JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

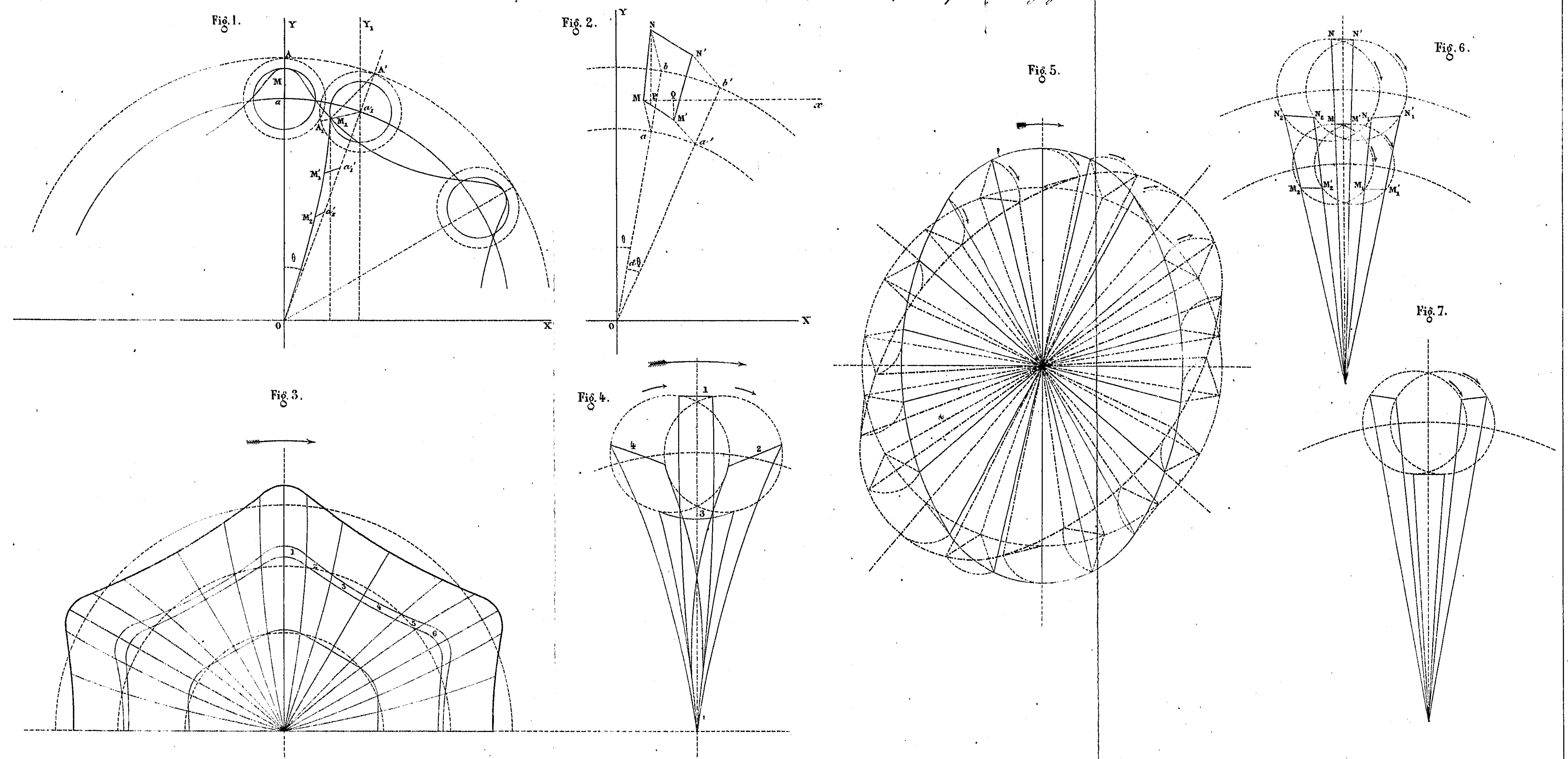
GUYOU

Cinématique et Dynamique des ondes courantes sur un sphéroïde liquide. Application à l'évolution de la protubérance autour d'un sphéroïde liquide déformé par l'attraction d'un astre éloigné

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 5 (1879), p. 69-106.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1879_3_5__69_0>

Cinématique et Dynamique des ondes courantes sur un sphéroïde liquide, par M. Guyou.



Gravé par P. Méa.

Gauthier-Villars, Éditeur, Paris.

Imp. P. Méa, r. des Fés St Bernard, 14, Paris.

Cinématique et Dynamique des ondes courantes sur un sphéroïde liquide. Application à l'évolution de la protubérance autour d'un sphéroïde liquide déformé par l'attraction d'un astre éloigné ;

PAR M. GUYOU,

Lieutenant de vaisseau.

Équations des épicycloïdes.

Considérons (*Pl. I, fig.* 1) l'épicycloïde engendrée par le point M quand ce point est supposé invariablement lié au cercle aA qui roule intérieurement sur le cercle OA; nous appellerons, suivant l'usage, le cercle aA *cercle roulant* ou *roulette*, le cercle OA cercle *base de la roulette*, et enfin nous donnerons à la circonférence décrite par le centre de la roulette le nom de circonférence *guide*.

Nous poserons

$$aA = \rho,$$
$$OA = \rho',$$
$$Oa = \rho' - \rho = R.$$

Si nous prenons pour axes de coordonnées les deux axes rectangulaires dont l'origine est en O et dont l'axe des Y est dirigé suivant le rayon Oa à l'instant où le point M se trouve sur cette direction et entre les deux circonférences R et ρ', nous aurons, en appelant θ l'angle AOA',

$$X = R\sin\theta - r\sin Y_1 a_1 A_1,$$
$$Y = R\cos\theta + r\cos Y_1 a_1 A_1,$$

et, comme $Y_1 a_1 A_1 = \frac{\rho'-\rho}{\rho}\theta = \frac{R}{\rho}\theta$, il vient

$$(1)\qquad \begin{cases} X = R\sin\theta - r\sin\frac{R}{\rho}\theta, \\ Y = R\cos\theta + r\cos\frac{R}{\rho}\theta, \end{cases}$$

et enfin, en posant $\frac{R}{\rho} = n$,

$$(2)\qquad \begin{cases} X = R\sin\theta - r\sin n\theta, \\ Y = R\cos\theta + r\cos n\theta. \end{cases}$$

Suivant les valeurs de n et de r pour une même circonférence guide, les épicycloïdes affecteront des formes diverses. Si n est un nombre entier, la courbe se composera d'une seule orbe sinueuse ondulant autour de la *circonférence guide;* si n est un nombre fractionnaire de la forme $\frac{p}{q}$, p et q étant premiers entre eux, le point M serpentera autour de la circonférence guide et ne repassera par les mêmes positions que lorsque le cercle roulant aura accompli q révolutions.

Enfin, dans le cas particulier de $n = 1$, on voit aisément que l'épicycloïde prend la forme d'une ellipse dont le grand axe est vertical et dont les axes sont

$$R + r \quad \text{et} \quad R - r.$$

Nous nous bornerons aux cas dans lesquels n est un nombre entier.

Tangentes et normales. — On sait que la normale à la courbe, à chaque point M_1, est dirigée suivant la ligne qui joint le point considéré au point de contact du cercle roulant avec le cercle base, c'est-à-dire suivant $M_1 A'$.

Les crêtes de la courbe seront situées sur les rayons vecteurs émanant du centre O qui feront avec l'axe OY des angles θ tels que l'on ait

$$A' a_1 M_1 = 2K\pi,$$

ou

$$\theta(n+1) = 2K\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{2K\pi}{(n+1)},$$

K étant un nombre quelconque; et les creux seront dans des positions telles que

$$A'a_1M_1 = K\pi \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{K}{(n+1)}\pi,$$

K étant un nombre impair quelconque. Si nous faisons dans cette formule $K = 1$, nous aurons la demi-amplitude angulaire de chaque onde, et, en appelant cette quantité Θ, on aura

$$(3) \qquad \Theta = \frac{\pi}{n+1}.$$

Le nombre des ondes sera égal à $\frac{2\pi}{2\Theta}$ ou $(n+1)$.

Le nombre des ondes de la courbe ne dépend que du paramètre n; on voit par suite que, si, conservant invariables le cercle guide, de rayon R, et le paramètre n, on fait varier la distance r du point traceur au centre de la roulette, on obtiendra une série de courbes analogues, présentant le même nombre de sinuosités et ayant leurs crêtes et leurs creux sur les mêmes rayons de la circonférence guide.

Si r est nul, la courbe se confond avec le cercle, et, si r augmente, les crêtes et les creux se dessineront de plus en plus, les courbures des crêtes seront plus accusées que celles des creux, et si r devenait égal à ρ, chaque crête présenterait un point de rebroussement; enfin, si r croissait encore, la courbe présenterait une boucle à chaque crête.

Nous ne nous occuperons que des cas dans lesquels r est plus petit que ρ, c'est-à-dire des courbes auxquelles on a donné le nom d'*épicycloïdes accourcies intérieures* ou, plus simplement, d'*hypocycloïdes accourcies*.

Cinématique des ondes hypocycloïdales.

Centres et rayons orbitaires des différents points d'une hypocycloïde donnée. — Considérons l'hypocycloïde définie par les paramètres R, r et n, n étant un nombre entier quelconque et $r < \rho$ ou $r < \frac{R}{n}$, et appelons *centre orbitaire* d'un point M_1 quelconque de la courbe le point a_1 du cercle guide où se trouverait le centre de la roulette à laquelle serait lié le point M qui décrirait la courbe considérée, et *rayon orbitaire* le rayon $a_1 M_1$.

Imaginons que chacun des points de l'hypocycloïde envisagée soit relié par une tige invariable de longueur à son centre orbitaire, et que, chaque centre orbitaire restant immobile, tous les points de la courbe se mettent à tourner uniformément autour de leurs centres respectifs avec la même vitesse angulaire ε.

Si nous supposons, pour fixer les idées, que ce mouvement ait lieu de gauche à droite, et que nous prenions pour origine du temps l'instant où la courbe avait pour équations les équations (2), on voit aisément que la position du point dont le centre orbitaire est défini par l'angle θ sera donnée à l'instant t par les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} X = R\sin\theta - r\sin(n\theta - \varepsilon t), \\ Y = R\cos\theta + r\cos(n\theta - \varepsilon t). \end{cases}$$

Il est facile de voir qu'à cet instant, bien que chacun des points ait changé de position, la courbe qui en est le lieu géométrique a conservé sa forme.

Considérons en effet le point qui, à l'origine du mouvement, se trouvait en une position M_1 telle que $A'a_1M_1 = \varepsilon t$; le centre orbitaire a_1 de ce point était situé dans une direction θ_1, telle que

$$(n+1)\theta_1 = \varepsilon t \quad \text{ou} \quad \theta_1 = \frac{\varepsilon}{(n+1)}t;$$

à l'instant t, ce point se trouvera sur la direction Oa_1 et sur le prolongement de ce rayon.

Prenons l'équation de la courbe par rapport à de nouveaux axes ayant même origine, mais dont l'axe OY' est dirigé suivant Oa_1; on aura, en prenant les formules connues de transformation,

$$X' = X\cos\theta_1 - Y\sin\theta_1,$$
$$Y' = Y\cos\theta_1 + X\sin\theta_1,$$

et, en remplaçant dans ces formules X et Y par les valeurs (4),

$$X' = R\sin\theta\cos\theta_1 - r\sin(n\theta - \varepsilon t)\cos\theta_1 - R\cos\theta\sin\theta_1 - r\cos(n\theta - \varepsilon t)\sin\theta_1,$$
$$Y' = R\cos\theta\cos\theta_1 + r\cos(n\theta - \varepsilon t)\cos\theta_1 + R\sin\theta\sin\theta_1 - r\sin(n\theta - \varepsilon t)\sin\theta_1,$$

ou

$$X' = R\sin(\theta - \theta_1) - r\sin(n\theta - \varepsilon t + \theta_1),$$
$$Y' = R\cos(\theta - \theta_1) + r\cos(n\theta - \varepsilon t + \theta_1);$$

et si, comme précédemment, nous appelons θ' l'angle formé avec le nouvel axe des Y' par la direction dans laquelle se trouve le centre orbitaire qui était défini par θ par rapport aux anciens axes, nous aurons

$$\theta - \theta_1 = \theta' \quad \text{et} \quad n\theta - \varepsilon t + \frac{\varepsilon t}{n+1} = n\theta - n\frac{\varepsilon t}{n+1} \quad \text{ou} \quad n\theta',$$

et les équations précédentes deviendront

$$X' = R\sin\theta' - r\sin n\theta',$$
$$Y' = R\cos\theta' + r\cos n\theta'.$$

Ces équations sont identiques aux premières.

On voit, par suite, qu'aux yeux d'un observateur qui serait assez rapproché de la figure pour pouvoir suivre de l'œil les différents points dans leurs mouvements, ces mouvements auraient les caractères de mouvements oscillatoires desquels résulteraient à chaque instant et en chaque point des déformations périodiques de la courbe; et au contraire, aux yeux d'un observateur suffisamment éloigné pour ne plus pouvoir distinguer les points les uns des autres et pour apercevoir nettement la forme de la courbe sur laquelle ils sont répartis, cette courbe semblerait tourner tout d'une pièce vers la droite avec une vitesse angulaire uniforme égale à $\frac{\varepsilon}{n+1}$ autour de son centre.

Si nous imaginions enfin qu'on rapportât le mouvement dont il s'agit à des axes animés d'une vitesse de rotation égale à $\frac{\varepsilon}{n+1}$, les équations prendraient la forme

$$X = R\sin\frac{\varepsilon}{(n+1)}t - r\sin\frac{n\varepsilon}{(n+1)}t,$$
$$Y = R\cos\frac{\varepsilon}{(n+1)}t + r\cos\frac{n\varepsilon}{(n+1)}t,$$

dans laquelle t représenterait l'intervalle écoulé depuis le moment où le point considéré a franchi la crête correspondant à l'axe des Y.

Et l'on voit qu'un observateur qui serait entraîné par le mouvement de ces axes verrait une courbe sinueuse immobile et de forme invariable sur laquelle s'écouleraient tous les points d'un mouvement continu, et le mouvement prendrait l'aspect d'un *écoulement linéaire permanent*.

On peut remarquer dès maintenant que les vitesses des points sur leur trajectoire permanente varieraient à chaque instant, atteignant leurs maxima dans les creux et leurs minima sur les crêtes, et que, par suite, bien que la série complète des points fasse constamment une ligne continue, la distance de deux points voisins subirait des accourcissements et des allongements périodiques.

Si nous appelons δX et δY les accroissements des coordonnées d'un point M quand on passe au point suivant, défini par l'accroissement δt, c'est-à-dire au point qui a franchi l'axe des Y un intervalle δt avant le premier, les projections de l'arc $\delta\sigma$, qui sépare ces deux points sur la courbe, seront

$$\frac{\delta X}{\delta t}\delta t,\quad \frac{\delta Y}{\delta t}\delta t$$

et

$$\delta\sigma = \delta t\sqrt{\left(\frac{\delta X}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{\delta t}\right)^2}.$$

On aurait de même, en appelant $d\sigma$ l'arc parcouru par le point M dans le temps dt,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \sqrt{\frac{dX^2}{dt} + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2} = v \quad \text{ou} \quad \delta\sigma = v\,\delta t;$$

par suite, l'écartement de deux points infiniment voisins sera toujours proportionnel à la vitesse [*].

Reprenons pour un instant l'hypocycloïde primitive et imaginons

[*] Cette propriété est évidemment indépendante de la forme de la courbe sur laquelle s'effectue le mouvement d'écoulement continu permanent; c'est la traduction, dans le cas des écoulements linéaires, de la loi d'égal débit.

que, dans l'intérieur de l'espace qu'elle enferme sur le plan de la figure, nous tracions une infinité de cercles de rayons décroissants autour du centre O, et que sur chacun d'eux, pris comme cercle guide, nous construisions des hypocycloïdes ayant même nombre d'ondes et ayant leurs crêtes et leurs creux sur les mêmes directions, et admettons que le rayon orbitaire r de chacune de ces hypocycloïdes soit une fonction du rayon R du cercle guide qui lui correspond exprimée par $f(\mathrm{R})$; les équations générales de ces courbes seront de la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{R}\sin\theta - f(\mathrm{R})\sin n\theta, \\ \mathrm{Y} = \mathrm{R}\cos\theta + f(\mathrm{R})\cos n\theta. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que, si l'on fait varier θ de zéro à 2π et R de zéro à l'infini, tous les points du plan de la figure sont donnés par ces équations, et les paramètres R et θ qui définiraient chaque point déterminé par ses coordonnées X et Y seraient donnés par la résolution des équations (5) par rapport à ces deux inconnues.

Imaginons maintenant que, toutes ces hypocycloïdes étant tracées, et les centres orbitaires de chacun de leurs points restant immobiles, tous les points de toutes ces lignes, c'est-à-dire tous les points de la surface enfermée dans l'hypocycloïde extérieure, viennent à tourner d'un mouvement uniforme et avec la même vitesse angulaire ε autour de leurs centres orbitaires respectifs.

D'après ce que nous avons vu plus haut, toutes les hypocycloïdes sembleront tourner ensemble autour de leur centre commun avec une vitesse $\frac{\varepsilon}{n+1}$, et si, comme il nous est toujours permis de le supposer, la fonction $f(\mathrm{R})$ est d'une forme telle que, quelque voisines que soient deux hypocycloïdes correspondant à deux profondeurs R et $\mathrm{R} + d\mathrm{R}$ infiniment voisines, elles ne se coupent pas, aucun point ne sera gêné dans son mouvement par la rencontre d'un autre.

On voit en effet que chacun d'eux restera constamment sur une courbe qui ne rencontrera jamais la courbe voisine.

Mais, bien que ces points ne soient ainsi jamais exposés à se joindre, il arrivera, suivant la forme de la fonction $f(\mathrm{R})$, que les éléments superficiels, dans leurs mouvements, pourront subir des contractions ou des dilatations périodiques analogues à celles que subissent les éléments rectilignes des courbes.

Nous allons chercher la forme que doit affecter cette fonction pour que, malgré leurs déformations perpétuelles, les éléments superficiels conservent la même aire.

Loi d'homogénéité. — Pour cela, considérons (*Pl. I, fig.* 2) les quatre centres orbitaires a, a', b, b' déterminés par les rayons R et $R + dR$ et les directions θ et $\theta + d\theta$; les quatre points M, M′, N, N′ correspondant à ces centres auront pour coordonnées, à l'instant t, les valeurs obtenues en donnant, dans les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} X = R\sin\theta - f(R)\sin(n\theta - \varepsilon t) \\ Y = R\cos\theta + f(R)\cos(n\theta - \varepsilon t), \end{cases}$$

aux paramètres R et θ les valeurs successives suivantes :

Pour M...	R et θ,	Pour N...	$R + dR$ et θ,
Pour M′...	R et $\theta + d\theta$,	Pour N′...	$R + dR$ et $\theta + d\theta$;

et si, par l'un quelconque des quatre points M, M′, N, N′, le point M par exemple, nous menons une parallèle à l'axe des X, et que par les points N et M′ nous menions des parallèles NP et M′Q à l'axe des Y, nous aurons évidemment

$$\overline{NP} = \frac{dY}{dR}dR, \quad \overline{MP} = \frac{dX}{dR}dR, \quad \overline{M'Q} = -\frac{dY}{d\theta}d\theta, \quad \overline{MQ} = \frac{dX}{d\theta}d\theta.$$

D'un autre côté, si nous considérons tous les centres orbitaires compris sur les côtés du petit trapèze $aa'bb'$, les points mobiles correspondant à tous ces centres seront répartis sur quatre lignes enfermant un quadrilatère élémentaire MM′NN′, que nous pourrons regarder comme un parallélogramme si nous imaginons des points a, a', b, b' suffisamment rapprochés.

La surface de cet élément a pour expression

$$\overline{MN}.\overline{MM'}.\sin NMM'$$

ou, si l'on remarque que $\mathrm{NMM}' = \mathrm{NM}x + x\mathrm{MM}'$,

$$\overline{\mathrm{MN}}.\overline{\mathrm{MM}'}, \sin \mathrm{NM}x \cos x\mathrm{MM}' + \overline{\mathrm{MN}}.\overline{\mathrm{MM}'} \sin x\overline{\mathrm{MM}'} \cos \mathrm{NM}x;$$

mais

$$\sin \mathrm{NM}x\,\overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{NP}}, \quad \overline{\mathrm{MN}} \cos \mathrm{NM}x = \overline{\mathrm{MP}},$$
$$\overline{\mathrm{MM}'} \cos x\mathrm{MM}' = \overline{\mathrm{MQ}}, \quad \overline{\mathrm{MM}'} \sin x\mathrm{MM}' = \overline{\mathrm{M'Q}}.$$

L'aire du parallélogramme élémentaire aura donc pour expression

$$\overline{\mathrm{NP}}.\,\overline{\mathrm{MQ}} + \overline{\mathrm{MP}}.\,\overline{\mathrm{M'Q}}$$

ou, en tenant compte des relations que nous venons d'établir,

$$(7) \qquad \left(\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{X}}{d\theta} - \frac{d\mathrm{Y}}{d\theta}\frac{d\mathrm{X}}{d\mathrm{R}}\right) d\theta\, d\mathrm{R}.$$

Chacune des quantités comprises dans cette formule est fonction de R, de θ et de t; on les obtiendra en différentiant les équations (6) par rapport à R et θ et l'on aura

$$\frac{d\mathrm{X}}{d\mathrm{R}} = \sin\theta - f'(\mathrm{R}) \sin(n\theta - \varepsilon t),$$
$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{R}} = \cos\theta + f'(\mathrm{R}) \cos(n\theta - \varepsilon t),$$
$$\frac{d\mathrm{X}}{d\theta} = \mathrm{R}\cos\theta - nf(\mathrm{R}) \cos(n\theta - \varepsilon t),$$
$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\theta} = -\mathrm{R}\sin\theta - nf(\mathrm{R}) \sin(n\theta - \varepsilon t).$$

Les quantités R et θ, dR et $d\theta$, qui définissent le quadrilatère élémentaire considéré, sont invariables pendant le mouvement; il faudra donc que les termes que l'on obtiendrait en effectuant le calcul de la parenthèse de la formule (7), et qui seraient fonctions du temps, disparaissent eux-mêmes.

En se bornant à écrire ces termes, on trouve

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{R}f'(\mathrm{R}) \sin\theta \sin(n\theta - \varepsilon t) - nf(\mathrm{R})f'(\mathrm{R}) \sin^2(n\theta - \varepsilon t)\\
&+ nf(\mathrm{R}) \sin\theta \sin(n\theta - \varepsilon t) - nf(\mathrm{R})f'(\mathrm{R}) \cos^2(n\theta - \varepsilon t)\\
&+ \mathrm{R}f'(\mathrm{R}) \cos\theta \cos(n\theta - \varepsilon t) - nf(\mathrm{R}) \cos\theta \cos(n\theta - \varepsilon t).
\end{aligned}$$

La somme des termes en $\sin^2(n\theta - \varepsilon t)$ et $\cos^2(n\theta - \varepsilon t)$ donne la quantité $-nf(R)f'(R)$ qui est indépendante du temps; les seuls termes fonctions du temps qui entreront dans l'expression de l'aire du quadrilatère élémentaire seront donc, après simplification, réduits à l'expression

$$[Rf'(R) - nf(R)]\,[\cos(n\theta - \varepsilon t)\cos\theta - \sin(n\theta - \varepsilon t)\sin\theta]$$

ou

$$[Rf'(R) - nf(R)]\cos[(n+1)\theta - \varepsilon t].$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'aire du parallélogramme élémentaire soit invariable pendant le mouvement sera donc exprimée par la relation

$$Rf'(R) - nf(R) = 0$$

ou

$$\frac{f'(R)}{f(R)} = \frac{n}{R},$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\log f(R) = n \log R + C.$$

La valeur de la constante arbitraire C se déduira de la grandeur du rayon orbitaire de l'hypocycloïde extérieure; si nous appelons H ce rayon et A le rayon du cercle *guide* de cette hypocycloïde, on aura

$$\log H = n \log A + C, \quad \text{d'où} \quad C = \log H - n \log A.$$

On aura par suite

$$\log f(R) = n.\log R - n.\log A + \log H$$

ou

$$f(R) = H\left(\frac{R}{A}\right)^n,$$

ou autrement

$$r = H\left(\frac{R}{A}\right)^n. \tag{8}$$

Les équations (6) prendront donc la forme

$$(8')\qquad \begin{cases} X = R\sin\theta - H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin(n\theta - \varepsilon t), \\ Y = R\cos\theta + H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos(n\theta - \varepsilon t). \end{cases}$$

Aire du parallélogramme élémentaire. — Si nous introduisons dans l'expression générale de l'aire du parallélogramme élémentaire la condition exprimée par la formule (8), de laquelle résulte la nullité des termes fonction du temps, nous trouverons aisément, en remplaçant les quantités $\frac{dY}{dR}, \frac{dY}{d\theta}, \frac{dX}{dR}, \frac{dX}{d\theta}$ par leurs valeurs,

$$[+ R\sin^2\theta + R\cos^2\theta - nf(R)f'(R)]\,dR\,d\theta$$

ou

$$\left[+ R - nH\left(\frac{R}{A}\right)^n n\frac{H}{A^n}R^{n-1}\right]dR\,d\theta,$$

ou enfin

$$(9)\qquad \left(R - \frac{n^2H^2}{A^{2n}}R^{2n-1}\right)dR\,d\theta.$$

Nous remarquerons dès maintenant, dans l'expression (8), que r est nul pour $R = 0$, quelles que soient les valeurs de H, A et n, et nous voyons également, dans l'expression (9), que l'aire du parallélogramme élémentaire compris entre les quatre points dont les centres orbitaires sont définis par R, θ, $R + dR$, $\theta + d\theta$ est indépendante de θ.

Supposons maintenant que, après avoir tracé sur une circonférence guide de rayon $R = A$ l'hypocycloïde accourcie de rayon $r = H$ et définie par le paramètre n, nous tracions, par rapport aux différents cercles, de dR en dR dans l'intérieur du premier, les hypocycloïdes de même nombre d'ondes semblablement placées et telles, que leurs rayons décroissent en se rapprochant du centre O suivant la loi

$$(8)\qquad r = H\left(\frac{R}{A}\right)^n,$$

on verra aisément (*Pl. I, fig.* 1) que les points de toutes ces courbes qui ont leurs centres orbitaires sur le même rayon Oa_1 auront également leurs rayons orbitaires parallèles, et que, si l'on prenait pour axes de coordonnées une ligne parallèle à a_1MA_1 (axe des r) et la ligne Oa_1 (axe des R), la courbe formée par l'ensemble de ces points aurait pour équation l'équation (8).

Nous donnerons aux lignes formées par tous les points qui ont leurs centres orbitaires sur le même rayon le nom de *rayons curvilignes* de l'hypocycloïde.

On voit que l'équation générale des rayons curvilignes dont il s'agit est, par rapport aux axes convenables pour chacun d'eux,

$$r = \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^n \text{ [*]}.$$

---

[*] On aurait l'équation de l'une quelconque de ces lignes par rapport aux axes primitifs en éliminant R entre les équations (8'), et l'on verrait facilement que cette élimination donnerait toujours une équation du degré n. On a, en effet,

$$\mathrm{X}\cos\theta = \mathrm{R}\sin\theta\cos\theta - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^n\cos\theta\sin(n\theta - \varepsilon t),$$

$$\mathrm{Y}\sin\theta = \mathrm{R}\sin\theta\cos\theta + \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^n\sin\theta\cos(n\theta - \varepsilon t),$$

$$(\mathrm{X}\cos\theta - \mathrm{Y}\sin\theta) = -\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^n\sin[(n+1)\theta - \varepsilon t],$$

de même

$$\mathrm{X}\cos(n\theta - \varepsilon t) = \mathrm{R}\sin\theta\cos(n\theta - \varepsilon t) - \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^n\sin(n\theta - \varepsilon t)\cos(n\theta - \varepsilon t),$$

$$\mathrm{Y}\sin(n\theta - \varepsilon t) = \mathrm{R}\cos\theta\sin(n\theta - \varepsilon t) + \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\mathrm{R}^n\sin(n\theta - \varepsilon t)\cos(n\theta - \varepsilon t),$$

d'où

$$\mathrm{X}\cos(n\theta - \varepsilon t) + \mathrm{Y}\sin(n\theta - \varepsilon t) = \mathrm{R}\sin[(n+1)\theta - \varepsilon t];$$

tirant enfin de cette équation la valeur de R et élevant à la puissance n et substituant dans les précédentes, il viendrait

$$\mathrm{Y}\sin\theta - \mathrm{X}\cos\theta = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}^n}\left\{\frac{\mathrm{X}\cos(n\theta - \varepsilon t) + \mathrm{Y}\sin(n\theta - \varepsilon t)}{\sin[(n+1)\theta - \varepsilon t]}\right\}^n,$$

équation du degré (n), ce qui était d'ailleurs évident d'avance.

Par suite, dans le cas de l'ellipse (*fig.* 5), on aura

$$n = 1, \quad r = H\frac{R}{A};$$

les rayons hypocycloïdaux sont rectilignes.

Pour les hypocycloïdes à trois ondes, les rayons hypocycloïdaux sont des arcs de paraboles

$$r = H\left(\frac{R}{A}\right)^2.$$

Les rayons curvilignes sont tangents en O à leurs rayons des centres orbitaires; on a, en effet,

$$\frac{dr}{dR} = \frac{Hn}{A^n} R^{(n-1)};$$

donc $\frac{dr}{dR} = 0$ pour $R = 0$ [*]; par suite, le rayon curviligne est tangent à l'axe des R pour chaque courbe et au centre de la figure.

Si, de même que nous avons tracé sur la figure les hypocycloïdes voisines, nous tracions également les rayons curvilignes séparés par des intervalles $d\theta$, nous partagerions toute l'aire de la figure en une infinité d'éléments analogues à celui que nous avons appelé *parallélogramme élémentaire*.

L'aire de chacun de ces éléments est égale, comme nous l'avons vu, à $\left(R - \frac{n^2H^2}{A^{2n}} R^{2n-1}\right) dR\, d\theta$.

Il en résulte donc que tous ceux d'entre eux qui sont situés dans la bande sinueuse comprise entre deux hypocycloïdes voisines sont équivalents; et l'on verra aisément maintenant que, si l'on suppose que la figure prenne le mouvement oscillatoire général défini par la rotation orbitaire ε, l'un quelconque de ces éléments affectera successivement toutes les formes de ceux qui sont compris dans une même onde (*Pl. I, fig.* 3), et son aire restera invariable.

---

[*] Excepté dans les cas de l'ellipse ou $n = 1$ et $\frac{dr}{dR} = \frac{H}{A}$ const.: dans ces cas, les rayons hypocycloïdaux sont rectilignes.

Si maintenant nous considérons la bande comprise entre deux rayons curvilignes séparés par un intervalle $d\theta$, nous aurons pour aire

$$d\theta \int_0^A \left(R - \frac{n^2 H^2}{A^{2n}} R^{2n-1}\right) dR$$

ou

$$d\theta \left(\frac{A^2}{2} - \frac{nH^2}{2}\right).$$

Il est encore évident que, si nous partageons toute la surface de l'hypocycloïde extérieure en bandes analogues définies par des intervalles $d\theta$ égaux, toutes ces bandes seront égales entre elles, et, quand toute la figure se mettra à osciller, chacune d'elles affectera successivement les formes de toutes celles qui sont comprises dans une même onde; elles prendront un mouvement oscillatoire analogue à celui qu'indique la *fig.* 4 de la *Pl. I*, et dont les oscillations des verges peuvent être prises pour image.

Aire de l'hypocycloïde. — Nous remarquerons ici, en passant, que l'intégration par rapport à θ de la formule qui précède entre les limites o et 2π nous donnera l'aire de la courbe entière:

$$\pi(R^2 - nH^2).$$

Cercle primitif. — Et si nous supposions que toute la surface oscillante vînt à s'affaisser sous la forme d'un cercle, le rayon A_1 de ce cercle, que nous appellerons *cercle primitif*, aura pour expression

$$A_1^2 = A^2 - nH^2. \tag{10}$$

Mouvement relatif. — Si maintenant nous imaginions que l'observateur qui contemple ce mouvement fût entraîné avec des axes animés d'un mouvement de rotation uniforme autour du point O et de vitesse égale à $\frac{\varepsilon}{n+1}$, nous pourrions remarquer tout d'abord que les mouvements des différents points relativement les uns aux autres ne changeraient pas, et que, par suite, les déformations diverses des éléments resteraient les mêmes, ainsi que leurs aires.

Mais chacun d'eux semblerait, au lieu d'osciller en se déformant, s'écouler dans le canal étroit formé par deux hypocycloïdes voisines, se rétrécissant en s'allongeant pour conserver la même aire dans les parties resserrées de son filet, et s'élargissant en se raccourcissant dans les parties plus larges.

Nous avons vu plus haut, en étudiant le mouvement linéaire, que la longueur de chaque élément linéaire hypocycloïdal était proportionnelle à sa vitesse à chaque instant; il en résulte que la distance normale de deux hypocycloïdes voisines, dans la loi que nous avons donnée, est inversement proportionnelle à la vitesse; cette propriété pourrait aisément se démontrer directement.

Nous voyons par là que le mouvement oscillatoire dont nous nous occupons peut être transformé en un mouvement d'écoulement permanent, par une simple rotation des axes.

Le mouvement ondulatoire hypocycloïdal est ainsi entièrement défini au point de vue cinématique dans le plan; il serait facile de déduire de ce qui précède une variété infinie de mouvements plus complexes et satisfaisant également à la loi d'homogénéité.

Si nous projetions, en effet, la figure en mouvement sur un plan incliné quelconque, les éléments superficiels qui étaient égaux entre eux le seraient encore en projection; les cercles guides, les cercles primitifs, les orbites circulaires des points deviendraient des ellipses semblables et parallèles, sur lesquels ils se déplaceraient en suivant la loi des aires; enfin, si, faisant passer le plan de projection par le centre O, nous le faisions tourner autour d'un axe perpendiculaire à la figure sans changer son inclinaison, le mouvement oscillatoire se projetterait suivant un mouvement satisfaisant encore à la loi d'homogénéité et dans lequel les orbites se déformeraient constamment, présentant ainsi les aspects les plus variés et les plus complexes.

Cinématique à trois dimensions.

Nous pouvons évidemment considérer la figure que nous venons d'étudier comme la section droite d'un cylindre liquide animé d'un mouvement tel, que tout ce qui se passe dans la section envisagée se passe également dans toutes les autres, et ce mouvement d'oscillation générale du liquide se traduira à nos yeux par le roulement perpétuel d'une série de cannelures hypocycloïdales à la surface libre.

Nous pouvons de même supposer que les tranches successives, bien que de formes identiques, ne soient pas semblablement tournées, et imaginer, par exemple, qu'à chaque instant le volume liquide affecte la forme qu'engendrerait l'hypocycloïde si on la transportait uniformément le long d'une perpendiculaire à son plan pendant qu'elle tournerait uniformément sur elle-même, et le corps liquide affecterait la forme d'un cylindre recouvert de cannelures à sections droites hypocycloïdales et contournées en hélice; et, dans le mouvement oscillatoire général dont nous avons parlé, ces cannelures sembleraient rouler uniformément sur la surface libre, imitant aux yeux le mouvement d'une vis menée par un écrou qui glisserait sans tourner dans la direction de son axe.

Nous pouvons enfin considérer une sphère, imaginer cette sphère coupée par des plans parallèles voisins, tracer sur chacun d'eux des hypocycloïdes ayant même nombre d'ondes, et dont les rayons orbitaires r suivraient la loi exprimée par la formule

$$r = \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^n,$$

R représentant le rayon du cercle détaché par chaque plan sécant et A le rayon de la sphère; et, imaginant enfin que nous fassions la même opération à l'intérieur pour toutes les sphères concentriques, nous aurions, en supposant tous les points de la masse animés d'une rotation constante ε autour de leurs centres orbitaires, un nouvel exemple de mouvement oscillatoire vérifiant la loi d'homogénéité, qui se traduirait aux yeux de l'observateur par le roulement d'ondes cannelées sur la surface libre du sphéroïde liquide.

Nous voyons enfin qu'en général, si nous considérions une masse liquide telle, que toutes les sections obtenues en la coupant par des plans parallèles fussent des hypocycloïdes ayant même paramètre n, c'est-à-dire de même nombre d'ondes, et que le mouvement fût tel que nous venons de le dire dans chacune de ces sections, quel que puisse être d'ailleurs le rapport de H à A pour chacune d'elles, cette masse serait encore animée d'un mouvement possible au point de vue cinématique.

Nous pourrions de la même manière substituer aux mouvements circulaires les mouvements elliptiques obtenus en projetant les derniers soit sur un plan constant, soit sur un plan d'inclinaison constante, mais animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire à la figure.

Mais tous ces mouvements ondulatoires ne présentent pour le moment d'autre intérêt que de familiariser l'esprit avec ces images nouvelles, c'est-à-dire d'habituer à suivre par l'imagination les divers éléments liquides dans leurs déplacements et leurs déformations; il n'y a pas lieu de s'y arrêter dans ce Mémoire.

Nous n'étudierons au point de vue dynamique que deux cas :

1° Le cas du cylindre à cannelures ou ondes hypocycloïdales parallèles à l'axe, c'est-à-dire celui dans lequel tout se passe exactement de la même manière dans chaque section droite, et nous appliquerons cette étude au cas d'un canal creusé le long d'un grand cercle de la Terre et la pénétrant jusqu'à son centre;

2° Le cas des déformations ondulatoires d'un ellipsoïde, qui est directement applicable à la marée produite par l'attraction d'un astre sur un sphéroïde liquide et qui est susceptible de jeter quelque jour sur cet important et obscur problème.

Premier cas. — Nous n'aurons évidemment pas à nous étendre sur la description de ce mouvement, qui est entièrement défini par le mouvement superficiel que nous avons décrit pour le plan de la section droite du cylindre liquide.

Nous nous bornerons à remarquer que chaque hypocycloïde représentera sur le plan de la section droite la trace d'une surface cylindrique droite à directrice hypocycloïdale, que les rayons curvilignes de la figure représenteront également la trace de surfaces cylindriques, et que, par suite, le mouvement des lames liquides comprises entre deux de ces surfaces voisines sera fidèlement représenté par le mouvement oscillatoire des bandes superficielles comprises entre deux rayons curvilignes.

Deuxième cas. — Le deuxième cas est plus intéressant au point de vue cinématique.

Imaginons, en effet, un ellipsoïde quelconque défini par les trois axes A, B, C, et supposons que, par une série de plans parallèles entre eux et perpendiculaires à l'un des axes, l'axe C par exemple, nous le divisions en tranches minces. Nous pouvons, comme nous l'avons vu, considérer chacune des ellipses semblables détachées dans cette figure par les plans sécants comme des hypocycloïdes dont le paramètre n a pour valeur 1, et les paramètres R et r seront définis par les relations

$$\mathrm{R}+r=a,$$
$$\mathrm{R}-r=b,$$

en appelant a et b les axes des ellipses des diverses sections, correspondant aux axes A et B de la section principale AB.

L'équation de l'ellipsoïde, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires coïncidant avec ses axes principaux, est de la forme

$$\frac{\mathrm{X}^2}{\mathrm{A}^2}+\frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{B}^2}=1-\frac{\mathrm{Z}^2}{\mathrm{C}^2}=\frac{\mathrm{C}^2-\mathrm{Z}^2}{\mathrm{C}^2};$$

par suite, les axes des diverses sections elliptiques correspondant aux diverses valeurs de z auront pour expression

$$a^2=\frac{\mathrm{A}^2(\mathrm{C}^2-\mathrm{Z}^2)}{\mathrm{C}^2},$$
$$b^2=\frac{\mathrm{B}^2(\mathrm{C}^2-\mathrm{Z}^2)}{\mathrm{C}^2},$$

et les rayons R et r des cercles guides et des cercles orbitaires des différentes ellipses auront pour valeur

$$\mathrm{R}=\frac{a+b}{2},\quad r=\frac{a-b}{2},$$

d'où

$$\mathrm{R}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2\mathrm{C}}\sqrt{(\mathrm{C}^2-\mathrm{Z}^2)},\quad r=\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2\mathrm{C}}\sqrt{\mathrm{C}^2-\mathrm{Z}^2};$$

et les équations de ces ellipses pourront se mettre sous la forme

$$\mathrm{X}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2\mathrm{C}}\sqrt{\mathrm{C}^2-\mathrm{Z}^2}\sin\theta-\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2\mathrm{C}}\sqrt{\mathrm{C}^2-\mathrm{Z}^2}\sin\theta,$$
$$\mathrm{Y}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2\mathrm{C}}\sqrt{\mathrm{C}^2\mathrm{Z}^2}\cos\theta+\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{2\mathrm{C}}\sqrt{\mathrm{C}^2\mathrm{Z}^2}\cos\theta,$$

d'où évidemment l'élimination de θ ramènerait l'équation de l'ellipsoïde.

Les coordonnées R et θ du centre orbitaire d'un point quelconque de l'ellipsoïde, X, Y, Z, seraient fournies par les relations

$$R = \frac{A+B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2}$$

et

$$\sin\theta = \frac{XC}{B\sqrt{C^2 - Z^2}},$$

ou encore

$$\cos\theta = \frac{YC}{A\sqrt{C^2 - Z^2}}.$$

Enfin, si nous appelons χ, γ, ζ les coordonnées rectangulaires du centre d'oscillation d'un point qui aurait pour coordonnées X, Y, Z, on aurait

$$\zeta = Z,$$
$$\chi = R\sin\theta = \frac{A+B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2}\sin\theta,$$
$$\gamma = R\cos\theta = \frac{A+B}{2C}\sqrt{C^2 - Z^2}\cos\theta,$$

et l'élimination de θ et Z entre ces trois équations donnera

$$\left(\frac{A+B}{2C}\right)^2 (C^2 - \zeta^2) = \chi^2 + \gamma^2,$$

ou enfin

$$\chi^2\left(\frac{2}{A+B}\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{2}{A+B}\right)^2 + \zeta^2\left(\frac{1}{C}\right)^2 = 1,$$

équation d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe des ζ, que l'on peut appeler l'ellipsoïde des centres orbitaires de l'ellipsoïde donné A, B, C par rapport à l'axe C.

A chaque point de la surface de l'ellipsoïde donné correspondra un point de l'ellipsoïde que nous venons de définir, et, si nous imaginons que chacun des points du premier (*Pl. I, fig.* 5) vienne à tourner autour de son point correspondant du second avec une vitesse angulaire ε uniforme et égale pour tous les points, nous verrons que chacune des ellipses planes que nous avions déterminées par les sections perpendiculaires à l'axe C, conservant exactement ses dimensions et sa forme, semblera tourner autour de son centre avec une vitesse égale à $\frac{\varepsilon}{2}$. Dans ce genre de mouvement oscillatoire, l'ellipsoïde donné conserverait donc sa forme extérieure; mais, bien que chacun de ses points ne décrirait qu'une orbite circulaire, la *forme* du corps semblerait tourner uniformément sur elle-même avec une vitesse égale à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Enfin il est facile de voir que, si nous imaginions que tous les points des sections planes comprises dans l'intérieur des diverses ellipses venaient à tourner avec la même vitesse angulaire ε autour de leurs centres orbitaires respectifs, toute la masse du liquide que nous pouvons imaginer former le corps considéré serait animée d'un mouvement oscillatoire général, qui se traduirait aux yeux par une rotation apparente du corps demeurant invariable, et, de plus, la loi d'homogénéité serait rigoureusement vérifiée [*].

APPLICATIONS DYNAMIQUES.

Théorie dynamique des ondes courantes dans un disque liquide compris entre deux plans parallèles voisins menés de chaque côté d'un grand cercle d'un sphéroïde liquide.

Hypothèses. — Nous considérerons le cas d'une sphère liquide soumise à la loi de la gravitation universelle, c'est-à-dire dont toutes les parcelles exercent les unes sur les autres une attraction proportionnelle à leurs masses et réciproque aux carrés de leurs distances.

---

[*] Tous les mouvements que nous venons de définir jouissent d'une propriété générale assez curieuse, dont nous avons donné la démonstration dans la *Théorie mécanique de la houle:*

Le centre de gravité d'une portion quelconque de la masse liquide animée de ce mouvement oscillatoire décrit un cercle d'un mouvement uniforme.

Nous admettrons en outre que le canal est suffisamment étroit pour que l'on puisse considérer les pesanteurs comme égales et parallèles sur toute la longueur d'une ligne traversant le canal ou plutôt le disque liquide perpendiculairement à ses deux parois.

Enfin, nous admettrons que les rayons orbitaires des molécules sont assez petits, relativement au rayon de la sphère, pour que l'on puisse considérer la pesanteur de chaque molécule, à chaque phase de ses oscillations, comme égale et parallèle à celle qu'elle subirait si elle était placée immobile à son centre orbitaire.

Il est aisé de voir que, en appliquant ces hypothèses à une sphère liquide de la dimension de la Terre, on pourrait encore, sans commettre d'erreur sensible, attribuer aux ondes que nous étudierons une largeur et une hauteur beaucoup supérieures aux dimensions que nous rencontrons dans la nature, et il est évident, par ailleurs, que les composantes ainsi négligées sont encore sensiblement inférieures aux forces passives qu'on laisse de côté en imaginant le liquide sans viscosité.

Nous aurions pu, d'ailleurs, introduire dans les formules les vraies composantes de la pesanteur, développer leurs expressions en fonction de l'épaisseur du canal et du rayon orbitaire des ondes, et remarquer que, ces quantités étant très-petites, nous pouvions négliger les ermes où elles entrent à la deuxième puissance; mais cette manière de procéder compliquerait l'analyse sans rien ajouter à la rigueur des déductions. Les plus hautes ondes de la mer n'atteignent, en effet, jamais des hauteurs supérieures à 11 mètres, et ces hauteurs mesurées de crêtes en creux correspondent à des rayons orbitaires superficiels de $5^m,50$.

Il résulte des hypothèses que nous venons d'exposer que toutes les forces agissant dans les diverses tranches minces du disque liquide considéré seront les mêmes que celles qui agissent dans la tranche mince qui coïncide avec le grand cercle de la sphère, et que, pour les forces comme pour le mouvement, nous pourrons nous borner à étudier ce qui se passe dans la surface d'une section droite du disque.

Soit donc A le rayon de la circonférence extérieure guide du disque hypocycloïdal considéré, H le rayon orbitaire de ses ondes superficielles, et prenons les équations connues du mouvement

$$(12)\qquad \begin{cases} X = R\sin\theta - H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin(n\theta - \varepsilon t), \\ Y = R\cos\theta + H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos(n\theta - \varepsilon t); \end{cases}$$

soit G l'intensité de la pesanteur sur les molécules superficielles.

La surface libre doit être surface de niveau.

A l'instant t, la direction de la tangente à la courbe est donnée par le rapport

$$\frac{\frac{dY}{d\theta}}{\frac{dX}{d\theta}}$$

au point occupé par la molécule qui a pour coordonnées orbitaires A et θ.

Les composantes de l'accélération totale seront

$$\frac{d^2X}{dt^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2Y}{dt^2},$$

celles de la pesanteur

$$-G\sin\theta, \quad -G\cos\theta.$$

Pour que la surface libre soit surface de niveau, il est nécessaire que la résultante de l'accélération totale et d'une accélération égale et contraire à G soit normale à cette surface; cette condition s'exprimera donc par la relation

$$\frac{\frac{dY}{d\theta}}{\frac{dX}{d\theta}} = -\frac{\frac{d^2X}{dt^2} + G\sin\theta}{\frac{d^2Y}{dt^2} + G\cos\theta};$$

or on a

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d\theta} &= -A\sin\theta - nH\sin(n\theta - \varepsilon t), \\ \frac{dX}{d\theta} &= A\cos\theta - nH\cos(n\theta - \varepsilon t), \\ \frac{d^2X}{dt^2} &= \varepsilon^2 H\sin(n\theta - \varepsilon t), \\ \frac{d^2Y}{dt^2} &= -\varepsilon^2 H\cos(n\theta - \varepsilon t). \end{aligned}$$

L'expression précédente, après la substitution de ces valeurs à $\frac{dX}{d\theta}$, $\frac{dY}{d\theta}$, $\frac{d^2X}{dt^2}$, $\frac{d^2Y}{dt^2}$, deviendra

$$\frac{-A\sin\theta - nH\sin(n\theta - \varepsilon t)}{A\cos\theta - nH\cos(n\theta - \varepsilon t)} = -\frac{\varepsilon^2 H\sin(n\theta - \varepsilon t) + G\sin\theta}{-\varepsilon^2 H\cos(n\theta - \varepsilon t) + G\cos\theta};$$

effectuant les calculs et simplifiant, il restera

$$Gn = \varepsilon^2 A$$

ou

$$\varepsilon^2 = \frac{Gn}{A}, \tag{13}$$

condition remarquablement simple.

Le paramètre ε était le seul que nous eussions conservé indéterminé dans les équations (12); ces équations seront désormais complétement définies sous la forme

$$X = R\sin\theta - H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin\left(n\theta - \sqrt{\frac{Gn}{A}}\,t\right),$$
$$Y = R\cos\theta + H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos\left(n\theta - \sqrt{\frac{Gn}{A}}\,t\right).$$

Nous allons voir que les conditions dynamiques du mouvement seront remplies dans la masse lorsqu'elles le seront à la surface libre.

Soient, en effet, R et θ les coordonnées orbitaires d'un point intérieur de la masse, g l'accélération de la pesanteur en ce point. Le sphéroïde étant supposé liquide et par suite homogène, on sait que, si l'on appelle R et A les distances de deux points quelconques au centre, on a

$$\frac{g}{R} = \frac{G}{A}\,[*];$$

[*] Cette loi n'est évidemment rigoureuse que dans le cas où la masse liquide serait tout à fait sphérique, où les molécules seraient toutes concentrées à leurs centres orbitaires propres, et l'on sait, du reste, que cela n'est pas rigoureusement possible, puisque la sphère primitive aurait un rayon plus faible que A; mais le véritable rayon ne diffère de A que d'un infiniment petit de l'ordre de ceux que nous avons négligés dans nos hypothèses.

par suite, on a

$$\frac{gn}{R} = \frac{Gn}{A} = \varepsilon^2.$$

Cette condition est précisément celle qui exprime que tous les points de l'hypocycloïde correspondant au cercle R se meuvent, comme ceux de la surface libre, sur une surface de niveau.

Loi de la pression dans la masse. — On le verrait, du reste, en posant

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{dp}{dX}\frac{dX}{d\theta} + \frac{dp}{dY}\frac{dY}{d\theta},$$

et comme on sait, appelant δ la densité du liquide,

$$\frac{dp}{dX} = -\delta\left(\frac{d^2X}{dt^2} + g\sin\theta\right),$$
$$\frac{dp}{dY} = -\delta\left(\frac{d^2Y}{dt^2} + g\cos\theta\right),$$

et par suite, en substituant,

$$\frac{dp}{d\theta} = -\delta\left[\left(\frac{d^2X}{dt^2} + g\sin\theta\right)\frac{dX}{d\theta} + \left(\frac{d^2Y}{dt^2} + g\cos\theta\right)\frac{dY}{d\theta}\right];$$

nous venons de voir que le terme entre crochets était identiquement nul quand on avait $\varepsilon^2 = \frac{gn}{R}$.

Pour trouver la loi de croissance des pressions en fonction du rayon R, nous prendrons la formule

$$\frac{dp}{dR} = \frac{dp}{dX}\frac{dX}{dR} + \frac{dp}{dY}\frac{dY}{dR};$$

or on a, en différentiant les équations par rapport à R,

$$\frac{dX}{dR} = \sin\theta - \frac{nH}{A^n}R^{n-1}\sin(n\theta - \varepsilon t),$$
$$\frac{dY}{dR} = \cos\theta + \frac{nH}{A^n}R^{n-1}\cos(n\theta - \varepsilon t),$$

et, en remplaçant $\frac{dp}{dX}$, $\frac{dp}{dY}$, $\frac{dX}{dR}$, $\frac{dY}{dR}$ par leurs valeurs, il viendra

$$\begin{aligned}\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dR} = &-\left[\varepsilon^2 H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin(n\theta-\varepsilon t)+g\sin\theta\right]\left[\sin\theta-\frac{nH}{A^n}R^{n-1}\sin(n\theta-\varepsilon t)\right]\\ &-\left[-\varepsilon^2 H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos(n\theta-\varepsilon t)+g\cos\theta\right]\left[\cos\theta+\frac{nH}{A^n}R^{(n-1)}\cos(n\theta-\varepsilon t)\right];\end{aligned}$$

effectuant les calculs,

$$\begin{aligned}&+\varepsilon^2 H\left(\frac{R}{A}\right)^n\left[\cos(n\theta-\varepsilon t)\cos\theta-\sin(n\theta-\varepsilon t)\sin\theta\right]\\ &+\frac{n\varepsilon^2H^2}{A^{2n}}R^{2n-1}-g-\frac{gnH}{A^n}R^{(n-1)}[\cos(n\theta-\varepsilon t)\cos\theta-\sin(n\theta-\varepsilon t)\sin\theta],\end{aligned}$$

et, si l'on remarque que $\varepsilon^2=\frac{gn}{R}$, il restera

$$\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dR}=n\frac{\varepsilon^2H^2}{A^{2n}}R^{2n-1}-g,$$

ou enfin

$$\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dR}=n\frac{\varepsilon^2H^2}{A^{2n}}R^{2n-1}-\frac{\varepsilon^2}{n}R,$$

et en intégrant

$$\frac{1}{\delta}p=\frac{\varepsilon^2H^2}{2}\left(\frac{R}{A}\right)^{2n}-\frac{\varepsilon^2R^2}{2n}+C.$$

La constante se déterminera par la condition de pression P de la surface libre,

$$P=\delta\left(\frac{\varepsilon^2H^2}{2}-\frac{\varepsilon^2A^2}{2n}\right)+C\delta,$$

d'où

$$C=\frac{P}{\delta}-\frac{\varepsilon^2H^2}{2}+\frac{\varepsilon^2A^2}{2n},$$

et par suite

$$\frac{1}{\delta}p=\frac{1}{\delta}P+\frac{\varepsilon^2H^2}{2}\left[\left(\frac{R}{A}\right)^{2n}-1\right]+\frac{\varepsilon^2}{2n}(A^2-R^2),$$

ou

$$p-P=\frac{\varepsilon^2\delta}{2n}(A^2-R^2)-\frac{\varepsilon^2H^2\delta}{2}\left[1-\left(\frac{R}{A}\right)^{2n}\right].$$

Considérons maintenant le cas où la sphère liquide serait animée d'un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au disque que nous avons envisagé, et où cette rotation serait assez lente pour que la déformation du sphéroïde qui en résulterait n'altérât pas les attractions propres [*] de chaque molécule, en d'autres termes, pour que l'ellipsoïde de révolution dont le sphéroïde affecterait la forme différât peu de la sphère.

Il est aisé de voir que, si l'on appelait ω la vitesse, comptée dans le même sens que les angles θ, de la rotation du sphéroïde, c'est-à-dire la vitesse, par rapport à des axes immobiles dans l'espace absolu, d'axes par rapport auxquels le mouvement oscillatoire aurait pour équations les équations (12), les équations du mouvement par rapport aux axes fixes prendraient la forme

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= R\sin(\theta+\omega t) - H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin[n\theta - (\omega+\varepsilon)t],\\ Y &= R\cos(\theta+\omega t) + H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos[n\theta - (\omega+\varepsilon)t],\end{aligned}\right.$$

ou, pour la surface libre,

$$\begin{aligned} X &= A\sin(\theta+\omega t) - H\sin[n\theta - (\omega+\varepsilon)t],\\ Y &= A\cos(\theta+\omega t) + H\cos[n\theta - (\omega+\varepsilon)t],\end{aligned}$$

dans lesquelles θ continuerait à représenter l'angle du rayon vecteur du centre orbitaire du point considéré avec l'axe mobile des Y par rapport auquel cet angle reste constant.

Nous tirerons de ces équations

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\theta} &= A\cos(\theta+\omega t) - nH\cos[n\theta - (\omega+\varepsilon)t],\\ \frac{dY}{d\theta} &= -A\sin(\theta+\omega t) - nH\sin[n\theta - (\omega+\varepsilon)t],\end{aligned}$$

---

[*] Par attraction propre nous entendrons ici l'attraction newtonienne; cette attraction se combinera nécessairement à la force centrifuge, et ce sont précisément les modifications apportées aux formules par l'influence de cette dernière force que nous allons faire connaître.

et en outre

$$\frac{dX}{dt} = \quad A\omega\cos(\theta + \omega t) + H(\omega + \varepsilon)\cos[n\theta - (\omega + \varepsilon)t],$$
$$\frac{dY}{dt} = -A\omega\sin(\theta + \omega t) + H(\omega + \varepsilon)\sin[n\theta - (\omega + \varepsilon)t],$$

et enfin

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -A\omega^2\sin(\theta + \omega t) + H(\omega + \varepsilon)^2\sin[n\theta - (\omega + \varepsilon)t],$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\theta + \omega t) - H(\omega + \varepsilon)^2\cos[n\theta - (\omega + \varepsilon)t],$$

et si nous appelons G l'attraction absolue exercée par le sphéroïde sur chacun des points de la surface libre, et en remarquant que cette attraction, dirigée constamment par hypothèse suivant le rayon vecteur du centre orbitaire, fait avec l'axe des Y un angle égal à $(\theta + \omega t)$, la condition pour que la surface libre soit surface de niveau sera exprimée par la relation

$$\frac{\frac{dX}{d\theta}}{\frac{dY}{d\theta}} = -\frac{\frac{d^2X}{dt^2} + G\cos(\theta + \omega t)}{\frac{d^2X}{dt^2} + G\sin(\theta + \omega t)};$$

posant, pour simplifier,

$$\theta + \omega t = \varphi,$$
$$n\theta - (\omega + \varepsilon)t = \pi,$$

et effectuant les calculs, on trouverait

$$[nA\omega^2 + A(\omega + \varepsilon)^2 - Gn]\sin(\pi + \varphi) = 0,$$

ou

$$\{[n\omega^2 + (\omega + \varepsilon)^2]A - Gn\}\sin[(n + 1)\theta - \varepsilon t] = 0,$$

relation qui ne peut être vérifiée à tous les instants du mouvement que si l'on a identiquement

$$[n\omega^2 + (\omega + \varepsilon)^2]A = Gn,$$

ou

$$(\omega + \varepsilon)^2 A = (G - \omega^2 A)n.$$

Et si nous appelons ε_1 la vitesse, par rapport aux axes fixes, de la rotation des rayons orbitaires de chacune des molécules de la masse, et G_1 la pesanteur apparente au point occupé par son centre d'oscillation, nous aurons

$$\varepsilon_1 = \omega + \varepsilon,$$
$$G_1 = G - \omega^2 A,$$

et la formule que nous venons d'établir prendra la forme

$$\varepsilon_1^2 = \frac{G_1 n}{A}, \tag{15}$$

formule identique à celle que nous avions obtenue dans le cas du mouvement absolu [*].

Remarque. — Les conditions dynamiques exprimées par les relations (13) et (15) auraient pu être établies par des démonstrations géométriques basées sur la méthode des tangentes de Roberval et sur les règles simples de la composition des accélérations.

Applications.

1° *Sphéroïde liquide fixe.* — En remplaçant dans les équations (12) la quantité ε par sa valeur (13), les équations générales du mouvement oscillatoire hypocycloïdal dans un disque liquide relativement étroit ont pris la forme

$$X = R\sin\theta - H\left(\frac{R}{A}\right)^n \sin\left(n\theta - \sqrt{\frac{G}{A}}\,nt\right),$$

et

$$Y = R\cos\theta + H\left(\frac{R}{A}\right)^n \cos\left(n\theta - \sqrt{\frac{G}{A}}\,nt\right);$$

[*] Néanmoins il importe de remarquer ici que la vitesse de propagation des ondes par rapport à un observateur entraîné par le sphéroïde serait

$$\frac{\varepsilon}{n+1} \text{ ou } \frac{\varepsilon_1 - \omega}{n+1},$$

ou enfin

$$\frac{\sqrt{\frac{Gn}{R}} - \omega}{n+1}.$$

le mouvement sera donc complétement défini pour un sphéroïde donné par les quantités A et G et par les valeurs attribuées aux paramètres H et n; et il importe de ne pas oublier que nous avons supposé H très-petit par rapport à A et que n est un nombre entier.

La quantité H représente, comme on sait, la demi-hauteur des ondes estimée sur le rayon ; quant au paramètre n, sa nature rendrait sa mesure directe impossible à un spectateur du phénomène, et il est préférable, dans les applications, de le transformer; nous avons vu qu'en appelant Θ la demi-amplitude angulaire des ondes on avait

$$\Theta = \frac{\pi}{n+1}, \quad \text{d'où} \quad n = \frac{\pi - \Theta}{\Theta},$$

ou bien, si nous appelons L la demi-longueur de l'arc de grand cercle de la sphère occupé par chaque onde,

$$n = \frac{\pi A - L}{L}.$$

La forme des ondes est donc entièrement déterminée quand on connaît la demi-hauteur H et la demi-longueur L ; et le paramètre H est astreint à la condition

$$H < \rho, \quad \text{ou} \quad H < \frac{n}{A}, \quad \text{ou} \quad H < \frac{\pi A - L}{LA},$$

qui exprime que l'hypocycloïde est une hypocycloïde accourcie.

Enfin nous allons voir que, pour que le mouvement soit possible au point de vue dynamique, il faut que ces ondes se propagent sur le grand cercle avec une vitesse déterminée, fonction des paramètres de l'hypocycloïde.

La vitesse angulaire de propagation est égale, comme nous l'avons vu, à $\frac{\varepsilon}{n+1}$, et l'on a

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{Gn}{A}};$$

la vitesse angulaire de propagation sera donc égale à

$$\frac{\varepsilon\Theta}{\pi}. \quad \text{ou} \quad \frac{\Theta}{\pi}\sqrt{\frac{Gn}{A}}$$

et la vitesse linéaire à

$$\frac{A\Theta}{\pi}\sqrt{\left(\frac{G\pi A - L}{AL}\right)},$$

ou

$$V = \frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{G(\pi A - L)}{AL}} = \sqrt{\frac{GL}{\pi} - \frac{GL^2}{\pi^2 A}}.$$

Enfin, si nous appelons T la demi-période des oscillations, on aurait

$$T = \frac{L}{V} = \sqrt{\frac{\pi^2 AL}{G(\pi A - L)}}.$$

2° *Sphéroïde liquide animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du disque liquide considéré.* — Nous appliquerons cette étude au cas d'un canal liquide pénétrant la Terre jusqu'à son centre et compris dans la zone équatoriale.

En définissant, comme dans le cas précédent, la forme des ondes du canal par leurs paramètres H et L, ces paramètres seraient naturellement encore liés entre eux par la relation

$$H < \frac{\pi A - L}{LA} \quad \text{et} \quad \frac{\pi A - L}{L} = \text{nombre entier}.$$

Nous allons faire voir que, comme dans le cas précédent, les ondes se propageraient avec la même vitesse suivant que le sens de la propagation sera dirigé vers l'est ou vers l'ouest.

En appelant G_1 la pesanteur apparente, ω la vitesse de rotation de la Terre et ε la rotation orbitaire des molécules par rapport à un observateur entraîné dans le mouvement, nous avons trouvé plus haut (15)

$$(\omega + \varepsilon)^2 = \frac{G_1 n}{A};$$

ε étant considéré comme positif quand les ondes se propagent dans le même sens que ω, c'est-à-dire vers l'est, nous aurons pour les deux cas

1° Propagation des ondes vers l'est...... $\varepsilon = \sqrt{\frac{G_1 n}{A}} - \omega$;

2° » » vers l'ouest... $\varepsilon = \omega - \sqrt{\frac{G_1 n}{A}}$.

Ces deux quantités sont égales à des signes contraires ; il en résulte donc que les vitesses des propagations seront égales.

La vitesse angulaire de propagation serait $\frac{\varepsilon}{n+1}$ et la vitesse linéaire $\frac{A\varepsilon}{n+1}$, et par conséquent

$$V = \sqrt{\frac{G_1 L}{\pi} - \frac{G_1 L^2}{\pi^2 A} - \frac{\omega L}{\pi}}.$$

En remplaçant, dans cette formule, G_1 par la valeur de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, ω par la vitesse angulaire de la rotation diurne, A par la valeur du rayon de la Terre à l'équateur, et enfin π par sa valeur connue, nous aurions l'expression de la vitesse de propagation des ondes en fonction de leur demi-longueur L.

Et si nous considérions des ondes telles que leur longueur L ne dépassât pas quelques centaines de mètres, on verrait aisément que cette expression se réduirait, avec une très-grande approximation, pour la Terre, à

$$V = \sqrt{\frac{G_1 L}{\pi}} \text{ [*]},$$

formule que nous trouverons dans quelques lignes pour le cas de la houle trochoïdale.

Enfin il importe, avant de terminer, de rappeler que toute la théorie *dynamique* qui précède est basée sur l'hypothèse que le rayon orbitaire H des molécules superficielles est assez faible pour que l'on puisse admettre que l'action de la Terre sur chacune d'elles soit à chaque instant la même que si la molécule se trouvait à son centre orbitaire ; on voit aisément que, dans le cas actuel, la valeur de H pourrait être portée, sans altérer les conséquences de la théorie, à plusieurs centaines de mètres, c'est-à-dire à une dimension de beaucoup supérieure à celle des ondes que nous rencontrons dans la nature.

En outre, on remarquera que nous avons supposé que le canal équatorial que nous avons considéré s'étendait jusqu'au centre de la Terre et que cette hypothèse était nécessaire à la continuité ; mais on recon-

[*] On a en effet, approximativement, pour la Terre,

$$\frac{G_1 L^2}{\pi^2 A} = \frac{G_1 L^2}{\pi\, 20000000} \quad \text{et} \quad \frac{\omega L}{\pi} = \frac{L}{43200}.$$

naît facilement que la loi de décroissance des rayons orbitaires des molécules liquides en fonction de la profondeur,

$$r = \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^n,$$

est extrêmement rapide, et que, par suite, ce mouvement est très-faible à des profondeurs encore voisines de la surface libre, et enfin que les influences négligées en supposant un canal de quelques centaines de mètres de profondeur seraient encore d'un ordre beaucoup inférieur à celui de la viscosité, qui a été laissée également de côté.

Application à la houle trochoïdale. — Comme dernière application, il est intéressant de déduire de la théorie qui précède, en faisant $\mathrm{A} = \infty$ par rapport à H et à L, la théorie de la houle trochoïdale, qui fait depuis quelques années, en France et en Angleterre, l'objet de l'étude des personnes qui s'occupent de la science du navire.

Loi de continuité ou d'homogénéité. — La loi d'homogénéité a été exprimée par la formule

$$r = \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^n$$

ou

$$r = \mathrm{H}\left(\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{\pi\mathrm{A}-\mathrm{L}}{\mathrm{L}}}.$$

Dans le cas de $\mathrm{A} = \infty$, cette formule prend une forme illusoire ; mais, si nous reprenons l'équation différentielle de laquelle cette relation a été tirée, nous avons

$$\frac{dr}{d\mathrm{R}} = n\frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{r}{\rho} = \frac{\pi r}{\mathrm{L}};$$

et, en prenant pour coordonnée Z la distance du centre orbitaire de chaque point à l'horizontale des centres orbitaires de la surface libre, on aura

$$d\mathrm{R} = -dz,$$

d'où

$$\frac{dr}{dz} = -\frac{\pi r}{\mathrm{L}}$$

ou

$$\frac{dr}{r} = -\frac{\pi}{L}dz,$$

et enfin

$$r = \mathrm{H}e^{\left(-\frac{\pi z}{L}\right)} \text{ (formule connue).}$$

Condition dynamique. — Cette condition est exprimée par la relation

$$\varepsilon^2 = \frac{gn}{R} = \frac{g}{\rho},$$

d'où nous tirons

$$\varepsilon^2 = \frac{\pi g}{L} \text{ (formule connue).}$$

Ligne du niveau primitif. — Nous avons trouvé pour rayon du cercle dont la surface égale celle de l'hypocycloïde

$$A_1^2 = A^2 - n\mathrm{H}^2,$$

d'où

$$A^2 - A_1^2 = n\mathrm{H}^2 = \frac{\mathrm{H}^2 A}{\rho} = \frac{\mathrm{H}^2 \pi A}{L},$$

d'où

$$A - A_1 = \frac{\pi \mathrm{H}^2 A}{(A + A_1)L} = \frac{\pi \mathrm{H}^2}{\left(1 + \frac{A_1}{A}\right)L},$$

et, comme il est aisé de le voir, $\frac{A_1}{A} = 1$ pour H constant et $A = \infty$; on a donc, en appelant ζ l'ordonnée de la ligne de niveau primitif au-dessous de la ligne des centres orbitaires des molécules de la surface libre,

$$\zeta = \frac{\pi \mathrm{H}^2}{2L} \text{ (formule connue).}$$

C'est, comme on sait, la moitié de la hauteur du point d'inflexion de la trochoïde au-dessus de la ligne des centres orbitaires.

Vitesse de propagation. — Enfin on trouverait aussi facilement

$$V = \sqrt{\frac{GL}{\pi}}.$$

Période des ondes. — Et

$$T = \sqrt{\frac{\pi L}{G}} \text{ (formules connues).}$$

On voit, par ce qui précède, que la théorie de la houle trochoïdale ne peut être considérée que comme une première approximation dans l'étude du phénomène des ondes courantes sur la sphère terrestre, puisqu'on y néglige à la fois la rotondité de la Terre, son mouvement de rotation et les variations de la gravité avec la profondeur.

Théorie de l'onde de marée produite sur un sphéroïde liquide par un astre éloigné.

Avant d'entreprendre l'explication dynamique du phénomène, il est indispensable d'ajouter quelques développements à l'étude de la Cinématique des déformations oscillatoires d'une surface plane hypocycloïdale, dans le cas particulier où l'hypocycloïde est une ellipse.

On sait que, dans ce cas, les équations du mouvement prennent la forme

$$X = R \sin\theta - H\frac{R}{A}\sin(\theta - \varepsilon t),$$

$$Y = R\cos\theta + H\frac{R}{A}\cos(\theta - \varepsilon t).$$

Si l'on élimine R entre ces deux équations, on trouvera une équation du premier degré qui représentera à chaque instant une ligne droite passant par l'origine. On sait que cette ligne est ce que nous avons appelé, dans le cas général, un rayon curviligne de l'hypocycloïde, et l'on voit aisément que l'équation de cette ligne représentera, si l'on fait varier t, le mouvement oscillatoire d'une droite qui joindrait constamment l'origine à un point qui parcourrait d'un mouvement uniforme l'orbite d'une molécule superficielle.

Si l'on éliminait θ, au contraire, l'équation résultante représenterait à chaque instant une ellipse de même forme et de même dimension à tous les instants, mais qui semblerait animée d'un mouvement de rotation uniforme égal à $\frac{\varepsilon}{2}$ autour de son centre.

La *fig.* 5 de la *Pl. I* représente dans deux positions différentes l'ellipse extérieure sur cette figure : chacun des points a décrit autour de son centre orbitaire un arc de 80 degrés, et l'ellipse a pris une position inclinée de 40 degrés sur la première. Les ellipses intérieures seraient soumises à des déformations semblables.

La bande liquide comprise entre deux lignes de molécules correspondant à deux valeurs voisines de θ, θ et $\theta + d\theta$, prendrait les mouvements oscillatoires représentés par les *fig.* 6 et 7 de la *Pl. I*, et la *fig.* 6 représente en $MM'NN'$, $M_1 M'_1 N_1 N'_1$ et $M_2 M'_2 N_2 N'_2$ les déformations et les oscillations périodiques du parallélogramme élémentaire compris entre les quatre points qui ont leurs centres orbitaires définis par R, $R + dR$, θ et $\theta + d\theta$.

Imaginons maintenant que nous prenions une masse liquide affectant la forme d'un ellipsoïde de révolution et que par l'axe de cet ellipsoïde nous fassions passer un plan; imaginons en outre que nous déterminions dans cet ellipsoïde, par des plans parallèles à ce dernier et très-voisins, des sections elliptiques semblables; à chacun des points de chacune des ellipses considérées correspondra nécessairement dans son plan un centre orbitaire, et, dans chaque ellipse supposée animée du mouvement oscillatoire hypocycloïdal, les molécules qui se trouvaient à un instant sur un même rayon continueront à s'y trouver à tous les instants; par suite, si nous venions à tracer dans le corps l'axe compris dans le plan équatorial et perpendiculaire aux plans sécants, et que par cet axe nous venions à faire passer des plans faisant entre eux de petits angles $d\theta$, toutes les molécules liquides comprises à un instant donné dans l'un d'eux continueraient à rester dans un plan, et les onglets détachés par ces plans dans la masse seraient soumis à des déformations et à des oscillations périodiques représentées pour toutes les sections droites par les *fig.* 5 et 6 de la *Pl. I*.

Enfin, chacune des tranches minces comprises dans chaque onglet entre deux sections droites conserverait même surface de base et même hauteur; leurs volumes seraient donc constants.

Le mouvement oscillatoire général jouirait donc de la propriété d'homogénéité, et il se traduirait, aux yeux de l'observateur immobile, par le roulement de la protubérance du sphéroïde autour d'un axe perpendiculaire au plan primitif mené par l'axe de révolution.

Étude dynamique. — On sait que, si l'on considère une masse liquide dont toutes les parties sont soumises à la loi de la gravitation, et isolée dans l'espace, cette masse prend la forme d'une sphère parfaite, et, si l'on suppose que cette masse vienne à être l'objet de l'attraction d'un astre éloigné, elle prendra la forme d'un ellipsoïde de révolution allongé vers ses pôles, dont l'axe serait dirigé vers l'astre en question. (Cela n'est exactement vrai, comme on le sait, qu'à la condition de supposer l'astre assez éloigné pour que l'on puisse considérer les actions qu'il exerce sur toutes les parcelles de la masse comme parallèles, et de supposer, en outre, la déformation assez petite pour que l'on puisse négliger les modifications de l'attraction totale du sphéroïde sur chaque molécule.)

Si nous imaginions maintenant que l'astre se mît à tourner autour du centre du sphéroïde, nous voyons aisément que, pour que dans chacune de ces positions la masse liquide fût en équilibre, il faudrait qu'elle présentât sa protubérance à l'astre à chaque instant; et, par suite, si nous supposions que l'astre décrivît son orbite en vingt-quatre heures, on obtiendrait l'effet dont il s'agit en imaginant que chacune des molécules de la masse fût animée, autour de son centre orbitaire, d'une vitesse de rotation égale au double de la précédente, c'est-à-dire telle qu'elle décrivît son orbite en douze heures.

Pour que ce mouvement fût possible au point de vue dynamique, il faudrait que, à chaque instant, les forces d'inertie de chaque molécule fissent équilibre aux actions qu'elle éprouve à la fois de la part du sphéroïde, de l'astre, et du liquide qui l'entoure, et comme, d'ailleurs, nous avons vu que ces dernières forces se faisaient précisément équilibre, à l'état statique il faudrait que les forces d'inertie et les modifications éprouvées par les pressions fussent rigoureusement nulles, ce qui n'est pas ici.

Néanmoins, en ne sortant pas de la limite des approximations qu'on a eués pour objet dans ce problème, on verrait aisément que ces quantités pourraient être négligées par rapport aux forces en jeu, lorsque, comme dans le cas de la Terre et de la Lune, la protubérance du sphéroïde est très-faible par rapport au rayon, et que le mouvement angulaire de l'astre attirant est suffisamment lent.

Sphéroïde liquide, animé d'un mouvement de rotation sur lui-même.

En faisant les mêmes hypothèses que dans le cas précédent, on démontrerait de la même manière qu'un sphéroïde liquide animé d'un mouvement de rotation sur lui-même, soumis à l'influence d'un astre éloigné situé dans le plan de son équateur, a pour forme d'équilibre un ellipsoïde à trois axes inégaux dont le grand axe est dirigé sur l'astre attirant.

Si nous menions à un instant donné l'équateur du sphéroïde [*] et une série de plans sécants parallèles à lui, et que, considérant chacune des sections elliptiques déterminées, nous supposions chacune d'elles animée du mouvement oscillatoire que nous avons défini, et tel que la vitesse de rotation orbitaire soit égale au double de la rotation diurne ω et dans le sens opposé à cette vitesse, nous verrions immédiatement que le sphéroïde se déformerait dans son mouvement, de manière à présenter sans cesse sa protubérance à l'astre attirant et affectant constamment par rapport à ce dernier sa forme d'équilibre.

Et si l'astre, au lieu d'être immobile, était animé d'un mouvement propre Ω, dans le plan de l'équateur, en faisant $\varepsilon = 2(\omega + \Omega)$, le même phénomène se produirait, et ici, comme dans le cas précédent, il est aisé de voir que les forces d'inertie peuvent être considérées comme négligeables par rapport aux forces en jeu sur chaque molécule, dans les circonstances où la protubérance elliptique est assez faible et où le mouvement de rotation ε est suffisamment lent [**].

Les circonstances dans lesquelles nous nous sommes placés sont, à

---

[*] Cet équateur est ici un des plans principaux de l'ellipsoïde qui passe par le grand axe.

[**] On voit aisément que les deux questions qui précèdent sont traitées rigoureusement au point de vue cinématique pur, et que les appréciations qui les accompagnent au point de vue dynamique sont basées sur ce principe général d'Hydrodynamique, que, dans un liquide dont les dernières parcelles sont animées de mouvements très-lents, c'est-à-dire tels que les vitesses et les forces d'inertie soient très-faibles relativement aux forces extérieures en jeu, on peut, dans l'étude dynamique du mouvement, né-

la vérité, trop éloignées de celles dans lesquelles se trouve la Terre, pour que la théorie qui précède soit directement applicable à l'étude du phénomène des marées; néanmoins, elle permet de voir comment l'onde peut se transporter dans les grands océans sans produire de courant, et par un déplacement orbitaire très-lent et de moins d'un mètre d'amplitude de toutes les molécules liquides.

---

gliger les résistances passives et attribuer aux pressions les valeurs qu'elles auraient si la masse considérée était immobile sous l'action de ces forces extérieures.

Cette dernière propriété, moins évidente que la précédente, ressort immédiatement des équations connues

$$\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dx} = X - u',$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dy} = Y - v',$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{dp}{dz} = Z - w',$$

dans lesquelles il suffit de faire u', v', w' nuls pour retrouver les équations de l'Hydrostatique.

LÉGENDE DE LA PLANCHE I.

Fig. 3. — 1, 2, 3, 4, 5, 6. Formes diverses affectées par un même parallélogramme élémentaire pendant le passage de l'onde.

Fig. 4. — 1. Position de la bande liquide au moment du passage de la crête;
3. » au moment du passage du creux;
2, 4. Positions intermédiaires sur l'un et l'autre revers de l'onde.