JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH LIOUVILLE

Solution nouvelle d'un Problème d'Analyse, relatif aux phénomènes thermo-mécaniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 439-456.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__439_0>

SOLUTION NOUVELLE

D'un Problème d'Analyse, relatif aux phénomènes thermo-mécaniques;

Par Joseph LIOUVILLE.

(Présentée à l'Académie des Sciences le 23 octobre 1837.)

Ce problème qui consiste à intégrer l'équation

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2u}{dx^2} - b^2x\int_0^1 x\frac{du}{dt}dx,$$

de telle manière que l'on ait

$$u = 0 \text{ pour } x = 0,$$
$$\frac{du}{dx} + hu = 0 \text{ pour } x = 1,$$
$$u = f(x) \text{ pour } t = 0, \text{ depuis } x = 0 \text{ jusqu'à } x = 1,$$

a été traité déjà de deux manières différentes par M. Duhamel, dans son second mémoire sur les Phénomènes thermo-mécaniques (*). L'auteur a d'abord fait usage d'une méthode assez compliquée, mais très ingénieuse, que M. Poisson a donnée dans ses premières recherches sur la théorie de la chaleur. Reprenant ensuite la question d'une autre manière, il a, dans une seconde solution, suivi la méthode si connue qui consiste à représenter la valeur complète de u par la somme d'un nombre infini de termes dont chacun satisfait aux trois

---

(*) Voyez le *Journal de l'École Polytechnique.*

premières équations et renferme implicitement une constante arbitraire, ce qui permet de satisfaire aussi à la condition $u=f(x)$ pour $t=0$. On est ainsi conduit à développer la fonction $f(x)$ en une série de la forme

$$f(x)=H_1V_1+H_2V_2+\ldots+H_nV_n+\ldots.$$

H_1, H_2,... H_n,.... étant des constantes, et V_1, V_2,... V_n,.... des fonctions connues de x. On détermine H_n en multipliant les deux membres de l'équation précédente par un facteur convenable et en intégrant ensuite entre les limites $x=0$, $x=1$, de manière à faire disparaître tous les coefficients H_1, H_2,... excepté H_n. M. Duhamel semble regarder cette détermination de H_n comme offrant la difficulté principale qu'il avait à vaincre pour résoudre le problème proposé. Mais il ne s'est occupé ni de démontrer la convergence de la série dans laquelle $f(x)$ se développe, ni même d'établir d'une manière incontestable que cette série supposée convergente a pour somme $f(x)$, du moins entre les limites $x=0$, $x=1$. J'ai donc cru pouvoir reprendre ici le problème en son entier, afin d'en donner une solution tout-à-fait rigoureuse. Cette solution du reste n'est fondée que sur des principes déjà développés dans d'autres mémoires que j'ai publiés seul ou en commun avec M. Sturm : elle servira, je l'espère, à faire reconnaître la supériorité de nos méthodes.

1. Soient b, h deux constantes, x une variable indépendante comprise entre zéro et l'unité, t une autre variable comprise entre 0 et ∞, et $f(x)$ une fonction de x qui ne devienne jamais infinie lorsque x croît depuis 0 jusqu'à 1 : par la nature physique du problème que nous voulons résoudre, la quantité $(h+1)$ est essentiellement positive. On propose de trouver une fonction u des deux variables x, t, qui satisfasse à la fois à l'équation indéfinie

$$(1)\qquad \frac{du}{dt}=\frac{d^2u}{dx^2}-b^2x\int_0^1 x\frac{du}{dt}\,dx$$

et aux conditions définies

$$(2)\qquad u=0 \quad \text{pour} \quad x=0,$$

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} + hu = 0 \quad \text{pour} \quad x = 1,$$

$$(4) \qquad u = f(x) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

La fonction u qui vérifie les quatre équations précédentes est tout-à-fait déterminée, et il s'agit d'en trouver la valeur.

2. D'après la méthode ordinairement suivie par les géomètres pour l'intégration des équations différentielles partielles, nous chercherons d'abord une valeur de u qui satisfasse aux équations (1), (2), (3), mais non pas à l'équation (4). A cet effet nous poserons

$$u = Ve^{-rt},$$

r étant un paramètre inconnu, et V une fonction de x que l'on obtiendra en intégrant l'équation différentielle du second ordre

$$(5) \qquad \frac{d^2V}{dx^2} \qquad \left(V + b^2x\int_0^1 xVdx\right) = 0,$$

de manière à satisfaire aux conditions particulières

$$(6) \qquad V = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{dV}{dx} + hV = 0 \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

L'intégrale $\int_0^1 xVdx$ étant une constante que l'on peut représenter par C, l'équation (5) s'écrira ainsi

$$\frac{d^2V}{dx^2} + r(V + b^2Cx) = 0,$$

et son intégrale complète sera

$$V = A\sin(x\sqrt{r}) + B\cos(x\sqrt{r}) - b^2Cx,$$

A et B désignant deux constantes arbitraires.

La constante B est nulle en vertu de l'équation (6). De plus on doit avoir

$$\int_0^1 xVdx = C:$$

or si l'on développe cette condition et si l'on fait

$$\alpha = \frac{3b^2}{b^2+3} \cdot \frac{\sin(\sqrt{r}) - \sqrt{r}\cos(\sqrt{r})}{r},$$

on trouve

$$C = \frac{A\alpha}{b^2}.$$

Quant à la constante A qui reste arbitraire, nous la prendrons égale à $\frac{1}{\sqrt{r}}$. Ayant donc

$$B = 0, \quad A = \frac{1}{\sqrt{r}}, \quad C = \frac{\alpha}{b^2\sqrt{r}},$$

nous en conclurons

$$(8) \qquad V = \frac{\sin(x\sqrt{r}) - \alpha x}{\sqrt{r}}.$$

Il importe d'observer que cette valeur de V ne devient identiquement nulle pour aucune valeur déterminée de r, tant que x reste indéterminée. En effet si le paramètre r est différent de zéro, il est impossible que la fonction transcendante $\sin(x\sqrt{r})$ soit égale à la fonction algébrique αx, et si ce paramètre est nul $\frac{\sin(x\sqrt{r})}{\sqrt{r}}$ se réduit à x, $\frac{\alpha}{\sqrt{r}}$ se réduit à $\frac{b^2}{b^2+3}$, et l'on a $V = \frac{3x}{b^2+3}$ quantité qui n'est pas identiquement nulle.

3. En différentiant la valeur de V il vient

$$\frac{dV}{dx} = \cos(x\sqrt{r}) - \frac{\alpha}{\sqrt{r}},$$

de sorte que, pour $x = 1$, on obtient

$$V = \frac{\sin(\sqrt{r}) - \alpha}{\sqrt{r}},$$

$$\frac{dV}{dx} = \cos(\sqrt{r}) - \frac{\alpha}{\sqrt{r}}.$$

En portant ces valeurs dans la formule (7), on aura l'équation à laquelle le paramètre r doit satisfaire. Cette équation sera

$$\cos(\sqrt{r}) - \frac{\alpha}{\sqrt{r}} + h.\frac{\sin(\sqrt{r}) - \alpha}{\sqrt{r}} = 0,$$

ou

$$(9) \qquad \cos(\sqrt{r}) + \frac{h\sin(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} - \frac{\alpha(h+1)}{\sqrt{r}} = 0.$$

Nous représenterons toujours par $\varpi(r)$ on premier membre, en sorte que l'on aura

$$\varpi(r) = \frac{dV}{dx} + hV \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

L'équation (9) possède une infinité de racines, toutes réelles, positives et inégales entre elles. Soient r_1, $r_2, \ldots r_n, \ldots$ ces racines rangées par ordre de grandeur, r_1 étant la plus petite : en faisant dans la fonction V successivement $r = r_1$, $r = r_2, \ldots r = r_n, \ldots$ on aura une suite de fonctions V_1, $V_2, \ldots V_n, \ldots$ dont chacune fournira une intégrale particulière de l'équation (1). Avant de montrer comment, en réunissant ces intégrales particulières, on forme la valeur complète de u, nous allons démontrer les propriétés des racines de l'équation (9) dont nous venons de faire mention.

4. Je vais prouver d'abord que les racines réelles de l'équation (9) ne peuvent jamais être négatives. A cet effet je développe $\varpi(r)$ en série convergente. On a par les formules connues

$$\cos(\sqrt{r}) = 1 - \frac{r}{2} + \frac{r^2}{2.3.4} - \text{etc.},$$
$$\sin(\sqrt{r}) = \sqrt{r}\left(1 - \frac{r}{2.3} + \frac{r^2}{2.3.4.5} - \text{etc.}\right),$$

et par suite

$$\cos(\sqrt{r}) + \frac{h\sin(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} = (1+h) - \frac{r}{2}\left(1+\frac{h}{3}\right) + \frac{r^2}{2.3.4}\left(1+\frac{h}{5}\right) - \text{etc.},$$
$$\frac{\alpha(h+1)}{\sqrt{r}} = \frac{3b^2(h+1)}{b^2+3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{r}{2.3} + \frac{1}{7}\cdot\frac{r^2}{2.3.4.5} - \text{etc.}\right).$$

Cela étant, il vient

$$\varpi(r) = (1+h) - \frac{r}{2}\left(1+\frac{h}{3}\right) + \frac{r^2}{2.3.4}\left(1+\frac{h}{5}\right) - \ldots\ldots$$
$$- \frac{3b^2(h+1)}{b^2+3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cdot\frac{r}{2.3} + \frac{1}{7}\cdot\frac{r^2}{2.3.4.5} - \ldots\right).$$

Si donc il y avait une racine réelle et négative $-R$ de l'équation (9), les deux séries

$$(1+h) + \frac{R}{2}\left(1+\frac{h}{3}\right) + \frac{R^2}{2.3.4}\left(1+\frac{h}{5}\right) + \ldots\ldots,$$
$$\gamma(1+h) + \frac{3\gamma R}{2.3}\left(\frac{1+h}{5}\right) + \frac{3\gamma R^2}{2.3.4.5}\left(\frac{1+h}{7}\right) + \ldots\ldots,$$

(dans lesquelles on a représenté par γ le rapport $\frac{b^2}{b^2+3}$ qui est < 1) seraient égales entre elles, et cela ne se peut puisqu'en les comparant terme à terme on trouve que chacun des termes de la seconde série est plus petit que le terme correspondant de la première, du moins quand le coefficient h est compris (comme on le suppose) entre -1 et $+\infty$.

5. Pour démontrer en second lieu que les racines de l'équation (9) sont toutes réelles et inégales, il faut s'appuyer sur une formule dont nous aurons souvent besoin dans la suite.

Désignons par V′ ce que devient la valeur (8) de V lorsqu'on y remplace r par une indéterminée r'. La fonction V′ satisfera aux équations (5), (6), et l'on aura

$$\frac{d^2V'}{dx^2} + r'\left(V' + b^2x\int_0^1 xV'dx\right) = 0,$$
$$V' = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

Mais l'équation (7) ne sera satisfaite par cette même fonction que dans le cas particulier où l'on prendra $r' =$ une des racines de l'équation (9), ce que l'on ne fera pas d'abord. Maintenant je multiplie par les facteurs respectifs V, V′ les deux équations

$$r'\left(V' + b^2 x\int_0^1 xV'dx\right) = -\frac{d^2V'}{dx^2},$$
$$r\left(V + b^2 x\int_0^1 xVdx\right) = -\frac{d^2V}{dx^2},$$

après quoi je les retranche et j'intègre entre les limites $x = 0$, $x = 1$: en divisant par $(r' - r)$ les deux membres de l'équation à laquelle ce calcul conduit, et nommant Q la valeur de $V'\frac{dV}{dx} - V\frac{dV'}{dx}$ pour $x = 1$, j'obtiens

$$\int_0^1 VV'dx + b^2\int_0^1 xVdx\int_0^1 xV'dx = \frac{Q}{r' - r}.$$

Mais r étant racine de l'équation (9), on a, pour $x = 1$, $\frac{dV}{dx} = -hV$: on a aussi $\frac{dV'}{dx} + hV' = \varpi(r')$ et par conséquent $\frac{dV'}{dx} = \varpi(r') - hV'$: la valeur de Q se réduit donc à $-V\varpi(r')$, ce qui donne

$$\frac{Q}{r' - r} = -\frac{V\varpi(r')}{r' - r} \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

Supposons actuellement que r' soit racine de l'équation (9), en sorte que l'on ait $\varpi(r') = 0$: on trouvera

$$\frac{Q}{r' - r} = 0$$

si les racines r, r' sont inégales, et

$$Q = -V\frac{d\varpi(r)}{dr} \quad \text{pour} \quad x = 1,$$

si elles sont égales entre elles. Dans le premier cas il viendra

$$(10) \qquad \int_0^1 VV'dx + b^2\int_0^1 xVdx\int_0^1 xV'dx = 0,$$

tandis que l'on aura dans le second

$$(11) \qquad \int_0^1 V^2 dx + b^2\left(\int_0^1 xVdx\right)^2 = -\frac{V(1)\, d\varpi(r)}{dr},$$

$V(1)$ désignant la valeur de V qui répond à $x = 1$.

D'après un raisonnement connu, la formule (10) prouve que l'équation (9) n'a pas de racine de la forme $\lambda + \mu\sqrt{-1}$: en effet si cette racine existait, la racine conjuguée $\lambda - \mu\sqrt{-1}$ existerait aussi : on pourrait donc prendre $r = \lambda + \mu\sqrt{-1}$, $r' = \lambda - \mu\sqrt{-1}$: en posant $r = \lambda + \mu\sqrt{-1}$, V prendra la forme $M + N\sqrt{-1}$, M et N désignant deux quantités réelles qui ne peuvent être à la fois identiquement nulles (tant que x reste indéterminée) puisque la fonction V est en général différente de zéro : il est aisé de voir que l'on aura de même $V' = M - N\sqrt{-1}$: par suite la formule (10) nous donnera ce résultat absurde

$$\int_0^1 (M^2 + N^2)dx + b^2\left(\int_0^1 xMdx\right)^2 + b^2\left(\int_0^1 xNdx\right)^2 = 0.$$

Donc il est impossible d'admettre que l'équation (9) ait une racine de la forme $\lambda + \mu\sqrt{-1}$.

Les racines réelles de cette équation sont d'ailleurs inégales en vertu de la formule (11), car si la racine r était multiple, la dérivée $\frac{d\varpi(r)}{dr}$ s'évanouirait en même temps que $\varpi(r)$ et le second membre de l'équation (11) se réduirait à zéro tandis que le premier est essentiellement positif.

6. Les racines de l'équation (9) sont donc réelles, positives et inegales entre elles. Pour se convaincre que le nombre de ces racines est infini, il suffit de mettre l'équation (9) sous la forme

$$\cos(\sqrt{r}) = -\frac{h\sin(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} + \frac{\alpha(h+1)}{\sqrt{r}},$$

puis de regarder r comme une abscisse variable entre les limites 0, ∞, et de construire les deux courbes ayant pour équations respectives

$$y = \cos(\sqrt{r}), \quad y = -\frac{h\sin(\sqrt{r})}{\sqrt{r}} + \frac{\alpha(h+1)}{\sqrt{r}}:$$

ces deux courbes se coupent en un nombre infini de points dont les abscisses répondent aux racines de l'équation (9).

Pour démontrer analytiquement le même théorème, faisons $r=\rho^2$ l'équation proposée deviendra

$$(12) \qquad \cos\rho + \frac{h\sin\rho}{\rho} - \frac{\alpha(h+1)}{\rho} = 0;$$

et il suffira de considérer les valeurs positives de ρ. Maintenant soit i un nombre entier et positif très grand. Si, dans le premier membre de l'équation (12), nous faisons $\rho=(2i+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, puis $\rho=(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, le terme $\cos\rho$ prendra successivement deux valeurs égales et de signes contraires dont le carré sera $\frac{1}{2}$: les autres termes seront très petits. Donc le premier membre de l'équation (12) changera de signe en passant d'une de ces substitutions à l'autre, ce qui exige que l'équation proposée ait une racine comprise entre les deux limites $(2i+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, $(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$. Cette racine est du reste unique; car, dans le cas contraire, il faudrait que la dérivée prise par rapport à ρ de la fonction

$$\cos\rho + \frac{h\sin\rho}{\rho} - \frac{\alpha(h+1)}{\rho}$$

devînt égale à zéro une ou plusieurs fois lorsque ρ croît depuis $(2i+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$ jusqu'à $(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$; et cela ne se peut puisque, dans l'intervalle cité, tous les termes de cette dérivée sont très petits à l'exception du premier $-\sin\rho$ qui ne change pas de signe et conserve toujours une valeur numérique supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

En augmentant i d'une unité, on verra qu'une seconde racine est comprise entre les limites $(2i+3)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, $(2i+3)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$; une troisième racine existe de même entre les limites $(2i+5)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, $(2i+5)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, et ainsi de suite. Mais il n'en existe aucune entre

$(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ et $(2i+3)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, entre $(2i+3)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ et... $(2i+5)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, etc., comme on peut s'en convaincre en observant que, dans chacun de ces intervalles, le terme principal $\cos\rho$ du premier membre de l'équation (12) ne change jamais de signe et a toujours une valeur absolue supérieure à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. La racine ρ comprise entre les limites $(2i+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}$, .. $(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ s'obtient du reste sans difficulté puisque si l'on pose

$$\alpha(h+1)-h\sin\rho=\mathrm{f}(\rho),\quad \rho=(2i+1)\frac{\pi}{2}+\sigma$$

l'équation (12), savoir

$$\cos\rho=\frac{f(\rho)}{\rho},$$

devient

$$\sin(2i+1)\frac{\pi}{2}\sin\sigma=-\frac{\mathrm{f}\left((2i+1)\frac{\pi}{2}+\sigma\right)}{(2i+1)\frac{\pi}{2}+\sigma};$$

d'où l'on tire à très peu près

$$(13)\qquad \sigma=\frac{h}{i\pi},$$

valeur d'autant plus approchée que i est plus grand. On pourrait pousser plus loin l'approximation; mais nous nous contenterons d'observer que, d'après nos calculs, les racines ρ très grandes sont de la forme

$$(14)\qquad \rho=(2i+1)\frac{\pi}{2}+\frac{\mathrm{B}_i}{i},$$

i désignant un nombre entier qui croît successivement d'une unité, et B_i une fonction de l'indice i dont la valeur absolue ne dépasse jamais un certain *maximum* que l'on assignerait facilement. La partie principale de ces racines croît proportionnellement au nombre i, d'où il est aisé de conclure que toutes les séries dont le terme général est

$\frac{\Psi}{\rho^2}$ ou $\frac{\Psi}{i\rho}$ sont convergentes, si Ψ désigne une fonction de ρ ou de i qui ne surpasse jamais un certain *maximum* absolu L, indépendant de l'indice i.

8. Chacune des intégrales particulières

$$V_1 e^{-r_1 t}, \ldots \quad V_2 e^{-r_2 t}, \quad V_n e^{-r_n t}, \ldots$$

dans lesquelles V_n désigne ce que devient V lorsqu'on y pose $r = r_n$, satisfait à la fois aux équations (1), (2), (3). Si donc on désigne par H_1, $H_2, \ldots H_n \ldots$ des constantes arbitraires et si l'on fait

$$u = H_1 V_1 e^{-r_1 t} + H_2 V_2 e^{-r_2 t} + \ldots + H_n V_n e^{-r_n t} + \ldots,$$

cette valeur de u vérifiera aussi les équations (1), (2), (3). Mais pour qu'elle vérifie la condition (4), il faudra que l'on ait

$$f(x) = H_1 V_1 + H_2 V_2 + \ldots + H_n V_n + \ldots.$$

Il s'agit maintenant de savoir si (la fonction $f(x)$ étant quelconque) on peut, par une détermination convenable des constantes H_1, $H_2, \ldots$ $H_n, \ldots$ rendre identique cette dernière équation, du moins pour des valeurs de x comprises entre 0 et 1.

D'abord, si l'on admet que la fonction $f(x)$ puisse se développer sous la forme

$$(15) \qquad f(x) = H_1 V_1 + H_2 V_2 + \ldots + H_n V_n + \ldots,$$

il sera facile de former la valeur de H_n. On se servira pour cela de la formule (10) qui peut s'écrire ainsi

$$\int_0^1 V\left(V' + b^2 x \int_0^1 x V' dx\right) dx = 0.$$

On a

$$V' + b^2 x \int_0^1 x V' dx = -\frac{d^2 V'}{dx^2} = \sqrt{r'} \sin(x\sqrt{r'}) :$$

la formule en question devient donc

$$(16) \qquad \int_0^1 \mathrm{V} \sin(x\sqrt{r'})dx = 0.$$

Maintenant multiplions par $\sin(x\sqrt{r_n})$ les deux membres de l'équation (15) et intégrons ensuite entre les limites $x = 0$, $x = 1$: il est aisé de voir qu'en vertu de la formule (16) tous les coefficients H_1, $\mathrm{H}_2, \ldots$ disparaîtront excepté celui qui porte l'indice n, de sorte qu'il restera simplement

$$\int_0^1 f(x) \sin(x\sqrt{r_n})dx = \mathrm{H}_n \int_0^1 \mathrm{V}_n \sin(x\sqrt{r_n})dx,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{H}_n = \frac{\int_0^1 f(x)\sin(x\sqrt{r_n})dx}{\int_0^1 \mathrm{V}_n \sin(x\sqrt{r_n})dx}.$$

En adoptant cette valeur de H_n, on aura

$$(17) \qquad f(x) = \Sigma \left\{ \frac{\mathrm{V}_n \int_0^1 f(x)\sin(x\sqrt{r_n})dx}{\int_0^1 \mathrm{V}_n \sin(x\sqrt{r_n})dx} \right\},$$

et par conséquent,

$$(18) \qquad u = \Sigma \left\{ \frac{\mathrm{V}_n e^{-r_n t} \int_0^1 f(x)\sin(x\sqrt{r_n})dx}{\int_0^1 \mathrm{V}_n \sin(x\sqrt{r_n})dx} \right\}.$$

La formule (18) renferme la solution complète du problème que nous voulions résoudre. Mais elle se déduit de la formule (17) dont l'exactitude jusqu'ici n'est pas suffisamment démontrée. Nous allons donc considérer en elle-même la série placée au second membre de la formule (17). Nous représenterons sa valeur par $\mathrm{F}(x)$ et nous prouverons 1°. que la série $\mathrm{F}(x)$ est convergente, 2°. que l'on a $\mathrm{F}(x) = f(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1.

9. Représentons par T le terme général de la série $F(x)$, ou, autrement dit, posons

$$T = \frac{(\sin \rho x - \alpha x)\int_0^1 f(x) \sin \rho x dx}{\int_0^1 \sin \rho x (\sin \rho x - \alpha x) dx},$$

ρ^2 étant une quelconque des racines de l'équation (9), et contentons-nous de considérer les valeurs de ρ très grandes, les seules dont nous ayons besoin pour constater la convergence de la série ΣT : ces valeurs de ρ sont de la forme

$$\rho = (2i + 1)\frac{\pi}{2} + \frac{B_i}{i},$$

comme on l'a vu n° 7 : i désigne un nombre entier qui croît successivement d'une unité et B_i une fonction de l'indice i qui ne dépasse jamais un certain *maximum* absolu indépendant de i. Nous désignerons généralement par les lettres $\Psi, \Psi', \Psi'', \ldots$ les fonctions qui jouissent comme B_i de la propriété dont nous venons de parler. Toute série dont le terme général sera de la forme $\frac{\Psi}{i^q}$, q étant un nombre > 1, sera convergente: il en résulte qu'on peut au numérateur de la fraction T et à son dénominateur (dont la valeur très approchée est $\frac{1}{2}$) négliger les termes de la forme $\frac{\Psi}{i}$, car ces termes ne produisent dans la série ΣT qu'une partie de la forme $\Sigma \frac{\Psi'}{i^2}$, et par conséquent ne peuvent en aucune manière nuire à sa convergence. D'après cela, on peut d'abord faire abstraction des termes multipliés par α, car en remplaçant $\sqrt{r}$ ou ρ par sa valeur, on trouve que α est de la forme $\frac{\Psi}{i^2}$. De plus l'intégrale $\int_0^1 \sin^2 \rho x dx$ étant égale à $\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\rho}{4\rho}$ se réduit à $\frac{1}{2}$ quand, après avoir mis pour ρ sa valeur, on néglige les termes réductibles à la forme $\frac{\Psi}{i^2}$. Ainsi à ces termes près on a

$$\int_0^1 \sin \rho x (\sin \rho x - \alpha x) dx = \frac{1}{2}.$$

La valeur simplifiée de T est donc

$$T = 2\sin\rho x\int_0^1 f(x)\sin\rho x dx.$$

On peut même la simplifier encore en se rappelant que, par un théorème dont j'ai donné ailleurs la démonstration (*), l'intégrale $\int_0^1 f(x)\sin\rho x dx$ est de la forme $\frac{\psi}{\rho}$ ou $\frac{\psi}{i}$: on peut donc négliger le produit de cette intégrale par la partie du facteur

$$\sin\rho x\left[\text{égal à } \sin\frac{(2i+1)\pi x}{2}\cos\frac{B_i x}{i} + \cos\frac{(2i+1)\pi x}{2}\sin\frac{B_i x}{i}\right]$$

qui est aussi de la forme $\frac{\psi}{i}$, ou, ce qui revient au même, on peut, hors du signe $\int$, réduire $\sin\rho x$ à sa partie principale $\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2}$: de plus en négligeant sous le signe $\int$ des termes divisés par i^2, on a le droit de remplacer

$$\sin\rho x \text{ par } \sin\frac{(2i+1)\pi x}{2} + \frac{B_i x}{i}\cos\rho x.$$

Nous aurons ainsi

$$T = 2\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2}\int_0^1 f(x)\left(\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2} + \frac{B_i x}{i}\cos\rho x\right)dx.$$

D'après cette valeur de T, la série ΣT se décompose en deux autres, savoir

$$2\Sigma\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2}\int_0^1 f(x)\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2}dx,$$
$$2x\Sigma\frac{B_i}{i}\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2}\int_0^1 f(x)\cos\rho x\, dx.$$

La première de ces deux séries est convergente, comme les géomètres l'ont démontré depuis long-temps, et pour constater la convergence de

(*) *Voyez* mon *troisième mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions, etc.*, page 418 du présent volume.

la seconde dont tous les termes sont déjà divisés par i, il suffit d'observer que l'intégrale $\int_0^1 f(x) \cos \rho x dx$ est de la forme $\frac{\psi}{\rho}$ ou $\frac{\psi}{i}$, conformément à ce que j'ai fait voir dans le mémoire cité plus haut.

10. Pour prouver que l'on a $F(x) = f(x)$ entre les limites $x = 0$, $x = 1$, reprenons l'équation

$$F(x) = \Sigma \left\{ \frac{V_n \int_0^1 f(x) \sin(x\sqrt{r_n})\, dx}{\int_0^1 V_n \sin(x\sqrt{r_n}) dx} \right\}.$$

Multiplions par $\sin(x\sqrt{r_n})\, dx$ les deux membres de cette équation, et intégrons ensuite entre les limites $x = 0$, $x = 1$. En vertu de la formule (16) cette intégration fera disparaître tous les termes du second membre à l'exception d'un seul et donnera

$$\int_0^1 F(x) \sin(x\sqrt{r_n})\, dx = \int_0^1 f(x) \sin(x\sqrt{r_n})\, dx,$$

ou bien

$$\int_0^1 [F(x) - f(x)] \sin(x\sqrt{r_n})\, dx = 0.$$

Mais si l'on désigne par z une variable indépendante et si l'on considère la fraction $\frac{\sin(x\sqrt{z})}{\sqrt{z}\,\varpi(z)}$, qui est fonction de z, on s'assure aisément (tant que x reste comprise entre 0 et 1) que cette fraction est décomposable en une infinité de fractions simples : par la théorie connue et en représentant par $\varpi'(r_n)$ la dérivée $\frac{d\varpi(r_n)}{dr_n}$, on trouve

$$\frac{\sin(x\sqrt{z})}{\sqrt{z}\,\varpi(z)} = \Sigma \left\{ \frac{\sin(x\sqrt{r_n})}{(z - r_n)\sqrt{r_n}\,\varpi'(r_n)} \right\}.$$

Soit R le terme général de la série placée au second membre de l'équation que nous venons d'écrire. Nous aurons

$$R = \frac{\sin(x\sqrt{r})}{(z-r)\sqrt{r}\,\varpi'(r)},$$

r désignant une quelconque des racines de l'équation (9). Si l'on se borne aux racines r très grandes, on a, par la formule du n° 7,

$$\sqrt{r} = \frac{(2i+1)\pi}{2} + \frac{B_i}{i};$$

d'où l'on conclut sans difficulté que R est de la forme $\frac{\psi}{i^2}$ et que par conséquent la série ΣR est convergente. Maintenant il vient

$$\sin(x\sqrt{z}) = \sqrt{z}\,\varpi(z)\,\Sigma\left\{\frac{\sin(x\sqrt{r_n})}{(z-r_n)\sqrt{r_n}\,\varpi'(r_n)}\right\}.$$

L'intégrale

$$\int_0^1 [F(x - f(x)]\sin(x\sqrt{z})\,dx$$

est donc égale à

$$\sqrt{z}\,\varpi(z)\,\Sigma\left\{\frac{1}{(z-r_n)\sqrt{r_n}\,\varpi'(r_n)}\cdot\int_0^1 [F(x)-f(x)]\sin(x\sqrt{r_n})dx\right\},$$

et chacun des termes dont elle se compose est égal à zéro. Ainsi l'on est conduit à l'équation générale

$$\int_0^1 [F(x)-f(x)]\sin(x\sqrt{z})\,dx = 0;$$

et, à cause de l'indéterminée z, celle-ci ne peut subsister qu'autant que l'on a

$[F(x) - f(x)]\sin(x\sqrt{z})\,dx = 0$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$,

ce qui donne généralement

(20) $\quad F(x) = f(x)$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$:

toutefois comme le facteur $\sin(x\sqrt{z})$ est nul pour $x = 0$, il pourra arriver que l'on n'ait pas $F(0) = f(0)$: cette dernière équation dont le premier membre est toujours nul ne sera vérifiée que si la quantité $f(0)$ est égale à zéro, ce que nous admettons effectivement.

11. Pour bien voir comment l'équation (19) entraîne l'équation (20), il suffit de donner à $\sqrt{z}$ une valeur de la forme $Z\sqrt{-1}$, ce qui transforme le sinus de $x\sqrt{z}$ en exponentielles. On peut aussi remplacer $\sin(x\sqrt{z})$ par la série $x\sqrt{z} - \frac{x^3 z\sqrt{z}}{2.3} +$ etc., et en égalant à zéro le coefficient de chacune des puissances de l'indéterminée z dans l'équation (19), on a généralement

$$(21) \qquad \int_0^1 x[F(x) - f(x)]\, x^{2q} dx = 0,$$

q étant zéro ou un nombre entier positif. Or, si la fonction $x[F(x) - f(x)]$ n'est pas identiquement nulle depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, l'équation (21) ne peut pas subsister à moins que cette fonction ne change de signe un certain nombre m de fois : sans cela en effet les éléments de l'intégrale placée au premier membre seraient tous de même signe et ne pourraient avoir zéro pour somme. Soient donc $x_1, x_2, \ldots x_m$ les m valeurs de x pour lesquelles $F(x) - f(x)$ change de signe ; et représentons par

$$A + Bx^2 + Cx^4 + \ldots + x^{2m}$$

le développement du produit

$$(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)\ldots(x^2 - x_m^2).$$

Si dans l'équation (21) on pose successivement $q = 0$, $q = 1, \ldots q = m$, et si l'on ajoute entre elles toutes les équations ainsi obtenues, après les avoir multipliées par les facteurs respectifs A, B, etc., on aura

$$\int_0^1 x[F(x) - f(x)]\,(x^2 - x_1^2)(x - x_2^2)\ldots(x^2 - x_m^2)\, dx = 0,$$

équation absurde, puisque la quantité placée sous le $\int$ ne change jamais de signe entre les limites de l'intégrale. On est donc obligé de reconnaître que l'équation (21) donne

$$x[F(x) - f(x)] = 0 \text{ depuis } x = 0 \text{ jusqu'à } x = 1.$$

12. Il nous reste enfin à montrer que la série placée au second

membre de l'équation (18) est convergente pour toute valeur positive de t. Adoptons les notations du n° 9 : le terme général de la série dont nous parlons sera $Te^{-\rho^2 t}$: de plus pour établir la convergence de la série $\Sigma Te^{-\rho^2 t}$, on pourra, comme on l'a vu ci-dessus dans un cas semblable, négliger les termes de la forme $\frac{\psi}{\rho^2}$ et prendre simplement

$$T = 2 \sin \rho x \int_0^1 f(x) \sin \rho x dx.$$

La valeur numérique de T qui résulte de l'équation que je viens d'écrire est plus petite que $2f_1$, f_1 étant le *maximum* absolu de $f(x)$. Par conséquent celle de $Te^{-\rho^2 t}$ est inférieure à $2f_1 e^{-\rho^2 t}$. Or la série qui a pour terme général $2f_1 e^{-\rho^2 t}$ est évidemment convergente donc *à fortiori* la série $\Sigma Te^{-\rho^2 t}$ est aussi convergente.