JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DÉSIRÉ ANDRÉ

Sur les permutations alternées

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 7 (1881), p. 167-184.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1881_3_7__167_0>

Sur les permutations alternées;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

Le présent travail a pour point de départ la notion, probablement toute nouvelle, des permutations alternées de n lettres distinctes, et pour objet l'étude du nombre $2A_n$ de ces permutations.

Nous définissons les permutations alternées de n éléments distincts; nous donnons le moyen de calculer, de proche en proche, la moitié A_n de leur nombre; nous déterminons la fonction génératrice de la fraction $\frac{A_n}{n!}$; nous en déduisons les développements de $\operatorname{tang} x$ et de $\operatorname{séc} x$ suivant les puissances croissantes de x; nous appliquons les résultats obtenus à différents développements ou séries; nous en tirons plusieurs conséquences touchant les développements des fonctions elliptiques; enfin nous donnons de nouvelles et plus simples formules pour calculer les nombres A_n.

Il se trouve que ces nombres A_n ne sont autres que les coefficients de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement soit de $\operatorname{tang} x$, soit de $\operatorname{séc} x$. Ces coefficients avaient été considérés déjà. Grâce aux permutations alternées, nous en pouvons donner une définition combinatoire très simple, très nette, et indépendante de tout développement.

I. — *Définition des permutations alternées.*

1. Considérons n éléments distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ et formons-en toutes les permutations. Si, dans l'une quelconque d'entre elles, nous retranchons chaque indice du suivant, nous obtenons une suite de $n-1$ différences, dont aucune n'est égale à zéro, et qui, dans toutes les permutations, sauf deux, sont les unes positives, les autres négatives. Lorsque, tout le long de cette suite, ces différences sont *alternativement* positives et négatives, la permutation correspondante est *alternée*. Lorsque, au contraire, cette continuelle alternance des signes ne se présente pas, la permutation n'est pas alternée.

Par exemple, dans le cas particulier où $n = 4$, les permutations

$$\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4, \quad \alpha_3\alpha_2\alpha_4\alpha_1$$

sont alternées, et les permutations

$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_1, \quad \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4$$

ne le sont pas.

2. Le nombre des permutations alternées de n éléments distincts dépend évidemment, et uniquement, de n. Par sa nature même, il est forcément positif et entier; et l'on peut démontrer, d'une manière très simple, qu'il est toujours pair. Il suffit effectivement de faire observer que les permutations alternées de n éléments distincts se correspondent deux à deux. L'un des moyens les plus commodes d'établir cette correspondance consiste à associer les permutations qui présentent les mêmes indices dans un ordre exactement inverse.

En associant de cette façon les permutations alternées de quatre éléments, lesquelles sont au nombre de dix, on obtient les cinq couples suivants :

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4 & \text{et} & \alpha_4\alpha_2\alpha_3\alpha_1, \\
\alpha_1\alpha_4\alpha_2\alpha_3 & \text{et} & \alpha_3\alpha_2\alpha_4\alpha_1, \\
\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4 & \text{et} & \alpha_4\alpha_1\alpha_3\alpha_2, \\
\alpha_2\alpha_4\alpha_1\alpha_3 & \text{et} & \alpha_3\alpha_1\alpha_4\alpha_2, \\
\alpha_3\alpha_4\alpha_1\alpha_2 & \text{et} & \alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3.
\end{array}$$

3. Nous représenterons par $2A_n$ le nombre des permutations alternées de n éléments distincts. Comme il n'y a de permutations alternées que parmi les permutations d'au moins trois éléments, les symboles A_0, A_1, A_2 sont dépourvus de sens. Pour la régularité des formules, nous les emploierons néanmoins, en convenant de les regarder comme égaux chacun à l'unité.

Le nombre A_n, moitié du nombre des permutations alternées de n éléments distincts, possède ainsi, on le voit, une définition très simple, très nette, purement combinatoire et indépendante de toute considération de développement.

II. — *Calcul des nombres* A_n.

4. Comme nous l'avons déjà fait observer [1], le moyen général de calculer les nombres tels que A_n qui se présentent dans l'analyse combinatoire consiste à déterminer une relation entre le nombre A_{n+1}, par exemple, et les nombres analogues d'indices moindres A_n, A_{n-1}, A_{n-2}, ... Pour parvenir à une pareille relation, nous partagerons les permutations alternées des $n+1$ éléments distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$ en $n+1$ classes, savoir : les permutations alternées où l'élément α_{n+1} occupe la première place ; celles où il occupe la deuxième place ; celles où il occupe la troisième place; ...; celles où il occupe la $(n+1)^{\text{ième}}$ place.

5. Formons toutes les permutations alternées des $n+1$ éléments distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}$, où l'élément α_{n+1}, qui possède l'indice le plus élevé, occupe la $(p+1)^{\text{ième}}$ place.

La première opération à effectuer, c'est évidemment de partager les n autres éléments en deux groupes, l'un de p éléments qu'on devra placer avant α_{n+1}, l'autre de $n-p$ éléments qu'il faudra placer après. Et ce partage en deux groupes pourra s'effectuer d'un nombre de ma-

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France,* année 1879.

nières différentes égal au nombre C_n^p des combinaisons simples de n objets p à p.

Supposons qu'on ait effectué ce partage de l'une quelconque de ces C_n^p manières. Les p éléments du premier groupe devront être disposés en une permutation alternée où l'indice de l'avant-dernier élément surpasse celui du dernier. Le nombre des dispositions différentes dont ces p éléments sont susceptibles est donc égal à la moitié du nombre des permutations alternées de p éléments distincts, c'est-à-dire à A_p. De même, les $n-p$ éléments du second groupe devant former une permutation alternée où l'indice du premier élément soit moindre que celui du second, ces $n-p$ éléments seront susceptibles d'un nombre de dispositions différentes égal à A_{n-p}.

Par conséquent, à un seul mode, quelconque d'ailleurs, de partage en deux groupes des n éléments autres que α_{n+1}, correspond un nombre, égal au produit $A_p A_{n-p}$, de permutations alternées de $n+1$ éléments, dans chacune desquelles α_{n+1} occupe la $(p+1)^{\text{ième}}$ place. Et il s'ensuit immédiatement que le nombre des permutations de ce genre que donnent tous les modes de partage, c'est-à-dire le nombre total des permutations alternées de $n+1$ éléments, où α_{n+1} occupe la $(p+1)^{\text{ième}}$ place, est égal au produit $C_n^p A_p A_{n-p}$.

6. Ainsi, le nombre des permutations alternées de $n+1$ éléments distincts, où l'élément α_{n+1} occupe la première place, est $C_n^0 A_0 A_n$.

Le nombre de celles où il occupe la deuxième place est $C_n^1 A_1 A_{n-1}$.

Le nombre de celles où il occupe la troisième place est $C_n^2 A_2 A_{n-2}$.

Et ainsi de suite.

En ajoutant tous ces résultats, on trouve évidemment le nombre total $2A_{n+1}$ des permutations alternées de $n+1$ éléments distincts. De là l'identité

$$2A_{n+1} = C_n^0 A_0 A_n + C_n^1 A_1 A_{n-1} + C_n^2 A_2 A_{n-2} + \ldots + C_n^n A_n A_0.$$

D'ailleurs, le mode de raisonnement que nous venons d'employer nous montre bien que cette identité est exacte pour toutes les valeurs de n supérieures à l'unité. Il se trouve qu'elle subsiste encore lorsque n

est égal à l'unité, mais elle n'est plus vraie dans le cas où n est égal à zéro.

7. Cette identité donne un moyen simple de calculer, de proche en proche, les nombres A_n. Elle est d'un emploi d'autant plus commode qu'elle ne renferme, à son second membre, ni signe $-$, ni nombre fractionnaire. Nous avons, par convention (3),

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1.$$

En appliquant notre formule, nous trouvons

$$A_3 = 2, \quad A_4 = 5, \quad A_5 = 16, \quad A_6 = 61,$$
$$A_7 = 272, \quad A_8 = 1385, \quad A_9 = 7936, \quad \ldots.$$

Nous donnerons, dans la suite du présent travail, d'autres formules, encore plus simples, pour effectuer ce même calcul.

III. — *Fonction génératrice des fractions* $\frac{A_n}{n!}$.

8. Posons d'abord

$$\frac{A_n}{n!} = a_n.$$

L'identité précédemment trouvée (6) se transforme en celle-ci

$$2(n+1)a_{n+1} = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \ldots + a_n a_0,$$

qui est, comme la précédente, exacte pour n égal ou supérieur à l'unité, mais fausse pour $n = 0$.

Puis, désignons par Y la fonction génératrice de $\frac{A_n}{n!}$, c'est-à-dire de a_n. Nous aurons, d'après la définition bien connue des fonctions génératrices,

$$Y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

et la question que nous nous proposons présentement, c'est de déterminer Y.

9. Pour cela, revenons à l'identité (8) qui lie le nombre a_{n+1} aux nombres a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ... Sa forme nous suggère l'idée de considérer le carré de Y. En le formant, nous trouvons

$$Y^2 = a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0) x + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_1) x^2 + \ldots ;$$

c'est-à-dire, si nous faisons usage de l'identité rappelée, en évitant soigneusement de l'employer dans le cas de $n = 0$, où elle est fausse,

$$Y^2 = a_0^2 + 2.2 a_2 x + 2.3 a_3 x^2 + \ldots.$$

Dans ce nouveau second membre, la série qui suit a_0^2 est évidemment égale à

$$2\left(\frac{dY}{dx} - a_1\right).$$

Donc, nous avons identiquement l'équation différentielle suivante

$$Y^2 = a_0^2 + 2\left(\frac{dY}{dx} - a_1\right),$$

qui devient, lorsqu'on y remplace a_0 et a_1 chacun par l'unité,

$$Y^2 = 2\frac{dY}{dx} - 1.$$

Nous en déduisons

$$\operatorname{arc\,tang} Y = \frac{x}{2} + C;$$

et, puisque Y se réduit à a_0, c'est-à-dire à l'unité, lorsque $x = 0$, la constante C est égale à $\frac{\pi}{4}$. Donc, finalement,

$$Y = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Telle est la fonction génératrice du nombre a_n, c'est-à-dire de $\frac{A_n}{n!}$.

10. Nous pouvons donc écrire

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

ou bien, en revenant aux nombres A_n,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

C'est cette dernière formule ([1]) qui va servir de fondement à toute la suite de ce Mémoire.

IV. — *Développements de* sécx *et de* tang$x$.

11. Notre formule fondamentale

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = A_0 + A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

devient immédiatement, par le changement de x en $-x$,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = A_0 - A_1 \frac{x}{1!} + A_2 \frac{x^2}{2!} - A_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

([1]) Présentée à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 12 mai 1879.

Or, nous avons ces deux identités

$$2\,\mathrm{séc}\,x = \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

$$2\,\mathrm{tang}\,x = \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Donc

$$\mathrm{séc}\,x = A_0 + A_2\frac{x^2}{2!} + A_4\frac{x^4}{4!} + A_6\frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\mathrm{tang}\,x = A_1\frac{x}{1!} + A_3\frac{x^3}{3!} + A_5\frac{x^5}{5!} + A_7\frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Ces deux formules donnent, on le voit, les développements de sécx et de tang$x$, suivant les puissances croissantes de x, et elles rendent manifeste une corrélation remarquable entre les coefficients de ces deux développements.

12. Il y a environ deux cents ans que les géomètres ont commencé à s'occuper du développement de tang$x$, et probablement de celui de sécx, car on trouve, vers la fin du XVII^e siècle, dans le *Commercium epistolicum*, une lettre de Grégory où il est question du premier de ces développements. Toutefois, il nous semble que ce n'est qu'en ces derniers temps qu'on a eu l'idée de considérer, au lieu des coefficients a_n qui sont fractionnaires, leurs numérateurs A_n qui sont entiers; de chercher des formules simples pour calculer ces numérateurs; enfin de rapprocher, comme nous venons de voir qu'on doit le faire, les deux développements de sécx et de tang$x$. L'honneur en revient, croyons-nous, à M. Catalan.

Dans un article faisant partie de ses *Notes d'Algèbre et d'Analyse* ([1]), M. Catalan pose en effet, *a priori*,

$$\mathrm{séc}\,x = G_0 + G_2\frac{x^2}{2!} + G_4\frac{x^4}{4!} + G_6\frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\mathrm{tang}\,x = G_1\frac{x}{1!} + G_3\frac{x^3}{3!} + G_5\frac{x^5}{5!} + G_7\frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

([1]) Extraits du Tome XLII des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Belgique;* 1877.

et, par cela seul, il établit, entre ces deux développements, le rapprochement qu'il faut établir. De plus, il considère, comme on le voit, non pas le coefficient fractionnaire de x^n, mais le coefficient entier de $\frac{x^n}{n!}$. Enfin, par des considérations tirées des développements eux-mêmes, il obtient, pour calculer les nombres G, la formule

$$2G_{n+1} = C_n^0 G_0 G_n + C_n^1 G_1 G_{n-1} + C_n^2 G_2 G_{n-2} + \ldots + C_n^n G_n G_0,$$

qui se confond avec celle que nous avons obtenue plus haut (6) pour le calcul des nombres A.

Après ce travail de M. Catalan, il ne restait plus à découvrir que la signification combinatoire des nombres G, lesquels n'étaient encore définis que par les développements mêmes où ils figurent. Ce problème est résolu par le présent travail. Il est clair, en effet, que les coefficients G et les coefficients A ne diffèrent point. Or, d'après ce qui précède, les nombres A possèdent une définition combinatoire très simple, très nette, et par conséquent une existence propre, indépendante de tout développement.

Ainsi, la notion des permutations alternées donne la signification combinatoire des coefficients des développements de sécx et de tang$x$, tout comme la notion des combinaisons simples donnait celle des coefficients du binôme. La meilleure manière de définir le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^m$, c'est de dire qu'il est le nombre des combinaisons simples de m objets n à n. De même, la meilleure manière de définir le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement, soit de tang$x$, soit de sécx, c'est de dire qu'il est la moitié du nombre des permutations alternées de n éléments.

V. — *Divers développements et séries.*

13. En tenant compte de la forme, facile à déterminer, des développements de cot$x$ et de cosécx, s'appuyant sur les développements obtenus (11) de $\operatorname{séc} x$ et de $\operatorname{tang} x$, et s'aidant des identités simples

$$\cot x = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2},$$

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{x}{2},$$

on arrive à ces deux développements :

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{A_1}{2^2-1}\frac{x}{1!} - \frac{A_3}{2^4-1}\frac{x^3}{3!} - \frac{A_5}{2^6-1}\frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{x} + \frac{2-1}{2^2-1}\frac{A_1}{2}\frac{x}{1!} + \frac{2^3-1}{2^4-1}\frac{A_3}{2^3}\frac{x^3}{3!} + \frac{2^5-1}{2^6-1}\frac{A_5}{2^5}\frac{x^5}{5!} + \cdots.$$

14. En différentiant par rapport à x les développements de $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\operatorname{séc} x$ et $\operatorname{coséc} x$, on obtient les résultats suivants :

$$\operatorname{séc}^2 x = A_1 + A_3\frac{x^2}{2!} + A_5\frac{x^4}{4!} + A_7\frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\operatorname{coséc}^2 x = \frac{1}{x^2} + \frac{A_1}{2^2-1} + \frac{A_3}{2^4-1}\frac{x^2}{2!} + \frac{A_5}{2^6-1}\frac{x^4}{4!} + \cdots,$$

$$\operatorname{séc} x \operatorname{tang} x = A_2\frac{x}{1!} + A_4\frac{x^3}{3!} + A_6\frac{x^5}{5!} + A_8\frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\operatorname{coséc} x \cot x = \frac{1}{x^2} - \frac{2-1}{2^2-1}\frac{A_1}{2} - \frac{2^3-1}{2^4-1}\frac{A_3}{2^3}\frac{x^2}{2!} - \frac{2^5-1}{2^6-1}\frac{A_5}{2^5}\frac{x^4}{4!} - \cdots.$$

15. En intégrant les formules qui donnent $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\operatorname{séc} x$ et $\operatorname{coséc} x$, et choisissant convenablement les constantes d'intégration, on arrive à ces développements :

$$\mathrm{L}\cos x = -A_1\frac{x^2}{2!} - A_3\frac{x^4}{4!} - A_5\frac{x^6}{6!} - A_7\frac{x^8}{8!} - \cdots,$$

$$\mathrm{L}\sin x - \mathrm{L}x = -\frac{A_1}{2^2-1}\frac{x^2}{2!} - \frac{A_3}{2^4-1}\frac{x^4}{4!} - \frac{A_5}{2^6-1}\frac{x^6}{6!} - \frac{A_7}{2^8-1}\frac{x^8}{8!} - \cdots,$$

$$\mathrm{L}\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = A_0\frac{x}{1!} + A_2\frac{x^3}{3!} + A_4\frac{x^5}{5!} + A_6\frac{x^7}{7!} + A_8\frac{x^9}{9!} + \cdots,$$

$$\mathrm{L}\operatorname{tang}\frac{x}{2} - \mathrm{L}\frac{x}{2} = \frac{2-1}{2^2-1}\frac{A_1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{2^3-1}{2^4-1}\frac{A_3}{2^3}\frac{x^4}{4!}$$
$$+ \frac{2^5-1}{2^6-1}\frac{A_5}{2^5}\frac{x^6}{6!} + \frac{2^7-1}{2^8-1}\frac{A_7}{2^7}\frac{x^8}{8!} + \cdots.$$

16. En comparant les développements de sécx, tang$x$, cot$x$ et cosécx qui précèdent aux quatre formules connues :

$$\text{séc}\,x = \pi \sum_1^\infty {}_t \frac{(-1)^t(2t-1)}{x^2-(2t-1)^2\dfrac{\pi^2}{4}},$$

$$\text{tang}\,x = 2x \sum_1^\infty {}_t \frac{1}{(2t-1)^2\dfrac{\pi^2}{4}-x^2},$$

$$\cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_1^\infty {}_t \frac{1}{x^2-t^2\pi^2},$$

$$\text{coséc}\,x = \frac{1}{x} + 2x \sum_1^\infty {}_t \frac{(-)^t}{x^2-t^2\pi^2},$$

on obtient, pour toutes les valeurs de n entières et supérieures à zéro, les égalités suivantes :

$$\frac{1}{1^{2n+1}} - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \cdots = \frac{1}{2}\frac{A_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1},$$

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \cdots = \frac{1}{2}\frac{A_{2n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n},$$

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \cdots = \frac{1}{2}\frac{A_{2n-1}}{(2n-1)!}\frac{\pi^{2n}}{2^{2n}-1},$$

$$\frac{1}{1^{2n}} - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{4^{2n}} + \cdots = \frac{2^{2n-1}-1}{2^{2n}-1}\frac{A_{2n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n},$$

dont la troisième et la quatrième peuvent se tirer de la seconde.

17. Toutes les formules (**13, 14, 15, 16**) de ce paragraphe étaient déjà connues; mais l'introduction du symbole A_n, moitié du nombre des permutations alternées de n éléments distincts, leur donne, selon nous, un nouveau degré d'intérêt.

VI. — *Remarques sur les fonctions elliptiques.*

18. La fonction elliptique $\lambda(x)$ satisfait, comme on sait, à l'équation différentielle

$$\left(\frac{d\lambda}{dx}\right)^2 = 1 - (1 + k^2)\lambda^2 + k^2\lambda^4,$$

et se développe, suivant les puissances ascendantes de la variable x, sous la forme

$$\lambda(x) = \frac{x}{1!} - P_1\frac{x^3}{3!} + P_2\frac{x^5}{5!} - P_3\frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

dans laquelle P_1, P_2, P_3, ... sont des polynômes déterminés, entiers par rapport au carré k^2 du module.

Or, l'équation différentielle qui précède nous montre que, lorsque $k = 1$, la fonction $\lambda(x)$ se réduit à l'expression $-i \operatorname{tang} ix$, dans laquelle i représente $\sqrt{-1}$. Si nous nous reportons alors au développement donné plus haut (11) pour $\operatorname{tang} x$, et que nous représentions toujours par A_n la moitié du nombre des permutations alternées de n éléments distincts, nous voyons que, pour $k = 1$, le développement de $\lambda(x)$ devient

$$A_1\frac{x}{1!} - A_3\frac{x^3}{3!} + A_5\frac{x^5}{5!} - A_7\frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

Il s'ensuit immédiatement que, dans les polynômes P_1, P_2, P_3, ..., qui sont entiers en k^2, les sommes des coefficients sont respectivement égales aux nombres A_3, A_5, A_7, ...

19. De même, les deux fonctions elliptiques $\mu(x)$, $\nu(x)$ satisfont respectivement aux deux équations différentielles

$$\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2 = (1 - k^2) + (2k^2 - 1)\mu^2 - k^2\mu^4,$$

$$\left(\frac{d\nu}{dx}\right)^2 = (k^2 - 1) + (2 - k^2)\nu^2 - \nu^4,$$

et se développent respectivement sous les formes

$$\mu(x) = 1 - Q_1 \frac{x^2}{2!} + Q_2 \frac{x^4}{4!} - Q_3 \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$
$$\nu(x) = 1 - R_1 \frac{x^2}{2!} + R_2 \frac{x^4}{4!} - R_3 \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

dans lesquelles $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, R_1, R_2, R_3, \ldots$ sont des polynômes entiers en k^2.

Or, on voit facilement que, lorsque $k = 1$, chacune des fonctions $\mu(x)$, $\nu(x)$ se réduit à séc ix, la lettre i représentant toujours le symbole $\sqrt{-1}$.

Donc, lorsque $k = 1$, chacun des développements précédents se réduit à

$$A_0 - A_2 \frac{x^2}{2!} + A_4 \frac{x^4}{4!} - A_6 \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

Donc, dans les polynômes $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, comme dans les polynômes $R_1, R_2, R_3, \ldots$, les sommes des coefficients sont respectivement égales à $A_2, A_4, A_6, \ldots$, c'est-à-dire aux moitiés des nombres des permutations alternées de 2, 4, 6, ... éléments distincts.

VII. — *Propriétés des nombres A_n.*

20. Le nombre A_n étant le coefficient de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement soit de séc x, soit de tang x, la considération de ces développements fournit diverses égalités où figurent les nombres A_n. Nous ne considérerons parmi elles que celles qui nous paraîtront simples et intéressantes.

21. Reprenons la formule fondamentale

$$(\alpha) \qquad 2A_{n+1} = C_n^0 A_0 A_n + C_n^1 A_1 A_{n-1} + C_n^2 A_2 A_{n-2} + \ldots + C_n^n A_n A_0,$$

que nous avons établie en commençant (**6**), qui subsiste pour toutes les valeurs de n supérieures à zéro, et où les coefficients C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n sont ceux de la $n^{\text{ième}}$ puissance du binôme.

Cette formule constitue une relation du second degré entre les nombres A. Ce n'est point la seule relation de cette espèce qui existe entre ces nombres; nous allons facilement en établir plusieurs autres.

Pour cela, prenons simultanément les deux formules

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=A_0+A_1\frac{x}{1!}+A_2\frac{x^2}{2!}+A_3\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=A_0-A_1\frac{x}{1!}+A_2\frac{x^2}{2!}-A_3\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

que nous avons déjà considérées (**11**). En les multipliant membres à membres, et remarquant que le produit des deux premiers membres est égal à l'unité, nous trouvons la formule

$$(\beta)\qquad C_n^0A_0A_n-C_n^1A_1A_{n-1}+C_n^2A_2A_{n-2}-\ldots\pm C_n^nA_nA_0=0,$$

qui est encore une relation du second degré entre les nombres A, où les coefficients C ont la même signification que dans la formule fondamentale, et qui se réduit à une identité évidente lorsque l'indice n est un nombre pair.

Cette seconde formule, combinée avec notre formule fondamentale, nous fournit immédiatement les deux relations

$$(\gamma)\qquad A_{n+1}=C_n^0A_0A_n+C_n^2A_2A_{n-2}+C_n^4A_4A_{n-4}+\ldots,$$

$$(\delta)\qquad A_{n+1}=C_n^1A_1A_{n-1}+C_n^3A_3A_{n-3}+C_n^5A_5A_{n-5}+\ldots,$$

dont la seconde a été donnée [1] déjà par M. Catalan, dans le cas particulier où n est un nombre pair.

22. On trouve encore des relations du second degré entre les

---

[1] *Loc. cit.*

nombres A, en partant de l'identité

$$\left(1-\tang\frac{x}{2}\right)\tang\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=1+\tang\frac{x}{2}.$$

On arrive ainsi, en effet, aux deux relations

$$(\varepsilon)\quad 2^{2n}A_{2n}=2C_{2n}^{1}A_1A_{2n-1}+2^3C_{2n}^{3}A_3A_{2n-3}+\ldots+2^{2n-1}C_{2n}^{2n-1}A_{2n-1}A_1,$$

$$(\zeta)\quad \left\{\begin{aligned}(2^{2n}-1)A_{2n+1}&=2C_{2n+1}^{2}A_2A_{2n-1}\\&\quad+2^3C_{2n+1}^{4}A_4A_{2n-3}+\ldots+2^{2n-1}C_{2n+1}^{2n}A_{2n}A_1,\end{aligned}\right.$$

qui ont été trouvées déjà par M. Catalan ([1]), et qui sont vraies pour toutes les valeurs de n entières et supérieures à zéro.

La seconde de ces formules nous montre que, pour toutes ces mêmes valeurs de n, le nombre A_{2n+1} est divisible par 2^n. C'est une propriété fort curieuse du nombre A_{2n+1}. Il s'ensuit que le nombre des permutations alternées de $2n+1$ éléments distincts est toujours divisible par 2^{n+1}.

23. Pour obtenir, entre les nombres A, des relations du premier degré, il suffit de partir des identités

$$\tang x\cos x=\sin x,$$
$$\text{séc}\,x\cos x=1,$$

d'y remplacer chaque ligne trigonométrique par son développement, puis d'égaler dans les deux membres les coefficients des mêmes puissances de x. On trouve ainsi, après quelques transformations très simples, les deux formules

$$(\eta)\quad C_{2n+1}^{0}A_{2n+1}-C_{2n+1}^{2}A_{2n-1}+C_{2n+1}^{4}A_{2n-3}-\ldots\pm C_{2n+1}^{2n}A_1=(-1)^n,$$

$$(\theta)\quad C_{2n}^{0}A_{2n}-C_{2n}^{2}A_{2n-2}+C_{2n}^{4}A_{2n-4}-\ldots\pm C_{2n}^{2n}A_0=0.$$

([1]) *Loc. cit.*

La première de ces deux formules montre immédiatement que, quand $2n+1$ est un nombre premier, $A_{2n+1} - (-1)^n$ est divisible par ce nombre. C'est là une propriété remarquable des coefficients du développement de $\tang x$.

24. On peut encore obtenir deux relations du premier degré en considérant les deux identités

$$(1+\cos 2x)\,\text{séc}^2 x = 2,$$
$$(1+\cos 2x)\,\text{séc}\,x\,\text{tang}\,x = 2\sin x,$$

et utilisant les développements obtenus plus haut (**14**) pour $\text{séc}^2 x$ et pour $\text{séc}\,x\,\text{tang}\,x$. On trouve ainsi

$$(\iota)\quad C^0_{2n}A_{2n+1} - 2C^2_{2n}A_{2n-1} + 2^3C^4_{2n}A_{2n-3} - \ldots \pm 2^{2n-1}C^{2n}_{2n}A_1 = 0,$$
$$(\varkappa)\quad C^0_{2n-1}A_{2n} - 2C^2_{2n-1}A_{2n-2} + 2^3C^4_{2n-1}A_{2n-4} - \ldots \pm 2^{2n-3}C^{2n-2}_{2n-1} = (-1)^{n-1}.$$

25. Dans chacune des relations du premier degré qui précèdent, les indices des nombres A sont tous de même espèce : tous pairs ou tous impairs. On peut obtenir facilement l'expression de A_{2n+1} en fonction des A précédents d'indices pairs, et aussi celle de A_{2n} en fonction des A précédents d'indices impairs.

Considérons, en premier lieu, l'identité

$$\text{tang}\,x = \text{séc}\,x\sin x,$$

remplaçons-y chaque ligne trigonométrique par son développement, et identifions les résultats Nous trouvons

$$(\lambda)\quad A_{2n+1} = C^1_{2n+1}A_{2n} - C^3_{2n+1}A_{2n-2} + C^5_{2n+1}A_{2n-4} - \ldots \pm C^{2n+1}_{2n+1}A_0.$$

Considérons, en second lieu, l'identité

$$\text{séc}\,x\,\text{tang}\,x = \text{séc}^2 x\sin x,$$

et identifions encore les résultats qu'on obtient en remplaçant par son développement chacune des quantités sécx tang$x$, séc$^2 x$ et sin$x$. Nous arrivons à cette nouvelle formule,

$$(\mu)\quad A_{2n} = C^1_{2n-1} A_{2n-1} - C^3_{2n-1} A_{2n-3} + C^5_{2n-1} A_{2n-5} - \ldots \pm C^{2n-1}_{2n-1} A_1.$$

26. Enfin on peut obtenir une relation du premier degré où figurent tous les indices consécutifs n, $n-1$, $n-2$, ... En partant, en effet, de l'identité

$$\text{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2},$$

on parvient à l'égalité

$$(\nu)\quad \left\{ \begin{aligned} &2^n C^0_n A_n - 2^{n-1} C^1_n A_{n-1} - 2^{n-2} C^2_n A_{n-2} \\ &\quad + 2^{n-3} C^3_n A_{n-3} + \ldots \pm C^n_n A_0 = (-1)^p, \end{aligned} \right.$$

p étant la partie entière de la fraction $\frac{n}{2}$.

27. Toutes les formules qui précèdent peuvent être employées au calcul de proche en proche des nombres A, mais elles ne sont pas toutes également commodes.

Parmi celles du second degré, les plus commodes sont les formules (γ) et (δ). Elles permettent chacune de calculer les nombres A environ deux fois plus vite que par la formule fondamentale (α). Elles offrent cet avantage évident de ne présenter à leurs seconds membres ni signes $-$, ni dénominateurs. On leur peut reprocher d'exiger, pour chacun de leurs termes, deux multiplications.

Parmi les formules du premier degré, les plus commodes sont les formules (η), (θ), (λ), (μ). Elles ont le défaut de contenir des signes $-$, mais leurs seconds membres sont exempts de dénominateurs, et chacun de leurs termes n'exige qu'une seule multiplication.

On peut comparer enfin les degrés de commodité des formules (γ) et (δ) d'une part, et des formules (η), (θ), (λ) et (μ) de l'autre. Le raisonnement semble insuffisant pour décider lesquelles sont les plus avantageuses. Je pencherais néanmoins pour les formules (γ) et (δ), qui sont du second degré, mais où les calculs s'effectuent sur des nombres plus petits.

28. Les formules qui précèdent se déduisent toutes d'identités relatives aux deux fonctions sécx et tang$x$. En considérant les identités analogues relatives à cosécx et à cot$x$, on obtiendrait d'autres formules, en général beaucoup moins simples que les précédentes.

Ces nouvelles formules d'ailleurs, de même que celles qui précèdent, pourraient servir à leur tour de points de départ pour de nouvelles recherches. Les nombres A sont liés, en effet, les uns aux nombres de Bernoulli, les autres à ceux d'Euler. A chaque relation entre les nombres A correspond donc une relation entre ces divers autres nombres, laquelle évidemment peut servir à les calculer.