JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

VITO VOLTERRA

Représentation des fonctionnelles analytiques déduites du théorème de Mittag-Leffler

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 13 (1934), p. 293-316.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13__293_0>

Représentation des fonctionnelles analytiques déduites du théorème de Mittag Leffler;

PAR VITO VOLTERRA (1).

1. Il me semble que les principaux progrès qu'ait fait la théorie des fonctionnelles dans ces dernières années concernent d'une part les champs fonctionnels — étudiés tant du point de vue de l'*Analysis situs* que d'un point de vue métrique, par l'introduction d'éléments linéaires — et concernent d'autre part la théorie des fonctionnelles analytiques, théorie à laquelle un jeune mathématicien italien, M. Fantappié, a travaillé d'une manière très efficace.

Je voudrais, dans la présente Conférence, donner une idée des recherches récentes de M. Fantappié sur les fonctionnelles analytiques. J'aurai d'ailleurs l'occasion d'envisager le sujet d'un point de vue nouveau et de développer une méthode qui, tout en tendant au même but, est différente de celle qu'a adoptée M. Fantappié.

2. Nous rappellerons tout d'abord deux modes de représentation des fonctions analytiques, qui interviendront dans la suite et qui reposent, l'un et l'autre, sur l'emploi de la fonction élémentaire $\frac{1}{z-x}$, laquelle devient infinie pour $z = x$.

Le premier remonte à Cauchy qui obtient, pour la valeur d'une fonction analytique $F(z)$, uniforme et régulière dans une aire σ du

(1) Je tiens à exprimer mes sentiments de reconnaissance à M. J. Pérès, qui a bien voulu rédiger le texte de cette conférence, faite à l'Institut Henri Poincaré, en mars 1933. V. V.

plan complexe, la formule classique

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{F(x)\,dx}{x - z},$$

l'intégrale étant prise le long du contour s de l'aire σ.

L'expression ainsi obtenue est linéaire par rapport à $F(x)$ car elle exprime $F(z)$ comme une somme de fonctions élémentaires $\frac{1}{2\pi i}\frac{F(x)\,dx}{x - z}$.

3. L'autre méthode à laquelle nous venons de faire allusion est due à Mittag-Leffler. Elle s'applique à une fonction analytique $F(z)$ uniforme dans tout le plan complexe et elle met en évidence les points singuliers de $F(z)$ et la partie principale (partie infinie) relative à chacun d'eux.

On part encore de la fonction élémentaire $\frac{1}{z - x}$ qui donne l'infini du premier ordre au point x. Par dérivation par rapport à x on obtient successivement :

$$\frac{1}{(z - x)^2}, \quad \frac{2}{(z - x)^3}, \quad \frac{2.3}{(z - x)^4}, \quad \ldots,$$

et, par combinaison de ces *éléments simples* (somme ou série), on peut construire la partie infinie de tout point singulier x (pôle ou singularité essentielle). En modifiant la valeur de x on peut considérer un ensemble de points singuliers.

Ceci posé, Mittag-Leffler donne $F(z)$ comme somme d'une série dont chaque terme correspond à l'un des points singuliers de $F(z)$ et contient la partie principale correspondante : on ne peut en général réduire les termes de la série aux diverses parties principales, il faut y ajouter des polynomes en x dont le choix intervient pour assurer la convergence de la série.

$F(z)$ est donc exprimée par une série de terme général

$$G\left(\frac{1}{z - x}\right) + P(z),$$

où G représente en général une transcendante entière et P un polynome (¹). On voit que dans la construction de $f(z)$ on a à combiner linéairement non seulement les fractions rationnelles

$$\frac{1}{z-x}, \quad \frac{1}{(z-x)^2}, \quad \frac{2}{(z-x)^3}, \quad \frac{2.3}{(z-x)^4}, \quad \ldots,$$

mais encore les puissances entières de z,

$$z^0, \quad z, \quad z^2, \quad z^3, \quad \ldots.$$

4. Passons maintenant aux fonctionnelles pour rappeler d'abord quelques notions générales.

On sait ce qu'il faut entendre par fonctionnelle : si, à chaque fonction $f(z)$ appartenant à un certain domaine fonctionnel correspond une valeur d'une certaine quantité, celle-ci est une *fonctionnelle* de $f(z)$ et $f(z)$ est la *fonction-variable indépendante*.

Nous nous limiterons dans la suite au cas où $f(z)$ est fonction analytique uniforme de la variable complexe z : nous imposons donc une restriction au domaine fonctionnel de définition. Nous admettrons de plus que le domaine de variabilité de z soit une certaine partie Σ du plan complexe; il pourra d'ailleurs arriver que Σ puisse être aussi grand que l'on veut et étendu à tout le plan complexe. Nous représenterons la fonctionnelle par $F|[f(z)]|$.

5. $F|[f(z)]|$ sera dite *continue* si à tout nombre σ arbitrairement petit on peut en associer un autre ε tel que l'inégalité

$$|F|[f_1(z)]| - F|[f_2(z)]|| < \sigma$$

soit entraînée par

$$|f_1(z) - f_2(z)| < \varepsilon,$$

satisfaite dans tout le domaine Σ.

Si cette propriété subsiste quelle que soit Σ lorsqu'on l'agrandit autant qu'on veut, il y aura continuité dans tout le plan complexe de variabilité de z.

(¹) Pour le détail de la démonstration, *cf.* par exemple, E. BOREL, *Leçons sur les fonctions méromorphes*, p. 8-14.

La fonctionnelle continue sera dite *linéaire* si elle vérifie

$$F|[f_1(z)+f_2(z)]|=F|[f_1(z)]|+F|[f_2(z)]|,$$

d'où

$$F|[\alpha f(z)]|=\alpha F|[f(z)]|,$$

α étant une constante

Pour le cas linéaire la condition de continuité entraîne que

$$|F|[f(z)]||<\sigma,$$

arbitrairement petit, dès que

$$|f(z)|<\varepsilon.$$

6. M. Fantappié a donné le nom de *fonctionnelles analytiques* aux fonctionnelles $F|[f(z)]|$, dépendant de la fonction analytique $f(z)$ et qui jouissent de plus de la propriété suivante : si $f(z)$ dépend *analytiquement* d'un paramètre x [nous la noterons alors $f(z|x)$], F est fonction analytique de x.

Si la fonctionnelle analytique est de plus *linéaire*, les conditions de linéarité entraînent immédiatement pour la dérivée $\frac{dF}{dx}$ la formule

$$\frac{d}{dx}F|[f(z|x)]|=F\left|\left[\frac{df(z|x)}{dx}\right]\right|$$

et une formule analogue vaut évidemment pour l'intégration

$$\int_a^b F|[f(z|x)]|\,dx=F\left|\left[\int_a^b f(z,x)\,dx\right]\right|$$

Si le chemin d'intégration pour x est une ligne fermée qui n'enferme aucune singularité de f on aura, d'après le théorème de Cauchy :

$$\int_S F|[f(z|x)]|\,dx=F\left|\left[\int_S f(z|x)\,dx\right]\right|=0.$$

Ainsi dans le cas d'une *fonctionnelle analytique linéaire*, les opérations de dérivation et d'intégration par rapport au paramètre peuvent s'effectuer sous le signe fonctionnel F.

7. Les remarques précédentes permettent, en suivant l'élégante analyse de M. Fantappié d'introduire la notion essentielle d'*indicatrice fonctionnelle*.

Puisque $\frac{1}{x-z}$ est l'élément fondamental d'une fonction analytique de même

$$\mathrm{F}\left|\left[\frac{1}{x-z}\right]\right| = v(x),$$

indicatrice fonctionnelle sera l'élément fondamental dans la construction des fonctionnelles analytiques.

8. Nous pouvons maintenant, suivant toujours la méthode de M. Fantappié, effectuer la construction d'une *fonctionnelle analytique linéaire* dont l'indicatrice $v(x)$ est connue.

Nous partirons du théorème de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{S}} \frac{f(x)}{x-z}\,dx = f(z),$$

en prenant pour S une ligne qui sépare les singularités de $f(x)$ et celles de $v(x)$ ([1]).

Toute fonctionnelle analytique linéaire admet l'expression fondamentale

$$(1) \qquad \mathrm{F}|[f(z)]| = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{S}} f(x)\,v(x)\,dx.$$

9. La formule précédente (1) de M. Fantappié résout le problème de construire les fonctionnelles analytiques linéaires par application du théorème de Cauchy. Nous allons, dans la suite, appliquer au même problème mon procédé qui consiste à employer la méthode donnée par Mittag-Leffler pour construire les fonctions analytiques.

A cet effet nous partirons toujours de la fonction indicatrice que

---

([1]) Le texte donne seulement une idée de la méthode; pour les détails de la démonstration le lecteur devra se reporter aux travaux de M. Fantappié.

nous définirons (en changeant son signe) par la formule

$$\varphi(x) = \mathrm{F}\left|\left[\frac{1}{z-x}\right]\right|,$$

c'est une fonction analytique de x que *nous supposons connue*. Il faut tout d'abord en déduire les valeurs des expressions

$$\mathrm{F}\left|\left[\frac{1}{(z-x)^n}\right]\right|$$

et

$$\mathrm{F}|[z^n]|.$$

Pour les premières aucune difficulté ne se présente : on aura évidemment

$$\mathrm{F}\left|\left[\frac{1}{(z-x)^n}\right]\right| = \frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}.$$

Pour obtenir $\mathrm{F}|[z^n]|$ nous partirons du développement

$$x\frac{1}{z-x} = -\frac{1}{1-\frac{z}{x}} = -1-\frac{z}{x}-\frac{z^2}{x^2}-\ldots-\frac{z^m}{x^m}+\frac{\frac{z^{m+1}}{x^{m+1}}}{\frac{z}{x}-1}.$$

On en déduit (m étant pris égal à 0)

$$\mathrm{F}\left|\left[x\frac{1}{z-x}\right]\right| = x\varphi(x) = \mathrm{F}|[-1]| + \mathrm{F}\left|\left[\frac{\frac{z}{x}}{\frac{z}{x}-1}\right]\right|;$$

admettons que le domaine Σ de variation de z soit fini et faisons croître x indéfiniment. Si $x\varphi(x)$ a une limite et que

$$\lim_{x=\infty} x\varphi(x) = -c_0,$$

nous devrons poser

$$\mathrm{F}|[1]| = +c_0.$$

Envisageons alors

$$\mathrm{F}\left|\left[x\frac{1}{z-x}\right]\right| + \mathrm{F}|[1]| = \mathrm{F}\left|\left[-\frac{z}{x}+\frac{\frac{z^2}{x^2}}{\frac{z}{x}-1}\right]\right|,$$

c'est-à-dire

$$x\,v(x)+v_0=\mathrm{F}\left|\left[-\frac{z}{x}\right]\right|+\mathrm{F}\left|\left[\frac{\frac{z^2}{x^2}}{\frac{z}{x}-1}\right]\right|,$$

puis

$$-x\,\{x\,v(x)+v_0\}=\mathrm{F}\,|[z]|-\mathrm{F}\left|\left[\frac{\frac{z^2}{x}}{\frac{z}{x}-1}\right]\right|;$$

si le premier membre a une limite pour $x=\infty$ et que l'on pose

$$-v_1=\lim_{x=\infty} x\big(x\,v(x)+v_0\big),$$

on aura

$$\mathrm{F}\,|[z]|=v_1.$$

Un raisonnement analogue conduira à la formule

$$\mathrm{F}\,|[z^n]|=v_n,$$

v_n étant la limite

$$v_n=-\lim_{x=\infty}\{x^{n+1}v(x)+v_0x^n+v_1x^{n-1}+\ldots+v_{n-1}x\}.$$

Pour éviter toute difficulté sur l'existence des limites précédentes nous nous restreindrons au cas où l'indicatrice $v(x)$ est régulière autour du point à l'infini et admet un développement en série

$$v(x)=\frac{\mathrm{B}_0}{x}+\frac{\mathrm{B}_1}{x^2}+\ldots+\frac{\mathrm{B}_n}{x^{n+1}}+\ldots,$$

valable pour $|x|$ assez grand on aura

$$\lim_{x=+\infty} x\,v(x)=\mathrm{B}_0,\qquad \lim_{x=+\infty}\big(x^2v(x)-\mathrm{B}_0x\big)=\mathrm{B}_1,\qquad \ldots,$$

et, par suite,

$$\mathrm{F}\,|[1]|=v_0=-\mathrm{B}_0,\qquad \mathrm{F}\,|[z]|=v_1=-\mathrm{B}_1,\qquad \ldots,$$

en général

$$\mathrm{F}\,|[z^n]|=v_n=-\mathrm{B}_n.$$

10. Nous sommes ainsi en mesure d'exprimer la fonctionnelle F pour toute fonction f rationnelle et entière : si

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$

on aura

$$F|[f(z)]| = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n.$$

Nous pourrons de même avoir F pour une fonction f quelconque rationnelle. Prenant f décomposée en éléments simples sous la forme

$$f = \sum_1^m {}_h \sum_1^{p_h} {}_r \frac{a_{hr}}{(z - z_h)^r} + a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$

il viendra

$$F|[f(z)]| = \sum_1^m {}_h \sum_1^{p_h} {}_r a_{hr} \frac{v^{(r-1)}(z_h)}{(r-1)!} + \sum_0 {}_g a_g v_g.$$

11. Passons à l'expression d'une fonctionnelle *d'une fonction uniforme transcendante.*

Commençons par supposer que la transcendante n'ait que des singularités polaires, les pôles $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, dont aucun n'est à l'origine ayant pour point limite $z = \infty$. Nous pouvons toujours admettre que

$$|z_1| < |z_2| < \ldots.$$

Soit alors

$$\frac{p_{1n}}{z - z_n} + \frac{p_{2n}}{(z - z_n)^2} + \frac{p_{hn}}{(z - z_n)^h} = S_n(z),$$

la partie principale de la transcendante $f(z)$ au voisinage du pôle z_n. C_n étant le cercle de centre l'origine et de rayon $|z_n| - \delta$, c'est-à-dire de rayon plus petit que $|z_n|$. Dans ce cercle on pourra développer $S_n(z)$ en séries de puissances

$$a_{0n} + a_{1n} z + \ldots + a_{k_n n} z^{k_n} + \ldots,$$

et l'on pourra toujours choisir k_n de façon que

$$|S_n(z) - a_{0n} - a_{1n} z - \ldots - a_{k_n} z^{k_n}| < \varepsilon_n,$$

dans le cercle C_n (ε_n étant arbitrairement petit). Il en résulte (n° 5) que

$$F\,|\,[S_n(z) - a_{0n} - a_{1n}z - \ldots - a_{k_n n}z^{k_n}]\,| < \eta^n,$$

arbitrairement petit avec ε_n.

Ceci posé, prenons une série convergente de termes positifs et constants :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots;$$

il sera toujours possible de choisir k_n de façon que, simultanément, on ait

$$\varepsilon_n < \alpha_n, \quad \eta^n < \alpha_n.$$

En effet, nous prendrons d'abord k_n de façon que

$$\varepsilon_n < \alpha_n;$$

si la valeur correspondante η^n est aussi plus petite que α_n la question est résolue, sinon il suffira d'augmenter k_n, ce qui diminue ε_n, jusqu'au point de rendre $\eta^n < \alpha_n$.

Prenons alors

$$(2) \qquad f(z) = \sum_{1}^{\infty}{}_n [S_n(z) - a_{0n} - a_{1n}z - \ldots - a_{k_n n}z^{k_n}],$$

cette série sera évidemment convergente, comme on le voit par le procédé même qui sert dans le théorème de Mittag-Leffler : z étant un point intérieur à C_n, la série

$$\sum_{n+1}^{\infty} [S_n(z) - a_{0n} - a_{1n}z - \ldots - a_{k_n n}z^{k_n}]$$

est majorée par la série convergente

$$\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \ldots,$$

et converge par suite.

De même prenons

$$p_{1n}\varphi(z_n) + p_{2n}\frac{\varphi'(z_n)}{1\,!} + \ldots + p_{hn}\frac{\varphi^{(h-1)}(z_n)}{(h-1)\,!} - a_{0n}\varphi_0 - a_{1n}\varphi_1 - \ldots - a_{k_n n}\varphi_{k_n};$$

cette expression égale

$$F\,|\,[S_n(z) - a_{0n} - a_{1n}z - \ldots - a_{k_n n}z^{k_n}]\,|,$$

et par suite son module est inférieur à $r_1^n < \alpha_n$; la série

$$\sum_1^\infty {}_n \mathrm{F}|[\mathrm{S}_n(z) - a_{0n} - a_{1n}z - \ldots - a_{k_n n} z^{k_n}]|$$

sera donc convergente et l'on aura

$$(3)\quad \mathrm{F}|[f(z)]| = \sum_1^\infty \left\{ p_{1n} v_1(z_n) + \ldots + p_{hn} \frac{v^{(h-1)}(z_n)}{(h-1)!} - a_{0n} v_0 - \ldots - a_{k_n n} v_{k_n} \right\},$$

la fonctionnelle étudiée est ainsi définie par une série convergente.

12. L'expression (2) ne représente pas la fonction la plus générale ayant les pôles z_n avec les parties principales assignées $\mathrm{S}_n(z)$; mais on sait que pour l'obtenir il suffit d'ajouter à la série du second membre de (2) une fonction *entière* arbitraire

$$g(z) = \sum_0^\infty {}_n a_n z^n.$$

Il s'ajoutera alors à l'expression (3) de F la série

$$\sum_0^\infty {}_n a_n v_n,$$

dont il reste à vérifier la convergence.

Or puisque l'indicatrice est supposée régulière dans le voisinage du point à l'infini (n° **9**, p. 297) il existe une constante k telle que

$$|v_n| < k^n$$

et la série $\Sigma a_n v_n$ est majorée par $\Sigma |a_n| k^n$ évidemment convergente puisque g est fonction entière.

Les termes de la série $\Sigma a_n v_n$ peuvent d'ailleurs être répartis dans la série $\Sigma a_{ik} v_k$ de sorte que la formule (3) [et aussi (2)] s'appliquera à tous les cas — mais avec une détermination différente des coefficients a_{ik}.

13. Nous pouvons nous rendre compte de la convergence de la série (3) d'une autre manière.

Supposons pour simplifier que tous les pôles de la fonction transcendante $f(z)$ soient du premier ordre et que l'on ait pour partie principale correspondante du pôle z_n

$$\frac{p_n}{z - z_n}.$$

Nous prendrons

$$f(z) = \sum_1^\infty \left(\frac{p_n}{z - z_n} + \frac{p_n}{z_n} + \frac{p_n z}{z_n^2} + \ldots + \frac{p_n z^{k_n}}{z_n^{k_n+1}} \right)$$

en choisissant les k_n de façon que cette série soit convergente. Il viendra alors

$$\begin{aligned} \mathrm{F}|[f(z)]| &= \sum_{1}^{\infty}{}_{n} p_n \left\{ \varphi(z_n) + \frac{\varphi_0}{z_n} + \frac{\varphi_1}{z_n^2} + \ldots + \frac{\varphi_{k_n}}{z_n^{k_n+1}} \right\} \\ &= \sum p_n \left[\varphi(z_n) + \left(\frac{\mathrm{B}_{k_n+1}}{z_n^{k_n+1}} + \ldots \right) \right] \end{aligned}$$

(*cf.* n° **9**) et, puisque $\varphi(z)$ est régulière à l'infini, on pourra toujours rendre convergente cette série, en augmentant au besoin les k_n.

14. Passons enfin au cas où $f(z)$ a des points singuliers essentiels.

L'extension est très simple. Si, d'abord, il y a un seul point singulier essentiel z_1 avec une partie infinie donnée par la transcendante entière

$$\mathrm{G}\left(\frac{1}{z - z_1} \right),$$

où la série

$$\mathrm{G}(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

est convergente quel que soit z, nous avons à considérer la série

$$\sum_1^\infty{}_n a_n \frac{\varphi^{(n-1)}(z_1)}{(n-1)!};$$

mais cette série est convergente si z_1 n'est pas point singulier de $\varphi(z)$, parce que, à partir d'un certain indice, on a certainement $a^n < \varepsilon^n$, ε étant choisi arbitrairement petit.

Sous cette réserve de non-coïncidence des points singuliers de v et f respectivement, réserve qui d'ailleurs était implicitement contenue dans les résultats précédents, il n'y a aucune difficulté à donner une expression de $F|[f(z)]|$ analogue à (3) pour les cas où $f(z)$ a des points singuliers essentiels.

15. Considérons quelques cas particuliers de fonctions indicatrices. Soit la fonction indicatrice

$$F\left|\left[\frac{1}{z-x}\right]\right| = \frac{1}{y-x},$$

y étant un point fixe qui est le pôle de la fonction indicatrice. On aura

$$F\left|\left[\frac{1}{(z-x)^n}\right]\right| = \frac{1}{(y-x)^n},$$

et, développant $\frac{1}{y-x}$ par les puissances de $\frac{1}{x}$, il viendra

$$\frac{1}{y-x} = -\frac{1}{x} - \frac{y}{x^2} - \frac{y^2}{x^3} - \ldots,$$

d'où (n° **9**)

$$F|[z^n]| = y^n.$$

Prenant une fonction uniforme quelconque

$$f(z),$$

il en résulte immédiatement que

$$F|[f(z)]| = f(y);$$

la fonctionnelle correspondante fait correspondre à $f(z)$ la valeur de cette fonction au point $z=y$; si l'on considère y comme paramètre variable, on a une transformation fonctionnelle qui se réduit à l'identité.

16. Prenons maintenant pour indicatrice

$$F\left|\left[\frac{1}{z-x}\right]\right| = \frac{1}{(y-x)^n};$$

il vient

$$F\left|\left[\frac{1}{(z-x)^2}\right]\right|=\frac{n}{(z-x)^{n+1}},$$

et, en général,

$$F\left|\left[\frac{1}{(z-x)^h}\right]\right|=\frac{n(n+1)\dots(n+h-2)}{(h-1)!}\,\frac{1}{(y-x)^{n+h-1}}.$$

D'autre part, en développant $\frac{1}{(y-x)}$ suivant les puissances de $\frac{1}{x}$, nous avons

$$\frac{1}{(y-x)^n}=\frac{1}{x^n}\left\{\frac{y}{x}-1\right\}^{-n}=(-1)^n\frac{1}{x^n}\left\{1+\frac{ny}{x}+\frac{n(n+1)}{1.2}\frac{y^2}{x^2}+\dots\right\},$$

d'où

$$F|[z^m]|=0 \quad \text{pour} \quad m=1,2,\dots,n-2,$$
$$F|[z^{n-1}]|=(-1)^{n-1}$$

et

$$F|[z^m]|=(-1)^m\frac{n(n+1)\dots m}{(m-n+1)!}y^{m-n+1} \qquad \text{pour} \quad m>n-1.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'écrire la formule [précécente (3)] donnant la fonctionnelle $F|[f(z)]|$. La convergence de la série se vérifie aisément et l'on retrouve ainsi, dans ce cas particulier le résultat du n° **13**.

17. On passe tout naturellement de là au cas de l'indicatrice

$$F\left|\left[\frac{1}{z-x}\right]\right|=\sum_{1}^{k}{}_h\frac{q_h}{(y-x)^h},$$

et l'on a alors

$$(4)\quad F\left|\left[\sum_{1}^{m}{}_n\frac{p_n}{(z-x)^n}\right]\right|=\sum_{1}^{m}{}_n\frac{p_n}{(n-1)!}\sum_{1}^{k}{}_h\frac{h(h+1)\dots(h+n-2)}{(y-x)^{h+n-1}}q_h.$$

Il n'y a d'ailleurs aucune difficulté à remplacer les sommes précédentes Σ_h et Σ_n par des séries, pourvu que

$$G_1(z)=\sum_{1}^{\infty}{}_h q_h z^h, \qquad G_2(z)=\sum_{1}^{\infty}{}_n p_n z^n$$

soient des transcendantes entières : dans cette hypothèse, on aura en effet, à partir de certaines valeurs de h et n,

$$|q_h| < \varepsilon^h, \qquad |p_n| < \eta^n,$$

quelque petits que soient choisis ε et η. La convergence de la série analogue à (4) se vérifie encore directement : une série majorante est en effet

$$\sum_1^\infty{}_n \frac{\eta^n}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\sum_1^\infty{}_h \frac{\varepsilon^h}{(y-x)^h} = \frac{\varepsilon\eta}{y-x}\sum_1^\infty{}_n \frac{\eta^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{y-x}}\right\}$$

$$= \frac{\varepsilon\eta}{y-x}\,\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{y-x-\eta}}.$$

Dans ce cas on pourra aussi calculer $F|[f(z)]|$ si $f(z)$ est une transcendante entière.

18. Rien n'empêche de prendre pour indicatrice une transcendante entière, mais alors on ne pourra trouver les fonctionnelles que des fonctions qui n'ont pas de singularités à l'infini.

On peut enfin prendre pour f et v deux fonctions uniformes quelconques ayant un nombre fini de singularités dans tout domaine fini du plan complexe. Nous les représenterons par

$$f(z) = \sum_1^{\mathrm{M}}{}_m \sum_1^{n_m}{}_n \frac{p_{mn}}{(z-z_m)^n} + \mathrm{P}(z),$$

$$v(x) = \sum_1^{\mathrm{H}}{}_h \sum_1^{k_h}{}_k \frac{q_{hk}}{(x-x_h)^k} + \mathfrak{Q}(x),$$

les points singuliers de f étant $z_1, z_2, \ldots$ et ceux de v $x_1, x_2, \ldots$; n_m et k_h, M et H peuvent être finis ou infinis.

Admettons qu'il n'y ait pas de singularités communes à distance finie entre f et v; supposons de plus que si $f(z)$ a un point de singularité à l'infini $v(x)$ ne l'ait pas, ou réciproquement, et plaçons-nous, pour fixer les idées, dans le premier cas : les termes $\mathfrak{Q}(x)$ manqueront alors et H sera fini. On aura alors [soit directement, soit par application de la précédente (3)] $F|[f(x)]|$ (v étant l'indicatrice de la fonctionnelle) exprimée par une série

$$\sum_{1}^{n} {}_{m} \left\{ \sum_{1}^{n_m} {}_{n} \frac{p_{mn}}{n!} v^{(n)}(z_m) + \pi_m(x_1, x_2, \ldots) \right\},$$

π_m étant un polynome rationnel ou entier, qui prendra aussi la forme

$$\sum \left[\frac{A}{(z_m - x_h)^q} + \sum \alpha x_h^e \right],$$

les sommations étant faites par rapport aux divers indices, les e étant des exposants entiers.

19. Ce qui précède met en évidence une certaine symétrie entre les rôles que peuvent jouer f et v. Cette symétrie est en évidence sur l'expression due à M. Fantappié

$$\frac{1}{2i\pi} \int_S f(z) v(z) \, dz.$$

C'est là une opération que M. Fantappié nomme produit fonctionnel hémisymétrique de f et v et qu'il a étudié de façon très complète dans son Mémoire fondamental auquel nous renvoyons le lecteur ([1]).

20. Ayant donné dans ce qui précède deux manières de calculer les fonctionnelles analytiques linéaires, l'une créée par M. Fantappié quand il a fondé la théorie et qui s'appuie sur le théorème de Cauchy, l'autre que je viens de donner reposant sur le théorème de Mittag Leffler, nous allons passer aux fonctionnelles analytiques qui ne sont pas linéaires. Dans leur étude il faudra suivre une voie analogue à celle que l'on suit dans le cas des fonctions et nous rencontrerons de prime abord une difficulté fondamentale sur laquelle il convient d'insister.

On cherche toujours en Analyse de ramener un problème à des problèmes linéaires : c'est, ainsi, par exemple, que l'on procède dans la résolution des équations transcendantes.

De même l'étude des fonctions débute par celle de leurs différen-

---

([1]) *Memorie della R. A. dei Lincei*, 6e série, vol. III, fasc. XI, 1930.

tielles ou, ce qui revient au même, du premier terme de leur développement, lequel est *linéaire* par rapport à la variable. En prenant de proche en proche des différentielles de différentielles on arrive au développement de Taylor.

J'ai procédé de même dans l'étude des fonctionnelles (¹) et le premier pas que j'ai eu à faire fut de calculer la différentielle ou la dérivée d'une fonctionnelle.

Je me suis en fait attaché à la dérivation des fonctionnelles et ce fut réellement le premier résultat général obtenu dans ce domaine.

Plus tard MM. Hadamard, Fréchet et Paul Lévy ont substitué la construction des différentielles à celles des dérivées. Sans examiner ici s'il est plus opportun de commencer par les unes ou par les autres, je vais dire ici les raisons qui m'ont fait choisir les dérivées.

C'est que j'ai toujours envisagé les fonctionnelles comme des fonctions d'un nombre infini de variables et que les dérivées fonctionnelles telles que je les ai introduites correspondent alors parfaitement aux dérivées partielles de la théorie ordinaire des fonctions.

Représentant une fonction d'une variable par une ligne plane je considère tout d'abord la fonctionnelle comme fonction de cette ligne. Dans ces conditions le concept de dérivation (du type de la dérivation partielle) s'obtient en modifiant la courbe dans le voisinage d'un de ses points et la maintenant sans modification dans les autres parties. Si la fonctionnelle est continue, son accroissement est infiniment petit et le rapport de cet accroissement à l'aire comprise entre la ligne primitive et la ligne variée est la dérivée fonctionnelle au point considéré. On passe facilement, d'ailleurs, de la dérivée à la différentielle en modifiant infiniment peu la courbe dans toute son extension par une suite de modifications partielles affectant les voisinages des divers points.

21. Or la difficulté à laquelle je faisais allusion est la suivante : si l'argument variable de la fonctionnelle est une fonction analytique au

(¹) *Voir* Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Paris, Gauthier-Villars, 1913, ou Volterra, *Theory of fonctionnals and of integral and integro-differential equations*, London and Glasgow, Blackie and Son, 1930.

lieu d'une fonction simplement continue, ce procédé ne peut plus s'appliquer : il est impossible de faire varier cette fonction dans le voisinage d'un point sans la modifier partout. Il faut donc ou bien renoncer à établir une dérivée fonctionnelle ou suivre, pour arriver à ce concept, une voie tout à fait différente.

C'est ce qu'a fait M. Fantappié, d'une façon très originale et très élégante en s'appuyant sur le concept d'indicatrice fonctionnelle.

Soit $F|[f(z)]|$ une fonctionnelle analytique continue; formons

$$F|[f(z)+\varepsilon\varphi(z)]|$$

et supposons la développable en série des puissances de ε. Il viendra

$$F|[f(z)+\varepsilon\varphi(z)]| - F|[f(z)]| = \varepsilon F_1|[f(z),\ \varphi(z)]| + \ldots,$$

en se limitant aux termes du premier ordre en ε. De même

$$F|[f(z)+\eta\psi(z)]| - F|[f(z)]| = \eta F_1|[f(z),\ \psi(z)]| + \ldots$$

et

$$\begin{aligned} F|[f(z)+\varepsilon\varphi(z)+\eta\psi(z)]| &= F|[f(z)+\varepsilon\varphi(z)]| \\ &\quad + \eta F_1|[f(z)+\varepsilon\varphi(z),\ \psi(z)]| + \ldots \\ &= F|[f(z)]| + \varepsilon F_1|[f(z),\ \varphi(z)]| \\ &\quad + \eta F_1|[f(z),\ \psi(z)]| + \ldots, \end{aligned}$$

les points représentant des termes qui contiennent en facteur ε^2, $\varepsilon\eta$ ou η^2. Prenant $\varepsilon = \eta$, il en résulte

$$\begin{aligned} F|[f(z)+\varepsilon(\varphi(z)+\psi(z))]| - F|[f(z)]| &= \varepsilon F_1|[f(z),\ \varphi(z)+\psi(z)]| + \ldots \\ &= \varepsilon F_1|[f(z),\ \varphi(z)]| \\ &\quad + \varepsilon F_1|[f(z),\ \psi(z)]| + \ldots. \end{aligned}$$

En comparant les parties du premier ordre on voit que

$$F_1|[f(z),\ \varphi(z)+\psi(z)]| = F_1|[f(z),\ \varphi(z)]| + F_1|[f(z),\ \psi(z)]|,$$
$$F_1|[f(z),\ \alpha\varphi(z)]| = \alpha F_1|[f(z),\ \varphi(z)]|,$$

de sorte que F_1 est fonctionnelle *linéaire* de l'argument $\varphi(z)$ et nous pourrons lui appliquer toutes les théories précédentes.

Nous pourrons en particulier calculer son indicatrice en prenant

$$\varphi(z) = \frac{1}{x-z}.$$

Remarquant que

$$F_1 \,|\, [f(z), \varphi(z)] \,| = \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F \,|\, [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] \,| \right\}_{\varepsilon=0},$$

cette indicatrice s'écrira

$$v \,|\, [f(z), x] \,| = \left\{ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F \left| \left[f(z) + \frac{\varepsilon}{x - z} \right] \right| \right\}_{\varepsilon=0}.$$

22. Avec M. Fantappié nous considérerons cette indicatrice fonctionnelle comme étant la dérivée première de la fonctionnelle primitive et nous écrirons

$$v \,|\, [f(z), x] \,| = F' \,|\, [f(z), x] \,|,$$

x est un paramètre dont v est fonction au sens ordinaire.

Nous en déduirons la précédente fonction $F_1 \,|\, [f(z), \varphi(z)] \,|$ par la formule [*cf.* (1) du n° **8**]

$$F_1 \,|\, [f(z), \varphi(z)] \,| = \frac{1}{2\pi i} \int_S v \,|\, [f(z), x] \,| \, \varphi(x) \, dx,$$

où s est une ligne séparatrice des singularités de la fonction $\varphi(x)$ et de celles de la fonction $v \,|\, [f(z), x] \,|$. En d'autres termes la partie du premier ordre de

$$F \,|\, [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] \,| - F \,|\, [f(z)] \,|$$

sera

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S v \,|\, [f(z), x] \,| \, \varepsilon\varphi(x) \, dx,$$

ou, encore en désignant par δF cette partie du premier ordre et par δf la fonction $\varepsilon\varphi(x)$, on aura

$$\delta F \,|\, [f(z)] \,| = \frac{1}{2\pi i} \int_S v \,|\, [f(z), x] \,| \, \delta f(x) \, dx;$$

c'est là l'expression de la différentielle de F.

Il est intéressant de comparer ces formules à celles que j'ai données dans mes premiers mémoires sur les fonctionnelles. Je considérais alors une fonctionnelle d'une fonction réelle $f(z)$ définie et continue dans l'intervalle ab de variation de z (intervalle réel) et j'ai défini la dérivée par

$$(5) \qquad \lim_{\substack{h=0 \\ \varepsilon=0}} \frac{F \,|\, [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] \,| - F \,|\, [f(z)] \,|}{\sigma} = F' \,|\, [f(z), x] \,|,$$

$\varphi(z)$ étant une fonction toujours nulle sauf dans un intervalle $x-h$, $x+h$ et σ étant l'aire comprise entre la courbe $y=f(z)$ et la courbe $y=f(z)+\varepsilon\varphi(z)$. J'en déduis pour la différentielle

$$(6) \qquad \delta F|[f(z)]|=\int_a^b F'|[f(z), x]|\,\delta f(x)\,dx.$$

Dans la théorie des fonctionnelles analytiques les formules analogues sont

$$(5') \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial\varepsilon} F\left|\left[f(z)+\frac{\varepsilon}{x-z}\right]\right|\right\}_{\varepsilon=0} = F'|[f(z), x]|$$

et

$$\delta F|[f(z)]|=\frac{1}{2\pi i}\int_s F'|[f(z), x]|\,\delta f(x)\,dx.$$

25. Dans le cas des fonctionnelles réelles on passe de la dérivée première à la dérivée seconde en considérant la dérivée première comme une fonctionnelle de la fonction indépendante et en calculant dans cette hypothèse une nouvelle dérivée. On passe de même aux dérivées successives.

Nous procéderons de même dans le cas des fonctionnelles analytiques.

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\eta} F'\left|\left[f(z)+\frac{\eta}{y-z}, x\right]\right|\right\}_{\eta=0} = F''|[f(z), x, y]|$$

est une nouvelle fonctionnelle de f dépendant de plus des deux paramètres x et y et qui par définition est la dérivée seconde fonctionnelle de F.

D'après la définition de la dérivée première on a

$$F''|[f(z)\,x, y]| = \left\{\frac{\partial^2}{\partial\varepsilon\,\partial\eta} F\left|\left[f(z)+\frac{\varepsilon}{x-z}+\frac{\eta}{y-z}\right]\right|\right\}_{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=0}},$$

et aussi, en échangeant les signes de dérivation,

$$= \left\{\frac{\partial^2}{\partial\eta\,\partial\varepsilon} F\left|\left[f(z)+\frac{\varepsilon}{x-z}+\frac{\eta}{y-z}\right]\right|\right\}_{\substack{\eta=0\\ \varepsilon=0}},$$

de sorte qu'en général la dérivée seconde sera fonction symétrique de y et x.

On définira de même la dérivée $n^{\text{ième}}$, dépendant, et en général de façon symétrique, de n paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Elle se notera

$$F^{(n)} | [f(z), x_1, x_2, \ldots, x_n] |.$$

24. Ici encore il y a analogie avec les dérivées successives des fonctionnelles d'une fonction réelle.

La dérivée $n^{\text{ième}}$ dépend dans l'un et l'autre cas de n paramètres qui sont, ou bien les divers points où l'on a fait varier la fonction indépendante, ou bien (pour le cas analytique) les pôles simples de la fonction perturbatrice de la fonction indépendante. Les paramètres figurent toujours de façon symétrique.

25. M. Fantappié a montré qu'on passait des résultats que nous venons d'exposer à l'extension de la série de Taylor.

En effet nous avons

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} F | [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] |\right)_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_S F' | [f(z), x] | \varphi(x)\, dx,$$

et, en général, en supposant que la ligne S puisse toujours servir de ligne de séparation,

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{d^n}{d\varepsilon^n} F | [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] |\right\}_{\varepsilon=0} \\ &\quad = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_S \varphi(x_1)\, dx_1 \ldots \int_S F^{(n)} | [f(z) x_1 x_2 \ldots x_n] | \varphi(x_n)\, dx_n.\end{aligned}$$

Soit alors $F | [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] |$ développable en série de puissance de ε, il viendra

$$\begin{aligned}&F | [f(z) + \varepsilon\varphi(z)] | \\ &\quad = F | [f(z)] | + \varepsilon \frac{1}{2\pi i}\int_S F' | [f(z), x] | \varphi(x)\, dx \\ &\qquad + \frac{\varepsilon^2}{2!}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_S \varphi(y)\, dy \int_S F'' | [f(z), x, y] | \varphi(x)\, dx + \ldots,\end{aligned}$$

et si le développement est encore valable pour $\varepsilon = 1$

$$
\begin{aligned}
&F\,|\,[f(z)+\varphi(z)]\,| \\
&\quad = F\,|\,[f(z)]\,| + \frac{1}{2\pi i}\int_S F'\,|\,[f(z), x]\,|\,\varphi(x)\,dx \\
&\quad\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_S \varphi(y)\,dy \int_S F''\,|\,[f(z), x, y]\,|\,\varphi(x)\,dx + \ldots,
\end{aligned}
$$

qui est l'extension de la série de Taylor.

Si nous supposons que $f(x)$ demeure invariable et que $\varphi(x)$ soit seule variable, l'équation précédente prendra la forme

$$
\begin{aligned}
F\,|\,[\varphi(z)]\,| = F_0 &+ \frac{1}{2\pi i}\int_S F'(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&+ \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_S \varphi(y)\,dy \int_S F''(x, y)\,\varphi(x)\,dx + \ldots.
\end{aligned}
$$

Notons en terminant que cette série pourra être remplacée par une autre expression si nous nous servons de la méthode de Mittag-Leffler pour la construction des fonctions uniformes.

NOTE SUR L'EXTENSION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

1. L'étude des fonctionnelles analytiques peut être prise comme point de départ pour d'autres études beaucoup plus générales.

Remarquons en effet qu'une fonctionnelle analytique peut être envisagée comme une fonctionnelle de la partie réelle de la fonction analytique, c'est-à-dire comme la fonctionnelle d'une fonction harmonique de deux variables. Le domaine des fonctions harmoniques de deux variables n'est que le domaine des fonctions qui satisfont à l'équation de Laplace dans un champ à deux dimensions. On peut donc regarder l'étude des fonctionnelles analytiques comme celle qu'on obtient en bornant le domaine fonctionnel à celui des fonctions qui satisfont à l'équation de Laplace à deux variables.

2. On est amené par ces considérations à envisager des domaines fonctionnels constitués par toutes les intégrales d'une équation différentielle.

Si l'équation différentielle est ordinaire, alors son intégrale sera fonction d'un certain nombre de constantes arbitraires, c'est pourquoi la fonctionnelle ne sera qu'une fonction ordinaire de ces quantités et l'on n'aura pas ainsi un élément de type réellement fonctionnel. Mais supposons que l'équation différentielle soit à dérivées partielles, alors l'intégrale dépendra d'un certain nombre de fonctions arbitraires et l'on obtiendra de vraies fonctionnelles.

3. Pour fixer les idées, prenons les fonctions harmoniques à trois dimensions, c'est-à-dire admettons que le domaine fonctionnel soit celui des intégrales de l'équation de Laplace qui sont régulières dans un certain domaine S à trois dimensions.

Prenons la fonction

$$\frac{1}{r} \qquad \left(r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}\right),$$

et supposons que le point ξ, η, ζ soit extérieur à l'espace S, alors $\frac{1}{r}$ considérée comme une fonction de x, y, z appartiendra au domaine fonctionnel et par suite

$$F\left|\left[\frac{1}{r}\right]\right| = V(\xi, \eta, \zeta)$$

sera une des fonctionnelles que nous voulons considérer.

Puisqu'elle dépend de ξ, η, ζ, elle sera aussi une fonction ordinaire de ces paramètres.

Supposons que F soit une fonctionnelle linéaire, alors $F|[0]| = 0$ et l'on aura

$$\Delta F\left|\left[\frac{1}{r}\right]\right| = F\left|\left[\Delta \frac{1}{r}\right]\right| = 0.$$

Soit dans le domaine S une fonction harmonique $f(x, y, z)$. On aura par le théorème de Green

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(f(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n}\frac{1}{r}\right)d\sigma,$$

c'est pourquoi

$$F|[f]| = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(f(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} V \right) d\sigma.$$

On voit que $F\left|\left[\frac{1}{r}\right]\right|$ joue ici le rôle de *fonction indicatrice* dont nous avons eu l'occasion de voir les applications dans le cours de ce Mémoire.

4. Mais nous pouvons avoir aussi d'autres sortes de fonctions indicatrices. Soit

$$G(x, y, z \mid \xi, \eta, \zeta)$$

la fonction de Green. Lorsque ξ, η, ζ sera sur la surface σ, quels que soient x, y, z on aura

$$\frac{1}{r} + G(x, y, z \mid \xi, \eta, \zeta) = 0$$

et, par conséquent,

$$f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma f(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial\left(\frac{1}{r} + G\right)}{\partial n} d\sigma,$$

d'où en posant

$$F|[G(x, y, z \mid \xi, \eta, \zeta)]| = W(\xi, \eta, \zeta),$$

on déduira

$$F|[f(x, y, z)]| = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma f(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial(V + W)}{\partial n} d\sigma.$$

Dans ce cas c'est

$$F\left|\left[\frac{1}{r} + G\right]\right|$$

qui joue le rôle de fonction indicatrice.

L'espace S étant sphérique de rayon R on calcule immédiatement

$$W(\xi, \eta, \zeta).$$

en employant la méthode des images.

5. Ces considérations ne se bornent pas aux seuls domaines fonctionnels constitués par les intégrales d'équations de type elliptique mais elles peuvent aussi s'étendre aux cas des équations différentielles de type hyperbolique ou parabolique.

C'est ainsi par exemple qu'en prenant la formule que j'ai donnée pour résoudre le problème de Cauchy dans le cas de l'équation des ondes cylindriques (1), on peut trouver très aisément les fonctionnelles auxquelles il faut faire jouer le rôle de fonctions indicatrices dans le cas où le domaine fonctionnel est celui des intégrales de cette équation.

Le passage des fonctionnelles linéaires à celles non linéaires peut être calqué sur celui qui amène des fonctionnelles analytiques linéaires à celles non linéaires et qui se trouve exposé dans le présent Mémoire.

---

(1) *Voir* HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris, 1932.