JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V. A. KOSTITZIN

Sur les équations intégrales de la distribution des vitesses à l'intérieur d'une couche de gaz raréfié

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 13 (1934), p. 317-329.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13__317_0>

Sur les équations intégrales de la distribution des vitesses à l'intérieur d'une couche de gaz raréfié;

PAR V. A. KOSTITZIN.

1. Les physiciens allemands Kundt et Warburg étudièrent en 1875 le problème de frottement et de transmission de la chaleur dans une couche de gaz raréfié. Ces problèmes furent ramenés à une équation intégrale que les auteurs n'ont pas résolu. Dix ans plus tard une équation analogue fut trouvée par MM. Lommel et Chwolson dans le problème de la diffusion de lumière par une lame semi-transparente. En 1914, Schwarzschild retrouve la même équation intégrale en étudiant le rayonnement des atmosphères stellaires. Depuis, plusieurs physiciens et mathématiciens se sont occupés de ces problèmes (1). Dans ce Mémoire je vais reprendre la question en supposant, à la suite de Smoluchowski, que les parois de la couche gazeuse (ou les faces de la lame semi-transparente) en partie réfléchissent les particules ou les rayons et en partie les absorbent.

2. Supposons qu'une couche de gaz raréfié est limitée par deux parois planes parallèles. Ces parois peuvent se trouver dans des conditions physiques et mécaniques variées. Il faut étudier le régime stationnaire qui s'établit en fin de compte dans le gaz. Supposons pour fixer les idées que l'une des parois est immobile et que l'autre se déplace dans son plan avec une vitesse constante. Choisissons les axes de coordonnées comme il suit : prenons comme centre un point quelconque O de la paroi immobile; l'axe X sera la droite normale aux

(1) Voir, pour la bibliographie : V. A. KOSTITZIN, *Applications des équations intégrales* (*Mém. Sc. math.*, n° 69).

parois et passant par O; l'axe Z sera la droite parallèle à la vitesse de la paroi mobile; l'axe Y forme avec les autres axes un trièdre normal. Supposons pour simplifier que la vitesse de l'agitation calorique soit égale pour toutes les molécules à la vitesse moyenne c. Soient :

l, parcours libre moyen;
$\sigma = \frac{1}{l}$, résistance à la pénétration;
ν, nombre de molécules dans un centimètre cube;
μ, masse d'une molécule;
$\rho = \nu\mu$, densité du gaz;
$d\tau$, élément de volume, en supposant toutes les dimensions de cet élément inférieures à l;
dN, nombre de chocs par seconde dans $d\tau$;
$\omega(x)$, vitesse du gaz au niveau x superposée à l'agitation calorique;
h, distance entre les parois;
B, vitesse de la paroi mobile.

Prenons un plan x parallèle aux parois et dans ce plan un élément dS. Soit, d'autre part, $d\tau$ un élément de volume situé quelque part entre le plan x et la paroi mobile. On peut déterminer la situation de $d\tau$ par rapport à dS en coordonnées mixtes (φ, ψ, u), u étant la distance entre $d\tau$ et la paroi immobile, φ, l'angle entre la droite $r = (dS, d\tau)$ et l'axe X et ψ, l'angle de position du plan (dS, $d\tau$, droite passant par dS et parallèle à l'axe X); on a évidemment

$$u = x + r\cos\varphi, \qquad d\tau = \frac{(u-x)^2 \sin\varphi}{\cos^3\varphi}\,du\,d\varphi\,d\psi.$$

Les molécules quittant $d\tau$ à la suite des chocs nous intéressent seules, les autres ne faisant que passer par cet élément après des chocs subis ailleurs et se retrouvant dans l'intégration à leurs places respectives. Le nombre de ces molécules est égal à $\frac{c\nu}{l}d\tau$ par seconde. De ces molécules $\frac{c\nu}{l}d\tau\,dS\cos\varphi$ se dirigent vers dS, mais il n'y a que

$$\frac{c\nu}{4\pi l r^2}e^{-\frac{r}{l}}\cos\varphi\,d\tau\,dS$$

molécules qui arrivent sans subir de chocs jusqu'à dS. Ces molécules y apportent une quantité de mouvement supplémentaire égale à

$$\frac{c\mu\nu}{4\pi l r^2} e^{-\sigma r} \omega(u) \cos\varphi \, d\tau \, dS,$$

et pour obtenir leur contribution à la vitesse moyenne au niveau x, il faut diviser cette quantité de mouvement par la masse

$$\rho c \cos\varphi \, dS = \nu\mu c \cos\varphi \, dS.$$

On obtient de cette façon

$$\frac{e^{-\frac{\sigma(u-x)}{\cos\varphi}} \omega(u) \sin\varphi \, du \, d\varphi \, d\psi}{4\pi l \cos\varphi}.$$

En intégrant cette expression dans tout l'espace compris entre le plan X et la paroi mobile, on obtient la part de la vitesse moyenne au niveau x due à l'apport de molécules venant de cette partie de l'espace, à l'exception de la paroi elle-même. Cette intégrale est égale à

$$(x) = \frac{\sigma}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^h \frac{\omega(u) e^{-\frac{\sigma(u-x)}{\cos\varphi}} \sin\varphi \, du \, d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sigma}{2}\int_x^h \omega(u) \, du \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(u-x)} \, dk}{k}.$$

On obtient de la même façon l'apport des molécules venant de l'espace compris entre la paroi immobile et le plan x

$$\varpi_2(x) = \frac{\sigma}{2}\int_0^x \omega(u) \, du \int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(x-u)} \, dk}{k}.$$

3. Il faut maintenant calculer l'apport de molécules venant des parois. Étant donnée la structure superficielle des corps solides, on peut supposer qu'une partie seulement des molécules entrant en choc avec les parois s'en va immédiatement sans avoir effectué à l'intérieur de la couche superficielle un parcours plus ou moins long et compliqué. Supposons que de n molécules heurtant la paroi immobile $\beta_1 n$ soient réfléchies d'après la loi de réflexion des rayons lumineux et $(1-\beta_1)n$ soient absorbées pour ressortir en emportant la vitesse de la paroi. Appelons β_2 le coefficient analogue pour la paroi mobile. Négligeons d'autre part toutes les autres causes d'adsorption s'il y en a. Dans ces conditions des simples considérations géométriques montrent que l'apport des molécules réfléchies une fois par la paroi immobile est égal à

$$\frac{\sigma\beta_1}{2}\int_0^h \omega(u)\,du\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(u+x)}\,dk}{k}.$$

De même l'apport des molécules réfléchies une fois par la paroi mobile est égal à

$$\frac{\sigma\beta_2}{2}\int_0^h \omega(u)\,du\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(2h-u-x)}\,dk}{k}$$

L'apport des molécules réfléchies successivement par les parois immobile et mobile est égal à

$$\frac{\sigma\beta_1\beta_2}{2}\int_0^h \omega(u)\,du\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(2h+u-x)}\,dk}{k}.$$

Les réflexions dans l'ordre inverse donnent

$$\frac{\sigma\beta_1\beta_2}{2}\int_0^h \omega(u)\,du\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(2h+x-u)}\,dk}{k}.$$

En continuant de la sorte on trouve en fin de compte l'apport total de toutes les molécules ayant subi o, 1, 2, ... réflexions sans avoir été « absorbées » par une des parois

$$\int_0^h \omega(u)\,\mathrm{K}(x, u)\,du,$$

en désignant par $\mathrm{K}(x, u)$ la fonction

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}(x, u) = {} & \frac{\sigma}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma|x-u|}\,dk}{k} \\
& + \frac{\beta_1\sigma}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(u+x)}\,dk}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_1^n\beta_2^n\,e^{-2nh\sigma k} \\
& + \frac{\beta_2\sigma}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-2h\sigma k+k\sigma(u+x)}\,dk}{k}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_1^n\beta_2^n e^{-2n\sigma kh} \\
& + \sigma\int_1^\infty \frac{\mathrm{ch}(k\sigma x-k\sigma u)\,dk}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_1^n\beta_2^n\,e^{-2nh\sigma k},
\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}K(x, u) = {} & \frac{\sigma}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma|x-u|}\,dk}{k} + \frac{\beta_1\sigma}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(u+x)}\,dk}{k(1-\beta_1\beta_2 e^{-2h\sigma k})} \\ & + \frac{\beta_2\sigma}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-2h\sigma k+k\sigma(u+x)}\,dk}{k(1-\beta_1\beta_2 e^{-2h\sigma k})} + \sigma\beta_1\beta_2\int_1^\infty \frac{\mathrm{ch}(k\sigma x - k\sigma u)\,e^{-2h\sigma k}\,dk}{k(1-\beta_1\beta_2 e^{-2h\sigma k})}.\end{aligned}$$

Posons

$$\beta_1 = e^{-2\tau_1}, \qquad \beta_2 = e^{-2\tau_2}.$$

Il est facile de voir que dans ces notations le noyau prend une forme plus commode

$$K(x, u) = \sigma\int_1^\infty \frac{\mathrm{ch}(\tau_2 + h\sigma k - x\sigma k)\,\mathrm{ch}(\tau_1 + k\sigma u)\,dk}{k\,\mathrm{sh}(h\sigma k + \tau_1 + \tau_2)} \qquad (x \geqq u)$$

$$K(x, u) = \sigma\int_1^\infty \frac{\mathrm{ch}(\tau_2 + h\sigma k - u\sigma k)\,\mathrm{ch}(\tau_1 + k\sigma x)\,dk}{k\,\mathrm{sh}(h\sigma k + \tau_1 + \tau_2)} \qquad (x \leqq u).$$

4. Il faut ensuite calculer les apports de molécules revenant des parois après un séjour dans la couche superficielle suivi de 0, 1, 2, 3, ... réflexions successives. On trouve de cette façon la fonction connue $F(x)$

$$\begin{aligned}F(x) = {} & \frac{B(1-\beta_2)}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(h-x)}\,dk}{k^2} + \frac{(1-\beta_2)\beta_1 B}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(h+x)}\,dk}{k^2} \\ & + \frac{(1-\beta_2)\beta_1\beta_2 B}{2}\int_1^\infty \frac{e^{-k\sigma(3h-x)}\,dk}{k^2} + \ldots,\end{aligned}$$

ou bien sous une forme plus compacte

$$F(x) = B\,\mathrm{sh}\,\tau_2 \int_1^\infty \frac{\mathrm{ch}(\tau_1 + k\sigma x)\,dk}{k^2\,\mathrm{sh}(h\sigma k + \tau_1 + \tau_2)}. \tag{2}$$

La vitesse moyenne au niveau x est la résultante de tous ces apports; cela donne l'équation intégrale

$$\omega(x) = \int_0^h K(x, u)\,\omega(u)\,du + F(x). \tag{3}$$

On peut donner à cette équation une forme plus symétrique en admettant que la vitesse d'une des parois est ω_1 et celle de l'autre ω_2;

on a donc

$$(4)\quad \omega(x)= \int_0^h K(x, u)\omega(u)\,du + \omega_1 \operatorname{sh}\tau_1 \int_1^\infty \frac{\operatorname{ch}(\tau_2 + h\sigma k - k\sigma x)\,dk}{k^2 \operatorname{sh}(h\sigma k + \tau_1 + \tau_2)} + \omega_1 \operatorname{sh}\tau_2 \int_1^\infty \frac{\operatorname{ch}(\tau_1 + k\sigma x)\,dk}{k^2 \operatorname{sh}(h\sigma k + \tau_1 + \tau_2)}.$$

5. NOYAU $K(x, u)$. — Le noyau $K(x, u)$, tout en étant différent du noyau intégro-logarithmique correspondant au cas de

$$\beta_1 = \beta_2 = 0 \,(\tau_1 = \tau_2 = \infty)$$

en possède cependant les propriétés essentielles. $K(x, u)$ est une fonction positive, continue, ayant une singularité logarithmique pour $x = u$. Le noyau itéré $K_2(x, u)$ est borné ainsi que tous les noyaux itérés d'ordre supérieur K_3, K_4, ... Supposons donc que

$$K_n(x, u) \leq M_n.$$

L'équation

$$K_{n+1}(x, u) = \int_0^h K(x, z) K_n(z, u)\,dz$$

donne

$$K_{n+1}(x, u) \leq M_n \int_0^h K(x, z)\,dz.$$

Or, l'intégrale

$$A(x) = \int_0^h K(x, z)\,dz = 1 - \operatorname{sh}\tau_1 \int_1^\infty \frac{\operatorname{ch}(\tau_2 + h\sigma k - k\sigma x)\,dk}{k^2 \operatorname{sh}(h\sigma k + \tau_1 + \tau_2)} - \operatorname{sh}\tau_2 \int_1^\infty \frac{\operatorname{ch}(\tau_1 + k\sigma x)\,dk}{k^2 \operatorname{sh}(k\sigma h + \tau_1 + \tau_2)}$$

reste toujours positive et pour une certaine valeur $x = q$ atteint un maximum $A(q) < 1$. On trouve donc que

$$M_{n+1} = M_2 A^{n-1}(q).$$

La série résolvante

$$Q(\lambda; x, u) = K(x, u) + \lambda K_2(x, u) + \lambda^2 K_3(x, u) + \ldots$$

a comme fonction majorante

$$K(x, u) + \lambda M_2 + \lambda^2 M_3 + \ldots = K(x, u) + \frac{\lambda M_2}{1 - \lambda A(q)}.$$

Donc, cette série est uniformément convergente pour toutes les valeurs λ vérifiant l'inégalité

$$|\lambda| < \frac{1}{A(q)}.$$

Or, $A(q) < 1$, ce qui donne

$$|\lambda_1| > 1.$$

Dans notre cas $\lambda = 1$, ce qui permet d'appliquer à l'équation (3) la méthode des approximations successives. Le noyau résolvant

$$Q(1; x, u) = K(x, u) + K_2(x, u) + \ldots$$

est positif, continu et possède, comme $K(x, u)$, une singularité logarithmique pour $x = u$.

Le noyau $K(x, u)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 K(x, u)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K(x, u)}{\partial u^2}.$$

Supposons que la fonction conjuguée $L(x, u)$ soit connue. On a les relations suivantes :

$$\frac{\partial K}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial u}, \qquad \frac{\partial K}{\partial u} = -\frac{\partial L}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial u^2}.$$

Admettons qu'on puisse différentier l'équation intégrale

$$\omega(x) = F(x) + \int_0^h K(x, u)\omega(u)\,du.$$

Cette opération donne

$$(5)\quad \begin{aligned} \omega'(x) &= F'(x) + \int_0^h \frac{\partial K(x, u)}{\partial x}\omega(u)\,du = -\int_0^h \frac{\partial L(x, u)}{\partial u}\omega(u)\,du + F'(x) \\ &= \int_0^h L(x, u)\omega'(u)\,du + F'(x) + \omega(0)L(x, 0) - \omega(h)L(x, h). \end{aligned}$$

Soit $R(\lambda; x, u)$ le noyau résolvant pour le noyau $L(x, u)$. La solution de l'équation (5) peut être présentée sous la forme

$$(6)\quad \omega'(x) = F'(x) + \omega(0)R(1; x, 0) - \omega(h)R(1; x, h) + \int_0^h R(1; x, u)F'(u)\,du,$$

d'où découle la nouvelle forme de solution de l'équation (3)

$$(7)\qquad \omega(x) = F(x) + \omega(0) - F(0) + \int_0^x dz \int_0^h R(1;\, z,\, u)\, F'(u)\, du + \omega(0) \int_0^x R(1;\, t,\, 0)\, dt - \omega(h) \int_0^x R(1;\, t,\, h)\, dt.$$

On peut se servir de ces formules pour établir des équations aux dérivées partielles vérifiées par les noyaux résolvants. Écrivons les équations intégrales des noyaux résolvants $Q(\lambda;\, x,\, u)$ et $R(\lambda;\, x,\, u)$

$$Q(\lambda;\, x,\, u) = K(x,\, u) + \lambda \int_0^h K(x,\, z)\, Q(\lambda;\, z,\, u)\, dz,$$

$$R(\lambda;\, x,\, u) = L(x,\, u) + \lambda \int_0^h L(x,\, z)\, R(\lambda;\, z,\, u)\, dz.$$

En différentiant par rapport à x la première de ces équations on trouve

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(\lambda;\, x,\, u)}{\partial x} &= \frac{\partial K(x,\, u)}{\partial x} + \lambda \int_0^h \frac{\partial K(x,\, z)}{\partial x} Q(\lambda;\, z,\, u)\, dz \\ &= -\frac{\partial L(x,\, u)}{\partial x} - \lambda \int_0^h \frac{\partial L(x,\, z)}{\partial z} Q(\lambda;\, z,\, u)\, dz \\ &= -\frac{\partial L(x,\, u)}{\partial x} - \lambda L(x,\, h)\, Q(\lambda;\, h,\, u) + \lambda L(x,\, 0)\, Q(\lambda;\, 0,\, u) \\ &\quad + \lambda \int_0^h L(x,\, z) \frac{\partial Q(\lambda;\, z,\, u)}{\partial z}\, du.\end{aligned}$$

En différentiant par rapport à u la seconde équation intégrale on a

$$\frac{\partial R(\lambda;\, x,\, u)}{\partial u} = \frac{\partial L(x,\, u)}{\partial u} + \lambda \int_0^h L(x,\, z) \frac{\partial R(\lambda;\, z,\, u)}{\partial u}\, du.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(\lambda;\, x,\, u)}{\partial x} + \frac{\partial R(\lambda;\, x,\, u)}{\partial u} &= \lambda L(x,\, 0)\, Q(\lambda;\, u,\, 0) - \lambda L(x,\, h)\, Q(\lambda;\, u,\, h) \\ &\quad + \lambda \int_0^h L(x,\, z) \left[\frac{\partial Q(\lambda;\, z,\, u)}{\partial z} + \frac{\partial R(\lambda;\, z,\, u)}{\partial u} \right] du.\end{aligned}$$

La résolution de cette équation intégrale donne l'équation différentielle cherchée

$$(8)\qquad \frac{\partial Q(\lambda;\, x,\, u)}{\partial x} + \frac{\partial R(\lambda;\, x,\, u)}{\partial u} = \lambda R(\lambda;\, x,\, 0)\, Q(\lambda;\, u,\, 0) - \lambda R(\lambda;\, x,\, h)\, Q(\lambda;\, u,\, h).$$

On trouve facilement l'équation analogue

$$(9)\qquad \frac{\partial Q(\lambda;\, x,\, u)}{\partial u} + \frac{\partial R(\lambda;\, x,\, u)}{\partial x} = \lambda R(\lambda;\, u,\, 0)\, Q(\lambda;\, x,\, 0) - \lambda R(\lambda;\, u,\, h)\, Q(\lambda;\, x,\, h).$$

On peut déduire de ces équations la relation suivante :

$$(10)\qquad \left[1 + \lambda\int_0^h Q(\lambda;\, u,\, 0)\, du\right]\left[1 + \lambda\int_0^h R(\lambda;\, u,\, 0)\, du\right] = \left[1 + \lambda\int_0^h Q(\lambda;\, u,\, h)\, du\right]\left[1 + \lambda\int_0^h R(\lambda;\, u,\, h)\, du\right],$$

qui peut être souvent utile.

Dans le cas du noyau (1) la fonction $L(x,\, u)$ est égale à

$$(11)\qquad \begin{cases} L(x,\, u) = \sigma\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sh}(\tau_2 + h\sigma k - k\sigma x)\operatorname{sh}(\tau_1 + k\sigma u)\, dk}{k\operatorname{sh}(h\sigma k + \tau_1 + \tau_2)} & (x > u), \\ L(x,\, u) = \sigma\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sh}(\tau_2 + h\sigma k - k\sigma u)\operatorname{sh}(\tau_1 + k\sigma x)\, dk}{k\operatorname{sh}(h\sigma k + \tau_1 + \tau_2)} & (x < u). \end{cases}$$

C'est une fonction positive, continue, logarithmiquement infinie pour $x = u$. L'intégrale

$$B(x) = \int_0^h L(x,\, u)\, du = 1 - \operatorname{ch}\tau_1\int_1^\infty \frac{\operatorname{sh}(\tau_2 + h\sigma k - k\sigma x)\, dk}{k^2\operatorname{sh}(h\sigma k + \tau_1 + \tau_2)} - \operatorname{ch}\tau_2\int_1^\infty \frac{\operatorname{sh}(\tau_1 + k\sigma x)\, dk}{k^2\operatorname{sh}(h\sigma k + \tau_1 + \tau_2)}$$

vérifie les inégalités

$$0 < B(x) = \int_0^h L(x,\, u)\, du < B(r) < 1.$$

Le noyau itéré $L_2(x,\, u)$ est borné ; donc la série résolvante

$$R(\lambda;\, x,\, u) = L(x,\, u) + \lambda L_2(x,\, u) + \lambda^2 L_3(x,\, u) + \ldots$$

admet une fonction majorante

$$L(x, u) + \frac{\lambda N_2}{1 - \lambda B(r)};$$

il s'ensuit que

$$|\lambda_1| > 1$$

et que la série

$$R(1; x, u) = L(x, u) + L_2(x, u) + \ldots$$

est positive et convergente; pour $x = u$, $R(1; x, u)$ a une singularité logarithmique.

6. Solution. — Il est facile de voir que dans notre cas

$$F'(x) = B\,L(x, h).$$

Donc

$$(12)\quad \omega'(x) = \omega(0)\,R(1; x, 0) + [B - \omega(h)]\,R(1; x, h),$$

$$(13)\quad \omega(x) = \omega(0) + \omega(0)\int_0^x R(1; t, 0)\,dt + [B - \omega(h)]\int_0^x R(1; t, h)\,dt.$$

On a d'autre part

$$(14)\qquad \omega(x) = F(x) + \int_0^h Q(1; x, u)\,F(u)\,du.$$

Donc

$$\omega(0) = F(0) + \int_0^h Q(1; 0, u)\,F(u)\,du > 0,$$

ce qui montre qu'il existe un certain glissement d'origine moléculaire entre le gaz et la paroi immobile. De même

$$\omega(h) < B,$$

c'est-à-dire il existe un glissement analogue au voisinage de la paroi mobile.

La fonction $\omega'(x)$ est toujours positive, et $\omega(x)$ est une fonction croissante. Il résulte de l'équation (12) que

$$\omega'(0) \sim \infty, \qquad \omega'(h) \sim \infty;$$

les parois sont tangentes à la courbe de distribution de vitesses.

Ces propriétés correspondent bien aux résultats expérimentaux de MM. P. P. Lasareff, D. P. Riabouchinsky et A. K. Timiriazeff.

7. Cas particuliers. — 1° Supposons que les propriétés réflectives des parois soient identiques :

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta; \qquad \tau_1 = \tau_2 = \tau.$$

Dans ce cas les noyaux $K(x, u)$, $L(x, u)$ prennent une forme plus simple et vérifient les relations suivantes :

$$K(h - x, h - u) = K(x, u); \qquad L(h - x, h - u) = L(x, u).$$

Il en résulte que les noyaux résolvants Q et R ont les mêmes propriétés ; la fonction $\omega(x)$ vérifie l'équation

$$\omega(x) + \omega(h - x) = B;$$

donc

$$\omega\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{B}{2};$$

$$\omega(x) = \omega(o) + \omega(o)\int_0^x R(1; t, o)\,dt + \omega(o)\int_0^x R(1; t, h)\,dt.$$

On a pour $x = \frac{h}{2}$

$$\frac{B}{2} = \omega(o)\left[1 + \int_0^h R(1; t, o)\,dt\right],$$

ce qui permet d'écrire la solution sous une forme plus simple :

$$\omega(x) = \frac{B}{2}\,\frac{1 + \int_0^x R(1; t, o)\,dt + \int_0^x R(1; t, h)\,dt}{1 + \int_0^h R(1; t, o)\,dt}.$$

Dans le cas de $\tau = \infty$, le problème se ramène à celui étudié par Kundt et Warburg. Dans le cas de $\tau = o$, c'est-à-dire en l'absence « d'absorption » des molécules par les parois, le mouvement des parois reste sans influence sur le gaz.

2° Supposons que la paroi I ne réfléchit pas et que la paroi II n'absorbe pas les molécules :

$$\tau_1 = x, \qquad \tau_2 = 0.$$

$$\mathrm{K}(x, u) = \sigma \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{ch}(h\sigma k - k\sigma x)\, e^{-\sigma k\, h-u}\, dk}{k} \qquad (x > u),$$

$$\mathrm{K}(x, u) = \sigma \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{ch}(h\sigma k - k\sigma u)\, e^{-\sigma k\, h-x}\, dk}{k} \qquad (x < u),$$

$$\mathrm{L}(x, u) = \sigma \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{sh}(h\sigma k - k\sigma x)\, e^{-\sigma k\, h-u}\, dk}{k} \qquad (x > u),$$

$$\mathrm{L}(x, u) = \sigma \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{sh}(h\sigma k - k\sigma u)\, e^{-\sigma k\, h-x}\, dk}{k} \qquad (x < u).$$

L'équation (4) prend la forme

$$\omega(x) = \int_0^h \mathrm{K}(x, u)\, \omega(u)\, du + \omega_1 \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{ch}(h\sigma k - k\sigma x)\, e^{-h\sigma k}\, dk}{k^2}.$$

On a d'autre part

$$\mathrm{A}(x) = \int_0^h \mathrm{K}(x, u)\, du = 1 - \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{ch}(h\sigma k - k\sigma x)\, e^{-h\sigma k}\, dk}{k^2}.$$

Il s'ensuit que dans ce cas $\omega(x) = \omega_1$; la paroi mobile et « absorbante » communique entièrement son mouvement au gaz.

8. Problème optique. — Supposons qu'une lame semi-transparente d'épaisseur h soit éclairée par une lumière qui tombe normalement sur une de ses faces. Admettons, à la suite de Lommel et Chwolson que la semi-transparence dépend de la présence de particules sphériques opaques uniformément distribuées dans la lame. Soient : λ l'albedo des particules; σ le coefficient de transparence de la matière; $\psi(x)$ l'intensité de lumière à la distance x de la face éclairée: $\beta = e^{-2\tau}$ la proportion de la lumière réfléchie par les faces. Dans ces conditions $\psi(x)$ vérifie l'équation intégrale

$$\psi(x) = \lambda \int_0^h \mathrm{K}(x, t)\, \psi(t)\, dt + \frac{\Lambda\, e^{-\sigma x}}{1 - e^{-\sigma h - 2\tau}}. \tag{15}$$

Le noyau $\mathrm{K}(x, t)$ est celui du premier cas particulier du n° 7. En différentiant l'équation (15) on trouve

$$(16)\quad \psi'(x)=\lambda\int_0^h \mathrm{L}(x,u)\psi'(u)\,du+\lambda\psi(0)\,\mathrm{L}(x,0)-\lambda\psi(h)\,\mathrm{L}(x,h)-\frac{\sigma\mathrm{A}\,e^{-\sigma x}}{1-e^{-\sigma h-2\tau}}.$$

On en tire

$$\begin{aligned}\psi'(x)=\;&\lambda\psi(0)\,\mathrm{R}(\lambda;\,x,\,0)-\lambda\psi(h)\,\mathrm{R}(\lambda;\,x,\,h)-\frac{\sigma\mathrm{A}\,e^{-\sigma x}}{1-e^{-\sigma h-2\tau}}\\&-\frac{\lambda\sigma\mathrm{A}}{1-e^{-\sigma h-2\tau}}\int_0^h \mathrm{R}(\lambda;\,x,\,u)\,e^{-\sigma u}\,du.\end{aligned}$$

On voit que, pour $x\sim 0$, $\psi'(x)$ est positif, et, pour $x\sim h$, $\psi'(x)$ est négatif; donc la fonction $\psi(x)$ a un maximum à l'intérieur de la lame. On a d'autre part

$$\psi(x)=\frac{\mathrm{A}}{1-e^{-\sigma h-2\tau}}\left[e^{-\sigma x}+\lambda\int_0^h \mathrm{Q}(\lambda;\,x,\,u)\,e^{-\sigma u}\,du\right],$$

$$\psi(0)=\frac{\mathrm{A}}{1-e^{-\sigma h-2\tau}}\left[1+\lambda\int_0^h \mathrm{Q}(\lambda;\,0,\,u)\,e^{-\sigma u}\,du\right],$$

$$\psi(h)=\frac{\mathrm{A}}{1-e^{-\sigma h-2\tau}}\left[e^{-\sigma h}+\lambda\int_0^h \mathrm{Q}(\lambda;\,h,\,u)\,e^{-\sigma u}\,du\right].$$

Donc

$$\begin{aligned}\psi(0)-\psi(h)=\;&\frac{\mathrm{A}}{1-e^{-\sigma h-2\tau}}\Bigg[1-e^{-\sigma h}+\lambda\int_0^{\frac{h}{2}} \mathrm{Q}(\lambda;\,0,\,u)\,[e^{-\sigma u}-e^{-\sigma(h-u)}]\,du\\&\qquad+\lambda\int_{\frac{h}{2}}^h \mathrm{Q}(\lambda;\,0,\,u)\,[e^{-\sigma u}-e^{-\sigma(h-u)}]\,du\Bigg]\\=\;&\frac{\mathrm{A}}{1-e^{-\sigma h-2\tau}}\Bigg\{1-e^{-\sigma h}+\lambda\int_0^{\frac{h}{2}}[\mathrm{Q}(\lambda;\,0,\,u)-\mathrm{Q}(\lambda;\,h,\,u)]\\&\qquad\times[e^{-\sigma u}-e^{-\sigma(h-u)}]\,du\Bigg\}.\end{aligned}$$

Or, pour $0<u<\frac{h}{2}$,

$$\mathrm{Q}(\lambda;\,0,\,u)-\mathrm{Q}(\lambda;\,h,\,u)>0,\qquad e^{-\sigma u}-e^{-\sigma(h-u)}>0;$$

donc $\psi(0)>\psi(h)$. Ces résultats sont suffisants pour donner une idée sur l'allure de la fonction $\psi(u)$.