ldots c'_n$, et que tous ses sommets, moins un, parcourent des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ d'ordre $c_1 c_2\ldots c_{n-1}$, le sommet libre engendre une courbe d'ordre

$$2c'_1 c'_2\ldots c'_n c_1 c_2\ldots c_{n-1}.$$

Je ne connais pas la démonstration du théorème de Mac-Laurin donnée par lui-même, mais on peut démontrer ce théorème d'une manière analogue à celle de 1, en prouvant qu'il est vrai pour une courbe quelconque C'_k quand il est vrai pour un point quelconque remplaçant la courbe C'_k, et qu'il est vrai pour une courbe quelconque C'_k quand il est vrai pour une droite quelconque D, remplaçant cette courbe.

(¹) Voir *Aperçu historique*, etc., p. 150.