JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. CORIOLIS

Note sur une manière simple de calculer la pression produite par les parois d'un canal dans lequel se meut un fluide incompressible

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 2 (1837), p. 130-132.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1837_1_2__130_0>

NOTE

Sur une manière simple de calculer la pression produite contre les parois d'un canal dans lequel se meut un fluide incompressible ;

PAR G. CORIOLIS.

Les sections d'un canal ou filet fluide variant assez peu pour qu'on puisse admettre le parallélisme des tranches, c'est-à-dire pour qu'on puisse supposer que les vitesses dans une même section sont parallèles à la tangente à la courbe qu'on prend pour axe, on peut dans cette hypothèse exprimer très simplement la pression totale supportée dans un certain sens par les parois qui forment le canal : il suffit pour cela de connaître seulement les intensités et les directions des vitesses dans les deux sections extrêmes qui terminent la masse fluide.

Si X, Y, Z sont les composantes, dans le sens des trois axes coordonnés, des forces accélératrices auxquelles le fluide est soumis, on sait qu'en désignant par p le poids d'une tranche de fluide (les forces produites contre les parois par cette tranche étant représentées par E, F, G, dans le sens des axes coordonnés) on aura

$$\mathrm{E} = \frac{p}{g}\left(\mathrm{X} - \frac{d^2x}{dt^2}\right),$$
$$\mathrm{F} = \frac{p}{g}\left(\mathrm{Y} - \frac{d^2y}{dt^2}\right),$$
$$\mathrm{G} = \frac{p}{g}\left(\mathrm{Z} - \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

En prenant le poids du mètre cube d'eau pour unité et désignant par ω la section dans le filet faite perpendiculairement à son axe et par

ds la différentielle de la longueur de cet axe, on a

$$p = \omega ds.$$

La somme des pressions produites sur les parois dans le sens de l'axe des x pour toute l'étendue du canal, entre les limites s_0 et s_1 de la longueur de l'axe, étant désignée par E, on aura

$$\mathrm{E} = \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{X} \frac{\omega ds}{g} - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\omega ds}{g} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Si l'on désigne par u la vitesse de la tranche ωds et par α l'angle que fait l'élément ds de l'axe du canal avec l'axe des x, on a, en vertu de ce que u est une fonction de t et de s,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d(u\cos\alpha)}{dt} + u.\frac{d(u\cos\alpha)}{ds}.$$

Ainsi

$$\mathrm{E} = \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{X} \frac{\omega ds}{g} - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\omega ds}{g} \frac{d(u\cos\alpha)}{dt} - \int_{s_0}^{s_1} \frac{\omega u ds}{g} \frac{d(u\cos\alpha)}{ds}:$$

$\cos\alpha$ étant indépendant de t, on a

$$\frac{\omega ds}{g} \frac{d(u\cos\alpha)}{dt} = \frac{1}{g} . ds\cos\alpha . \omega\frac{du}{dt} = \frac{1}{g} dx . \omega \frac{du}{dt}.$$

En vertu de l'incompressibilité du fluide, ωu est constant dans l'étendue du canal; en désignant par u_0 et ω_0 les valeurs de ces variables à l'origine du canal, il vient donc

$$\omega u = \omega_0 u_0,$$

et

$$\omega \frac{du}{dt} = \omega_0 \frac{du_0}{dt}.$$

Introduisant ces relations dans les formules ci-dessus pour intégrer dans toute l'étendue du canal et dénotant par les indices 1 et 0 les valeurs des variables pour les deux extrémités du canal, on aura

$$\mathrm{E} = \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{X} \frac{\omega ds}{g} - \frac{\omega_0}{g} . \frac{du_0}{dt} . (x_1 - x_0) - \frac{\omega_0 u_0}{g} [u_1 \cos\alpha_1 - u_0 \cos\alpha_0].$$

Dans les applications, la force X ne sera que la composante de la gravité, de sorte qu'en désignant par P le poids total du fluide entre les extrémités du filet et par a l'angle que fait l'axe des x avec la verticale, on aura

$$E = P\cos a - \frac{\omega_0}{g}(x_1 - n_0)\frac{du_0}{dt} + \frac{\omega_0 u_0}{g}\cos\alpha_0 - \frac{\omega_0 u_0}{g} u_1 \cos\alpha_1,$$

Si le mouvement est permanent, c'est-à-dire si les vitesses ne varient pas avec le temps, on aura $\frac{du_0}{dt} = 0$, et E se réduira à

$$E = P\cos a + \frac{\omega_0 u_0^2}{g}\cos\alpha_0 - \frac{\omega_0 u_0}{g} u_1 \cos\alpha_1.$$

Ainsi l'effort total E ne dépend nullement de la forme du filet.

Si l'on prend l'axe des x dans un sens perpendiculaire à la vitesse u_1, c'est-à-dire si l'on veut la pression sur les parois dans un sens perpendiculaire à la vitesse de sortie, on aura $\cos\alpha_1 = 0$: il en résultera

$$E = P\cos a + \frac{\omega_0 u_0^2}{g}\cos\alpha_0 - \frac{\omega_0}{g}\cdot\frac{du_0}{dt}\cdot(x_1 - x_0),$$

et pour le cas de permanence

$$E = P\cos a + \frac{\omega_0 u_0^2}{g}\cos\alpha_0.$$

Ces formules ont été données par Euler et reproduites par M. Navier. On compliquait inutilement leur démonstration par l'introduction de la force centrifuge et de la force tangentielle.

On voit qu'il suffit de composer le terme $\frac{d^2x}{dt^2}$ en ses deux dérivées partielles.