JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

Thèses de mécanique et d'astronomie; première partie

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 337-365.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__337_0>

THÈSES

DE MÉCANIQUE ET D'ASTRONOMIE;

PAR M. LEBESGUE,

Professeur-suppléant à la Faculté des Sciences de Grenoble

PREMIÈRE PARTIE.

Formules pour la transformation des fonctions homogènes du second degré à plusieurs inconnues.

I.

Le problème dont nous allons nous occuper conduit à certaines équations déterminées qui se présentent souvent dans les questions de Mécanique, d'Astronomie et de Physique, et que M. Jacobi a récemment étudiées (*). D'autres mémoires publiés antérieurement par divers géomètres se rattachent plus ou moins à notre sujet. On consultera par exemple les *Exercices mathématiques de M. Cauchy* (tome IV, page 140) et surtout le *Bulletin des Sciences mathématiques* de M. Férussac (tome XII page 314) où se trouve l'extrait d'un excellent mémoire de M. Sturm. Nous nous bornons ici à ces citations générales. Le lecteur jugera ce qu'il peut y avoir de neuf sinon dans nos formules, au moins dans la manière de les démontrer.

PROBLÈME. *Étant donnée une fonction homogène du second degré à plusieurs inconnues, il faut en faire disparaître les rectangles de ces inconnues, au moyen d'une substitution, qui laisse la fonction homogène et du second degré entre le même nombre de nouvelles inconnues.*

(*) Journal de M. Crelle, tome XII, p. 1.

$$(33) \qquad a^2_{k,\varkappa} = -\frac{dU}{dA_{k,k}} : \frac{dU}{du},$$

où il faudra changer u en $U\alpha$.

La remarque faite sur les racines égales montre que $a^2_{k,\varkappa}$ peut se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$, mais non sous la forme $\frac{m}{0}$.

Dans la formule (33), quand on a mis dans $\frac{dU}{du}$, pour u sa valeur particulière $U_\varkappa$, on peut encore remplacer $\frac{dU}{du}$ par le produit

$$\pm(U_\varkappa - U_1)(U_\varkappa - U_2)\ldots(U_\varkappa - U_{\varkappa-1})(U_\varkappa - U_{\varkappa+1})\ldots(U_\varkappa - U_n),$$

selon que n est pair ou impair, pourvu cependant que toutes les racines soient inégales. Cela suit de ce qu'en posant $U = (u - U_1)(u - U_2)\ldots(u - U_n)$, il en résulte

$$\frac{dU}{du} = \frac{U}{u - U_1} + \frac{U}{u - U_2} + \ldots\ldots + \frac{U}{u - U_n}.$$

Si dans cette équation l'on fait, par exemple, $u = U_1$, le premier terme se réduit à $(U_1 - U_2)(U_1 - U_3)\ldots\ldots(U_1 - U_n)$, et tous les autres disparaissent à cause du facteur nul $U_1 - U_1$. On en dira autant pour les autres substitutions $u = U_2$, $u = U_3 \ldots u = U_\varkappa \ldots u = U_n$. Cette transformation pourra, dans certains cas, faciliter la discussion en déterminant le signe du dénominateur.

Résumé de la solution.

La transformation de la fonction (1) en la fonction (7), par le moyen de la substitution (3), est renfermée uniquement dans les formules (22), (32) et (33).

L'équation (22) fait connaître les coefficients U_1, $U_2 \ldots U_n$ de la transformée (7) par le moyen de la résolution d'une équation du n^e degré.

L'équation (33) fait connaître la valeur absolue des n^2 coefficients de la substitution (3), par l'extraction de la racine carrée du quotient de deux coefficients différentiels du premier membre U de l'équation (22).

Comme ces coefficients peuvent être pris soit avec le signe $+$, soit avec le signe $-$, l'équation (32) donne le moyen de combiner convenablement les signes en montrant que les termes de la série

$$a_{1,\alpha},\ a_{2,\alpha},\ a_{3,\alpha} \ldots\ldots a_{n,\alpha}$$

ont les mêmes signes que ceux de la série

$$\frac{dU}{dA_{1,n}},\ \frac{dU}{dA_{2,n}},\ \frac{dU}{dA_{3,n}} \ldots\ldots,\ \frac{dU}{dA_{n,n}},$$

où l'on doit faire $u = U\alpha$. On pourrait encore prendre tous les signes opposés. Cela tient au signe que l'on donne à $a_{n,\alpha}$.

IV.

Autre transformation de l'équation homogène du second degré à n inconnues.

La transformation précédente est fondée sur la relation...... $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$, si l'on prend une autre équation de condition, la solution du problème aura besoin de modification. Il est une autre transformation aussi utile que la précédente, c'est celle fondée sur la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2 - y_n^2.$$

Il serait long et d'ailleurs inutile de recommencer le calcul, il suffira d'indiquer ici les changements à faire dans une partie des équations des articles I et III.

Les équations de (1) à (8) inclusivement n'éprouvent aucun changement.

Dans l'équation (9), il faut changer le signe du dernier terme de chaque membre, changement qui entraîne tous les suivants.

Dans les $n - 1$ premières équations (10) il faudra changer le signe du dernier terme du premier membre, et dans la n^e qui répond à $\alpha = n$, il faudra changer le signe du dernier terme du premier membre et de plus le signe du second membre.

Dans toutes les équations (11) le dernier terme changera de signe.

Dans les équations (12) les derniers termes des seconds membres changeront de signe, et il en sera de même du premier membre de la n^e.

Dans les équations (13) les signes des derniers termes des premiers membres changeront : de plus dans la n^e équation il faudra changer le signe du deuxième membre.

Dans les équations (14), les derniers termes changeront de signe.

Dans les équations (15) il faudra changer $A_{n,n} - U_\alpha$ en $A_{n,n} + U_\alpha$. De plus si $\alpha = n$, il faudra dans toutes changer U_n en $-U_n$. D'ailleurs dans la dernière équation (15) il faudra toujours changer le signe du dernier terme du premier membre, et changer celui du second membre, seulement pour $\alpha = n$.

Les équations de (16) à (21) ou de l'article II ne changent point.

Dans les équations de (22) à (26), il faut seulement changer $A_{n,n} - u$ en $A_{n,n} + u$, et d'ailleurs changer le signe de la racine U_n.

Dans l'équation (27) il faut changer le signe du dernier terme $\frac{dU}{dA_{n,n}}$.

Dans l'équation (28) il faudra dans le second membre prendre négativement les termes tels que $\left(\frac{dU}{dA_{\alpha,n}}\right)^2$.

Ce qui a été démontré pour la réalité des racines et sur leur égalité n'a plus lieu ici même pour le cas de deux inconnues.

Dans l'équation (29) il n'y a rien à changer dans l'équation (30), et dans la $(31)^e$ il faudra changer le signe de $[n, n]$ au dénominateur et aussi au numérateur pour $\alpha = n$.

Dans l'équation (32) il n'y a rien à changer : dans la $(33)^e$, il faudra pour le cas de $\alpha = n$, changer le signe du second membre, et de plus remplacer U_n par $- U_n$,

Enfin si l'on pose

$$\begin{aligned} x_1 &= x_n \cos\theta_1, \quad x_2 = x_n \cos\theta_2, \ldots x_{n-1} = x_n \cos\theta_{n-1}, \\ y_1 &= y_n \cos\varphi_1, \quad y_2 = y_n \cos\varphi_2, \ldots y_{n-1} = y_n \cos\varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

et d'ailleurs,

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \ldots + \cos^2\theta_{n-1} = 1,$$

il en résultera

$$\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2+\ldots+\cos^2\varphi_{n-1}=1\,;$$

et l'on transformera la fonction

$$\begin{array}{l}
A_{1,1}\cos^2\theta_1+2A_{1,2}\cos\theta_1\cos\theta_2+\ldots+2A_{1,n-1}\cos\theta_1\cos\theta_{n-1}+2A_{1,n}\cos\theta_1\\
\qquad+A_{2,2}\cos^2\theta_2+\ldots\ldots+2A_{2,n-1}\cos\theta_2\cos\theta_{n-1}+2A_{2,n}\cos\theta_2\\
\qquad\qquad\vdots\\
\qquad\qquad+A_{n-1,n-1}\cos^2\theta_{n-1}+2A_{n-1,n}\cos\theta_{n-1}\\
\qquad\qquad\qquad+A_{n,n},
\end{array}$$

en

$$U_1\cos^2\varphi_1+U_2\cos^2\varphi_2+\ldots+U_{n-1}\cos^2\varphi_{n-1}-U_n,$$

ou

$$(U_1-U_n)\cos^2\varphi_1+(U_2-U_n)\cos^2\varphi_2+\ldots+(U_{n-1}-U_n)\cos^2\varphi_{n-1}$$

au dénominateur près, par le moyen de la substitution

$$\cos\theta_i=\frac{a_{i,1}\cos\varphi_1+a_{i,2}\cos\varphi\varphi_2+\ldots+a_{i,n-1}\cos\varphi_{n-2}+a_{i,n}}{a_{n,1}\cos\varphi_2+a_{n,2}\cos_2+\ldots\ldots+a_{n,n-1}\cos\varphi_{n-1}+a_{n,n}}$$

où il faut donner à i toutes les valeurs $1,\ 2,\ 3\ldots n$.

Il serait inutile d'entrer dans de plus longs détails sur cette seconde transformation. L'application qui en sera faite plus loin, éclaircira ce qui peut rester d'obscur dans les indications précédentes.

SECONDE PARTIE.

APPLICATIONS.

I.

Exemple de la première transformation. Détermination des axes principaux de rotation.

Les équations du mouvement d'un corps solide contiennent les neuf intégrales définies suivantes : $\int x dm$, $\int y dm$, $\int z dm$; $\int xy dm$, $\int xz dm$, $\int yz dm$; $\int x^2 dm$, $\int y^2 dm$, $\int z^2 dm$ étendues à toute la masse du corps dont l'élément est dm, et qui est rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires x, y, z.

Il importerait donc de simplifier les équations différentielles du mouvement par un changement d'axes et d'origine qui fît disparaître un certain nombre de ces intégrales, quand bien même les nouveaux axes ne devraient pas jouir de propriétés mécaniques remarquables.

Les trois premières intégrales disparaissent quand on met l'origine au centre de gravité du corps. Les trois suivantes peuvent aussi disparaître, quelle que soit l'origine; il suffit pour cela de choisir convenablement la direction de trois nouveaux axes rectangulaires de même origine.

Pour démontrer cette proposition en faisant usage des formules de la première partie, on remplacera x, y, z, par x_1, x_2, x_3, et l'on supposera que pour les axes sur lesquels se comptent ces coordonnées, on ait trouvé

$$\int x_1^2 dm = A_{1,1},\quad \int x_2^2 dm = A_{2,2},\quad \int x_3^2 dm = A_{3,3},$$
$$\int x_1 x_2 dm = A_{1,2},\quad \int x_1 x_3 dm = A_{1,3},\quad \int x_2 x_3 dm = A_{2,3}:$$

afin de trouver de nouveaux axes de coordonnees rectangulaires de même origine et pour lesquels on ait

$$\int y_1^2 dm = \mathrm{U}_1, \quad \int y_2^2 dm = \mathrm{U}_2, \quad \int y_3^2 dm = \mathrm{U}_3,$$
$$\int y_1 y_2 dm = 0, \quad \int y_1 y_3 dm = 0, \quad \int y_2 y_3 dm = 0,$$

on posera les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + a_{1,3}y_3, \\ x_2 &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + a_{2,3}y_3, \\ x_3 &= a_{3,1}y_1 + a_{3,2}y_2 + a_{3,3}y_3, \end{aligned}$$

qui, en supposant la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2,$$

donneront les équations

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 + a_{3,1}x_3, \\ y_2 &= a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{3,2}x_3, \\ y_3 &= a_{1,3}x_1 + a_{2,3}x_2 + a_{3,3}x_3. \end{aligned}$$

Les neuf coefficients $a_{1,1} a_{1,2} \ldots a_{3,3}$ représentant les cosinus des angles que les axes des deux systèmes font entre eux. Ainsi $a_{2,3}$ est le cosinus de l'angle que l'axe des x_2 fait avec l'axe des y_3; le premier indice se rapportant aux x et le second aux y.

Si l'on calcule $\int y_1^2 dm$ et que l'on évite les transpositions de facteurs et par suite les réductions, on trouvera

$$\begin{aligned} \int y_1^2 dm = \mathrm{U}_1 = {} & a_{1,1}(\mathrm{A}_{1,1}a_{1,1} + \mathrm{A}_{1,2}a_{2,1} + \mathrm{A}_{1,3}a_{3,1}) \\ & + a_{2,1}(\mathrm{A}_{2,1}a_{1,1} + \mathrm{A}_{2,2}a_{2,1} + \mathrm{A}_{2,3}a_{3,1}) \\ & + a_{3,1}(\mathrm{A}_{3,1}a_{1,1} + \mathrm{A}_{3,2}a_{2,1} + \mathrm{A}_{3,3}a_{3,1}) \end{aligned}$$

où $\mathrm{A}_{2,1}$ représente $\int x_2 x_1 dm$, comme $\mathrm{A}_{1,2}$ représente $\int x_1 x_2 dm$: ainsi $\mathrm{A}_{2,1} = \mathrm{A}_{1,2}$. Cette valeur de U_1 est précisément celle trouvée dans la première partie pour $\mathrm{B}_{1,1}$. On trouvera pareillement que U_2 et U_3 reviennent à $\mathrm{B}_{2,2}$ et $\mathrm{B}_{3,3}$.

Si l'on calcule $\int y_1 y_2 dm$ avec la même attention d'éviter les transpositions de facteurs, on obtiendra

$$\begin{aligned} \int y_1 y_2 dm = {} & a_{1,1}(\mathrm{A}_{1,1}a_{1,2} + \mathrm{A}_{1,2}a_{2,2} + \mathrm{A}_{1,3}a_{3,2}) \\ & + a_{2,1}(\mathrm{A}_{2,1}a_{1,2} + \mathrm{A}_{2,2}a_{2,2} + \mathrm{A}_{2,3}a_{3,2}) \\ & + a_{3,1}(\mathrm{A}_{3,1}a_{1,2} + \mathrm{A}_{3,2}a_{2,2} + \mathrm{A}_{3,3}a_{3,3}). \end{aligned}$$

De même encore, on aurait

$$\begin{aligned}\int y_2 y_1 dm = a_{1,2}(A_{1,1}a_{1,1} + A_{1,2}a_{2,1} + A_{1,3}a_{3,1})\\ + a_{2,2}(A_{2,1}a_{1,1} + A_{2,2}a_{2,1} + A_{2,3}a_{3,1})\\ + a_{3,2}(A_{3,1}a_{1,1} + A_{3,2}a_{2,1} + A_{3,3}a_{3,1}).\end{aligned}$$

Ces deux quantités ne sont autres que celles représentées par $B_{1,2}$ et $B_{2,1}$ dans la première partie; on reconnaît facilement leur égalité. Le problème de déterminer les axes principaux, ou des axes pour lesquels on ait

$$\int y_1 y_2 dm = 0, \quad \int y_1 y_3 dm = 0, \quad \int y_2 y_3\, dm = 0,$$

dépendra donc des équations

$$\begin{aligned}&B_{1,1} = U_1, \quad B_{1,2} = 0, \quad B_{1,3} = 0,\\ &B_{2,1} = 0, \quad B_{2,2} = U_2, \quad B_{2,3} = 0,\\ &B_{3,1} = 0, \quad B_{3,2} = 0, \quad B_{3,3} = U_3.\end{aligned}$$

Ce problème est donc analytiquement le même que celui de faire disparaître les rectangles de la fonction

$$\begin{aligned}A_{1,1}x_1^2 + 2A_{1,2}x_1x_2 + 2A_{1,3}x_1x_3\\ + A_{2,2}x_2^2 + 2A_{2,3}x_2x_3\\ + A_{3,3}x_3^2.\end{aligned}$$

L'équation qui détermine $U_1 = \int y_1^2 dm$, $U_2 = \int y_2 dm$, $U_3 = \int y_3 dm$ sera donc

$U = (A_{1,1} - u)(A_{2,2} - u)(A_{3,3} - u) - A_{2,3}^2(A_{1,1} - u) - A_{1,3}^2(A_{2,2} - u) - A_{1,2}^2(A_{3,3} - u) + 2A\ \ A_{1,3}A_{3,2} = 0$, et les neuf cosinus qui déterminent la position des axes principaux seront donnés, tant pour la valeur absolue que pour les signes, par les deux équations

$$a_{k,\alpha}^2 = -\frac{dU}{dA_{k,k}} : \frac{dU}{du}, \quad \frac{a_{k,\alpha}}{a_{3,\alpha}} = \pm\frac{dU}{dA_{k,3}} : \frac{dU}{dA_{3,3}},$$

Si l'on effectue les différentiations indiquées et, qu'en supposant les racines inégales on remplace $\frac{dU}{du}$ par un produit de différences des racines U_1, U_2, U_3, on aura

$$a^2_{1,1} = \frac{(A_{2,2} - U_1)(A_{3,3} - U_1) - A^2_{2,3}}{(U_1 - U_2)(U_1 - U_3)},$$
$$a^2_{2,1} = \frac{(A_{1,1} - U_1)(A_{3,3} - U_1) - A^2_{1,3}}{(U_1 - U_2)(U_1 - U_3)},$$
$$a^2_{3,1} = \frac{(A_{1,1} - U_1)(U_{2,2} - U_1) - A^2_{1,2}}{(U_1 - U_2)(U_1 - U_3)},$$

Pour avoir les valeurs de $a^2_{1,2}$, $a^2_{2,2}$, $a^2_{3,2}$, il faudra au numérateur changer U_1 en U_2 et prendre pour dénominateur le produit $(U_2 - U_1)$, $(U_2 - U_3)$.

Pour avoir les valeurs de $a^2_{1,3}$, $a^2_{2,3}$, $a^2_{3,3}$, il faudra au numérateur changer U_1 en U_3 et prendre le produit $(U_3 - U_1)(U_3 - U_2)$ pour dénominateur.

Quant aux signes, on prendra ceux des coefficients différentiels

$$\frac{dU}{dA_{1,3}}, \quad \frac{dU}{dA_{2,3}}, \quad \frac{dU}{dA_{3,3}},$$

où il faudra faire $u = U_1$ pour $a_{1,1}$, $a_{2,1}$, $a_{3,1}$; $u = U_2$ pour $a_{1,2}$, $a_{2,2}$, $a_{3,2}$; et $u = U_3$, pour $a_{1,3}$, $a_{2,3}$, $a_{3,3}$.

La discussion des formules précédentes ne présente aucune difficulté, elle a été trop souvent présentée pour qu'il soit nécessaire de la mettre ici. La conséquence qu'on en tire, c'est qu'en général il n'y a qu'un système d'axes principaux et qu'il y en a toujours un. Cependant pour le cas de deux racines égales (pour l'équation en u), il y a une infinité de systèmes ayant un axe commun, et enfin pour le cas des trois racines égales, tous les systèmes d'axes rectangulaires passant par l'origine donnée sont des axes principaux.

Il suffira d'ajouter ici que les formules précédentes ne diffèrent de celle du § II du mémoire de M. Poisson sur le mouvement d'un corps solide, que par un facteur supprimé aux deux termes des fractions qui représentent les neuf cosinus, qui fixent la position des axes principaux.

II.

Exemple de la seconde transformation.

PROBLÈME. *Trouver l'attraction qu'exercerait une planète sur un point matériel, si la masse de cette planète était distribuée sur les parties de son orbite, en raison du temps qu'elle met à les parcourir?*

Ce problème sera traité ici fort succinctement, mais il serait très facile de déduire de la solution les diverses formules que M. Gauss a exposées dans le mémoire où il s'occupe de la présente question. (*Determinatio attractionis*, etc......)

Solution. Soit a le grand axe de l'orbite, b le petit, et $a^2-b^2=a^2e^2$, de sorte que e soit l'excentricité, si l'on représente par θ l'anomalie excentrique, par T le temps de la révolution, et par $n=\frac{2\pi}{T}$ la vitesse moyenne angulaire de la planète, on aura $ndt=(1-e\cos\theta)d\theta$. La masse de la planète étant prise pour unité, la partie de cette masse qui serait distribuée sur le petit arc parcouru pendant l'instant dt sera

$$\frac{dt}{T}=\frac{ndt}{nT}=\frac{(1-e\cos\theta)\,d\theta}{2\pi}.$$

Si l'on prend le grand axe de l'ellipse pour axe des x, le petit axe pour celui des y, et la perpendiculaire menée par le centre au plan de l'orbite pour l'axe des z, les coordonnées d'un point de l'ellipse seront $x=a\cos\theta$, $y=b\sin\theta$. Par conséquent, si les coordonnées du point attiré sont A, B, C, la distance du point de l'ellipse dont les coordonnées sont $a\cos\theta$, $b\cos\theta$, o à ce point, sera donnée, en la représentant par r, par l'équation

$$r^2=(A-a\cos\theta)^2+(B-b\sin\theta)^2+C^2,$$

ou par

$$\begin{aligned}r^2 = a^2\cos^2\theta &+ 2\times o.\cos\theta\sin\theta - 2Aa\cos\theta\\ &+ b^2\sin^2\theta - 2Bb\sin\theta\\ &\qquad + A^2+B^2+C^2.\end{aligned}$$

L'attraction de l'élément de l'orbite sur le point donné sera....

$\frac{(1-e\cos\theta)\,d\theta}{2\pi r^2}$ et ses composantes parallèlement aux trois axes seront

$$X = \frac{(A - a\cos\theta)\,(1 - e\cos\theta)\,d\theta}{2\pi r^3},$$
$$Y = \frac{(B - b\cos\theta)\,(1 - e\cos\theta)\,d\theta}{2\pi r^3},$$
$$Z = \frac{C(1 - e\cos\theta)\,d\theta}{2\pi r^3}.$$

Si l'on posait $V = \frac{(1 - e\cos\theta)\,d\theta}{2\pi r}$, il en résulterait $X = -\frac{dV}{dA}$, $Y = -\frac{dV}{dB}$, $Z = -\frac{dV}{dC}$, mais il vaut mieux traiter directement les quantités X, Y, Z.

Pour faciliter l'intégration il faut simplifier le radical, par conséquent en vertu de la valeur précédente de r^2, si l'on pose

$$\cos\theta = \cos\theta_1,\ \sin\theta = \cos\theta_2,\quad A_{1,1} = a^2,\ A_{1,2} = 0,\ A_{1,3} = A_{3,1} = -Aa$$
$$A_{2,2} = b^2,\ A_{2,3} = -A_{3,2},\ A_{3,3} = A^2 + B^2 + C^2.$$

on aura à simplifier l'expression

$$\begin{aligned} A_{1,1}\cos^2\theta_1 &+ 2A_{1,2}\cos\theta_1\cos\theta_2 + 2A_{1,3}\cos\theta_1 \\ &+ A_{2,2}\cos^2\theta_2 + 2A_{2,3}\cos\theta_2 \\ &+ A_{3,3}, \end{aligned}$$

par le moyen de la substitution

$$\cos\theta_1 = \frac{a_{1,1}\cos\varphi_1 + a_{1,2}\cos\varphi_2 + a_{1,3}}{a_{3,1}\cos\varphi_1 + a_{3,2}\cos\varphi_2 + a_{3,3}},$$
$$\cos\theta_2 = \frac{a_{2,1}\cos\varphi_1 + a_{2,2}\cos\varphi_2 + a_{2,3}}{a_{3,1}\cos\varphi_1 + a_{3,2}\cos\varphi_2 + a_{3,3}},$$

où l'on posera pour abréger,

$$\gamma = a_{3,1}\cos\varphi_1 + a_{3,2}\cos\varphi_2 + a_{3,3}.$$

cette substitution réduira r^2 à la forme

$$[(U_1 - U_3)\cos^2\varphi_1 + (U_2 - U_3)\cos^2\varphi_2] : \gamma^2.$$

Les quantités U_1, U_2, U_3 étant les racines de l'équation

$$U=(A_{1,1}-u)(A_{2,2}-u)(A_{3,3}+u)-A_{2,3}^2(A_{1,1}-u)-A_{1,3}^2(A_{2,2}-u)$$
$$-A_{1,2}^2(A_{3,3}+u)+2A_{1,2}A_{1,3}A_{2,3}=0,$$

qui revient à

$$(a^2-u)(b^2-u)(A^2+B^2+C^2+u)-B^2b^2(a^2-u)-A^2a^2(b^2-u)=U=0.$$

ou bien encore à

$$u^3+(A^2+B^2+C^2-a^2-b^2)u^2+[a^2b^2-a^2(B^2+C^2)]u+a^2b^2C^2=0;$$

sous cette forme on reconnaît une équation qui se présente dans le calcul de l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur, au moyen du théorème de M. Ivory.

La première forme de l'équation en u, montre que les trois racines sont réelles; en effet si l'on pose

$u=$	a^2,	b^2,	0,	$-\infty$,
U prendra les signes...	$+$,	$-$,	$+$,	$-$.

Il aura donc trois racines réelles et inégales, sauf certains cas, où quelques-uns des nombres a^2, b^2, o deviendraient racines. Il pourrait alors y avoir deux racines égales à b^2, ou deux racines égales à zéro. Le premier cas se présente pour $B=0$ et $A^2b^2-a^2e^2C^2=a^2b^2e^2$, c'est-à-dire pour une suite de points formant une hyperbole dont les sommets sont les foyers de l'ellipse et dont le second axe est égal au petit axe de l'ellipse. Pour ce cas $(U_1-U_3)\cos^2\varphi_1+(U_2-U_3)\cos^2\varphi_2=U_1-U_3$, l'irrationalité disparaît et l'intégration ne présente aucune difficulté. Le second cas ne peut se présenter que quand le point attiré est sur l'ellipse : il doit par conséquent être mis de côté.

Pour le cas général, ou des trois racines inégales, on prendra les deux racines positives pour U_1 et U_2, l'on supposera $U_1>U_2$, la racine négative sera représentée par U_3. Au moyen des formules (32) et (33) modifiées convenablement, on déterminera les neuf coefficients de la substitution. Cela étant fait, soit en posant

$$\cos\theta_1=\cos\theta,\quad \cos\theta_2=\sin\theta,\quad \cos\varphi_1=\cos\varphi,\quad \cos\varphi_2=\sin\varphi,$$
$$\gamma=a_{3,1}\cos\varphi+a_{3,2}\sin\varphi+a_{3,3},$$
$$\gamma\cos\theta=a_{1,1}\cos\varphi+a_{1,2}\sin\varphi+a_{1,3},$$
$$\gamma\sin\theta=a_{2,1}\cos\varphi+a_{2,2}\sin\varphi+a_{2,3}.$$

Différentiant les deux dernières et éliminant dv il vient

$$vd\theta = [\cos\theta(-a_{2,1}\sin\phi + a_{2,2}\cos\phi) - \sin\theta(-a_{1,1}\sin\phi + a_{1,2}\cos\phi)]d\phi,$$

multipliant par v et réduisant, on a

$$v^2 d\theta = [(a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,3}a_{1,2})\cos\phi + (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1})\sin\phi + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})]d\phi;$$

mais ici l'on a

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2 - a_{3,1}x_3, \\ y_2 &= a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2 - a_{3,2}x_3, \\ -y_3 &= a_{1,3}x_1 + a_{2,3}x_2 - a_{3,3}x_3; \end{aligned}$$

tirant de là la valeur de x_3 et la comparant à

$$x_3 = a_{0,1}y_1 + a_{3,2}\, y_2 + a_{3,3}y_3,$$

on trouvera en écrivant, pour abréger,

$$E = -a_{3,1}(a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,3}a_{1,2}) - a_{1,2}(a_{1,1}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,3}) + a_{3,3}(a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{2,1}),$$

l'équation

$$Ex_3 = (a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,3}a_{1,2})y_1 + (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{1,1})\, y_2 + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2})y_3,$$

et par suite

$$Ea_{3,1} = (a_{2,2}a_{1,3} - a_{2,3}a_{1,2}),\ Ea_{3,2} = (a_{1,1}a_{2,3} - a_{1,3}a_{2,1}),\ Ea_{3,3} = (a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2});$$

par conséquent,

$$v^2 d\theta = E(a_{3,1}\cos\phi + a_{3,2}\sin\phi + a_{3,3})\,d\phi, \quad \text{ou} \quad vd\theta = Ed\phi.$$

Quant à E, on vérifiera très facilement que sa valeur est $+1$ ou -1, c'est-à-dire que l'on a $E^2 = 1$ en vertu des relations qui existent entre les coefficients de la substitution.

Les quantités $A - a\cos\theta$, $B - b\sin\theta$, $1 - e\cos\theta$, par la substitution des valeurs de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ se réduisent à

$$(L\cos\phi + M\sin\phi + N) : v, (L\cos\phi + M'\sin\phi + N') : v(L''\cos\phi + M''\sin\phi + N'') : V;$$

d'où il résulte

$X = E(L\cos\varphi + M\sin\varphi + N)(L''\cos\varphi + M''\sin\varphi + N'')d\varphi : 2\pi[(U_1 - U_3)\cos^2\varphi + (U_2 - U_3)\sin^3\varphi]^{\frac{3}{2}}$.
$Y = E(L'\cos\varphi + M'\sin\varphi + N')(L''\cos\varphi + M''\sin\varphi + N'')d\varphi :$ *idem*,
$Z = CE(a_3\cos\varphi + a_{3,2}\sin\varphi + a_{3,3})(L''\cos\varphi + M''\sin\varphi + N'')d\varphi :$ *idem*.

Si l'on observe que les intégrales

$$\int \frac{\sin\varphi d\varphi}{2\pi[(U_1 - U_3)\cos^2\varphi + (U_2 - U_3)\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}, \quad \int \frac{\cos\varphi d\varphi}{idem}, \quad \int \frac{\sin\varphi \cos\varphi d\varphi}{idem}$$

sont nulles quand on les prend depuis $\varphi = 0$, jusqu'à $\varphi = 360°$, ce qu'il faut faire ici ; il suffira dans les numérateurs de X, Y et Z de conserver les termes renfermant $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$ et ceux indépendants de φ. Si donc l'on pose

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{2\pi[(U_1 - U_3)\cos^2\varphi + (U_2 - U_3)\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}},$$
$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{2\pi[(U_1 - U_3)\cos^2\varphi + (U_2 - U_3)\sin^2\varphi]^{\frac{3}{2}}},$$

on aura entre les mêmes limites

$$EX = (LL'' + NN'')P + (MM'' + NN'')Q,$$
$$EY = (L'L'' + N'N'')P + (M'M'' + N'N'')Q,$$
$$EZ = (a_{3,1}L'' + a_{3,3}N'')CP + (a_{3,2}M'' + a_{3,3}N'')CQ.$$

Quant aux intégrales P et Q, elles se ramènent, ainsi qu'il suit, aux fonctions elliptiques.

La quantité $(U_1 - U_3)\cos^2\varphi + (U_2 - U_3)\sin^2\varphi$ peut s'écrire.... $(U_1 - U_3) - (U_1 - U_2)\sin^2\varphi$; si l'on pose $U_1 - U_3 = m^2$, $\dfrac{U_1 - U_2}{U_1 - U_3} = c^2$, l'on aura

$$P = \frac{1}{2\pi m^3}\int \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(1 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q = \frac{1}{2\pi m^3}\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(1 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

or l'intégration par parties donne

$$\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} = -\frac{\sin\varphi\cos^2\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} + \int \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{(1 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$
$$\int \frac{\cos^2\varphi d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} = -\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}} + (1 - c^2)\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{(1 - c^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

Si l'on représente les premiers membres de ces équations par P_1 et Q_1, on trouvera d'abord

$$P_1 + Q_1 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2\varphi}} = F(c,\ \varphi),$$

puis

$$\int \frac{c^2 \sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2\varphi}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2\varphi}} - \int d\varphi \sqrt{1-c^2 \sin^2\varphi} = F(c,\varphi) - E(c,\varphi);$$

de là résulte

$$P_1 = \int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{c^2} F(c,\ \varphi) - \frac{1}{c^2} E(c,\ \varphi),$$

$$Q_1 = \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{c^2} E(c,\ \varphi) - \left(\frac{1-c^2}{c^2}\right) F(c,\ \varphi),$$

et par conséquent

$$2c^2\pi m^3 P = \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{(1-c^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = F(c,\ \varphi) - \frac{1}{p} E(c,\varphi) + \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1-c^2 \sin^2\varphi}},$$

$$2c^2\pi m^3 Q = \int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{(1-c^2 \sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-c^2} E(c,\varphi) - F(c,\varphi) - \frac{c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{(1-c^2)\sqrt{1-c^2 \sin^2\varphi}}.$$

on aura donc entre les limites o et 360°

$$c^2\pi m^3 P = 2\left[F(c) - E(c)\right],$$

$$c^2\pi m^3 Q = 2\left[\frac{1}{1-c^2} E(c) - F(c)\right],$$

conformément à la notation des fonctions elliptiques.

Pour simplifier la solution, on fera usage de la notation suivante :

1°. Les inconnues seront $x_1, x_2 \ldots, x_n$ au nombre de n.

2°. Tout terme renfermant le rectangle $x_\alpha x_\beta$, ou le produit de deux inconnues différentes, aura pour coefficient $A_{\alpha,\beta}$, le premier indice étant celui du premier facteur du rectangle, et le second celui du second facteur. On supposera $A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}$, puisque l'on a $x_\alpha x_\beta = x_\beta x_\alpha$. Le coefficient d'un carré, tel que $x_\alpha^2 = x_\alpha x_\alpha$, sera par analogie $A_{\alpha,\alpha}$.

D'après ces conventions, on remplacera la fonction

$$(1) \left\{ \begin{array}{rrrl} A_{1,1}\, x_1^2 + 2A_{1,2}\, x_1 x_2 & + 2A_{1,3}\, x_1 x_3 & + \ldots & + 2A_{1,n}\, x_1 x_n. \\ + A_{2,2}\, x_2^2 & + 2A_{2,3}\, x_2 x_3 & + \ldots & + 2A_{2,n}\, x_2 x_n. \\ & + A_{3,3}\, x_3^2 & + \ldots & + 2A_{3,n}\, x_3 x_n. \\ & & & \vdots \\ & & & + A_{n,n}\, x_n^2. \end{array} \right.$$

Par la suivante,

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} x_1 (A_{1,1}\, x_1 + A_{1,2}\, x_2 + \ldots + A_{1,n}\, x_n). \\ + x_2 (A_{2,1}\, x_1 + A_{2,2}\, x_2 + \ldots + A_{n,n}\, x_n). \\ \vdots \\ + x_n (A_{n,1}\, x_1 + A_{n,2}\, x_2^2 + \ldots + A_{n,n}\, x_n). \end{array} \right.$$

Si l'on fait

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 + \ldots + a_{1,n}\, y_n. \\ x_2 = a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 + \ldots + a_{2,n}\, y_n, \\ \vdots \\ x_n = a_{n,1}\, y_1 + a_{n,2}\, y_2 + \ldots + a_{n,n}\, y_n. \end{array} \right.$$

ces valeurs, substituées dans la fonction (2), la laisseront homogène et du second degré, en la réduisant à la forme

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} y_1 (B_{1,1}\, y_1 + B_{1,2}\, y_2 + \ldots + B_{1,n}\, y_n). \\ + y_2 (B_{2,1}\, y_1 + B_{2,2}\, y_2 + \ldots + B_{2,n}\, y_n). \\ \vdots \\ + y_n (B_{n,1}\, y_1 + B_{n,2}\, y_2 + \ldots + B_{n,n}\, y_n). \end{array} \right.$$

Si l'on pose pour abréger

(5) $$C_{i,\alpha} = A_{i,1}\, a_{1,\alpha} + A_{i,2}\, a_{2,\alpha} + \ldots + A_{i,n}\, a_{n,\alpha}\,,$$

où i et α peuvent prendre toutes les valeurs entières de 1 à n, on trouvera, en faisant la multiplication sans transpositions de facteurs, pour ne pas confondre les rectangles, tels que $x_\alpha x_\beta$ et $x_\beta x_\alpha$,

(6) $$\left\{\begin{array}{l} B_{\alpha,\alpha} = a_{1,\alpha} C_{1,\alpha} + a_{2,\alpha} C_{2,\alpha} + \ldots + a_{n,\alpha} C_{n,\alpha}\,, \\ B_{\beta,\alpha} = a_{1,\beta} C_{1,\alpha} + a_{2,\beta} C_{2,\alpha} + \ldots + a_{n,\beta} C_{n,\alpha}\,, \\ B_{\alpha,\beta} = a_{1,\alpha} C_{1,\beta} + a_{2,\alpha} C_{2,\beta} + \ldots + a_{n,\alpha} C_{n,\beta}\,, \end{array}\right.$$

et l'on vérifiera très facilement que l'on a $B_{\alpha,\beta} = B_{\beta,\alpha}$ à cause de $A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}$.

Si l'on veut que la transformée en y soit de la forme

(7) $$U_1 y_1^2 + U_2 y_2^2 + U_3 y_3^2 + \ldots + U_n y_n^2\,,$$

il faudra poser

(8) $$\left\{\begin{array}{llll} B_{1,1} = U_1\,, & B_{1,2} = 0\,, & B_{1,3} = 0 \ldots\ldots & B_{1,n} = 0, \\ B_{2,1} = 0\,, & B_{2,2} = U_2, & B_{2,3} = 0 \ldots\ldots & B_{2,n} = 0, \\ \vdots & & & \\ B_{n,1} = 0\,, & B_{n,2} = 0\,, & B_{n,3} = 0 \ldots\ldots & B_{n,n} = U_n. \end{array}\right.$$

Ces équations, au nombre de n^2, se réduisent à $n + \frac{n.n-1}{2} = \frac{n^2+n}{2}$ équations distinctes, entre les n^2+n inconnues suivantes : 1°. les n^2 coefficients $a_{1,1}$, $a_{1,2}, \ldots\ldots a_{n,n}$ de la substitution (3), et, 2°., les n coefficients $U_1, U_2 \ldots, U_n$ de la fonction transformée (7). On doit donc encore se donner $\frac{n^2+n}{2}$ équations entre les inconnues, afin d'ôter au problème son indétermination. Il est bien des manières d'obtenir ces nouvelles relations; la plus simple paraît la suivante. On supposera que l'équation

(9) $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs possibles données à $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Mettant dans cette équation les valeurs de $x_1, x_2 \ldots, x_n$ données plus haut (3), et rendant le résultat indépendant de $y_1, y_2 \ldots, y_n$, on trouvera n équations de la forme

$$a_{1,\alpha}^2 + a_{2,\alpha}^2 + \ldots + a_{n,\alpha}^2 = 1, \tag{10}$$

où α prendra successivement les valeurs $1, 2 \ldots, n$.

On trouvera en outre $\frac{n.n-1}{2}$ équations de la forme

$$a_{1,\alpha}\, a_{1,\beta} + a_{2,\alpha}\, a_{2,\beta} + \ldots a_{n,\alpha}\, a_{n,\beta} = 0, \tag{11}$$

ou α et β, essentiellement différents, peuvent d'ailleurs prendre toutes les valeurs $1, 2 \ldots, n$.

Les $n^2 + n$ équations du problème sont donc celles qui portent les numéros (8), (10) et (11).

Il est facile de les distribuer en n systèmes partiels de $n+1$ équations chacun, le premier contenant uniquement les $n+1$ inconnues

$$U_1, \ a_{1,1}, \ a_{2,1}, \ a_{3,1} \ldots, \ a_{n,1};$$

le second renfermant uniquement les $n+1$ inconnues

$$U_2, \ a_{1,2}, \ a_{2,2}, \ a_{3,2} \ldots, \ a_{n,2},$$

et ainsi des autres jusqu'au $n^{ième}$, contenant uniquement les $n+1$ dernières inconnues

$$U_n, \ a_{1,n}, \ a_{2,n}, \ a_{3,n} \ldots, \ a_{n,n}.$$

Pour faire ce partage, il faut remarquer que les équations (3) donnent, au moyen des équations (10) et (11),

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{1,1}\, x_1 + a_{2,1}\, x_2 + \ldots + a_{n,1}\, x_n, \\ y_2 = a_{1,2}\, x_1 + a_{2,2}\, x_2 + \ldots + a_{n,2}\, x_n, \\ \vdots \\ y_n = a_{1,n}\, x_1 + a_{2,n}\, x_2 + \ldots + a_{n,n}\, x_n, \end{array} \right.$$

et que celles-ci donnent à leur tour, en vertu de l'équation (9), les suivantes :

(13) $$a^2_{\alpha,1} + a^2_{\alpha,2} + \ldots + a^2_{\alpha,n} = 1,$$
(14) $$a_{\alpha,1}\, a_{\beta,1} + a_{\alpha,2}\, a_{\beta,2} + \ldots + a_{\alpha,n}\, a_{\beta,n} = 0,$$

qui ne diffèrent des équations (10) et (11) que par le renversement des indices.

Par exemple, si l'on veut obtenir le système qui donnera la valeur des $n+1$ inconnues

$$U_\alpha,\ a_{1,\alpha},\ a_{2,\alpha},\ a_{3,\alpha} \ldots\ldots a_{n,\alpha},$$

on prendra les équations

$$B_{1,\alpha} = 0,\ B_{2,\alpha} = 0 \ldots B_{\alpha,\alpha} = U_\alpha \ldots B_{n,\alpha} = 0,$$

auxquelles on joindra l'équation

$$a^2_{1,\alpha} + a^2_{2,\alpha} + \ldots + a^2_{n,\alpha} = 1.$$

Les n premières équations reviennent à

$$\begin{array}{l} a_{1,1}\, C_{1,\alpha} + a_{2,1}\, C_{2,\alpha} + \ldots + a_{n,1}\, C_{n,\alpha} = 0, \\ a_{1,2}\, C_{1,\alpha} + a_{2,2}\, C_{2,\alpha} + \ldots + a_{n,2}\, C_{n,\alpha} = 0, \\ \vdots \\ a_{1,\alpha}\, C_{1,\alpha} + a_{2,\alpha}\, C_{2,\alpha} + \ldots + a_{n,\alpha}\, C_{n,\alpha} = U_\alpha, \\ \vdots \\ a_{1,n}\, C_{1,\alpha} + a_{2,n}\, C_{2,\alpha} + \ldots + a_{n,n}\, C_{n,\alpha} = 0, \end{array}$$

d'où l'on tire très facilement

$$C_{1,\alpha} = a_{1,\alpha}\, U_\alpha,\ C_{2,\alpha} = a_{2,\alpha}\, U_\alpha \ldots C_{n,\alpha} = a_{n,\alpha}\, U_\alpha;$$

la première $C_{1,\alpha} = a_{1,\alpha}\, U_\alpha$ s'obtient en multipliant les équations précédentes par $a_{1,1}$, $a_{1,2} \ldots a_{1,n}$ (coefficients de $C_{1,\alpha}$) respectivement, et en faisant la somme des résultats. Les autres s'obtiennent d'une manière toute semblable.

Remplaçant $C_{1,\alpha}$, $C_{2,\alpha} \ldots C_{n,\alpha}$ par leurs valeurs, on aura donc définitivement le système

$$(15)\left\{\begin{array}{l} (A_{1,1}-U_\alpha)a_{1,\alpha}+A_{1,2}a_{2,\alpha}+\ldots+A_{1,n}a_{n,\alpha}=0,\\ A_{2,1}\;a_{1,\alpha}+(A_{2,2}-U_\alpha)a_{2,\alpha}+\ldots+A_{2,n}a_{n,\alpha}=0,\\ A_{3,1}\;a_{1,\alpha}+A_{3,2}a_{2,\alpha}+\ldots\ldots\;.+A_{3,n}a_{n,\alpha}=0,\\ \vdots\\ A_{n,\alpha}\;a_{1,\alpha}+A_{n,2}a_{2,\alpha}+\ldots\ldots\ldots+(A_{n,n}-U_\alpha)a_{n,\alpha}=0,\\ \qquad a_{1,\alpha}^2+a_{2,\alpha}^2+\ldots\ldots\ldots+a_{a,\alpha}^2=1, \end{array}\right.$$

dont la solution n'offre d'autre difficulté que la simplification des résultats auxquels conduit l'élimination.

Les $n-1$ premières équations donnent, par exemple, les rapports $\frac{a_{1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}$, $\frac{a_{2,\alpha}}{a_{n,\alpha}}\ldots\ldots$, $\frac{a_{n-1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}$ qui, substitués dans la $n^{ième}$, conduisent à une équation du $n^{ième}$ degré en U_α, ou tout simplement en u, dont les racines, toutes réelles, sont les valeurs des n coefficients U_1, $U_2\ldots U_n$. Ces racines déterminées, les rapports $\frac{a_{1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}$, $\frac{a_{2,\alpha}}{a_{n,\alpha}}\ldots\ldots$, $\frac{a_{n-1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}$ sont connus. La dernière équation, mise sous la forme

$$a_{n,\alpha}^2\left[\left(\frac{a_{1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}\right)^2+\left(\frac{a_{2,\alpha}}{a_{n,\alpha}}\right)^2-\ldots+\left(\frac{a_{n-1,\alpha}}{a_{n,\alpha}}\right)^2+1\right]=1,$$

donne alors $a_{n,\alpha}^2$, et par suite, au moyen des rapports précédents, on trouve $a_{1,\alpha}^2$, $a_{2,\alpha}^2\ldots a_{n-1,\alpha}^2$. Les valeurs de ces coefficients se présentent sous la forme de fractions qui sont toutes susceptibles de réduction en vertu d'une propriété de l'équation du n^e degré en u. Cette équation s'obtient très facilement encore de la manière suivante : on résout les n premières équations (15) par rapport à $a_{1,\alpha}$, $a_{2,\alpha}\ldots a_{n,\alpha}$. précisément comme si les deuxièmes membres n'étaient pas nuls ; on égale à zéro le dénominateur commun des inconnues $a_{1,\alpha}$, $a_{1,\alpha}\ldots a_{n,\alpha}$, et le résultat n'est autre que l'équation en u qu'on peut noter $U=0$. Le premier membre de cette équation n'est donc qu'une de ces fonctions nommées déterminants, fonctions qui, comme le dit M. Cauchy (*Journal de l'École Polytechnique*, tome 10, page 51), s'offrent d'elles-mêmes dans un grand nombre de recherches analytiques. C'est donc dans les propriétés des déterminants que l'on va chercher le moyen de simplifier la solution qui vient d'être rapidement indiquée.

II.

De quelques propriétés des déterminants.

Définition. Si l'on considère le système d'équations

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{1,1}\,t_1 + A_{1,2}\,t_2 + \ldots\ldots + A_{1,n}\,t_n = m_1, \\ A_{2,1}\,t_1 + A_{2,2}\,t_2 + \ldots\ldots + A_{2,n}\,t_n = m_2, \\ \vdots \\ A_{n,1}\,t_1 + A_{n,2}\,t_2 + \ldots\ldots + A_{n,n}\,t_n = m_n, \end{array}\right.$$

le dénominateur commun des inconnues t_1, $t_2 \ldots t_n$ est ce que l'on nomme le déterminant du système des nombres

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{1,1}\ A_{1,2} \ldots\ldots A_{1,n}, \\ A_{2,1}\ A_{2,2} \ldots\ldots A_{2,n}, \\ \vdots \\ A_{n,1}\ A_{n,2} \ldots\ldots A_{n,n}. \end{array}\right.$$

Comme ce dénominateur peut changer de signe, selon le mode de solution qu'on emploiera, on conviendra de le prendre de sorte que le terme $A_{1,1}\, A_{2,2}\, A_{3,3} \ldots A_{n,n}$, qui en fait partie, soit positif.

On trouve dans les éléments d'algèbre une règle fort simple pour former ce déterminant, et l'on en peut voir d'autres dans le mémoire de M. Cauchy, cité plus haut. Voici quelques conséquences de ces règles.

Le déterminant du système (17) est aussi celui du système suivant.

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{1,1}\ A_{2,1} \ldots\ldots A_{n,1}, \\ A_{1,2}\ A_{2,2} \ldots\ldots A_{n,2}, \\ \vdots \\ A_{1,n}\ A_{2,n} \ldots\ldots A_{n,n}, \end{array}\right.$$

qui s'obtient en remplaçant la série horizontale supérieure du système

(17) par la première série verticale, puis la deuxième horizontale par la deuxième verticale, et ainsi de suite jusqu'à la deuxième horizontale qui sera remplacée par la n^e ou dernière verticale

Il est un cas ou les systèmes (17) et (18) restent les mêmes, malgré ce changement; c'est celui pour lequel on aurait $A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}$. On peut dire alors que le système est symétrique, puisque les nombres qui le forment sont placés symétriquement par rapport aux nombres à indices égaux $A_{1,1}$ $A_{2,2} \ldots A_{n,n}$ qui forment la diagonale du système.

Une autre conséquence de la règle pour former le déterminant, c'est qu'il change de signe :

1°. Quand on change le signe de tous les nombres d'une même série horizontale ou verticale;

2°. Quand on change l'ordre de deux séries consécutives horizontales ou verticales, d'où il suit que si l'on avance ou recule une série de k rangs, le déterminant se trouve multiplié par $(-1)^k$.

Ceci rappelé, si l'on représente par D le déterminant du système (17), par $[g, i]$ le déterminant du système qui se tire du système (17) par la suppression de la série horizontale de rang g et de la série verticale de rang i, et semblablement par la notation $\begin{bmatrix} g, i \\ h, k \end{bmatrix}$ le déterminant du système qui résulte de l'omission des séries horizontales de rangs g et i et des séries verticales de rangs i et k dans le système (17), on pourra, au moyen des remarques précédentes, établir les proportions suivantes :

I. Dans tout déterminant symétrique on a

$$[g,i] = [i,g].$$

Cela résulte de ce qu'il est permis de changer (17) en (18), sans déplacer réellement les nombres du système.

II. Pour tout déterminant nul on a

$$[g,g]\ [i,i] = [i,g]\ [g,i],$$

et par conséquent pour un déterminant à la fois nul et symétrique

$$[g,g]\ [i,i] = [i,g]^2 = [g,i]^2.$$

En effet, si dans le système (16) on suppose $m_1 = m_2 \ldots = m_n = 0$, et qu'on supprime l'équation de rang g, on trouvera

$$\frac{t_g}{t_i} = (-1)^{g+i} \frac{[g,g]}{[g,i]},$$

le facteur $(-1)^{g+i}$ provenant du déplacement de séries et du changement de signe, qui résultent de l'application de la règle pour déduire le numérateur $[g,g]$ du dénominateur $[g,i]$. L'exposant de -1 a été augmenté d'un nombre pair pour simplifier le résultat. Si, dans le même système (16), on supprime l'équation de rang i, on trouvera pareillement

$$\frac{t_g}{t_i} = (-1)^{i+g} \frac{[i,i]}{[i,g]}.$$

Multipliant la valeur de $\frac{t_g}{t_i}$ par celle de $\frac{t_i}{t_g}$, on a de suite le résultat de l'énoncé.

III. Dans tout déterminant non symétrique on a, quels que soient les indices du nombre $A_{i,g}$ égaux ou non,

$$\frac{dD}{dA_{i,g}} = (-1)^{g+i} [i,g].$$

Le coefficient différentiel de D est pris par rapport à $A_{i,g}$, supposé différent de tous les nombres $A_{\alpha,\beta}$; ce qui n'arrive pas pour un déterminant symétrique où l'on a $A_{i,g} = A_{g,i}$.

IV. Pour un déterminant symétrique on a toujours

$$(19)\quad \frac{dD}{dA_{g,g}} = [g,g] \quad (20)\quad \frac{dD}{dA_{i,g}} = (-1)^{g+i}\, 2[i,g].$$

Ces deux propositions se déduisent de la formule

$$D = A_{n,n}[n,n] - A_{n,n-1}[n,n-1] + A_{n,n-2}[n,n-2] - \ldots,$$

qui se tire immédiatement des équations (16), où l'on a fait

$$m_1 = m_2 \ldots\ldots = m_n = 0.$$

Différentiant la valeur de D, en observant que le coefficient $A_{n,n}$ n'entre que dans le premier terme, sans entrer dans $[n,n]$, on trouve

$\frac{dD}{dA_{n,n}} = [n,n]$, et cela est vrai pour tout déterminant symétrique ou non symétrique. Par un déplacement de séries horizontales, et *d'un même nombre* de séries verticales, on trouve sans changement de signe $\frac{dD}{dA_{g,g}} = [g,g]$, en amenant le terme $A_{g,g}$ à la dernière place de la dernière horizontale.

Pour un déterminant non symétrique on trouve $\frac{dD}{dA_{n,n-1}} = -[n,n-1]$, et plus généralement $\frac{dD}{dA_{i,g}} = (-1)^{i+g}\,[i,g]$, au moyen de déplacements de séries qui amèneraient $A_{i,g}$ à la place qu'occupait $A_{n,n-1}$, c'est-à-dire à l'avant-dernière de la dernière horizontale.

Si le déterminant appartient à un système symétrique, comme on a $A_{n,n-1} = A_{n-1,n}$, en différentiant D, il faudra avoir égard au coefficient $A_{n-1,n}$ contenu dans les déterminants partiels $[n,n-1]$, $[n,n-2]$etc. Or, le même calcul, qui a fait tirer la valeur de D du système (17), fera tirer semblablement

$$[n,i] = A_{n-1,n}\begin{bmatrix} n, & i \\ n-1, & n \end{bmatrix} + A_{n-2,n}\begin{bmatrix} n, & i \\ n-2, & n \end{bmatrix} + A_{n-3,n}\begin{bmatrix} n, & i \\ n-3, & n \end{bmatrix} + \ldots$$

du système (18).

On aura donc $\frac{dD}{dA_{n,n-1}} = \begin{bmatrix} n, & i \\ n-1, & n \end{bmatrix}$, et par suite

$$\begin{aligned}
\frac{dD}{dA_{n,n-1}} = \frac{dD}{dA_{n-1,n}} &= -[n,n-1] - A_{n,n-1}\begin{bmatrix} n,n-1 \\ n-1,n \end{bmatrix} + A_{n,n-2}\begin{bmatrix} n,n-2 \\ n-1,n \end{bmatrix} - A_{n,n-3}\begin{bmatrix} n,n-3 \\ n-1,n \end{bmatrix} + \\
&= -[n,n-1] - A_{n-1,n}\begin{bmatrix} n,n-1 \\ n-1,n \end{bmatrix} + A_{n-2,n}\begin{bmatrix} n,n-1 \\ n-2,n \end{bmatrix} - A_{n-3,n}\begin{bmatrix} n,n-1 \\ n-3,n \end{bmatrix} + \\
&= -[n,n-1] - [n,n-1] = -2[n,n-1],
\end{aligned}$$

en remarquant que l'on a $A_{n,\alpha} = A_{\alpha,n}$ et $\begin{bmatrix} a, & c \\ b, & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d, & b \\ c, & a \end{bmatrix}$, puisque le système est symétrique.

Plus généralement, par un déplacement de séries horizontales et de séries verticales, on trouvera $\frac{dD}{dA} = (-1)^{i+g}[i,g]$, comme il est dit dans l'énoncé.

V. Dans tout déterminant nul, mais non symétrique, on a

$$\left(\frac{dD}{dA_{i,g}}\right)\left(\frac{dD}{dA^{g,i}}\right) = \frac{dD}{dA_{g,g}}\;\frac{dD}{dA_{i,i}}\;;$$

et dans tout déterminant à la fois nul et symétrique, on trouve

$$(21)\qquad \left(\frac{dD}{dA_{i,g}}\right)^2 = 4\,\frac{dD}{dA_{g,g}}\,\frac{dD}{dA_{i,i}}.$$

Ces équations ne sont que la traduction de celles de la proposition II.

Les équations (19), (20) et (21) vont servir à simplifier la résolution des équations (15).

III.

Développement de la solution des équations (15).
Calcul de l'équation en u.

L'équation en u n'est autre que le déterminant du système

$$\begin{array}{llll} A_{1,1}-u, & A_{1,2}, & A_{1,3}, \ldots & A_{1,n}, \\ A_{1,2}, & A_{2,2}-u, & A_{2,3}, \ldots & A_{2,n}, \\ \vdots & & & \\ A_{1,n}, & A_{2,n}, & A_{3,n}, \ldots & A_{n,n}-u \end{array}$$

On la représentera donc par

$$(22)\qquad U = \text{dét.}[A_{1,1}-u,\ A_{2,2}-u \ldots A_{n,n}-u] = 0.$$

Ainsi, pour $n=2$, on aura

$$(23)\qquad U = (A_{1,1}-u)\,(A_{2,2}-u) - A_{1,2}^2.$$

Pour $n=3$, on aura

$$(24)\qquad \begin{aligned} U = {} & (A_{1,1}-u)\,(A_{2,2}-u)\,(A_{3,3}-u) \\ & - A_{2,3}^2(A_{1,1}-u) - A_{1,3}^2(A_{2,2}-u) - A_{1,2}^2(A_{3,3}-u) + 2A_{1,2}A_{1,3}A_{2,3} = 0. \end{aligned}$$

Pour $n=4$, on aura

$$(25)\qquad \left.\begin{aligned} U = {} & (A_{1,1}-u)\,(A_{2,2}-u)\,(A_{3,3}-u)\,(A_{4,4}-u) \\ & - A_{3,4}^2(A_{1,1}-u)(A_{2,2}-u) + 2A_{2,3}A_{2,4}A_{3,4}(A_{1,1}-u) \\ & - A_{2,4}^2(A_{1,1}-u)(A_{3,3}-u) + 2A_{1,3}A_{1,4}A_{3,4}(A_{2,2}-u) \\ & - A_{2,3}^2(A_{1,1}-u)(A_{4,4}-u) + 2A_{1,2}A_{2,4}A_{2,4}(A_{3,3}-u) \\ & - A_{1,4}^2(A_{2,2}-u)(A_{3,3}-u) + 2A_{1,2}A_{1,3}A_{2,3}(A_{4,4}-u) \\ & - A_{1,4}^2(A_{2,2}-u)(A_{4,4}-u) \\ & - A_{1,2}^2(A_{3,3}-u)(A_{4,4}-u) \\ & - 2A_{1,2}A_{3,4}A_{1,3}A_{2,4} + A_{1,4}^2A_{2,3}^2 \\ & - 2A_{1,2}A_{3,4}A_{1,4}A_{2,3} + A_{1,3}^2A_{2,4}^2 \\ & - 2A_{1,3}A_{2,4}A_{1,4}A_{2,3} + A_{1,2}^2A_{3,4}^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

A ces exemples particuliers qui suffiront pour les applications, on peut joindre les remarques générales qui suivent.

Première remarque. Quel que soit le nombre n des inconnues de la fonction à transformer, si les coefficients $A_{1,n}$, $A_{2,n} \ldots A_{n-1,n}$, et par conséquent $A_{n,1}$, $A_{n,2} \ldots$, $A_{n,n-1}$ sont nuls, le déterminant, pour le cas de n inconnues, se trouvera, en multipliant par $A_{n,n}-u$, le déterminant trouvé pour le cas de $n-1$. Cela suit de la valeur de D donnée plus haut.

Deuxième remarque. Le nombre n étant quelconque, si le déterminant ne renferme que des coefficients à indices égaux, ou dont un des indices soit n, tels sont $A_{\alpha,\alpha}$ et $A_{\alpha,n}$, l'équation en n sera

$$
\begin{aligned}
(26) \qquad & (A_{1,1}-u)(A_{2,2}-u)\ldots(A_{n,n}-u) \\
& -A_{1,n}^2(A_{2,2}-u)(A_{3,3}-u)\ldots(A_{n-1,n-1}-u) \\
& -A_{2,n}^2(A_{1,4}-u)(A_{3,3}-u)\ldots(A_{n-1,n-1}-u) \\
& \vdots \\
& -A_{n-1,n}^2(A_{1,1}-u)(A_{2,2}-u)\ldots(A_{n-2,n-1}-u),
\end{aligned}
$$

le premier terme contenant les n facteurs $A_{1,1}-u$, $A_{2,2}-u \ldots$ $A_{n,n}-u$, et les autres, qui sont négatifs, ne contenant que $n-2$ de ces coefficients. Ainsi, par exemple, pour le terme où entre $A_{\alpha,n}^2$, les deux facteurs à omettre sont $A_{\alpha,\alpha}-u$, $A_{n,n}-u$ indiqués par les indices de $A_{\alpha,n}$.

Réalité des racines de l'équation en u.

I. L'équation $U=0$ a ses racines réelles pour $n=2$. En effet, on a dans ce cas

$$u = \frac{A_{1,1}+A_{2,2}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A_{1,1}-A_{2,2})^2+4A_{1,2}^2},$$

valeurs réelles.

II. Quel que soit n, si les nombres ou coefficients $A_{\alpha,\beta}$ ont tous deux indices égaux, ou dont l'un soit n, l'équation en u aura toutes ses racines réelles.

En effet, dans ce cas, l'équation en n est celle notée (26). Si l'on suppose que $A_{1,1}$, $A_{2,2}\ldots$, $A_{n,n}$ soient rangés par ordre de grandeur, de sorte que l'on ait

$$\infty > A_{1,1} > A_{2,2} > \ldots > A_{n,n} > -\infty,$$

et que dans cette équation (26) on fasse successivement

	$u=\infty$,	$A_{1,1}$,	$A_{2,2}\ldots$	$A_{n-1,n-1}$,	$A_{n,n}$,	$-\infty$.
U prendra les signes	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$,
ou bien	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$,

selon que n sera pair ou impair. Ainsi, dans tous les cas, les n racines sont réelles, puisqu'il y a n changements de signe.

Si plusieurs des nombres $A_{1,1}$, $A_{2,2}\ldots$, $A_{n,n}$ étaient égaux, si l'on avait, par exemple, $A_{1,1}=A_{2,2}$, l'équation (26) prendrait le facteur $A_{1,1}-u$, d'où la racine $u=A_{1,1}$. Ce facteur supprimé, on trouverait une équation semblable du $(n-1)^e$ degré, dont l'on prouverait de même que les $n-1$ racines sont toutes réelles.

Si les coefficients $A_{1,1}$, $A_{2,2}\ldots$, $A_{n,n}$ n'étaient pas rangés par ordre de grandeur, il suffirait d'un déplacement de termes pour retomber dans ce cas. Ainsi la démonstration est générale.

III. Quels que soient les coefficients $A_{\alpha,\beta}$, si l'équation en u a toutes ses racines réelles pour $n=m-1$, elle les aura aussi toutes réelles pour $n=m$. Ceci étant démontré, comme dans tous les cas les racines sont réelles pour $n=2$, elles le seront encore toutes pour $n=3$, $n=4$, et en général pour n quelconque.

En ne considérant que les $m-1$ inconnues x_1, $x_2\ldots$, x_{m-1} qui entrent dans la fonction homogène du second degré, qui, en outre, contient x_m, on pourra, d'après l'hypothèse, faire disparaître les rectangles des $m-1$ inconnues x_1, $x_2\ldots$, x_{m-1}, c'est-à-dire avoir une transformée où tous les coefficients seront nuls, à l'exception de ceux qui auraient des indices égaux, ou dont l'un des indices serait m. Or, d'après la proposition précédente, par une nouvelle transformation, celle-ci conduit à une équation en n, dont toutes les racines sont réelles. Il reste donc à montrer que les deux transformations pourraient être remplacées par une seule, qui conduirait par conséquent à une équation en u ayant toutes ses racines réelles. Or, si la première substitution est exprimée par les équations

$$x_1 = a_{1,1} y_1 + a_{1,2} y_2 + \ldots + a_{1,n} y_n,\ x_2 = a_{2,1} y_1 + \text{etc.},$$

et si la deuxième substitution est exprimée semblablement par les équations de même forme

$$y_1 = b_{1,1} z_1 + b_{1,2} z_2 + \ldots + b_{1,n} z_n,\ y_2 = b_{2,1} z_1 + \ldots \text{etc.},$$

l'élimination de $y_1, y_2 \ldots, y_n$ donnera

$$x_1 = c_{1,1} z_1 + c_{1,2} z_2 + \ldots + c_{1,n} z_n,\ x_2 = c_{2,1} z_1 + \ldots \text{etc.},$$

où l'on aura en général

$$c_{i,\varkappa} = a_{i,1}\, b_{1,\varkappa} + a_{i,2}\, b_{2,\varkappa} + \ldots + a_{i,n}\, b_{n,\varkappa}.$$

Or les coefficients ainsi formés satisfont, comme on le vérifie très facilement aux relations (10), (11), (13) et (14), ce qui d'ailleurs est une suite des deux équations

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2,\ y_1^2 + \ldots + y_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$$

qui entraînent la suivante

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

Ainsi les deux substitutions sont remplacées par une seule qui fait disparaître tous les rectangles et qui conduit à une équation du n^e degré en u, dont toutes les racines sont réelles. Cette démonstration n'est que le développement de celle que M. Poisson a donnée dans son mémoire sur le *Mouvement d'un Corps solide*, pour le cas de trois variables (*).

Racines égales.

Quand l'équation en u, $U = 0$, a des racines égales, ou satisfaisant à l'équation $\frac{dU}{du} = 0$, ces racines satisfont aussi à l'équation $\frac{dU}{dA_{\alpha,\beta}} = 0$, quels que soient les indices α et β égaux ou non.

En raison de la forme de l'équation en u, on a

(*) Voyez aussi le mémoire de M. Jacobi, déjà cité.

$$(27)\qquad -\frac{dU}{du}=\frac{dU}{dA_{1,1}}+\frac{dU}{dA_{2,2}}+\ldots+\frac{dU}{dA_{n,n}}.$$

Élevant au carré les deux membres de cette équation, les doublant et les simplifiant au moyen de l'équation (21), on aura

$$(28)\qquad \begin{aligned}2\left(\frac{dU}{du}\right)^2 &= 2\left(\frac{dU}{dA_{1,1}}\right)^2+2\left(\frac{dU}{dA_{2,2}}\right)^2+\ldots\ldots+2\left(\frac{dU}{dA_{n,n}}\right)^2\\ &+\left(\frac{dU}{dA_{1,2}}\right)^2+2\left(\frac{dU}{dA_{1,3}}\right)^2+\ldots\ldots+\left(\frac{dU}{dA_{\alpha,\beta}}\right)^2+\ldots\end{aligned}$$

Pour le cas des racines égales, le premier membre devenant nul, il en sera de même du second, et par conséquent de chaque terme en particulier, puisque les racines sont toutes réelles.

Calcul des coefficients $a_{1,1}$, $a_{1,2}\ldots$, $a_{n,n}$ de la substitution (3).

Pour trouver les coefficients de la substitution (3), il suffit de remarquer que l'on a, en employant les notations de l'article II,

$$(29)\qquad \frac{a_{1,\varkappa}}{a_{n,\varkappa}}=(-1)^{n+k}\frac{[n,k]}{[n,n]}.$$

Alors, au moyen de l'équation

$$a^2_{1,\varkappa}+a^2_{2,\varkappa}+\ldots\ldots+a^2_{n,\varkappa}=1,$$

on trouvera, en mettant pour $[n,i]^2$ sa valeur $[n,n]\,[i,i]$,

$$(30)\qquad a^2_{n,\varkappa}=\frac{[n,n]}{[1,1]+[2,2]+\ldots+[n,n]}:$$

il suffira pour cela de supprimer le facteur $[n,n]$ commun aux deux termes de la fonction. Par suite on aura

$$(31)\qquad a^2_{k,\varkappa}=\frac{[k,k]}{[1,1]+[2,2]+\ldots\ldots+[n,n]}.$$

Enfin, au moyen des équations (19), (20) et (27), les équations (29 et (31) deviendront

$$(32)\qquad \frac{a_{k,\varkappa}}{a_{n,\varkappa}}=\frac{1}{2}\frac{dU}{dA_{k,n}}:\frac{dU}{dA_{n,n}},$$