JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HERMITE

Sur une formule d'Euler

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 5-18.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur une formule d'Euler,

PAR M. HERMITE.

Une Lettre de M. Fuss, publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Darboux (mai 1879, p. 226), contient sur l'intégrale $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}dx$ un résultat obtenu par Euler et qui est bien digne de remarque. Il consiste dans la réduction de cette quantité à l'intégrale d'une fonction rationnelle au moyen de la substitution

$$y = \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-p^2}}{p\sqrt{2}},$$

et c'est, je crois, le seul exemple qui ait été donné d'une telle transformation pour une expression dépendant des intégrales elliptiques.

Je me suis proposé, en étudiant ce résultat d'Euler, de reconnaître s'il tient à la valeur particulière du module propre à l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, ou si, étant d'une nature plus générale, il ne mettrait point sur la trace d'une catégorie de formules $\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}$ réductibles par une substitution algébrique à l'intégrale des fonctions rationnelles. C'est en effet ce qui a lieu, comme on va le voir par l'analyse suivante, qui est très facile.

I. Je rattacherai d'abord la forme analytique de la substitution d'Euler à la relation

$$p = \frac{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}{x\sqrt{2}},$$

d'où se tire l'équation

$$Ax^4+2(B-p^2)x^2+C=0,$$

puis la valeur

$$x^2 = \frac{p^2-B+\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC}}{A},$$

et enfin, par l'application des formules connues,

$$x = \frac{\sqrt{p^2-B+\sqrt{AC}}+\sqrt{p^2-B-\sqrt{AC}}}{\sqrt{2A}}.$$

On voit en effet que, en prenant $Ax^4+2Bx^2+C=x^4+1$, il suffit de changer p en $\frac{1}{p}$ pour obtenir l'expression

$$x = \frac{\sqrt{p^2+1}+\sqrt{p^2-1}}{p\sqrt{2}}.$$

Je remarque ensuite que dans l'équation du second degré en x^2, le produit des racines étant $\frac{C}{A}$, on a en même temps

$$x^2 = \frac{p^2-B+\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC}}{A},$$

et

$$\frac{C}{Ax^2} = \frac{p^2-B-\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC}}{A}.$$

Par conséquent, toute fonction rationnelle $f(x^2)$ telle qu'on ait

$$f(x^2)=f\left(\frac{C}{Ax^2}\right)$$

s'exprimera rationnellement au moyen de la variable p, et, si l'on remplace cette condition par la suivante,

$$f(x^2)=-f\left(\frac{C}{Ax^2}\right),$$

on aura

$$f(x^2)=\varphi(p)\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC},$$

$\varphi(p)$ étant encore rationnelle en p. Ainsi nous trouverons, par exemple,

$$Ax^2-\frac{C}{x^2}=2\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC},$$

de sorte que, la différentiation de l'équation

$$p=\frac{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}{x\sqrt{2}},$$

donnant

$$\frac{dp}{dx}=\frac{Ax^4-C}{x^2\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}\sqrt{2}},$$

nous pourrons écrire

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC}}{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}},$$

ou bien

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dp}{\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC}}.$$

Maintenant, il suffit de multiplier membre à membre avec l'équation

$$f(x^2)=\varphi(p)\sqrt{p^4-2Bp^2+B^2-AC}$$

pour obtenir

$$\frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{Ax^4+2Bx^2+C}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi(p)dp.$$

L'intégrale $\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{Ax^4 + 2Bx^2 + C}}$, où $f(x^2)$ est telle qu'on ait

$$f(x^2) = -f\left(\frac{C}{Ax^2}\right),$$

est donc ramenée par la substitution considérée à celle des fonctions rationnelles. En particulier, on aura

$$\int \frac{x^4+1}{(x^4-1)\sqrt{x^4+1}}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int p^2\,dp = -\frac{p^3}{3\sqrt{2}},$$

c'est-à-dire la formule d'Euler.

II. La méthode d'intégration des fonctions doublement périodiques qu'on tire de la décomposition en éléments simples de ces fonctions conduit par une autre voie au résultat que nous venons d'obtenir.

Supposons, en effet,

$$Ax^4 + 2Bx^2 + C = (1 - x^2)(1 - k^2x^2),$$

et soient $x = \operatorname{sn}\xi$, puis $f(x^2) = F(\xi)$, de sorte qu'on ait

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int F(\xi)\,d\xi.$$

La condition que doit vérifier $f(x^2)$ devenant

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),$$

on voit que a fonction $F(\xi)$, qui a pour périodes $2K$ et $2iK'$, satisfait à l'égalité

$$F(\xi + iK') = -F(\xi).$$

Cela étant, je dis qu'à l'égard d'une telle fonction on peut prendre pour élément simple la quantité $D_\xi \log \operatorname{sn}\xi = \frac{\operatorname{cn}\xi \operatorname{dn}\xi}{\operatorname{sn}\xi}$.

Nous avons d'abord

$$\begin{aligned}
D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi + 2K) &= + D_\xi \log \operatorname{sn} \xi,\\
D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi + iK') &= - D_\xi \log \operatorname{sn} \xi,
\end{aligned}$$

et il est aisé de voir qu'à l'intérieur d'un rectangle renfermant l'origine des coordonnées, et dont les côtés parallèles aux axes des abscisses et ordonnées sont $2K$ et K', il n'existe que le seul pôle $\xi = 0$. Tous les pôles de la fonction, étant, en effet, les racines des équations $H(\xi) = 0$, $\Theta(\xi) = 0$, ont pour expressions

$$\begin{aligned}
\xi &= 2mK + 2m'iK',\\
\xi &= 2mK + (2m'+1)iK'.
\end{aligned}$$

Or il est clair que, pour les valeurs entières de m et m', ces formules, à l'exception du pôle $\xi = 0$, représentent des points extérieurs au rectangle. Cela étant, il suffit, en raisonnant comme je l'ai déjà fait ailleurs, d'égaler à zéro la somme des résidus de la fonction doublement périodique

$$F(z) D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi - z),$$

dont les périodes sont $2K$ et iK', pour arriver à la formule suivante :

$$\begin{aligned}
F(\xi) = \Sigma[A D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi - a) + A_1 D_\xi^2 \log \operatorname{sn}(\xi - a) + \ldots\\
+ A_n D_\xi^{n+1} \log \operatorname{sn}(\xi - a)].
\end{aligned}$$

Le signe Σ se rapporte à tous les pôles de la fonction $F(\xi)$ qui sont à l'intérieur du rectangle considéré, et l'on suppose, pour l'un quelconque de ces pôles, $\xi = a$, la relation

$$F(a + \varepsilon) = A \frac{1}{\varepsilon} + A_1 D_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} + \ldots + A_n D_\varepsilon^n \frac{1}{\varepsilon},$$

en se bornant à la partie principale du développement.

Cette expression de $F(\xi)$ donne immédiatement

$$\begin{aligned}
\int F(\xi) d\xi = \Sigma[A \log \operatorname{sn}(\xi - a) + A_1 D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi - a) + \ldots\\
+ A_n D_n \log \operatorname{sn}(\xi - a)],
\end{aligned}$$

et il est aisé de voir que, dans le cas spécial auquel nous avons été amené, où l'on a $F(\xi) = f(\mathrm{sn}^2\xi)$ et par conséquent $F(-\xi) = F(\xi)$, les quantités placées sous les signes logarithmiques, ainsi que les autres termes du second membre, s'expriment rationnellement par la variable $p = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x\sqrt{2}}$ ou bien $p = \frac{\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi}{\mathrm{sn}\,\xi}$, en mettant $\frac{1}{\sqrt{2}}p$ au lieu de p. En effet, l'intégrale étant une fonction impaire, nous pouvons écrire, en changeant ξ en $-\xi$,

$$-\int F(\xi)d\xi = \Sigma[A \log \mathrm{sn}(\xi + a) - A_1 D_\xi \log \mathrm{sn}(\xi + a) + \ldots \\ \pm A_n D_\xi^n \log \mathrm{sn}(\xi + a)],$$

et cette équation, retranchée de la précédente, donne

$$\begin{aligned} 2\int F(\xi)d\xi = \; & \Sigma A \log \frac{\mathrm{sn}(\xi - a)}{\mathrm{sn}(\xi + a)} \\ & + \Sigma A_1 D_\xi \log \mathrm{sn}(\xi - a)\,\mathrm{sn}(\xi + a) \\ & + \Sigma A_2 D_\xi \log \frac{\mathrm{sn}(\xi - a)}{\mathrm{sn}(\xi + a)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dans cette nouvelle formule figurent les dérivées successives d'ordre pair de deux fonctions différentes, $\log \frac{\mathrm{sn}(\xi - a)}{\mathrm{sn}(\xi + a)}$ et $D_\xi \log \mathrm{sn}(\xi - a)\,\mathrm{sn}(\xi + a)$, qui l'une et l'autre d'abord s'expriment comme il suit en p. On a, en effet,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{sn}(\xi - a)}{\mathrm{sn}(\xi + a)} &= \frac{\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a - \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi}{\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a + \mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi} \\ &= \frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a - p\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\;p + \mathrm{sn}\,a}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} D_\xi \log \mathrm{sn}(\xi - a)\,\mathrm{sn}(\xi + a) &= \frac{2\,\mathrm{sn}\,\xi\,\mathrm{cn}\,\xi\,\mathrm{dn}\,\xi(1 - k^2\mathrm{sn}^4 a)}{(1 - k^2\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2\xi)(\mathrm{sn}^2\xi - \mathrm{sn}^2 a)} \\ &= \frac{2(1 - k^2\mathrm{sn}^4 a)}{\mathrm{cn}^2 a\,\mathrm{dn}^2 a - p^2\mathrm{sn}^2 a}. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant qu'en différentiant deux fois une relation de la forme

$$f(\xi) = \varphi(p)$$

on en tire

$$f''(\xi) = \varphi''(p)\left(\frac{dp}{d\xi}\right)^2 + \varphi'(p)\frac{d^2p}{d\xi^2},$$

et qu'on a

$$\frac{dp}{d\xi} = k^2\operatorname{sn}^2\xi - \frac{1}{\operatorname{sn}^2\xi} = \sqrt{(1+k^2+p^2)^2 - 4k^2},$$

$$\frac{d^2p}{d\xi^2} = 2\operatorname{cn}\xi\operatorname{dn}\xi\left(k^2\operatorname{sn}\xi + \frac{1}{\operatorname{sn}^3\xi}\right)$$

$$= 2p\left(k^2\operatorname{sn}^2\xi + \frac{1}{\operatorname{sn}^2\xi}\right) = \frac{2p(1+k^2-p^2)}{k^2};$$

par conséquent, $f''(\xi)$, puis, de proche en proche, toutes les dérivées d'ordre pair, seront des fonctions rationnelles de p. L'intégrale s'exprime donc rationnellement au moyen de cette variable, comme nous avons voulu le montrer.

III. La formule de décomposition en éléments simples qui vient d'être obtenue,

$$\begin{aligned} F(\xi) = \Sigma[&A D_\xi \log\operatorname{sn}(\xi - a) \\ &+ A_1 D_\xi^2 \log\operatorname{sn}(\xi - a) + \ldots + A_n D_\xi^{n+1}\log\operatorname{sn}(\xi - a)], \end{aligned}$$

d'une fonction satisfaisant aux conditions

$$F(\xi + 2K) = +F(\xi),$$
$$F(\xi + iK') = -F(\xi),$$

peut être regardée comme appartenant à la théorie générale des fonctions doublement périodiques. Sous ce point de vue, il est visible qu'elle constitue seulement une des trois formules d'un même système, dans lequel les quantités

$$D_\xi \log\operatorname{sn}\xi,\quad D_\xi \log\operatorname{cn}\xi,\quad D_\xi \log\operatorname{dn}\xi$$

jouent successivement le rôle d'éléments simples. Je vais établir succinctement les deux autres, qui concernent deux nouveaux types de fonctions doublement périodiques, $F_1(\xi)$ et $F_2(\xi)$, caractérisées par les conditions suivantes :

$$F_1(\xi + K + iK') = -F_1(\xi),$$
$$F_1(\xi + K - iK') = -F_1(\xi),$$

puis

$$F_2(\xi + K) = -F_2(\xi),$$
$$F_2(\xi + 2iK') = +F_2(\xi).$$

Elles se lient en effet à l'étude de la substitution d'Euler, qu'elles nous conduiront, comme on le verra, à étendre et généraliser d'une nouvelle manière.

Je me fonderai, à cet effet, sur les équations élémentaires

$$\operatorname{cn}(z + K + iK') = -\frac{ik'}{k}\frac{1}{\operatorname{cn} z},$$
$$\operatorname{cn}(z + K - iK') = +\frac{ik'}{k}\frac{1}{\operatorname{cn} z}$$

et

$$\operatorname{dn}(z + K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} z},$$
$$\operatorname{dn}(z + 2iK') = -\operatorname{dn} z,$$

qui conduisent aux formules suivantes :

$$D_z \log \operatorname{cn}(z + K + iK') = -D_z \log \operatorname{cn} z,$$
$$D_z \log \operatorname{cn}(z + K - iK') = -D_z \log \operatorname{cn} z,$$

puis

$$D_z \log \operatorname{dn}(z + K) = -D_z \log \operatorname{dn} z,$$
$$D_z \log \operatorname{dn}(z + 2iK') = +D_z \log \operatorname{dn} z.$$

Cela posé, j'observe d'abord, à l'égard de la quantité

$$D_z \log \operatorname{cn}(z + K) = -\frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{sn} z \operatorname{dn} z},$$

que les pôles donnés par les racines des équations

$$H(z) = 0, \quad \Theta_1(z) = 0$$

sont

$$z = 2mK + 2m'iK',$$
$$z = (2m+1)K + (2m'+1)iK'.$$

Je remarque aussi que le parallélogramme ou plutôt le losange dont les sommets, ayant pour affixes

$$0,\ K - iK',\ 2K,\ K + iK',$$

sont par conséquent tous des pôles ne renferme à son intérieur aucun autre de ces points. Cela posé, qu'on déplace ce losange de manière à lui faire contenir l'origine des coordonnées, les trois autres pôles, qui étaient des sommets, se trouveront en dehors de la figure, et l'on voit qu'à l'intérieur du losange la fonction $D_z \log \operatorname{cn}(z+K)$ a un seul et unique pôle $z=0$. On verra aussi, relativement à la quantité $D_z \log \operatorname{dn}(z+K+iK')$, qu'elle n'a pareillement que le pôle $z=0$ à l'intérieur d'un rectangle contenant l'origine et dont les côtés parallèles aux axes coordonnés sont K et $2K'$. Cela établi, nous formerons ces deux expressions

$$F_1(z) D_\xi \log \operatorname{cn}(\xi + K - z),$$
$$F_2(z) D_\xi \log \operatorname{dn}(\xi + K + iK' - z),$$

qui sont doublement périodiques, la première ayant pour périodes $K+iK'$, $K-iK'$, et la seconde K et $2iK'$.

En égalant à zéro la somme de leurs résidus correspondant aux pôles qu'elles possèdent, la première à l'intérieur du losange, la seconde à l'intérieur du rectangle des périodes, on parvient aux formules suivantes, où l'on a mis dans les premiers membres $\xi - K$ et $\xi - K - iK'$ au lieu de ξ, à savoir :

$$\begin{aligned} F_1(\xi - K) = \Sigma[&A' D_\xi \log \operatorname{cn}(\xi - a) + A'_1 D_\xi^2 \log \operatorname{cn}(\xi - a) + \ldots \\ &+ A'_n D_\xi^{n+1} \log \operatorname{cn}(\xi - a)], \\ F_2(\xi - K - iK') = \Sigma[&A'' D_\xi \log \operatorname{dn}(\xi - a) + A''_1 D_\xi^2 \log \operatorname{dn}(\xi - a) + \ldots \\ &+ A''_n D_\xi^{n+1} \log \operatorname{dn}(\xi - a)]. \end{aligned}$$

Dans ces relations, on a continué de désigner par $\xi = a$ l'un quelconque des pôles des deux fonctions; on a supposé encore

$$F_1(a+\varepsilon) = A'\frac{1}{\varepsilon} + A'_1 D_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} + \ldots + A'_n D_\varepsilon^n \frac{1}{\varepsilon},$$

et de même

$$F_2(a+\varepsilon) = A''\frac{1}{\varepsilon} + A''_1 D_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} + \ldots + A''_n D_\varepsilon^n \frac{1}{\varepsilon},$$

en se bornant à la partie principale des développements. Elles s'écriraient plus simplement en représentant les pôles de $F_1(\xi)$ par $a+K$ et ceux de $F_2(\xi)$ par $a+K+iK'$; nous aurions, en effet,

$$\begin{aligned} F_1(\xi) = \Sigma[A' D_\xi \log \operatorname{cn}(\xi - a) + A'_1 D_\xi^2 \log \operatorname{cn}(\xi - a) + \ldots \\ + A'_n D_\xi^{n+1} \log \operatorname{cn}(\xi - a)], \\ F_2(\xi) = \Sigma[A'' D_\xi \log \operatorname{dn}(\xi - a) + A''_1 D_\xi^2 \log \operatorname{dn}(\xi - a) + \ldots \\ + A''_n D_\xi^{n+1} \log \operatorname{dn}(\xi - a)]. \end{aligned}$$

On en déduit, en intégrant par rapport à ξ,

$$\begin{aligned} \int F_1(\xi)d\xi = \Sigma[A' \log \operatorname{cn}(\xi - a) + A'_1 D_\xi \log \operatorname{cn}(\xi - a) + \ldots \\ + A'_n D_\xi^n \log \operatorname{cn}(\xi - a)], \\ \int F_2(\xi)d\xi = \Sigma[A'' \log \operatorname{dn}(\xi - a) + A''_1 D_\xi \log \operatorname{dn}(\xi - a) + \ldots \\ + A''_n D_\xi^n \log \operatorname{dn}(\xi - a)], \end{aligned}$$

et de ces expressions nous allons tirer des conséquences analogues à celles que nous a données la formule

$$\begin{aligned} \int F(\xi)d\xi = \Sigma[A \log \operatorname{sn}(\xi - a) + A_1 D_\xi \log \operatorname{sn}(\xi - a) + \ldots \\ + A_n D_\xi^n \log \operatorname{sn}(\xi - a)]. \end{aligned}$$

IV. Introduisant, à cet effet, les conditions

$$F_1(-\xi) = F_1(\xi),$$
$$F_2(-\xi) = F_2(\xi),$$

et posant successivement

$$p = \frac{\operatorname{sn}\xi \operatorname{dn}\xi}{\operatorname{cn}\xi},$$
$$p = \frac{\operatorname{sn}\xi \operatorname{cn}\xi}{\operatorname{dn}\xi},$$

on démontrera exactement, comme au § II, que les quantités placées sous les logarithmes, ainsi que les autres termes des seconds membres, s'expriment rationnellement au moyen des variables p. Soit donc, comme nous l'avons fait en commençant,

$$x = \operatorname{sn}\xi;$$

posons également

$$F_1(\xi) = f_1(x^2),$$
$$F_2(\xi) = f_2(x^2),$$

où f_1 et f_2 sont des fonctions rationnelles de x^2, de sorte qu'on ait

$$\int F_1(\xi)d\xi = \int \frac{f_1(x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx,$$
$$\int F_2(\xi)d\xi = \int \frac{f_2(x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx.$$

Nous nous trouvons amené à cette conséquence que les substitutions

$$p = \frac{\operatorname{sn}\xi \operatorname{dn}\xi}{\operatorname{cn}\xi} = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$p = \frac{\operatorname{sn}\xi \operatorname{cn}\xi}{\operatorname{dn}\xi} = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

ramènent ces intégrales à celles des fonctions rationnelles en p.

C'est ce que nous allons démontrer directement, mais auparavant nous tirerons des caractéristiques relatives à la périodicité de $F_1(\xi)$ et $F_2(\xi)$ les propriétés algébriques correspondantes des fonctions $f_1(x^2)$ et $f_2(x^2)$.

Recourant, à cet effet, aux formules

$$\operatorname{sn}(\xi + K + iK') = \frac{\operatorname{dn}\xi}{k\operatorname{cn}\xi},$$
$$\operatorname{sn}(\xi + K) = \frac{\operatorname{cn}\xi}{\operatorname{dn}\xi},$$

qui donnent

$$\operatorname{sn}^2(\xi + K + iK') = \frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)},$$
$$\operatorname{sn}^2(\xi + K) = \frac{1-x^2}{1-k^2x^2},$$

nous en concluons les deux équations

$$f_1(x^2) = -f_1\left[\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right],$$
$$f_2(x^2) = -f_2\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right).$$

Considérant maintenant, pour fixer les idées, la seule intégrale $\int \frac{f_1(x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,dx$, je tire d'abord de la substitution qui la concerne l'équation

$$k^2x^4 - (p^2+1)x^2 + p^2 = 0,$$

d'où la formule

$$x^2 = \frac{p^2+1+\sqrt{p^4-2(2k^2-1)p^2+1}}{2k^2}.$$

Je remarque ensuite que, la seconde racine étant $\frac{p^2}{k^2x^2}$ ou bien $\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}$, nous pouvons écrire

$$\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)} = \frac{p^2+1-\sqrt{p^4-2(2k^2-1)p^2+1}}{2k^2}.$$

De la propriété de la fonction $f_1(x^2)$ résulte donc qu'elle prend des valeurs égales et de signes contraires lorsqu'on y remplace x^2 par ces deux expressions, de sorte qu'on peut poser

$$f_1(x^2) = \varphi(p)\sqrt{p^4-2(2k^2-1)p^2+1},$$

en désignant par $\varphi(p)$ une fonction rationnelle de p. En multipliant membre à membre avec l'équation suivante,

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\frac{dp}{\sqrt{p^4-2(2k^2-1)p^2+1}},$$

qui se trouve facilement, on obtient, après avoir intégré les deux membres,

$$\int \frac{f_1(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = -\int \varphi(p)\,dp.$$

La proposition que nous voulions établir se trouve ainsi démontrée, et il est évident que la seconde intégrale $\int \frac{f_2(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ conduirait exactement au même calcul. En résumé, on voit que les trois quantités

$$\int \frac{f(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{f_1(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int \frac{f_2(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où les fonctions rationnelles f, f_1, f_2 satisfont aux conditions

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),$$
$$f_1(x^2) = -f_1\left[\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right],$$
$$f_2(x^2) = -f_2\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right).$$

se ramènent, si l'on fait successivement

$$p = \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{x},$$
$$p = \frac{x\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$p = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-k^2x^2}},$$

à l'intégration des fonctions rationnelles; et comme on tire de ces relations

$$x = \frac{\sqrt{p^2+(k+1)^2}+\sqrt{p^2+(k-1)^2}}{2k},$$
$$x = \frac{\sqrt{p^2+2kp+1}+\sqrt{p^2-2kp+1}}{2k},$$
$$x = \frac{\sqrt{k^2p^2+2p+1}+\sqrt{k^2p^2-2p+1}}{2},$$

nous voyons aussi que le type analytique de la substitution qu'Euler a découverte et appliquée à l'intégrale particulière $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx$ se conserve en ne subissant qu'une modification légère pour s'appliquer à des cas plus généraux et plus étendus.

V. Les formules de décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques désignées par $F(\xi)$, $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ sont susceptibles de beaucoup d'applications. Si l'on désigne par m un nombre entier, on verra facilement qu'on peut faire

$$\begin{aligned}
F\,(\xi) &= \operatorname{cn}(4m+2)\xi, \quad \operatorname{dn}(4m+2)\xi,\\
F_1(\xi) &= \operatorname{sn}(4m+2)\xi, \quad \operatorname{dn}(4m+2)\xi,\\
F_2(\xi) &= \operatorname{sn}(4m+2)\xi, \quad \operatorname{cn}(4m+2)\xi,
\end{aligned}$$

et l'on observera que la même quantité, $\operatorname{sn}(4m+2)\xi$ par exemple, possède à la fois la périodicité de $F_2(\xi)$ et $F_3(\xi)$. Je n'entrerai point maintenant dans le détail de ces applications et je terminerai cette étude par la remarque suivante. La transformation $p = \frac{\operatorname{cn}\xi \operatorname{dn}\xi}{\operatorname{sn}\xi}$, qui ramène à l'intégrale des fonctions rationnelles, $\int F(\xi)\,d\xi$, ne contenant rien qui se rapporte à la fonction $F(\xi)$, sera donc la même par exemple pour les deux quantités $\int \operatorname{cn} 2\xi\, d\xi$ et $\int \operatorname{dn} 2\xi\, d\xi$. Or, elles deviennent $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1-k^2z^2}}$ et $\frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ si l'on fait $\operatorname{sn} 2\xi = z$; par conséquent, on ramènera à la fois ces deux intégrales à celles des fonctions rationnelles en exprimant z au moyen de la variable p. On trouve facilement

$$z = \frac{2p}{\sqrt{p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2}},$$

puis ces relations

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-z^2} &= \frac{p^2-1+k^2}{\sqrt{p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2}},\\
\sqrt{1-k^2z^2} &= \frac{p^2+1-k^2}{\sqrt{p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2}},\\
dz &= 2\frac{(1-k^2)^2-p^4}{[p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2]^{\frac{3}{2}}}\,dp,
\end{aligned}$$

et l'on en tire bien les réductions annoncées :

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{\sqrt{1-k^2z^2}} &= -2\int \frac{p^2-1+k^2}{p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2}\,dp,\\
\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} &= -2\int \frac{p^2+1-k^2}{p^4+2(1+k^2)p^2+(1-k^2)^2}\,dp.
\end{aligned}$$