JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M.-L. DUBREIL-JACOTIN

Sur la détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'ampleur finie

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 13 (1934), p. 217-291.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13__217_0>

Sur la détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'ampleur finie;

Par Mme M.-L. DUBREIL-JACOTIN.

INTRODUCTION.

Le présent travail a été poursuivi en liaison avec le Service des Recherches du Ministère de l'Air. Qu'il me soit donc permis d'abord d'exprimer ma reconnaissance au Service des Recherches de l'Aéronautique pour l'aide qu'il m'a apportée dans l'achèvement de ce travail, et à mon maître direct, M. Henri Villat, pour l'intérêt qu'il n'a cessé de me témoigner au cours de mes recherches. Je dois également beaucoup à M. Vessiot, directeur de l'École Normale Supérieure, auquel je suis heureuse d'exprimer ici ma gratitude.

La recherche des ondes permanentes périodiques à deux dimensions a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Dès 1802, Gerstner donna de ce problème, dans le cas de la profondeur infinie, une solution rigoureuse en termes finis. Les Auteurs qui ont suivi, et principalement Airy, Stokes, Rayleigh, se sont attachés surtout à l'étude des ondes irrotationnelles en se bornant aux premières approximations. L'existence de ces ondes n'était pas démontrée et Lord Rayleigh en douta même un moment. C'est en 1925 que M. Levi-Cività, dans un

Mémoire fondamental [1], établit l'existence de l'onde irrotationnelle dans le cas de la profondeur infinie. M. Levi-Cività utilise la méthode de la représentation conforme et se ramène à la détermination, dans le cercle de rayon 1, d'une fonction analytique $\omega = \theta + i\tau$ satisfaisant sur la circonférence à la relation

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = pe^{-3\tau}\sin\theta. \tag{1}$$

La solution est obtenue par un développement en fonction d'un paramètre petit et la convergence est démontrée au moyen de majorantes.

Depuis, la méthode de M. Levi-Cività a été utilisée avec succès par M. Struick [2] pour démontrer l'existence d'ondes irrotationnelles dans le cas de la profondeur finie, et par M. Kotchine [3] pour l'étude des ondes irrotationnelles à la surface de séparation de deux liquides superposés de densités différentes.

Enfin, récemment, MM. Franz Neumann [4] et Lichtenstein [5], ont déterminé la fonction analytique ω satisfaisant à la condition (1) par la méthode des approximations successives appliquée à un système convenable d'équations intégrales non linéaires.

Les ondes rotationnelles ont donné lieu également à différentes recherches [6]. Mais l'existence d'une infinité de telles ondes, com-

---

(1) T. Levi-Cività, *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie* (*Math. Ann.*, t. **93**, 1925, p. 264). Voir aussi *Proc. I. Inter. Cong. App. Mech.* (Delft, 1924) où sont également résumées les recherches de M. Nekrassow.

(2) Struick, *Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles permanentes dans un canal à profondeur finie* (*Math. Ann.*, t. **95**, 1926, p. 595).

(3) Kotchine, *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie à la surface de séparation de deux liquides de profondeur finie* (*Math. Ann.*, t. **98**, 1927, p. 582).

(4) F. Neumann, *Beitrag zu dem Problem der permanenten wirbelfreien Flüssigkeitsbewegung in Kanälen* (Leipzig, 1930).

(5) L. Lichtenstein, *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen*, p. 47 (Berlin, 1931).

(6) *Voir*, par exemple, U. Cisotti, *Sulle onde simplice di tipo permanente e rotazionale* (*Nuovo Cimento*, 6e série, t. **7**, 1914 ou *R. Inst. Lomb.*, vol. XLVI, fasc. **16-17**); *Nuovi tipi di onde periodiche permanente e rotazionali* (*Rend.*

prenant comme cas particulier l'onde irrotationnelle et, pour la profondeur infinie, l'onde de Gerstner, restait à établir. C'est l'objet de ce travail.

La méthode utilisée a été brièvement indiquée, dans le cas de la profondeur infinie, dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (7).

Dans le premier Chapitre du présent travail, nous revenons sur les hypothèses au moyen desquelles M. Levi-Cività caractérise les ondes dans le cas irrotationnel, et nous étudions à ce point de vue les ondes de Gerstner, afin de ne conserver dans nos hypothèses que des propriétés communes à ces deux types d'ondes. Nous transformons d'autre part le problème de manière à remplacer le domaine fluide inconnu par un cercle ou une couronne. La méthode de la représentation conforme n'étant plus applicable, nous y parvenons par un changement de fonction inconnue et par un changement de variables.

Dans le Chapitre II, nous étudions en détails le cas de la profondeur infinie. Nous ramenons le problème à l'étude d'un système intégro-différentiel que nous résolvons par approximations successives. Nous montrons que la solution est nécessairement symétrique et nous discutons l'équation de ramification.

Le dernier Chapitre est consacré au cas, plus compliqué, de la profondeur finie. Nous parvenons encore à ramener le problème à l'étude d'un système intégro-différentiel pouvant s'étudier facilement par la même méthode.

CHAPITRE I.

1. Position du problème. — Nous étudions le mouvement d'un liquide parfait pesant situé dans un canal rectiligne de profondeur

Acc. Lincei, 2e série, t. 23, 1914, p. 556, et t. 24, 1915, p. 129); H. Vergne, *Sur la théorie de la houle en profondeur finie* (*C. R. Ac. Sc.*, t. 153, 1911, p. 174). On trouvera d'ailleurs une bibliographie très détaillée sur le problème des ondes dans l'article de M. Kampé de Fériet, *Les rides, les vagues et la houle* (*Revue des questions scientifiques*, septembre 1932).

(7) M.-L. Dubreil-Jacotin, *Sur la détermination rigoureuse des ondes permanentes périodiques d'ampleur finie* (*C. R. Ac. Sc.*, t. 197, 1933, p. 818).

infinie ou à fond horizontal. Nous supposons que le mouvement est le même dans tout plan vertical parallèle à un plan fixe; il suffit alors d'étudier le mouvement à deux dimensions dans un tel plan. Le domaine fluide s'y étend inférieurement soit jusqu'à l'infini, soit jusqu'à une horizontale. Il est borné supérieurement par une ligne l, section de la surface libre par le plan. Nous supposons que cette ligne l se déplace sans altération de forme avec une vitesse horizontale constante c. Quant à sa forme qui nous est inconnue, nous la supposons périodique de période λ. Par rapport à des axes liés à cette courbe, le domaine fluide est de forme invariable. Nous supposons de plus que, dans ces axes, tout le mouvement est permanent et périodique par rapport à x avec la période λ. C'est ce mouvement que nous allons déterminer.

Nous choisissons les axes liés à la courbe l de la manière suivante : l'axe des Y sera vertical descendant, l'origine O sera sur l, l'axe des X horizontal, dirigé en sens inverse de la vitesse c, sera pris « dans le niveau moyen » ou non troublé. On aura par conséquent, Y_l désignant l'ordonnée d'un point de la courbe l, $0 = \frac{1}{\lambda}\int_X^{X+\lambda} Y_l\, dx$. Le fond, s'il existe, sera représenté dans le plan considéré par l'horizontale $Y = H$. Nous désignerons par $\Psi(X,Y) = \text{const.}$ les lignes de courant. La courbe l est évidemment une ligne de courant que nous représenterons par l'équation $\Psi(X,Y) = 0$. Sur le fond, s'il existe, on aura $\Psi = q$, où q désigne, comme on sait, le flux relatif.

On sait que la fonction Ψ est solution de l'équation

$$\Delta\Psi = f(\Psi), \tag{1}$$

où f est une fonction arbitraire.

Il faut écrire en outre que sur la courbe l la pression est constante, ce qui donne

$$gY_l - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial Y}\right)^2\right] = \text{const.} \tag{2}$$

Parmi les mouvements définis par les conditions précédentes, nous voulons nous borner aux mouvements ondulatoires. M. Levi-Cività [8]

[8] T. Levi-Cività, *Questioni di Meccanica Classica e Relativista* (Zanichelli, Bologne, 1924).

a mis en évidence la difficulté que l'on a à délimiter d'une façon précise ces mouvements. Nous les caractériserons ici par les hypothèses suivantes :

1° La ligne l est peu différente d'une droite.

2° Les vitesses absolues des particules sont petites par rapport à c, ainsi que les tourbillons. Quand la profondeur est infinie, les vitesses absolues et les tourbillons tendent vers zéro quand on s'éloigne indéfiniment de l. Nous préciserons les conditions à l'infini, en écrivant que le flux relatif q est infiniment grand du même ordre que Y ([9]).

Dans son Mémoire sur la détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles ([10]), M. Levi-Cività a supposé en outre qu'il n'existait pas de transport de masse dans les couches profondes, ce qui s'exprime par le fait que le flux $dY\int_{t_1}^{t_2}(u-c)\,dt$, où u désigne la composante horizontale de la vitesse relative, est fini pour tout élément de verticale fixe entièrement immergé, quel que soit l'intervalle de temps (t_1, t_2). Ceci exige, puisque u ne dépend de t que par $X-ct$, et que $u=\frac{\partial\Psi}{\partial Y}$, que

$$\frac{dY}{c}\int_{X_1}^{X_2}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial Y}-c\right)dX$$

reste fini sur toute horizontale entièrement immergée quel que soit l'intervalle (X_1, X_2). Mais puisque $\frac{\partial\Psi}{\partial Y}-c$ est périodique en X, ceci exige que

$$(\alpha)\qquad \int_{X}^{X+\lambda}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial Y}-c\right)dX=0$$

sur toute $Y=\text{const.}$, la valeur de la constante étant supérieure à l'ordonnée du creux le plus profond de la surface libre. Nous ne ferons pas ici cette hypothèse qui serait trop restrictive. Nous allons montrer en effet que les ondes de Gerstner, ondes dues essentiellement à un

---

([9]) Nous préciserons de plus (§ **4**) la manière dont le tourbillon doit s'annuler à l'infini.

([10]) *Loc. cit.*, note 1.

mouvement apparent de matière sans transport de masse, puisque les particules décrivent indéfiniment les mêmes cercles, donnent lieu, au sens qui vient d'être rappelé, à un transport de masse dans les couches profondes. Nous en profiterons pour indiquer quelques propriétés des ondes de Gerstner qui nous seront utiles plus tard.

2. Quelques remarques sur les ondes de Gerstner. — Ces ondes sont données, comme on sait, par rapport aux axes absolus, au moyen des coordonnées de Lagrange, par les équations :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + \dfrac{1}{k} e^{-kb} \sin k(a + ct) \\ y = b + \dfrac{1}{k} e^{-kb} \cos k(a + ct) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad k = \frac{g}{c^2},$$

d'où

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ce^{-kb} \cos k(a + ct), \\ \dfrac{dy}{dt} = - ce^{-kb} \sin k(a + ct). \end{cases}$$

La vitesse absolue d'une particule est donc constante et égale à ce^{-kb}. Or le rayon de la trajectoire d'une telle particule est $\frac{e^{-kb}}{k}$, de sorte que la vitesse angulaire est constante et égale à $ck = \frac{g}{c}$ pour toutes les particules.

Considérons maintenant des axes liés à l'onde. Posons $\alpha = a + ct$. Le mouvement permanent est représenté par

$$\begin{aligned} X &= \alpha + \frac{1}{k} e^{-kb} \sin k\alpha \\ Y &= b + \frac{1}{k} e^{-kb} \cos k\alpha \end{aligned} \qquad \text{où} \quad X = x + ct, \qquad Y = y.$$

Les lignes de courant sont les lignes $b = \text{const.}$ Si nous nous bornons aux ondes de faible amplitude, nous ferons varier b d'une valeur b_0 positive et grande jusqu'à $+\infty$. Dans ces conditions Y varie, à partir d'une quantité positive grande, jusqu'à l'infini. Faisons subir à l'axe des X une translation telle que l'origine vienne sur la surface libre $b = b_0$. On a alors

$$X = \alpha + \frac{1}{k} e^{-kb} \sin k\alpha,$$

$$Y = b - b_0 + \frac{1}{k} e^{-kb} \cos k\alpha - \frac{1}{k} e^{-kb_0},$$

où l'axe des X est tangent à un sommet et non plus dans le niveau moyen, comme nous le supposerons dans tout le reste de notre travail. Posons alors $\nu = e^{-kb_0}$, $\beta = b - b_0$. Les ondes de Gerstner de faible amplitude sont représentées dans le système d'axes considéré ici par

$$(3) \quad \begin{cases} X = \alpha + \dfrac{\nu}{k} e^{-k\beta} \sin k\alpha, \\ Y = \beta + \dfrac{\nu}{k} e^{-k\beta} \cos k\alpha - \dfrac{\nu}{k}. \end{cases}$$

$\beta = 0$ donnant la surface libre; $\frac{\nu}{k}$ représente la moitié de la différence de cotes d'un creux et d'un sommet, donc au deuxième ordre près, la hauteur de l'onde sur le niveau moyen.

Dans ce système d'axes, les composantes de la vitesse sont égales à

$$c(1 + \nu e^{-k\beta} \cos k\alpha), \quad -c\nu e^{-k\beta} \sin k\alpha,$$

où α et β sont les fonctions de X et Y définies par (3). On en déduit $\Psi(X, Y)$ au moyen de

$$\Psi = \int \frac{\partial \Psi}{\partial X} dX + \int \frac{\partial \Psi}{\partial Y} dY = c \int \nu e^{-k\beta} \sin k\alpha \, dX + (1 + \nu e^{-k\beta} \cos k\alpha) \, dY,$$

où l'on remplace toujours α et β par les fonctions de X et Y définies par (3). Pour effectuer le calcul, on peut encore remplacer dX et dY par

$$(4) \quad \begin{cases} dX = (1 + \nu e^{-k\beta} \cos k\alpha) \, d\alpha - \nu e^{-k\beta} \sin k\alpha \, d\beta, \\ dY = -\nu e^{-k\beta} \sin k\alpha \, d\alpha + (1 - \nu e^{-k\beta} \cos k\alpha) \, d\beta. \end{cases}$$

Il vient alors, en intégrant,

$$(5) \quad \Psi = c \left[\beta + \frac{\nu^2}{2k} (e^{-2k\beta} - 1) \right],$$

en appelant $\Psi = 0$ la surface libre.

D'autre part, on sait que le tourbillon est donné par

$$\Delta\Psi = -\frac{2\,c k\, e^{-2kh}}{1 - e^{-2kh}},$$

ce qui fait, avec nos conventions,

$$\Delta\Psi = -2ck\nu^2\frac{e^{-2k\beta}}{1 - \nu^2 e^{-2k\beta}}. \tag{6}$$

Le tourbillon est donc du deuxième ordre par rapport à la hauteur de l'onde. Il tend vers zéro, quand Ψ *augmente indéfiniment, comme* $e^{-\frac{4\pi}{\lambda c}\Psi}$.

En effet $\Delta\Psi$ tend vers zéro comme $e^{-2k\beta}$ qui est lui-même du même ordre que $e^{-\frac{2k}{c}\Psi}$, ou puisque $k = \frac{g}{c^2}$ et $c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi}$, comme $e^{-\frac{4\pi}{\lambda c}\Psi}$. Et l'on peut écrire

$$\Delta\Psi = \nu^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda c}\Psi} f(\Psi),$$

où, comme on le voit immédiatement, $f(\Psi)$ est bornée et continue au sens de Hölder.

Montrons enfin qu'*il y a transport de masse dans les couches profondes*, c'est-à-dire que

$$dy\int_{t_1}^{t_2} c\nu e^{-k\beta}\cos k\alpha\, dt$$

ne reste pas fini quand $t_2 - t_1 \to \infty$, α et β étant les fonctions de x, y, t définies par le système (3) et les relations $X = x + ct$, $Y = y$, ou encore que

$$\int_{X}^{X+\lambda} \nu e^{-k\beta}\cos k\alpha\, dX \neq 0,$$

où α et β sont remplacés par les fonctions de X et Y définies par le système (3). Nous allons faire le calcul en α et β en remplaçant dX par l'expression donnée par le système (4) et nous rappelant que l'on intègre sur $Y = \text{const.}$ d'où : $dY = 0$, et par suite,

$$dX = \frac{1 - \nu^2 e^{-2k\beta}}{1 - \nu e^{-k\beta}\cos k\alpha}\, d\alpha.$$

Quand X augmente de λ, $k\alpha$ augmente de 2π et nous allons montrer que

$$\int_{k\alpha}^{k\alpha+2\pi} e^{-k\beta}\cos k\alpha \,\frac{1-\nu^2 e^{-2k\beta}}{1-\nu e^{-k\beta}\cos k\alpha}\, dk\alpha \neq 0,$$

sachant que β et α sont liés par

$$C = \beta k + \nu e^{-k\beta}\cos k\alpha.$$

Il suffit pour cela de montrer que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-u}\cos s \,\frac{1-\nu^2 e^{-2u}}{1-\nu e^{-u}\cos s}\, ds \neq 0$$

lorsque $C = u + \nu e^{-u}\cos s$, ou encore, en vertu de la symétrie, que

$$\int_{0}^{\pi} e^{-u}\cos s \,\frac{1-\nu^2 e^{-2u}}{1-\nu e^{-u}\cos s}\, ds \neq 0.$$

Pour cela nous associons les valeurs s_1 et $\pi - s_1$ de s; les deux éléments correspondants donnent

$$d = e^{-u_1}\cos s_1 \,\frac{1-\nu^2 e^{-2u_1}}{1-\nu e^{-u_1}\cos s_1} - e^{-u_2}\cos s_1 \,\frac{1-\nu^2 e^{-2u_2}}{1+\nu e^{-u_2}\cos s_1},$$

et nous allons montrer que cette différence conserve un signe constant quel que soit s_1 dans l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Les quantités u_1 et u_2 sont les solutions positives de

$$C = u_1 + \nu e^{-u_1}\cos s_1, \qquad C = u_2 - \nu e^{-u_2}\cos s_2,$$

d'où résulte que l'on a

$$u_1 \geqq C \leqq u_2.$$

La différence d est du signe de

$$e^{-u_1}(1+\nu e^{-u_2}\cos s_1)(1-\nu^2 e^{-2u_1}) - e^{-u_2}(1-\nu e^{-u_1}\cos s_1)(1-\nu^2 e^{-2u_2}),$$

quantité égale, en vertu des relations précédentes, à

$$\begin{aligned}
&(e^{-u_1}-\nu^2 e^{-3u_1})(1+u_2-C) - (e^{-u_2}-\nu^2 e^{-3u_2})(1+u_1-C)\\
&\quad = (1-C)(e^{-u_1}-e^{-u_2})\left[1-\nu^2(e^{-2u_1}+e^{-(u_1+u_2)}+e^{-2u_2})\right]\\
&\qquad + u_2(e^{-u_1}-\nu^2 e^{-3u_1}) - u_1(e^{-u_2}-\nu^2 e^{-3u_2}).
\end{aligned}$$

ou encore à

$$\begin{gathered}(1+\nu e^{-u_2}\cos s_1)(e^{-u_1}-e^{-u_2})\left[1-\nu^2(e^{-2u_1}+e^{-u_1+u_2}+e^{-2u_2})\right]\\ +(u_2-u_1)e^{-u_2}(1-\nu^2 e^{-2u_2}),\end{gathered}$$

où, pour ν suffisamment petit, les deux termes de la somme sont toujours positifs.

C. Q. F. D.

On peut se rendre compte physiquement de l'existence d'un transport de masse positif à travers un élément fixe de verticale constamment immergé, en remarquant que les particules qui le traversent avec une vitesse horizontale positive proviennent de cercles ayant des rayons plus grands (b plus petit) que celles le traversant dans le sens négatif, donc ont des vitesses plus grandes en valeur absolue.

Enfin remarquons que les ondes de Gerstner satisfont à une relation intégrale assez analogue à celle écrite dans le cas irrotationnel, mais qui, cette fois-ci, n'est plus valable dans ce dernier cas. Cette relation nous sera utile plus tard. Nous l'obtiendrons en écrivant que dans le mouvement relatif toutes les particules mettent le même temps $T=\frac{\lambda}{c}$ pour décrire une portion de ligne de courant de longueur horizontale λ. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que, dans le mouvement absolu, les trajectoires soient fermées et décrites pendant le temps T. Or on a, dans le mouvement relatif,

$$\frac{dX}{\frac{\partial\Psi}{\partial Y}}=dt,$$

d'où, sur toute $\Psi=$ const.,

$$T=\frac{\lambda}{c}=\int_X^{X+\lambda}\frac{dX}{\frac{\partial\Psi[X,Y(\Psi,X)]}{\partial Y}},$$

ou encore

$$(\beta)\qquad \int_X^{X+\lambda}\left(\frac{1}{\frac{\partial\Psi}{\partial Y}}-\frac{1}{c}\right)dX=0.$$

Dans ce qui suivra nous ne ferons que des hypothèses vérifiées à la fois par l'onde de Gerstner et par l'onde irrotationnelle. Nous laisserons donc de côté les hypothèses (α) et (β), et supposerons seulement que $f(\Psi)$ est du premier ordre au moins par rapport à la hauteur de l'onde et tend vers zéro comme $e^{-\frac{4\pi}{\lambda c}\Psi}$.

3. Transformation du problème. — Au lieu de prendre comme inconnue la fonction de courant $\Psi(X, Y)$, nous cherchons les lignes de courant sous la forme $Y = \varphi(\Psi, X)$. L'équation donnant φ s'obtient en transformant l'équation (1) (§ 1). Les dérivées premières de Ψ s'expriment en fonction des dérivées premières de φ par

$$\frac{\partial\Psi}{\partial X} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial X}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\Psi}}, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial Y} = \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\Psi}},$$

et les dérivées secondes au moyen de

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2} = \frac{-\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\right)^2 \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial X^2} + 2\dfrac{\partial\varphi}{\partial X}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial X\,\partial\Psi} - \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial X}\right)^2 \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\Psi^2}}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\right)^3},$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\Psi^2}}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\right)^3}.$$

L'équation du problème s'écrit donc après division par $\dfrac{1}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\right)^3}$, quantité voisine de c^3 et qui par conséquent n'est jamais nulle

$$(1) \quad \left[1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial\Psi^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial X}\frac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial X\,\partial\Psi} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\right)^3 f(\Psi).$$

Et il faut résoudre cette équation dans le demi-plan $\Psi \geqq 0$ ou dans la bande $-\infty \leqq X \leqq +\infty$, $0 \leqq \Psi \leqq q$, avec, sur $\Psi = 0$, la condition

$$(2) \qquad g\varphi - \frac{1}{2}\,\frac{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial X}\right)^2 + 1}{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\right)^2} = \text{const.},$$

ou encore

$$2g\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)^2-1=K\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\Psi}\right)^2.$$

Enfin nous posons

$$(3)\qquad \varphi(X,\Psi)=A\Psi+v(X,\Psi),$$

où A est une quantité finie égale à $\frac{1}{c}$ en première approximation.

La fonction v est alors donnée par

$$(4)\quad \frac{\partial^2 v}{\partial\Psi^2}+A^2\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}+A^3 f(\Psi)$$
$$=2A\left(\frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial^2 v}{\partial X\,\partial\Psi}-\frac{\partial v}{\partial\Psi}\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}\right)-f(\Psi)\frac{\partial v}{\partial\Psi}\left[3A^2+3A\frac{\partial v}{\partial\Psi}+\left(\frac{\partial v}{\partial\Psi}\right)^2\right]$$
$$-\frac{\partial^2 v}{\partial\Psi^2}\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2+2\frac{\partial v}{\partial X}\frac{\partial v}{\partial\Psi}\frac{\partial^2 v}{\partial X\,\partial\Psi}-\left(\frac{\partial v}{\partial\Psi}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}.$$

Et sous cette forme, nous caractériserons les mouvements ondulatoires cherchés en astreignant v à être petit ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres. Cette hypothèse entraine visiblement que la courbe l est voisine d'une droite et que les vitesses absolues et les tourbillons sont petits.

La condition aux limites s'écrit alors

$$(5)\qquad 2gv\left(A+\frac{\partial v}{\partial\Psi}\right)^2-\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2-1=K\left(A+\frac{\partial v}{\partial\Psi}\right)^2\qquad \text{pour } \Psi=0.$$

Ceci exige que l'on ait

$$K=-\frac{1}{A^2}+k,$$

où k est petit.

L'équation aux limites sur $\Psi=0$ s'écrit donc enfin

$$(6)\quad \frac{\partial v}{\partial\Psi}+gA^3v-\frac{A^3}{2}k$$
$$=A^2\frac{\partial v}{\partial\Psi}(k-2gv)-\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial v}{\partial\Psi}\right)^2+\frac{A}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial X}\right)^2+\frac{A}{2}(k-2gv)\left(\frac{\partial v}{\partial\Psi}\right)^2.$$

Remarquons tout de suite que jusqu'à présent A n'a été déterminé qu'à une quantité petite près. Nous achèverons de déterminer A, dans le cas de la profondeur finie, en écrivant que, sur le fond $\Psi = q$, v est nul, ce qui donne $A = \frac{\mathrm{H}}{q}\cdot$ Dans le cas de la profondeur infinie, A est univoquement déterminé si l'on suppose que v reste petit même quand Ψ augmente indéfiniment. A est alors rigoureusement égal à $\frac{1}{c}$ (*voir* § 5).

La détermination de v satisfaisant à (4), à la condition aux limites (6) et à la condition sur le fond, se fait très facilement sur ces équations particulièrement propres aux calculs numériques approchés. Il suffit pour cela de chercher v sous la forme d'un développement en série par rapport à un paramètre petit μ : $\Sigma a_n \mu^n . a_n$ se détermine comme un polynome de Fourier en cosinus et sinus des arcs $\frac{2\pi X}{\lambda}, \ldots, \frac{2\pi n X}{\lambda}$, polynome dont les coefficients se déterminent aisément en fonction de Ψ. Nous ne nous attarderons pas à ces calculs et mettrons le problème sous une forme plus commode pour les démonstrations de convergence et d'existence, but principal de ce travail.

4. Changement de variables. — Nous allons effectuer un changement de variables permettant de remplacer le demi-plan ou la bande considérée par le cercle de rayon 1 ou une couronne. Nous faisons correspondre à un point du domaine obtenu une infinité de points du domaine primitif, situés sur une même ligne de courant $\Psi =$ const. et à des distances λ, de sorte que le premier domaine se représente en réalité sur une infinité de cercles ou de couronnes. Puisque le mouvement est périodique, il suffit de considérer un feuillet unique. Nous prenons comme nouvelles variables les coordonnées x, y, ou les coordonnées polaires ρ, α, définies par

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\sin\alpha \end{cases} \quad \text{avec} \quad \rho = e^{-\frac{2\pi A}{\lambda}\Psi}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{\lambda}X.$$

A la bande $0 \leqq \Psi \leqq q$ correspond la couronne limitée par les cercles de rayons 1 et $\rho_0 = e^{-\frac{2\pi A}{\lambda}q}$; à l'origine correspond le point $\rho = 1$, $\alpha = 0$.

On obtient l'équation du problème en effectuant dans l'équation (4) (§ 3), le changement de variables indiqué. Pour cela on utilise les formules

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{2\pi}{\lambda}\left(x\frac{\partial v}{\partial y} - y\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \Psi} = -\frac{2\pi}{\lambda}A\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{2\pi}{\lambda}A\left(x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y}\right);$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} &= \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}\\ &= \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\left(x^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - x\frac{\partial v}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial y}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial X\,\partial \Psi} &= -A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\rho\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\,\partial \rho}\\ &= -\frac{4\pi^2}{\lambda^2}A\left[xy\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + (x^2 - y^2)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + x\frac{\partial v}{\partial y} - y\frac{\partial v}{\partial x}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial \Psi^2} &= A^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(\rho^2\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)\\ &= \frac{4\pi^2}{\lambda^2}A^2\left(x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + x\frac{\partial v}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

En écrivant l'équation transformée de (4) (§ 3), on remarque que (x^2+y^2) est en facteur dans tous les termes, sauf ceux en f; on est donc conduit à poser

$$h(\rho) = -\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 A\frac{f(\Psi)}{\rho^2},$$

et, après un calcul facile, on peut écrire l'équation du problème sous la forme définitive

$$(1)\qquad \Delta v = h(\rho) + F\left(v, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}; x, y\right)$$

avec

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2};$$

et

$$
\begin{aligned}
(a)\quad & \mathrm{F}\left(v, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots\right) \\
& = -\frac{2\pi}{\lambda}\left\{ h(\sqrt{x^2+y^2})\left(x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right. \\
& \qquad \times \left[3-\frac{6\pi}{\lambda}\left(x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] \\
& \qquad + \left[2-\frac{2\pi}{\lambda}\left(x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] \\
& \qquad - \left[2y-\frac{2\pi}{\lambda}(x^2+y^2)\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\
& \qquad - \left[2x-\frac{2\pi}{\lambda}(x^2+y^2)\frac{\partial v}{\partial x}\right]\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
& \qquad\qquad \left. + 2\left[x\frac{\partial v}{\partial y}+y\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{2\pi}{\lambda}(x^2+y^2)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right\}.
\end{aligned}
$$

On peut encore écrire

$$
\begin{aligned}
(a')\quad & \mathrm{F}\left(v, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots\right) = \mathrm{F}^1\left(v, \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \ldots\right) \\
& = -\frac{2\pi}{\lambda}\left\{ h(\rho)\,\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}\left[3-\frac{6\pi}{\lambda}\rho\frac{\partial v}{\partial \rho}+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\rho^2\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2\right]\right. \\
& \qquad + \frac{2}{\rho}\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\,\partial \rho}-\frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}\right) \\
& \qquad + \frac{2\pi}{\lambda}\left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2\right. \\
& \qquad\qquad \left.\left. -2\frac{\partial v}{\partial \rho}\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\,\partial \rho}+\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \rho}\right)^2\right]\right\},
\end{aligned}
$$

expression équivalente qui nous sera utile par la suite.

Le tourbillon étant supposé petit, au moins comme v et ses dérivées, nous mettrons en facteur devant la fonction $h(\rho)$ le paramètre petit μ dont dépendra la solution et nous supposerons que $h(\rho)$ est une fonction bornée continue, satisfaisant à une condition de Hölder. Cela exige, dans le cas de la profondeur infinie, que le tourbillon $f(\Psi)$ s'annule au moins comme ρ^2, c'est-à-dire comme $e^{-\frac{4\pi}{\lambda}\Psi}$. Or nous avons vu que cette hypothèse sur $f(\Psi)$, évidemment satisfaite dans le cas irrotationnel $f(\Psi) = 0$, est également satisfaite dans le cas des ondes de Gerstner.

La condition aux limites s'obtient en effectuant dans (6) (§ 3), le même changement de variables. Elle s'écrit, en posant

$$p = \frac{\lambda g A^2}{2\pi},$$

et en remarquant que, sur le cercle de rayon 1, $\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{\partial v}{\partial n}$,

$$(2)\quad \frac{\partial v^*}{\partial n} + p v^* - \frac{pk}{2g} - \frac{\pi}{\lambda}\left[\frac{2p}{g}(k - 2gv^*)\frac{\partial v^*}{\partial n} - \left(\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial v^*}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{2\pi}{\lambda g} p (k - 2gv^*)\left(\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)^2\right] = 0,$$

où σ désigne l'arc sur le cercle de rayon 1 et où z^* désigne la valeur de $z(\rho, \alpha)$ sur le cercle $\rho = 1$.

Cette équation contient la constante inconnue k. Pour l'éliminer, nous écrirons que l'intégrale en σ, étendue de 0 à 2π, du premier membre de (2), est nulle. Ceci nous donne k sous la forme

$$k = \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial v^*}{\partial n} d\sigma + p\int_0^{2\pi} v^* d\sigma + \frac{\pi}{\lambda}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial v^*}{\partial \sigma}\right)^2 + 4pv^*\frac{\partial v^*}{\partial n}\left(1 + \frac{\pi}{\lambda}\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)\right\} d\sigma}{\displaystyle\frac{\pi p}{g}\left[1 + \frac{2}{\lambda}\int_0^{2\pi}\frac{\partial v^*}{\partial n}\left(1 + \frac{\pi}{\lambda}\frac{\partial v^*}{\partial n}\right) d\sigma\right]}.$$

Mais, à cause du choix de l'axe OX dans le niveau moyen, on a

$$\int_0^{2\pi} v^* d\sigma = 0.$$

En éliminant k au moyen de la relation précédente et isolant au premier membre les termes linéaires, on peut donc écrire la condition aux limites sous la forme définitive

$$(\text{II})\qquad \frac{\partial v^*}{\partial n} + p v^* - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial v^*}{\partial n} d\sigma = \Phi^*,$$

où l'on a posé

$$
\begin{aligned}
(b)\quad \Phi^* = \Phi\left(v^*, \frac{\partial v^*}{\partial \sigma}, \ldots\right)
&= -\frac{\pi}{\lambda}\left[\left(\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial v^*}{\partial \sigma}\right)^2 + 4 p v^* \frac{\partial v^*}{\partial n}\left(1 + \frac{\pi}{\lambda}\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)\right] \\
&+ 2\frac{\partial v^*}{\partial n}\left(1 + \frac{\pi}{\lambda}\frac{\partial v^*}{\partial n}\right) \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial v^*}{\partial n} + \frac{\pi}{\lambda}\left[\left(\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial v^*}{\partial \sigma}\right)^2 + 4 p v^* \frac{\partial v^*}{\partial n}\left(1 + \frac{\pi}{\lambda}\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)\right]\right\} d\sigma}{\displaystyle\lambda + 2\int_0^{2\pi}\frac{\partial v^*}{\partial n}\left(1 + \frac{\pi}{\lambda}\frac{\partial v^*}{\partial n}\right) d\sigma} \\
&+ \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)^2 - \left(\frac{\partial v^*}{\partial \sigma}\right)^2\right] d\sigma + 4\int_0^{2\pi}\frac{\partial v^*}{\partial n}\left(1 + \frac{\pi}{\lambda}\frac{\partial v^*}{\partial n}\right)\left(p v^* - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial v^*}{\partial n} ds\right) d\sigma}{\displaystyle 2\lambda + 4\int_0^{2\pi}\frac{\partial v^*}{\partial n}\left(1 + \frac{\pi}{\lambda}\frac{\partial v^*}{\partial n}\right) d\sigma}.
\end{aligned}
$$

5. Remarques sur les constantes introduites. — Parmi les constantes introduites c, λ, A, ..., il y a lieu de spécifier celles que nous nous donnerons et celles que nous déterminerons. Les données du problème seront la longueur d'onde λ et la profondeur H, quantité positive finie ou infinie. Nous verrons dans les Chapitres suivants que les ondes trouvées pour toute fonction arbitraire $h(\rho)$, bornée et continue au sens de Hölder, dépendent d'un paramètre petit μ. La suite des calculs détermine A (ou p) en fonction de μ et de la quantité q supposée provisoirement connue. On calcule alors q en fonction de μ et de H au moyen de

$$q = \frac{H}{A(q, \mu)},$$

équation qui détermine q univoquement.

Il nous reste alors à calculer la seule quantité c, et pour cela il faut définir d'une façon plus précise la vitesse de propagation de l'onde dont nous savons seulement jusqu'à présent qu'elle est égale, au premier ordre près, à $\frac{1}{A}$.

Dans le cas de la profondeur infinie, nous supposons que la vitesse absolue des particules tend vers zéro quand Ψ augmente indéfiniment. La vitesse de propagation est donc égale à la limite de la vitesse relative quand on s'éloigne à l'infini :

$$c = \lim_{\Psi \to \infty} \frac{1}{A + \frac{\partial v}{\partial \Psi}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{A - \frac{2\pi}{\lambda} A \rho \frac{\partial v}{\partial \rho}}.$$

Or la solution que nous construisons au Chapitre suivant est telle que $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sont bornés dans tout le cercle; il en résulte que $\frac{\partial v}{\partial \rho}$ reste borné quand ρ tend vers zéro suivant n'importe quelle direction et, par conséquent, que $\frac{\partial v}{\partial \Psi}$ tend vers zéro. On a donc

$$c = \frac{1}{A}.$$

Dans le cas de la profondeur finie, il faut une autre définition, car sur le fond la vitesse absolue n'est pas nulle en général, et par suite la vitesse relative n'y est pas constante. Si l'on prenait encore $c = \frac{1}{A}$, cela reviendrait à écrire $q = cH$ et le flux relatif serait le même que si toute la masse était animée de la translation c. Mais il semble plus conforme à la notion d'onde de supposer le mouvement absolu réduit au minimum sur le fond. On peut alors écrire : soit que le mouvement sur le fond est purement apparent et que les particules oscillent indéfiniment autour de leur position moyenne, ce qui s'exprime par la condition (β) appliquée sur le fond :

$$(\beta') \qquad c = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[A - \frac{2\pi}{\lambda} A \rho_0 \frac{\partial v(\rho_0)}{\partial \rho} \right] d\sigma},$$

soit que la vitesse absolue moyenne sur le fond est nulle, ce qui donne, en appliquant la relation (α),

$$(\alpha') \qquad c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{A - \frac{2\pi}{\lambda} A \rho_0 \frac{\partial v(\rho_0)}{\partial \rho}}.$$

Tout ce qui va suivre est d'ailleurs entièrement indépendant du choix de c. Mais dans le Chapitre III, nous démontrerons l'existence d'une onde rotationnelle généralisant, pour la profondeur finie, l'onde de Gerstner. Pour cette onde, toutes les trajectoires absolues sont fermées et décrites pendant le même temps, et la vitesse de propagation est nécessairement donnée par la formule (β'). Au contraire si, dans le cas particulier de l'onde irrotationnelle de profondeur finie, on veut retrouver la valeur de la vitesse donnée par Stokes et M. Struick, il faut prendre pour c l'expression (α'). Alors ce choix de c entraîne comme conséquence qu'il n'y a pas de transport de masse dans les couches profondes. Il faut et il suffit pour cela, en effet, que $\int_{X}^{X+\lambda}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial Y}-c\right)dX = 0$ sur toute horizontale entièrement immergée. Or c est choisi pour que $\int_{X}^{X+\lambda}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial Y}-c\right)dX = 0$ sur le fond, et, si nous considérons le rectangle D délimité par les segments d'abscisses X et $X+\lambda$ compris entre le fond et une parallèle au fond arbitraire entièrement immergée et les portions de ces deux horizontales comprises entre les deux segments précédents, on peut écrire, pour le contour C ainsi formé,

$$\int_{C}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial Y}-c\right)dX-\frac{\partial\Psi}{\partial X}dY=\iint_{D}-\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Y^2}\right)dX\,dY=0.$$

A cause de la périodicité, les segments verticaux ne donnent rien dans l'intégrale curviligne et l'on a bien la propriété annoncée. Il résulte encore de ce choix de c que q n'est pas égal à cH ; la différence $q-c\mathrm{H}$ donne avec cette hypothèse le transport de masse global sous la forme $\mathrm{H}\left(\frac{1}{\mathrm{A}}-c\right)$. Dans le cas de la profondeur infinie, le transport de masse est égal au produit par c de la valeur de v à l'infini (ou encore au centre du cercle). Il résulte des calculs qui vont suivre que dans un cas comme dans l'autre ce transport est en général du premier ordre, qu'il est du second ordre dans le cas irrotationnel et d'ordre plus élevé ou même nul pour certains mouvements rotationnels particuliers.

Nous terminerons ce Chapitre en remarquant que l'introduction de la quantité A dans tous les calculs, au lieu de $\frac{1}{c}$, a eu notamment pour but de pouvoir écrire dans le cas de la profondeur finie $c=0$

sur le fond, ce qui est essentiel pour la simplicité des calculs qui vont suivre. A cet ordre d'idées, je voudrais rattacher la remarque suivante. Dans son travail déjà cité, M. Lichtenstein, pour résoudre le problème analytique auquel M. Levi-Cività avait ramené la recherche des ondes irrotationnelles pour la profondeur infinie, a déterminé dans le cercle unité la fonction analytique $\theta + i\tau$, satisfaisant sur le cercle à

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = pe^{-3\tau} \sin\theta,$$

et à

$$\theta(0) = 0, \qquad \theta(-\sigma) = -\theta(\sigma), \qquad \tau(0) = 0, \qquad \tau(\sigma) = \tau(-\sigma).$$

Or M. Weinstein vient de me faire remarquer que la condition $\tau(0) = 0$ n'est pas satisfaite. Pour qu'elle le soit, on peut observer qu'il suffit de poser

$$w = Be^{-i\omega'} \qquad (\omega' = \theta + i\tau')$$

au lieu de

$$w = ce^{-i\omega} \qquad (\omega = \theta + i\tau).$$

comme dans le Mémoire de M. Levi-Cività [11] (§ 8, p. 275), B étant un nouveau paramètre remplaçant c et déterminé univoquement par le fait que $\tau'(0) = 0$. Le changement de variable $\zeta = e^{\frac{2\pi i f}{c\lambda}}$, où cette fois c est essentiel à cause de l'hypothèse du non transport de masse dans les couches profondes, conduit alors à déterminer ω' satisfaisant à

$$\frac{d\tau'}{d\sigma} = p' e^{-3\tau'} \sin\theta,$$

où cette fois $p' = \frac{\lambda g c}{2\pi B^3}$ et non plus $\frac{\lambda g}{2\pi c^2}$. A cette équation, la théorie très simple de Lichtenstein est applicable. Elle donne p' en fonction du paramètre r du problème et l'on en déduit c et B en adjoignant à $p' = \frac{\lambda g c}{2\pi B^3}$ la condition définissant c :

$$c = \lim |w| = Be^{\tau'(0,0)},$$

où $\tau'(0, 0)$ désigne la valeur limite de la fonction harmonique

---

[11] *Loc. cit.*, note 1.

$\tau(x, y)$ au centre; p' étant voisin de 1, on a univoquement

$$c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi} \frac{e^{3\tau(0,0)}}{p_1}.$$

CHAPITRE II.

CAS DE LA PROFONDEUR INFINIE.

Nous allons montrer qu'il est possible de trouver, pour toute fonction h continue au sens de Hölder arbitrairement donnée, une fonction v définie dans le domaine (D) limité par le cercle (C) de rayon 1, petite ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, satisfaisant :

1° à l'équation

$$\Delta v = \mu h + F(\mu h, v, \ldots, x, y),$$

où F a la valeur donnée par (a) ou (a') et est, par conséquent, du second ordre;

2° à la condition aux limites sur le cercle (C) :

$$\frac{\partial v^*}{\partial n} + p v^* - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial v^*}{\partial n} d\sigma = \Phi^*,$$

où Φ^* a l'expression (b) et est du deuxième ordre.

6. Transformation du problème. — Nous appellerons Θ la fonction de ρ (et de μ) définie par

$$\Delta\Theta = \mu h(\rho),$$

régulière à l'intérieur du cercle et nulle sur le contour : $\Theta^* = 0$. Cette fonction est donnée par

$$\Theta(\rho) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D \mu h \log\frac{1}{r} d\xi\, d\eta, \tag{1}$$

où r désigne la distance de l'élément (ξ, η) au point considéré. Cette fonction est bien nulle sur (C) puisque

$$\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{r(1, \alpha; \rho', \alpha')} d\alpha' = 0.$$

En remarquant que

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r(\rho, \alpha; \rho', \alpha')} d\alpha' = 2\pi \log \frac{1}{M(\rho, \rho')},$$

où $M(\rho, \rho')$ désigne le plus grand des deux nombres ρ et ρ', on peut encore l'écrire sous la forme

$$(2) \qquad \Theta(\rho) = -\mu\left(\log\frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} h(u)u\,du + \int_{\rho}^{1} h(u)u\log\frac{1}{u}du\right).$$

$\frac{\partial\Theta^*}{\partial n}$ est une constante et l'on a

$$\frac{\partial\Theta^*}{\partial n} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Theta^*}{\partial n}d\sigma = 0.$$

Nous poserons

$$\omega(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D F(v, \ldots, \xi, \eta)\log\frac{1}{r}d\xi\,d\eta.$$

F est un polynome en v et ses dérivées, dont les coefficients sont des polynomes en ξ, η. Si v et ses dérivées des deux premiers ordres sont continues au sens de Hölder, ce que nous supposerons et ce qui sera vérifié plus tard, F est continue au sens de Hölder et la formule de Poisson donne

$$\Delta\omega = F.$$

Si nous posons maintenant

$$v = \Theta + \omega + V,$$

nous avons

$$\Delta V = 0,$$

et nous sommes ramenés à trouver la fonction harmonique V, régulière dans (D), satisfaisant sur le cercle (C) à

$$\frac{\partial V^*}{\partial n} + pV^* - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^*}{\partial n}d\sigma$$
$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^*}{\partial n}d\sigma - \frac{\partial\omega^*}{\partial n} - p\omega^*\right) + \Phi(V^* + \omega^*, \ldots).$$

Mais V étant harmonique et régulière dans le cercle de rayon 1, on a sur ce cercle

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial V^*}{\partial n} d\sigma = 0.$$

On a également d'ailleurs

$$\int_0^{2\pi} V^* d\sigma = 0,$$

car le choix de l'axe des X entraîne

$$\int_0^{2\pi} (V^* + \omega^*) \, d\sigma = 0,$$

or

$$\int_0^{2\pi} \omega^* d\sigma = \int_0^{2\pi} d\sigma \left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 F^1 \log \frac{1}{r} \rho \, d\rho \, d\alpha \right).$$

En intervertissant les intégrations avec les précautions habituelles dans le cas d'une fonction discontinue, et en tenant compte de la relation

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r} d\sigma = \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\alpha - \sigma)}} d\sigma = 0 \qquad \text{pour} \quad \rho^2 \leqq 1,$$

on voit facilement que

$$\int_0^{2\pi} \omega^* d\sigma = 0.$$

Nous sommes donc ramenés au problème d'analyse suivant : *Trouver dans le cercle de rayon* 1 *la fonction* ω *et la fonction harmonique* V *sachant que*

$$\omega(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_D F(V + \Theta + \omega, \ldots, \xi, \eta) \log \frac{1}{r} d\xi \, d\eta,$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial n} + p V^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \omega^*}{\partial n} ds - \frac{\partial \omega^*}{\partial n} - p \omega^* + \Phi(V^* + \omega^*, \ldots),$$

où Θ est une fonction connue, continue au sens de Hölder ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres dans (D)+(C) ([12]), et contenant en facteur le paramètre μ caractérisant les ondes.

A l'intérieur du cercle, V est donné en fonction de V^* et $\frac{\partial V^*}{\partial n}$ par la formule classique

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V^* \frac{\partial}{\partial n}\left(\log\frac{1}{r}\right) ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial V^*}{\partial n} \log\frac{1}{r}\, ds.$$

Si nous faisons tendre le point (x, y) vers un point σ du cercle (C), le deuxième terme du second membre, potentiel de simple couche continu dans tout le plan, tend vers l'expression obtenue en remplaçant dans r le point $(x, y) = (\rho, \alpha)$ par le point $(1, \sigma)$. Au contraire, le premier terme est un potentiel de double couche discontinu en traversant le cercle, et on a

$$\lim_{(x,y)\to(1,\sigma)} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V^* \frac{\partial}{\partial n} \log\frac{1}{r}\, ds = \frac{1}{2\pi}\left[\pi V^*(\sigma) + \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r} V^*\, ds\right]$$
$$= \frac{V^*(\sigma)}{2} + \frac{1}{4\pi}\int V^*\, ds = \frac{V^*(\sigma)}{2},$$

d'où la relation

$$V^*(\sigma) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial V^*}{\partial n} \log\frac{1}{r}\, ds,$$

et il nous suffit de calculer $\frac{\partial V^*}{\partial n}$ au moyen de :

$$\frac{\partial V^*}{\partial n} - \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial V^*}{\partial n} \log\frac{1}{r}\, ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \omega^*}{\partial n}\, ds - \frac{\partial \omega^*}{\partial n} - p\,\omega^* + \Phi^*.$$

Cette relation, jointe à celle donnant ω, constitue un système intégro-différentiel en ω et $\frac{\partial V^*}{\partial n}$, que l'on pourra résoudre par les méthodes classiques.

7. Remarques résultant de la considération de la première approximation. — Nous nous bornons à considérer les termes linéaires du

---

([12]) En prenant naturellement sur (C) les valeurs limites des dérivées lorsque le point tend vers un point de (C).

système intégro-différentiel. Nous avons

$$\omega(x, y) = 0,$$

et

$$\frac{\partial V^*}{\partial n} - \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^*}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^*}{\partial n}\,ds - \frac{\partial\omega^*}{\partial n} - p\,\omega^*.$$

La dérivée normale $\frac{\partial V^*}{\partial n}$ est donc solution de l'équation intégrale linéaire et homogène

$$(1)\qquad \frac{\partial V^*}{\partial n} - \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^*}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,ds = 0.$$

La solution $\frac{\partial V^*}{\partial n} = 0$ ne peut convenir puisqu'il en résulterait V^* et V nuls en première approximation, ce qui est contraire à notre hypothèse d'un mouvement petit mais non infiniment petit. D'ailleurs, les approximations suivantes donneraient v fonction de Ψ^* seul, v^* serait donc une constante nécessairement nulle et le mouvement ne serait pas ondulatoire. Mais on sait ([13]) que l'équation (1) n'a de solutions non nulles que lorsque p est un entier. On a donc $p = n$ en première approximation. Les solutions fondamentales normées correspondantes sont alors $\frac{\cos n\sigma}{\sqrt{\pi}}$ et $\frac{\sin n\sigma}{\sqrt{\pi}}$. Mais une onde égale au premier ordre à $\nu\cos n\sigma + \nu'\sin n\sigma$ admet une période égale à une partie aliquote de λ.

En nous limitant à l'onde fondamentale et laissant de côté les harmoniques, nous pouvons donc poser

$$(2)\qquad p = 1 - \varkappa,$$

où $\varkappa$ sera un paramètre petit, déterminé ultérieurement. On a alors

$$\frac{\partial V^*}{\partial n} \sim \nu\cos\sigma + \nu'\sin\sigma,$$

où ν et ν' sont petits, et

$$v^* \sim V^* \sim -\nu\cos\sigma - \nu'\sin\sigma.$$

([13]) *Voir*, par exemple, E. Picard, *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo mathematico di Palermo*, t. **29**, 1900).

La quantité $\sqrt{\nu^2+\nu'^2}$ caractérise bien la grandeur de l'onde en première approximation. Le paramètre μ que nous définirons ultérieurement sera, au deuxième ordre près, égal à cette quantité.

Pour simplifier l'écriture, nous allons poser

$$U = -\frac{\partial V}{\partial \rho},$$

d'où

$$U^* = \frac{\partial V^*}{\partial n}.$$

L'équation donnant U^* s'écrit, en tenant compte de la valeur de p trouvée,

$$(3)\quad U^* - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^* \log\frac{1}{r}\,ds$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^*}{\partial n}ds - \frac{\partial\omega^*}{\partial n} - \omega^* + \varkappa\left(\omega^* - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^*\log\frac{1}{r}\,ds\right) + \Phi^*.$$

Si nous posons alors

$$-\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{r} = -\frac{1}{\pi}(\cos s\cos\sigma + \sin s\sin\sigma) + N(s,\sigma),$$

le nouveau noyau

$$N(s,\sigma) = -\frac{1}{\pi}\left[\log\frac{1}{r} - \cos(s-\sigma)\right]$$

est encore une fonction paire de $(s-\sigma)$ et n'admet plus de fonctions fondamentales. On peut alors remplacer l'équation (3) par

$$(4)\qquad U^*(\sigma) + \int_0^{2\pi} N(s,\sigma)\,U^*(s)\,ds$$
$$= \frac{1}{\pi}(r_1\cos\sigma + r_2\sin\sigma) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^*}{\partial n}ds - \frac{\partial\omega^*}{\partial n} - \omega^*$$
$$+ \varkappa\left(\omega^* - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^*\log\frac{1}{r}\,ds\right) + \Phi^*,$$

en posant

$$r_1 = \int_0^{2\pi} U^*(s)\cos s\,ds,\qquad r_2 = \int_0^{2\pi} U^*(s)\sin s\,ds,$$

r_1 et r_2 sont deux nouveaux paramètres introduits par le fait que l'on se trouve dans le cas de ramification. La nouvelle équation (4) est résoluble univoquement, au moyen du noyau résolvant $\mathfrak{N}(s, \sigma)$ associé à N, et qui lui est lié par

$$\mathfrak{N}(s, \sigma) + \mathrm{N}(s, \sigma) + \int_0^{2\pi} \mathrm{N}(s, r)\, \mathfrak{N}(r, \sigma)\, dr = 0. \tag{5}$$

On sait que $\mathfrak{N}$ est pair en $(s - \sigma)$ comme N; il est d'ailleurs discontinu d'une manière analogue qui ne gêne en rien la théorie. De plus, si $\mathrm{N}(s, \sigma)$ est orthogonal à une fonction de s, il en est de même pour $\mathfrak{N}(s, \sigma)$. Or on a, en vertu de la définition de N,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{N}(s, \sigma)\, ds = 0$$

et

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{N}(s, \sigma) \cos(s - u)\, ds = 0$$

quel que soit u. Par suite,

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(s, \sigma)\, ds = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(s, \sigma) \cos(s - u)\, ds = 0.$$

D'autre part, on vérifie aisément que l'on a

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{N}(s, \sigma) \cos m(s - u)\, ds = -\frac{1}{m} \cos m(\sigma - u)$$

et

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(s, \sigma) \cos m(s - u)\, ds = \frac{1}{m - 1} \cos m(\sigma - u).$$

On peut donc toujours remplacer l'équation (4) par

$$\mathrm{U}^* = \frac{r_1 \cos\sigma + r_2 \sin\sigma}{\pi} + \mathcal{E}(\omega^*) + \mathcal{G}(\sigma), \tag{6}$$

en posant

$$\mathcal{E}(\omega^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^*}{\partial n}ds - \frac{\partial\omega^*}{\partial n} - \omega^* + \int_0^{2\pi}\mathfrak{N}(\sigma, s)\left(-\omega^* - \frac{\partial\omega^*}{\partial n}\right)ds,$$

$$\mathcal{G}(\sigma) = \varkappa\left(\omega^* - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}^*\log\frac{1}{r}\,ds\right) + \Phi^*$$
$$+\int_0^{2\pi}\mathfrak{N}(\sigma, s)\left[\varkappa\left(\omega^*(s) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{U}^*\log\frac{1}{r}\,du\right) + \Phi^*\right]ds.$$

On remarquera que $\mathcal{E}$ est linéaire, $\mathcal{G}$ du deuxième ordre.

Avec ces dernières notations, la première approximation s'écrit :

$$\mathrm{U}_1^* = \frac{r_1\cos\sigma + r_2\sin\sigma}{\pi},$$

ou, en posant $r_1 = \pi\mu\cos\Omega$, $r_2 = \pi\mu\sin\Omega$,

$$\mathrm{U}_1^* = \mu\cos(\sigma - \Omega),$$

où μ et Ω sont deux nouveaux paramètres. Le paramètre $\mu = \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{\pi}$ caractérise la grandeur de l'onde et c'est lui que nous prendrons comme paramètre fondamental. Nous nous occuperons plus tard de la détermination de $\varkappa$ et Ω en fonction de μ. Nous allons d'abord résoudre le système intégro-différentiel en conservant les trois paramètres petits r_1, r_2, $\varkappa$ que nous supposerons tous trois inférieurs à une même quantité petite δ.

8. Résolution du système intégro-différentiel par approximations successives. — Nous avons trouvé

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \mathrm{U}_1^* = \dfrac{r_1\cos\sigma + r_2\sin\sigma}{\pi}. \end{cases}$$

Nous posons, d'une façon générale,

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} \omega_n = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\iint_{\mathrm{D}}\mathrm{F}(\mathrm{V}_{n-1} + \Theta + \omega_{n-1}, \ldots, \xi, \eta)\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta, \\ \mathrm{U}_n^* = \dfrac{r_1\cos\sigma + r_2\sin\sigma}{\pi} + \mathcal{E}(\omega_n^*) + \mathcal{G}(\mathrm{V}_{n-1}^*, \ldots). \end{cases}$$

ω_n^* et U_n^* étant ainsi connus, on en déduit V_n^* et V_n au moyen de :

$$(3) \qquad V_n^* = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \log\frac{1}{r}\,ds,$$

$$(4) \qquad V_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_n^* \frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \log\frac{1}{r}\,ds,$$

et, en dérivant ω_n et V_n, on obtient toutes les quantités figurant dans F, $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$; on en déduit :

$$\omega_{n+1} = -\frac{1}{2\pi}\iint_D F_n \log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta,$$

$$U_{n+1}^* = \frac{r_1\cos\sigma + r_2\sin\sigma}{\pi} + \mathcal{E}(\omega_{n+1}^*) + \mathcal{G}_n,$$

où l'indice n dont sont affectés F et $\mathcal{G}$ indique qu'on remplace dans ces fonctions les variables qui y figurent par leur $n^{\text{ième}}$ approximation. Il faut démontrer que les approximations successives donnent pour toutes ces quantités des valeurs petites tendant vers des limites petites. Pour cela, il faut pouvoir majorer convenablement V_n, ω_n et leurs dérivées. Nous avons supposé aussi précédemment (§ **6**) que ces quantités satisfaisaient à des conditions de Hölder. Il faut donc pouvoir aussi calculer et majorer pour ces quantités les expressions $\mathcal{O}^\lambda_{PP'}$ en désignant pour simplifier, par la notation $\mathcal{O}^\lambda_{PP'}(f)$ ou encore par $\mathcal{O}^\lambda_{(x,y)(\xi,\eta)}(f)$, la quantité

$$\frac{f(x,y) - f(\xi,\eta)}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\frac{\lambda}{2}}} = \frac{f(P') - f(P)}{d^\lambda},$$

où λ, nombre compris entre 0 et 1, n'a aucun rapport avec la longueur d'onde. Nous poserons encore ([14])

$$[f]_\lambda = \max.\,|\mathcal{O}^\lambda_{PP'}(f)|.$$

([14]) M. Lichtenstein, *loc. cit.*, note 5, a posé, p. 63 :

$$|f|_\lambda = \max\frac{f(P') - f(P)}{d^\lambda} \qquad \text{pour P fixe,}$$

$|f|_\lambda$ est alors fonction de P, et le nombre $[f]_\lambda$ est égal au maximum de la fonction $|f|_\lambda$.

et nous appellerons brièvement cette quantité le *crochet* de f. Nous conviendrons aussi de désigner par $\overline{f}$ le maximum de $|f|$.

Il résulte de la première équation du système (2) et des équations obtenues en la dérivant une fois par rapport à x et y, que l'on a, en désignant par C_1, C_2, ... des constantes indépendantes de n,

$$\overline{\omega}_n \leqq C_1 \overline{F}_{n-1}, \qquad [\omega_n]_\lambda \leqq C'_1 \overline{F}_{n-1},$$

$$\overline{\frac{\partial \omega_n}{\partial x}}, \overline{\frac{\partial \omega_n}{\partial y}} \leqq C_2 \overline{F}_{n-1}, \qquad \left[\frac{\partial \omega_n}{\partial x}\right]_\lambda, \left[\frac{\partial \omega_n}{\partial y}\right]_\lambda \leqq C'_2 \overline{F}_{n-1}.$$

Les dérivées secondes de ω_n ne peuvent s'obtenir par simple dérivation sous le signe somme; elles sont données par les formules de Dini :

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \mathcal{O}^\lambda_{(x,y)(\xi,\eta)}(F_{n-1}) r^\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta$$
$$- \frac{1}{2\pi} F_{n-1}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \int_C \log\frac{1}{r} \cos(n, x)\, d\sigma,$$

. . . .

formules valables dans le cercle, frontière comprise.

Dans le cas particulier du domaine circulaire, le second terme se calcule facilement, et l'on a

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \mathcal{O}^\lambda_{(x,y)(\xi,\eta)}(F_{n-1}) r^\lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2} F_{n-1},$$

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \mathcal{O}^\lambda_{(x,y)(\xi,\eta)}(F_{n-1}) r^\lambda \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \log\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta,$$

$$\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial y^2} = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \mathcal{O}^\lambda_{(x,y)(\xi,\eta)}(F_{n-1}) r^\lambda \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log\frac{1}{r}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2} F_{n-1}.$$

Il en résulte que l'on a, à l'intérieur du cercle et sur le cercle,

$$\overline{\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial x^2}}, \quad \overline{\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial x\, \partial y}}, \quad \overline{\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial y^2}} \leqq C_3 \overline{F}_{n-1} + C_4 [F_{n-1}]_\lambda,$$

$$\left[\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial x^2}\right]_\lambda, \left[\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial x\, \partial y}\right]_\lambda, \left[\frac{\partial^2 \omega_n}{\partial y^2}\right]_\lambda \leqq C'_3 \overline{F}_{n-1} + C'_4 [F_{n-1}]_\lambda.$$

Ces douze quantités peuvent donc être bornées par une même expression de la forme

$$C\overline{F}_{n-1} + C'[F_{n-1}]_\lambda.$$

En vertu de la formule (4) et aussi de (3), on a également

$$\overline{V}_n \leqq C_5 \overline{U}_n^*.$$

On a d'ailleurs $\overline{V}_n = \overline{V}_n^*$, puisque V est harmonique. Il nous reste à borner les dérivées premières et secondes de V.

Pour cela, nous allons faire appel aux théorèmes de Korn. Ces théorèmes généraux spécifient dans quelles conditions les dérivées des potentiels de simple et double couche existent, et, dans ce cas, donnent des majorations pour elles ainsi que pour leurs crochets ([15]). Dans le cas qui nous occupe et où le domaine est circulaire, certaines majorations sont un peu plus simples; elles sont données en grande partie dans un Mémoire de Korn ([16]); les autres s'établissent facilement.

Nous nous appuierons donc sur les résultats suivants :

1° Considérons le potentiel de simple couche

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \log\frac{1}{r}\,ds.$$

On a

$$\overline{I}_n \leqq A_1 \overline{U}_n^*, \qquad [I_n]_\lambda \leqq A_1' \overline{U}_n^*.$$

Si U_n^* satisfait à une condition de Hölder, I_n a des dérivées premières continues au sens de Hölder dans tout le cercle, frontière comprise, et l'on a

$$\overline{\frac{\partial I_n}{\partial x}},\quad \overline{\frac{\partial I_n}{\partial y}} \leqq A_2 [U_n^*]_\lambda,$$

$$\left[\frac{\partial I_n}{\partial x}\right]_\lambda,\ \left[\frac{\partial I_n}{\partial y}\right]_\lambda \leqq A_2' [U_n^*]_\lambda.$$

Si $U_n^*(s)$ a une dérivée satisfaisant à une condition de Hölder, I_n a des dérivées secondes continues au sens de Hölder dans (D) + (C), et

([15]) L. Lichtenstein, *Ueber einige Hilfssätze der Potentialtheorie*, IV, *Berichte über die Verhandlungen d. Sächs. Akad. d. Wiss*, Leipzig, t. **82**, 1930, p. 265.

([16]) A. Korn, *Ueber Minimalflächen, deren Randkurven wenig von ebenen Kurven abweichen*, *Abh. d. Kön. Preuss. Akad. d. Wiss.*, Berlin, 1909.

l'on a

$$\overline{\frac{\partial^2 I_n}{\partial x^2}},\quad \overline{\frac{\partial^2 I_n}{\partial x\,\partial y}},\quad \overline{\frac{\partial^2 I_n}{\partial y^2}} \leqq A_3\,\overline{\frac{dU_n^*}{ds}} + A_4\left[\frac{dU_n^*}{ds}\right]_\lambda,$$

$$\left[\frac{\partial^2 I_n}{\partial x^2}\right]_\lambda,\ \left[\frac{\partial^2 I_n}{\partial x\,\partial y}\right]_\lambda,\ \left[\frac{\partial^2 I_n}{\partial y^2}\right]_\lambda \leqq A'_3\,\overline{\frac{dU_n^*}{ds}} + A'_4\left[\frac{dU_n^*}{ds}\right]_\lambda.$$

2° Considérons le potentiel de double couche

$$J_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_n^* \frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,ds.$$

On a

$$\overline{J}_n \leqq B_1\,\overline{V}_n^*, \qquad [J_n]_\lambda \leqq B'_1\,\overline{V}_n^*.$$

Si V_n^* admet une dérivée première satisfaisant à une condition de Hölder, J_n admet des dérivées premières continues au sens de Hölder dans tout le cercle, frontière comprise, et l'on a

$$\overline{\frac{\partial J_n}{\partial x}},\quad \overline{\frac{\partial J_n}{\partial y}} \leqq B_2\,\overline{\frac{dV_n^*}{ds}} + B_3\left[\frac{dV_n^*}{ds}\right]_\lambda,$$

$$\left[\frac{\partial J_n}{\partial x}\right]_\lambda,\ \left[\frac{\partial J_n}{\partial y}\right]_\lambda \leqq B'_2\,\overline{\frac{dV_n^*}{ds}} + B'_3\left[\frac{dV_n^*}{ds}\right]_\lambda.$$

Enfin si $\frac{dV_n^*}{ds}$ admet une dérivée première, c'est-à-dire si V_n^* admet une dérivée seconde continue au sens de Hölder, le potentiel de double couche a des dérivées secondes continues au sens de Hölder dans $(D)+(C)$ et l'on a

$$\overline{\frac{\partial^2 J_n}{\partial x^2}},\quad \overline{\frac{\partial^2 J_n}{\partial x\,\partial y}},\quad \overline{\frac{\partial^2 J_n}{\partial y^2}} \leqq B_4\,\overline{\frac{dV_n^*}{ds}} + B_5\left[\frac{dV_n^*}{ds}\right]_\lambda + B_6\,\overline{\frac{d^2V_n^*}{ds^2}} + B_7\left[\frac{d^2V_n^*}{ds^2}\right]_\lambda,$$

$$\left[\frac{\partial^2 J_n}{\partial x^2}\right]_\lambda,\ \left[\frac{\partial^2 J_n}{\partial x\,\partial y}\right]_\lambda,\ \left[\frac{\partial^2 J_n}{\partial y^2}\right]_\lambda \leqq B'_4\,\overline{\frac{dV_n^*}{ds}} + B'_5\left[\frac{dV_n^*}{ds}\right]_\lambda + B'_6\,\overline{\frac{d^2V_n^*}{ds^2}} + B'_7\left[\frac{d^2V_n^*}{ds^2}\right]_\lambda.$$

Nous avons ainsi toutes les majorations nécessaires pour pouvoir borner dans et sur le cercle $\frac{\partial V}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, au moyen de l'équation (4). On a

$$\overline{\frac{\partial V_n}{\partial x}},\quad \overline{\frac{\partial V_n}{\partial y}} \leqq C_6\,\overline{\frac{dV_n^*}{ds}} + C_7\left[\frac{dV_n^*}{ds}\right]_\lambda + C_8\,[U_n^*]_\lambda,$$

$$\left[\frac{\partial V_n}{\partial x}\right]_\lambda,\ \left[\frac{\partial V_n}{\partial y}\right]_\lambda \leqq C'_6\,\overline{\frac{dV_n^*}{ds}} + C'_7\left[\frac{dV_n^*}{ds}\right]_\lambda + C'_8\,[U_n^*]_\lambda;$$

et

$$\overline{\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}}, \qquad \overline{\frac{\partial^2 V_n}{\partial x\, \partial y}}, \qquad \overline{\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}}$$
$$\leq C_9 \overline{\frac{dV_n^*}{ds}} + C_{10} \left[\frac{dV_n^*}{ds}\right]_\lambda + C_{11} \overline{\frac{d^2V_n^*}{ds^2}} + C_{12} \left[\frac{d^2V_n^*}{ds^2}\right]_\lambda + C_{13} \overline{\frac{dU_n^*}{ds}} + C_{14} \left[\frac{dU_n^*}{ds}\right]_\lambda,$$

$$\left[\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}\right]_\lambda, \quad \left[\frac{\partial^2 V_n}{\partial x\, \partial y}\right]_\lambda, \quad \left[\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}\right]_\lambda$$
$$\leq C'_9 \overline{\frac{dV_n^*}{ds}} + C'_{10} \left[\frac{dV_n^*}{ds}\right]_\lambda + C'_{11} \overline{\frac{d^2V_n^*}{ds^2}} + C'_{12} \left[\frac{d^2V_n^*}{ds^2}\right]_\lambda + C'_{13} \overline{\frac{dU_n^*}{ds}} + C'_{14} \left[\frac{dU_n^*}{ds}\right]_\lambda,$$

où toutes les constantes sont indépendantes de l'indice n.

Dans ces limitations interviennent $\frac{dV_n^*}{ds}$, $\frac{d^2V_n^*}{ds^2}$ et leurs crochets. Mais d'après (3), V_n^* est la valeur d'un potentiel de simple couche sur le contour. Les majorations des dérivées $\frac{dV_n^*}{ds}$, $\frac{d^2V_n^*}{ds^2}$ pourraient donc se déduire immédiatement des bornes données dans (D) + (C) pour les dérivées en x et y du potentiel de simple couche. Mais comme ces deux dérivées jouent un rôle fondamental, il est bon d'avoir leurs expressions exactes. Ce sera d'ailleurs l'occasion d'indiquer comment on peut retrouver assez facilement les bornes données par Korn.

Nous considérons donc

$$\mathcal{J}_n(x, y) = \mathcal{J}_n(\rho, \alpha) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \log\frac{1}{r}\, ds,$$

et nous calculons la dérivée par rapport à α *à l'intérieur du cercle*. Nous avons

$$\frac{\partial \mathcal{J}_n}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \frac{\partial}{\partial \alpha}\log\frac{1}{r}\, ds = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \frac{-\rho\sin(\alpha - s)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\alpha - s)}\, ds;$$

Cette intégrale n'a pas de sens quand ρ tend vers 1. Mais, si nous supposons U_n^* continu au sens de Hölder, nous pouvons écrire la formule

$$U_n^*(s) = U_n^*(\alpha) + [s - \alpha]^\lambda \mathcal{O}^\lambda_{s,\alpha}(U_n^*),$$

où $[s - \alpha]$ désigne la longueur du plus petit arc joignant les deux points s, x et où

$$\mathcal{D}^{\lambda}_{s,x}(U^*_n) = \frac{U^*_n(s) - U^*_n(x)}{|s-x|^{\lambda}}.$$

Cette formule remplace la formule des accroissements finis dans le cas où l'on ne suppose pas que la dérivée première de U^*_n existe.

On a alors, à l'intérieur du cercle,

$$\frac{dV_n}{dx} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{D}^{\lambda}_{s,x}(U^*_n)\frac{\rho\sin(x-s)|s-x|^{\lambda}}{1+\rho^2-2\rho\cos(x-s)}\,ds,$$

car

$$\int_0^{2\pi}\frac{\rho\sin(x-s)\,ds}{1+\rho^2-2\rho\cos(x-s)} = 0.$$

Je dis maintenant que l'intégrale du second membre tend uniformément vers une limite quand $\rho \to 1$.

En effet, pour $\rho = 1$, l'intégrale a un sens et est égale à

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{D}^{\lambda}_{s,x}(U^*_n)|s-x|^{\lambda}\cot g\frac{x-s}{2}\,ds.$$

Cette valeur est atteinte uniformément. En effet, la quantité

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{x-\varepsilon}\mathcal{D}^{\lambda}_{s,x}(U^*_n)\frac{\rho\sin(x-s)|s-x|^{\lambda}}{1+\rho^2-2\rho\cos(x-s)}\,ds$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{x+\varepsilon}^{2\pi}\mathcal{D}^{\lambda}_{s,x}(U^*_n)\frac{\rho\sin(x-s)|s-x|^{\lambda}}{1+\rho^2-2\rho\cos(x-s)}\,ds$$

reste, lorsque ρ tend vers 1, une fonction continue de x dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ et par conséquent une fonction uniformément continue. Mais je dis que je peux choisir ε indépendamment de x de manière que

$$\frac{1}{\pi}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon}\mathcal{D}^{\lambda}_{s,x}(U^*_n)\frac{\rho\sin(x-s)|s-x|^{\lambda}}{1+\rho^2-2\rho\cos(x-s)}\,ds$$

soit plus petit que η. En effet, la valeur absolue de cette intégrale est plus petite que

$$\frac{2}{\pi}|U^*_n|_{\lambda}\int_0^{\varepsilon}\frac{\sin u\, u^{\lambda}}{1+\rho^2-2\rho\cos u}\,du.$$

et l'intégrale peut, par un choix convenable de ε, être rendue aussi petite que l'on veut.

Mais on sait que, si une fonction $f_n(x)$ a une limite $F(x)$ et si $f'_n(x)$ tend uniformément vers une fonction $\Phi(x)$, $\Phi(x)$ est la dérivée de $F(x)$. On peut donc affirmer que

$$\frac{\partial \mathfrak{V}_n^*}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega^k_{s,\alpha}(U_n^*)\,|s-\alpha|^k \cot\frac{\alpha-s}{2}\,ds.$$

Donc, si U_n^* est continu au sens de Hölder, V_n^* a une dérivée première donnée par

(5) $$\frac{dV_n^*}{d\sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \omega^k_{s,\sigma}(U_n^*)\,|s-\sigma|^k \cot\frac{\sigma-s}{2}\,ds.$$

La dérivée seconde se calcule de même. On a, à l'intérieur du cercle,

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_n}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \frac{\partial^2 \log\frac{1}{r}}{\partial \alpha^2}\,ds = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \frac{2\rho^2-\rho(1+\rho^2)\cos(s-\alpha)}{[1+\rho^2-2\rho\cos(s-\alpha)]^2}\,ds.$$

Nous supposons cette fois que U_n^* a une dérivée première continue au sens de Hölder. On peut donc écrire la formule suivante, généralisant la formule de Taylor dans ce cas,

$$U_n^*(s) = U_n^*(\alpha) + (s-\alpha)\frac{dU_n^*}{ds}(\alpha) + (s-\alpha)|s-\alpha|^k \rho^k\, \omega^k_{\alpha,\alpha+\theta(s-\alpha)}\left(\frac{dU_n^*}{ds}\right),$$

où θ est la quantité comprise entre o et 1 introduite par la formule des accroissements finis et où $(s-\alpha)$ désigne la valeur algébrique de l'arc. La valeur de $\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_n}{\partial \alpha^2}$ s'obtient donc, en intégrant de $\alpha-\pi$ à $\alpha+\pi$, par la formule

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{V}_n}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \omega^k_{\alpha,\alpha+\theta(s-\alpha)}\left(\frac{dU_n^*}{ds}\right)\rho^k|s-\alpha|^k(s-\alpha)\frac{2\rho^2-\rho(1+\rho^2)\cos(s-\alpha)}{[1+\rho^2-2\rho\cos(s-\alpha)]^2}\,ds,$$

car l'intégrale $\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi}(s-\alpha)\frac{2\rho^2-\rho(1+\rho^2)\cos(s-\alpha)}{[1+\rho^2-2\rho\cos(s-\alpha)]^2}\,ds$ est nulle comme intégrale de fonction impaire, et un calcul facile montre que

$$\int_0^{2\pi}\frac{2\rho^2-\rho(1+\rho^2)\cos u}{(1+\rho^2-2\rho\cos u)^2}\,du = 0.$$

On montre, comme pour la dérivée première, que

$$(6)\quad \frac{d^2V_n^*}{d\sigma^2} = \lim_{\substack{\rho\to 1\\ \alpha\to\sigma}} -\frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \mathcal{O}^{\lambda}_{\alpha,\alpha-0,s-\alpha}\left(\frac{dU_n^*}{ds}\right)\rho^\lambda[s-\alpha]^\lambda(s-\alpha)\,\frac{2\rho^2-\rho(1+\rho^2)\cos(s-\alpha)}{[1+\rho^2-2\rho\cos(s-\alpha)]^2}\,ds$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{\sigma-\pi}^{\sigma+\pi} \mathcal{O}^{\lambda}_{\sigma,\sigma-0,s-\sigma}\left(\frac{dU_n^*}{ds}\right)\rho^\lambda\,\frac{[s-\sigma]^\lambda(s-\sigma)}{\sin^2\frac{(s-\sigma)}{2}}\,ds.$$

Les deux dérivées $\frac{dV_n^*}{d\sigma}$ et $\frac{d^2V_n^*}{d\sigma^2}$ sont donc bornées par

$$\overline{\frac{dV_n^*}{d\sigma}} \leq L_1[U_n^*]_\lambda,$$
$$\overline{\frac{d^2V_n^*}{d\sigma^2}} \leq L_2\left[\frac{dU_n^*}{ds}\right]_\lambda,$$

où $L_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|[\varphi]^\lambda \cot g\frac{\varphi}{2}\right|d\varphi$ est un nombre que l'on peut remplacer par une borne supérieure que nous supposerons plus grande que 1. Et l'on trouve pour les bornes des crochets les expressions

$$\left[\frac{dV_n^*}{ds}\right]_\lambda \leq L_1'[U_n^*]_\lambda,$$

où on peut prendre $L_1' > 1$

$$\left[\frac{d^2V_n^*}{ds^2}\right]_\lambda \leq L_2'\left[\frac{dU_n^*}{ds}\right]_\lambda + L_3'\overline{\frac{dU_n^*}{ds}}.$$

On peut alors écrire les bornes définitives :

$$\overline{\frac{\partial V_n}{\partial x}},\qquad \overline{\frac{\partial V_n}{\partial y}} \leq \mathcal{C}_2[U_n^*]_\lambda,$$
$$\left[\frac{\partial V_n}{\partial x}\right]_\lambda,\ \left[\frac{\partial V_n}{\partial y}\right]_\lambda \leq \mathcal{C}_2'[U_n^*]_\lambda,$$
$$\overline{\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}},\qquad \overline{\frac{\partial^2 V_n}{\partial x\,\partial y}},\qquad \overline{\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}} \leq \mathcal{C}_3[U_n^*]_\lambda + \mathcal{C}_4\left[\frac{dU_n^*}{ds}\right]_\lambda + \mathcal{C}_5\overline{\frac{dU_n^*}{ds}},$$
$$\left[\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}\right]_\lambda,\ \left[\frac{\partial^2 V_n}{\partial x\,\partial y}\right]_\lambda,\ \left[\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}\right]_\lambda \leq \mathcal{C}_3'[U_n^*]_\lambda + \mathcal{C}_4'\left[\frac{dU_n^*}{ds}\right]_\lambda + \mathcal{C}_5'\overline{\frac{dU_n^*}{ds}}.$$

Nous avons ainsi borné toutes nos quantités au moyen de $\overline{U_n^*}$, $\overline{\frac{dU_n^*}{ds}}$, $[U_n^*]_\lambda$, $\left[\frac{dU_n^*}{ds}\right]_\lambda$.

Nous avons vu que U_n^* est donné par (6) (§ 7) :

$$U_n^* = \frac{r_1 \cos\sigma + r_2 \sin\sigma}{\pi} + \mathcal{E}(\omega_n^*) + \mathcal{G}(V_{n-1}^*, \ldots),$$

d'où il résulte que

$$U_n^* \leq \frac{2\delta}{\pi} + C^1 \overline{\omega_n^*} + C^2 \overline{\frac{\partial \omega_n^*}{\partial n}} + \overline{\mathcal{G}}_{n-1}.$$

Pour avoir $\frac{dU_n^*}{ds}$, nous dérivons l'équation qui donne U_n^* sous la forme (3) (§ 7).

$$U_n^* = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \log\frac{1}{r}\, ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \omega_n^*}{\partial n}\, ds - \frac{\partial \omega_n^*}{\partial n} - \omega_n^*$$
$$\varkappa\left(\omega_{n-1}^* - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_{n-1}^* \log\frac{1}{r}\, ds\right) + \Phi_{n-1}^*,$$

ce qui donne

$$(7)\quad \frac{dU_n^*}{d\sigma} = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{Q}_{s,\sigma}^{\lambda}(U_n^*)[s-\sigma]^{\lambda} \operatorname{cotg}\frac{\sigma - s}{2}\, ds - \frac{\partial^2 \omega_n^*}{\partial\sigma\, \partial n} - \frac{\partial \omega_n^*}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi_{n-1}^{1*}}{\partial \sigma},$$

en posant

$$\Phi_{n-1}^{1*} = \Phi_{n-1}^* + \varkappa\left(\omega_{n-1}^* - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_{n-1}^* \log\frac{1}{r}\, ds\right),$$

d'où

$$\frac{dU_n^*}{ds} \leq L_1 |U_n^*|_\lambda + \overline{\frac{\partial^2 \omega_n^*}{\partial s\, \partial n}} + \overline{\frac{\partial \omega_n^*}{\partial s}} + \overline{\frac{\partial \Phi_{n-1}^{1*}}{\partial s}}.$$

De l'équation (6) (§ 7), on déduit aisément

$$|U_n^*|_\lambda \leq \frac{4\delta}{\pi} + |\mathcal{E}(\omega_n^*)|_\lambda + |\mathcal{G}_{n-1}|_\lambda,$$

car on voit immédiatement que $[\cos s]_\lambda < 2$. On déduit de même de l'équation (7)

$$\left[\frac{dU_n^*}{ds}\right]_\lambda \leq L_1' |U_n^*|_\lambda + \left[\frac{\partial^2 \omega_n^*}{\partial s\, \partial n}\right]_\lambda + \left[\frac{\partial \omega_n^*}{\partial s}\right]_\lambda + \left[\frac{\partial \Phi_{n-1}^{1*}}{\partial s}\right]_\lambda.$$

Nous sommes maintenant presque en mesure d'établir que le système intégro-différentiel donne une solution unique, bornée, continue au sens de Hölder. Cette solution sera analytique en r_1, r_2, $\varkappa$ si l'on suppose que la fonction $h(\rho)$, si elle dépend des paramètres, en dépend analytiquement.

Mais auparavant, indiquons comment on peut borner les quantités $\overline{F}, \overline{\Phi}, \ldots$ en fonction des bornes $D_1, D_2, \ldots$ des fonctions $V, \ldots$ qui y interviennent comme variables. Nous avons donné précédemment les définitions explicites de ces quantités. De ces définitions résulte que les unes $(F, \ldots)$ se présentent sous forme entière par rapport à ces variables et sont majorées lorsqu'on remplace toutes les fonctions qui y interviennent par leurs valeurs absolues et les variables qui y figurent par leurs maxima $D_1, D_2, \ldots$. Les bornes ainsi obtenues sont des polynomes en ces variables, à coefficients tous positifs, et ne contenant ni terme constant, ni termes linéaires. Si toutes les variables sont comprises dans l'intervalle $(0, \varpi)$, ces polynomes peuvent être majorés par des expressions de la forme

$$C P_2(D_1, D_2, \ldots),$$

où l'on pose

$$P_2 = \Sigma D_i^2 + \Sigma D_i D_j.$$

Dans les autres expressions $(\Phi, \ldots)$ figure un dénominateur différent de zéro lorsque les variables sont nulles. On peut donc choisir ϖ assez petit pour que ce dénominateur ne soit jamais nul et soit minoré en valeur absolue par une quantité positive. Les expressions se majorent alors de la même façon que précédemment par des expressions de la forme $C P_2(D_1, D_2, \ldots)$.

Pour calculer $\mathcal{O}^k_{pp'}(f)$, on remarque que, pour une expression de la forme abc, on a

$$\mathcal{O}^k_{pp'}(abc) = bc\,\mathcal{O}^k_{pp'}(a) + ca\,\mathcal{O}^k_{pp'}(b) + ab\,\mathcal{O}^k_{pp'}(c),$$

d'où

$$[abc]_k \leq \overline{b}\,\overline{c}\,[a]_k + \overline{c}\,\overline{a}\,[b]_k + \overline{a}\,\overline{b}\,[c]_k,$$

formule vraie quel que soit le nombre des facteurs. Il en résulte que $[F]_k, [\Phi]_k, \ldots$ peuvent être majorés par des polynomes par rapport aux maxima des variables et de leurs crochets, sans termes constants ni linéaires, et qui, lorsque les variables et leurs crochets sont tous inférieurs à la quantité ϖ déterminée précédemment, peuvent être majorés par des expressions de la forme

$$C\,P_2(D_1, D_2, \ldots, [D_1]_k, \ldots),$$

en désignant par $[D]_k$ le crochet de la variable qui a D pour maximum.

9. Les approximations successives sont bornées. — Nous allons montrer que l'on peut choisir δ assez petit pour pouvoir déterminer des nombres d_1, d_2, ... inférieurs à ϖ, tels que si les valeurs des inconnues qui constituent la $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation sont respectivement inférieures ou égales à d_1, d_2, ..., il en est de même pour les quantités qui constituent la $n^{\text{ième}}$ approximation. Nous vérifierons alors que la première approximation donne bien des valeurs plus petites respectivement que $d_1, d_2, \ldots$.

Supposons donc que l'on ait :

$$\left.\begin{matrix} \overline{\omega_{n-1}}, & \overline{\dfrac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x}}, & \overline{\dfrac{\partial\omega_{n-1}}{\partial y}}, & \overline{\dfrac{\partial^2\omega_{n-1}}{\partial x^2}}, & \overline{\dfrac{\partial^2\omega_{n-1}}{\partial x\,\partial y}}, & \overline{\dfrac{\partial^2\omega_{n-1}}{\partial y^2}} \\ & [\omega_{n-1}]_k, & \left[\dfrac{\partial\omega_{n-1}}{\partial x}\right]_k, & \ldots, & \left[\dfrac{\partial^2\omega_{n-1}}{\partial y^2}\right]_k & \end{matrix}\right\} \leq d_1,$$

$$\overline{U'_{n-1}} \leq d_2,$$

$$[U'_{n-1}]_k \leq d'_2,$$

$$\overline{\frac{dU'_{n-1}}{ds}} \leq d_3,$$

$$\left[\frac{dU'_{n-1}}{ds}\right]_k \leq d'_3;$$

les autres inconnues, pour la même approximation, sont bornées d'après les calculs précédents par une même expression de la forme

$$C(d_2 + d'_2 + d_3 + d'_3),$$

où C est indépendant de n.

Écrivons alors que les bornes, données par les formules établies dans le paragraphe précédent pour $\overline{U'_n}$, $[U'_n]_k$, $\overline{\dfrac{dU'_n}{ds}}$, $\left[\dfrac{dU'_n}{ds}\right]_k$, $\overline{\omega_n}$ et ses dérivées et crochets, sont égales aux bornes précédentes. Cela nous donnera un système de cinq équations algébriques permettant de déterminer d_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3 en fonction de δ.

On a

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \phantom{\frac{2\delta}{\pi}+{}} \mathcal{A}_1 P_2(\delta, d_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3),\\
d_2 &= \frac{2\delta}{\pi} + \mathcal{A}_2 P_2(\delta, d_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3),\\
d'_2 &= \frac{4\delta}{\pi} + \mathcal{A}_3 P_2(\delta, d_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3),\\
d_3 &= \mathcal{B}_1\delta + \mathcal{A}_4 P_2(\delta, d_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3),\\
d'_3 &= \mathcal{B}_2\delta + \mathcal{A}_5 P_2(\delta, d_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3),
\end{aligned}
$$

où les $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$ sont des constantes positives et où $\mathcal{B}_1 = \frac{1}{\pi} L_1$, $\mathcal{B}_2 = \frac{1}{\pi} L'_1$.

Pour $\delta = 0$, ces cinq équations représentent cinq hypersurfaces ayant l'origine comme point commun *simple*, puisque les cinq hyperplans tangents aux cinq hypersurfaces sont les hyperplans de coordonnées. Pour δ petit, on a donc une solution petite tendant vers zéro avec δ, et l'on peut choisir η_1 pour que, lorsque $\delta < \eta_1$, ces solutions d_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3, visiblement positives, soient toutes inférieures à ϖ. Elles sont d'ailleurs données en première approximation par

$$
d_1 = 0, \qquad d_2 = \frac{2\delta}{\pi}, \qquad d'_2 = \frac{4\delta}{\pi}, \qquad d_3 = \mathcal{B}_1\delta, \qquad d'_3 = \mathcal{B}_2\delta,
$$

et, d'une façon générale, ces solutions s'obtiennent comme des développements à coefficients tous positifs en δ.

Enfin, en première approximation, on a trouvé

$$
\begin{aligned}
&\omega_1 = 0,\\
&U'_1 = \frac{r_1 \cos\sigma - r_2 \sin\sigma}{\pi},
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
U'_1 &< \frac{2\delta}{\pi},\\
|U'_1|_k &< \frac{4\delta}{\pi},\\
\frac{dU'_1}{d\sigma} &< \frac{4\delta}{\pi},\\
\left[\frac{dU'_1}{d\sigma}\right]_k &< \frac{4\delta}{\pi},
\end{aligned}
$$

valeurs qui sont respectivement inférieures à d_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3 puisque l'on a

$$L_1 > 1 \quad \text{et} \quad L'_1 > 1.$$

donc

$$\varpi_1 > \frac{1}{\pi}, \quad \varpi_2 > \frac{1}{\pi}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

10. Les approximations successives convergent. — Soit Ω une borne supérieure des différences entre les valeurs de toutes les variables qui interviennent et de leurs quantités ϖ en $n^{\text{ième}}$ et en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. Nous allons montrer que l'on peut trouver un nombre η_2 tel que, pour $\delta < \eta_2$, les différences entre les valeurs en $(n+1)^{\text{ième}}$ et $n^{\text{ième}}$ approximations de toutes les variables soient toutes en module inférieures à $\chi\Omega$, où χ sera un nombre plus petit que 1 et indépendant de n. Il en résultera que lorsque n augmentera indéfiniment toutes les quantités U'_n, ω_n, ... tendront vers des limites, la convergence étant uniforme.

Nous partons des expressions fondamentales :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\psi_{n+1} - \psi_n = -\frac{1}{2\pi}\iint_0^{\infty}(F_n - F_{n-1})\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta, \\ &U'_{n+1} - U'_n = \mathcal{S}(\psi'_{n-1}) - \mathcal{S}(\psi'_n) - \mathcal{G}_n - \mathcal{G}_{n-1}. \end{aligned}\right.$$

Nous remarquons que $F_n - F_{n-1}$ se présente comme une somme de différences de la forme $a_n b_n c_n - a_{n-1} b_{n-1} c_{n-1}$, où le nombre des lettres est supérieur ou égal à 2, différences qui, ainsi qu'on l'a déjà vu, se mettent sous la forme

$$(a_n - a_{n-1})b_n c_n + a_{n-1}(b_n - b_{n-1})c_n + a_{n-1}b_{n-1}(c_n - c_{n-1})$$

de sorte que l'on peut majorer $F_n - F_{n-1}$ par une expression de la forme

$$\overline{F_n - F_{n-1}} < C\Omega(\delta + d_1 + d_2 + d'_2 + d_3 + d'_3),$$

où C est une constante indépendante de n, puisque pour toutes les approximations les variables sont respectivement majorées par les nombres d_1, d_2, ..., inférieurs à ϖ ou par une combinaison linéaire de ces quantités.

D'autre part, on peut écrire évidemment

$$\varpi^{\lambda}_{pp'}(F_n - F_{n-1}) = \varpi^{\lambda}_{pp'}(F_n) - \varpi^{\lambda}_{pp'}(F_{n-1}).$$

quantité qui se présente également sous la même forme que $F_n - F_{n-1}$, mais les variables a_n, b_n, c_n sont non seulement les variables intervenant dans F mais également leurs quantités $\mathcal{O}$. Toutes ces quantités étant aussi majorées par $d_1, d_2, d'_2, d_3, d'_3$, on a encore

$$|F_n - F_{n-1}|_k < C' \Omega(\delta + d_1 + d_2 + d'_2 + d_3 + d'_3).$$

Il en résulte que $\omega_{n-1} - \omega_n$ et les différences analogues entre les dérivées de ω et leurs crochets sont majorées par une expression de la forme précédente. Il en est donc de même pour $\mathcal{S}(\omega'_{n-1}) - \mathcal{S}(\omega'_n)$.

Quant à $\mathcal{G}_n - \mathcal{G}_{n-1}$, si l'on réduit les expressions qui y entrent au même dénominateur, et si, comme on l'a expliqué au paragraphe précédent, on minore le dénominateur par une quantité positive non nulle, on est conduit à une majorante de même forme que celle de $F_n - F_{n-1}$, puisque l'on peut encore écrire par exemple

$$\begin{aligned} &a_n b_n c_{n-1} - a_{n-1} b_{n-1} c_n \\ &\quad = (a_n - a_{n-1}) b_n c_{n-1} + a_{n-1}(b_n - b_{n-1}) c_{n-1} + a_{n-1} b_{n-1}(c_{n-1} - c_n). \end{aligned}$$

On a par conséquent

$$\overline{U'_{n-1} - U'_n} < C'' \Omega(\delta + d_1 + d_2 + d'_2 + d_3 + d'_3),$$

et de même

$$|U'_{n-1} - U'_n|_k < C''' \Omega(\delta + d_1 + d_2 + d'_2 + d_3 + d'_3).$$

D'après l'expression (7) (§ 8), on a

$$\begin{aligned} \frac{dU'_{n-1}}{d\sigma} - \frac{dU'_n}{d\sigma} = {} & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\mathcal{O}'_{n-1}(U'_{n-1}) - \mathcal{O}'_{n}(U'_n)][s - \sigma]\cot\frac{\sigma - s}{2}\,ds \\ & - \left(\frac{d^2\omega'_{n-1}}{d\sigma\,du} - \frac{d^2\omega'_n}{d\sigma\,du}\right) - \left(\frac{d\omega'_{n-1}}{d\sigma} - \frac{d\omega'_n}{d\sigma}\right) - \left(\frac{d\Phi'_{n-1}}{d\sigma} - \frac{d\Phi'_n}{d\sigma}\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\overline{\frac{dU'_{n-1}}{d\sigma} - \frac{dU'_n}{d\sigma}} < L_1 |U'_{n-1} - U'_n|_k + C^{4} \Omega(\delta + d_1 + d_2 + d'_2 + d_3 + d'_3),$$

puisque Φ'_n est une expression de même forme que $\mathcal{G}_n$; d'où finalement

$$\overline{\frac{dU'_{n-1}}{d\sigma} - \frac{dU'_n}{d\sigma}} < C^{5} \Omega(\delta + d_1 + d_2 + d'_2 + d_3 + d'_3).$$

et de même

$$\left|\frac{dU_{n+1}}{ds} - \frac{dU_n}{ds}\right|_\lambda < C'(\Omega\delta + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5).$$

Or, toutes les différences des valeurs des quantités considérées en $(n+1)^{\text{ième}}$ et $n^{\text{ième}}$ approximations sont bornées en fonction de $\overline{U_{n+1} - U_n}$, $|U_{n+1} - U_n|_\lambda$, $\overline{\frac{dU_{n+1}}{ds} - \frac{dU_n}{ds}}$, $\left[\frac{dU_{n+1}}{ds} - \frac{dU_n}{ds}\right]_\lambda$ par les mêmes expressions que celles au moyen desquelles les valeurs de ces variables étaient bornées, en $n^{\text{ième}}$ approximation, au paragraphe 8, en fonction de $\overline{U_n}$, $|U_n|_\lambda$, $\frac{dU_n}{ds}$, $\left[\frac{dU_n}{ds}\right]_\lambda$: toutes les différences considérées peuvent donc être bornées par une même expression de la forme

$$L(\Omega\delta + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5).$$

Mais, puisque d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 tendent vers zéro avec δ, on peut trouver τ_2 tel que, pour $\delta < \tau_2$, on ait

$$L(\delta + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5) = \chi < 1.$$

Lorsque δ sera choisi plus petit que le plus petit des deux nombres τ_1 et τ_2, on aura donc une solution absolument et uniformément convergente.

11. La solution est unique. — Nous allons montrer qu'il est possible de déterminer τ_3 tel que, pour $\delta < \tau_3$, la solution soit unique. Lorsque δ sera plus petit que le plus petit des trois nombres τ_1, τ_2 et τ_3, on aura donc une solution unique absolument et uniformément convergente.

Supposons en effet qu'il existe une autre solution v continue au sens de Hölder ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, et également petite.

Posons alors

$$\underline{\omega} = -\frac{1}{2\pi}\iint F(v, \ldots, \xi, \eta)\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta$$

et

$$\underline{\lambda} = v - \theta - \underline{\omega}.$$

$\underline{V}$, $\underline{\omega}$, leurs dérivées et leurs crochets satisfont à toutes les équations que nous avons écrites. Si ces quantités sont respectivement plus petites que d_1, d_2, d_3, ..., et si l'on appelle $\underline{\Omega}$ le maximum des différences

$$\overline{\omega - \omega_n}, \quad \dots, \quad \overline{\underline{U}' - U'_n}, \quad \dots$$

on démontre, exactement comme dans le paragraphe précédent, que toutes les différences

$$\underline{\omega} - \omega_{n-1}, \quad \dots, \quad \underline{U}' - U'_{n-1}, \quad \dots$$

sont bornées par une expression de la forme

$$B\underline{\Omega}(\delta + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5),$$

où B est une constante indépendante de n. Choisissons alors τ_{13} tel que, pour $\delta < \tau_{13}$, on ait $B(\delta + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5) < 1$; δ étant ainsi choisi, toutes les quantités $\overline{\underline{U}' - U'_{n-1}}$ tendent vers zéro, et l'on a

$$\underline{U}' = \lim U'_{n-1} = U', \quad \dots \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

12. Remarques sur la solution trouvée. — Remarquons d'abord que la solution ainsi trouvée est analytique en r_1, r_2, x. En effet la première approximation l'est visiblement. Supposons alors la $n^{\text{ième}}$ approximation analytique en r_1, r_2, x. Les formules qui font passer de la $n^{\text{ième}}$ approximation à la $(n+1)^{\text{ième}}$ et qui ne contiennent que des fonctions analytiques des valeurs des variables en $n^{\text{ième}}$ approximation donnent pour la $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation des valeurs également analytiques en r_1, r_2, x. [Nous supposons évidemment $\Theta(z)$ analytique par rapport aux paramètres, c'est-à-dire $h(z)$ analytique par rapport aux paramètres, comme nous l'avons déjà dit.] Mais puisque les approximations convergent uniformément, la solution elle-même est analytique en r_1, r_2, x et peut par conséquent être représentée par un développement par rapport à ces trois paramètres petits.

Enfin, la solution trouvée est bien une solution du système intégro-différentiel. En effet, les limites de ω_n, U'_n, ... uniformément atteintes, satisfont bien aux équations du système. La fonction V, en vertu de (4) (§ 8), est bien harmonique (on peut d'ailleurs vérifier facilement que l'on a $\left.\int_0^{2\pi} U'_1\,ds = 0\right)$. La fonction

$$v = \Theta - \omega - V$$

satisfera donc à l'équation du problème (I) et à la condition aux limites (II) et donnera la solution du problème des ondes si l'on peut déterminer deux des paramètres r_1, r_2, α en fonction du troisième pour que soient satisfaites les deux équations de ramification :

$$r_1 = \int_0^{2\pi} U'(s)\cos s\,ds,$$

$$r_2 = \int_0^{2\pi} U'(s)\sin s\,ds.$$

Mais, nous avons supposé de plus que, pour $s = 0$, on avait $v' = 0$, ce qui donne la troisième condition

$$v'(0) = 0.$$

Les trois paramètres sont donc liés par trois relations. On pourrait donc penser *a priori* que le problème de la recherche des ondes permanentes à deux dimensions n'a pas de solution. Mais nous allons démontrer qu'une des deux équations de ramification est surabondante, et pour cela établir pour les ondes, supposées existantes, la propriété suivante.

13. Les ondes permanentes a deux dimensions sont nécessairement symétriques. — Posons, comme nous l'avons déjà fait au paragraphe 7,

$$r_1 = \pi\mu\cos\Omega,$$
$$r_2 = \pi\mu\sin\Omega.$$

La première approximation s'écrit alors

$$\omega_1 = 0,$$
$$U'_1 = \mu\cos(\Omega - \sigma).$$

Elle est symétrique par rapport à Ω, c'est-à-dire que dans le problème initial la courbe l et tout le mouvement sont symétriques en première approximation par rapport à des verticales distantes de $\frac{\lambda}{2}$, dont une est fixée par la valeur $X = \frac{\Omega\lambda}{2\pi}$, puisque si une fonction harmonique dans un cercle a des valeurs limites sur ce cercle symétriques par rapport à un diamètre, il en est de même des valeurs à l'intérieur.

Nous allons démontrer que la solution elle-même est symétrique par rapport à Ω. Il suffit pour cela de démontrer que la $n^{\text{ième}}$ approximation est symétrique, si l'on suppose symétrique la solution en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation : U^*_{n-1} et par conséquent V_{n-1} sont donc des fonctions paires de $(s-\Omega)$, ainsi que ω_{n-1}. Θ, comme on sait, est indépendant de s; ω_n, donné par

$$\omega_n(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint F(V_{n-1}, \Theta, \omega_{n-1}, \ldots, \xi, \eta)\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta,$$

sera pair également si F l'est, comme potentiel de densité paire. Mais si l'on se reporte à la valeur (a') de F donnée en fonction des dérivées en φ et α, on voit immédiatement que les seules quantités impaires qui y figurent (dérivées prises une seule fois par rapport à α), y figurent dans des monomes de degré pair en ces quantités. F est donc bien une fonction paire. Quant à U^*_n, il est donné, comme on sait, par

$$U^*_n = \mu\cos(s-\Omega) + \mathcal{S}(\omega^*_n) + \mathcal{G}^*_{n-1},$$

où $\mathcal{S}(\omega^*_n)$ est pair comme ω^*_n, puisque le noyau résolvant $\mathcal{N}(s, t)$ est une fonction paire de $s-t$. On montre, comme pour F, que $\mathcal{G}$ est pair également.

La solution elle-même est donc symétrique dans le cercle par rapport au diamètre Ω, et dans l'espace par rapport aux verticales indiquées.

Considérons alors les deux équations de ramification :

$$r_1 = \int_0^{2\pi} U^*(s)\cos s\,ds,$$

$$r_2 = \int_0^{2\pi} U^*(s)\sin s\,ds.$$

Nous pouvons les remplacer par les deux combinaisons équivalentes :

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^*(s)\cos(s-\Omega)\,ds,$$

$$0 = \int_0^{2\pi} U^*(s)\sin(s-\Omega)\,ds;$$

or la deuxième équation est une identité en vertu de la symétrie de la solution.

14. Discussion de l'équation de ramification

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^*(s)\cos(s-\Omega)\,ds.$$

Remarquons d'abord que μ est en facteur dans la première approximation. Je dis qu'il en est de même dans la solution. En effet, μ est en facteur devant $h(\rho)$, donc Θ et ses dérivées contiennent μ en facteur. Si l'on suppose que la $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation a μ en facteur, on voit immédiatement qu'il en est de même pour la $n^{\text{ième}}$, puisque les termes en $\varkappa$ qui s'introduisent sont multipliés par des valeurs inconnues en $(n-1)^{\text{ième}}$ approximation. On peut donc chercher la solution sous la forme

$$(1) \qquad U^*(\sigma) = \mu[\cos(\sigma-\Omega) + \mu a_1^1(\sigma,\Omega) + \varkappa a_1^2(\sigma,\Omega) + \ldots],$$

$$(2) \qquad \omega(x,y) = \mu^2[C(x,y;\Omega) + \ldots],$$

et l'équation de ramification s'écrit

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu[\cos(\sigma-\Omega) + \mu a_1^1 + \varkappa a_1^2 + \ldots]\cos(\sigma-\Omega)\,d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$0 = \mu\left[\int_0^{2\pi} [\mu a_1^1(\sigma,\Omega) + \varkappa a_1^2(\sigma,\Omega) + \ldots\right]\cos(\sigma-\Omega)\,d\sigma,$$

ou enfin, en divisant par μ qui est différent de zéro, puisqu'à $\mu = 0$ ne correspond pas un mouvement ondulatoire, mais le repos (ou une translation dans le mouvement relatif) :

$$0 = \mu \int_0^{2\pi} a_1^1(\sigma, \Omega)\cos(\sigma - \Omega)\,d\sigma + \varkappa \int_0^{2\pi} a_1^2(\sigma, \Omega)\cos(\sigma - \Omega)\,d\sigma + \dots.$$

Pour avoir a_1^1, a_1^2, ..., nous portons l'expression (1) de U^* dans

$$(3)\quad U^*(\sigma) = \mu\cos(\sigma - \Omega)$$
$$- \frac{\varkappa}{\pi}\int_0^{2\pi} U^*(s)\log\frac{1}{r}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^*}{\partial n}\,ds - \frac{\partial\omega^*}{\partial n} - (1-\varkappa)\,\omega^*(\sigma) + \Phi^*$$
$$+ \int_0^{2\pi}\mathfrak{N}(u,\sigma)\left[-\frac{\varkappa}{\pi}\int_0^{2\pi} U^*(s)\log\frac{1}{r(u,s)}\,ds + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^*}{\partial n}\,ds\right.$$
$$\left. - \frac{\partial\omega^*}{\partial n} - (1-\varkappa)\,\omega^*(u) + \Phi^*\right]du,$$

et identifions en μ et $\varkappa$.

Pour avoir a_1^2, nous cherchons les termes en $\mu\varkappa$; les termes en ω, ayant μ^2 en facteur, n'en donnent pas; Φ^*, étant du deuxième ordre, n'en donne pas non plus, et l'on a

$$a_1^2(\sigma) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(s-\Omega)\log\frac{1}{r}\,ds$$
$$+ \int_0^{2\pi}\mathfrak{N}(u,\sigma)\left[-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(s-\Omega)\log\frac{1}{r(s,u)}\,ds\right]du.$$

Or,

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(s-\Omega)\log\frac{1}{r}\,ds = -\cos(\sigma-\Omega)$$

et

$$\int_0^{2\pi}\mathfrak{N}(u,\sigma)\cos(u-\Omega)\,du = 0,$$

d'où

$$a_1^2(\sigma) = -\cos(\sigma-\Omega),$$

d'où le *coefficient de* $\varkappa$:

$$\int_0^{2\pi} a_1^2(\sigma,\Omega)\cos(\sigma-\Omega)\,d\sigma = -\int_0^{2\pi}\cos^2(\sigma-\Omega)\,d\sigma = -\pi.$$

L'équation de ramification permet donc de calculer $\varkappa$ d'une manière unique en fonction du paramètre μ qui caractérise la grandeur de l'onde et de l'angle Ω qui fixe les axes de symétrie. Il est intéressant de calculer le coefficient de μ dans l'équation de ramification. Pour cela, nous calculons a'_1 en identifiant les termes en μ^2 dans l'équation (3) et, en utilisant l'équation de définition de Φ^*, il vient

$$
\begin{aligned}
(4)\quad a'_1 = &-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial C^*}{\partial \rho}\,dx + \frac{\partial C^*}{\partial \rho} - C^* + \frac{\pi}{\lambda}\cos 2(\sigma-\Omega) - \frac{6\pi}{\lambda}\frac{\partial \Theta_1^*}{\partial \rho}\cos(\sigma-\Omega)\\
&+\int_0^{2\pi}\mathfrak{N}(\sigma, u)\left[-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial C^*}{\partial \rho}\,dx + \frac{\partial C^*}{\partial \rho} - C^* + \frac{\pi}{\lambda}\cos 2(u-\Omega)\right.\\
&\left.\qquad\qquad - \frac{6\pi}{\lambda}\frac{\partial \Theta_1^*}{\partial \rho}\cos(u-\Omega)\right]du,
\end{aligned}
$$

en posant

$$
\begin{aligned}
\omega &= \mu^2[C(\rho, x;\Omega) + \ldots],\\
C^* &= C(1, x;\Omega),\\
\Theta &= \mu\Theta_1 + \ldots,\\
h(\rho) &= h_1(\rho) + \ldots.
\end{aligned}
$$

Mais, en vertu de la formule (2) (§ 6) donnant Θ, on a

$$
(5)\qquad \frac{\partial \Theta_1}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} u\,h_1(u)\,du.
$$

Quant à C^* et $\frac{\partial C^*}{\partial \rho}$, ils sont obtenus au moyen de la formule (a') définissant F. On trouve après un calcul facile, mais un peu long et sans intérêt,

$$
\begin{aligned}
(6)\quad C(\rho, x) = &\,\pi\frac{1-\rho^2}{\lambda} - \frac{6\pi}{\lambda}\log\rho\int_0^{\rho}u^2 h_1(u)\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}\,du - \frac{6\pi}{\lambda}\int_\rho^1 u^2\log u\, h_1(u)\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}\,du\\
&+\frac{\pi}{\lambda}\,\frac{\cos(x-\Omega)}{\rho}\left\{\int_0^{\rho}u^2\left[3u\,h_1(u) + 2\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}\right]du\right.\\
&\left.\qquad + \rho^2\int_\rho^1\left[3u\,h_1(u) + 2\frac{\partial \Theta_1}{\partial u}\right]du\right\},
\end{aligned}
$$

d'où, sur le cercle de rayon 1,

$$
(7)\quad C^* = -\frac{\pi}{\lambda}\cos(\sigma-\Omega)\int_0^1\rho^2\left(3\rho\,h_1 + 2\frac{\partial \Theta_1}{\partial \rho}\right)d\rho,
$$

$$
(8)\quad \frac{\partial C^*}{\partial \rho} = -\frac{2\pi}{\lambda} - \frac{6\pi}{\lambda}\int_0^1\rho^2 h_1\frac{\partial \Theta_1}{\partial \rho}\,d\rho + \frac{\pi}{\lambda}\cos(\sigma-\Omega)\int_0^1\rho^2\left(3\rho\,h_1 + 2\frac{\partial \Theta_1}{\partial \rho}\right)d\rho.
$$

Par suite, en portant ces valeurs dans (4) et se rappelant les propriétés de $\mathfrak{N}$ indiquées au paragraphe **7**, il vient

$$a_1^1 = \frac{2\pi}{\lambda}\cos(\sigma-\Omega)\left[\int_0^1 \rho^2\left(3\rho\, h_1 + 2\frac{\partial\Theta_1}{\partial\rho}\right)d\rho - 3\frac{\partial\Theta_1^1}{\partial\rho}\right] + \frac{2\pi}{\lambda}\cos 2(\sigma-\Omega),$$

ou, en remplaçant $\frac{\partial\Theta_1}{\partial\rho}$ par sa valeur donnée en fonction de h_1 par (5) et se rappelant que

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y)\, dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y)\, dx,$$

l'expression

$$a_1^1 = \frac{2\pi}{\lambda}\left[2\cos(\sigma-\Omega)\int_0^1 \rho(\rho^2-1)\, h_1(\rho)\, d\rho + \cos 2(\sigma-\Omega)\right],$$

et par suite le coefficient de μ dans l'équation de ramification est

$$A_1^1 = \frac{4\pi^2}{\lambda}\int_0^1 \rho(\rho^2-1)\, h_1(\rho)\, d\rho.$$

$\varkappa$ est donc en général du premier ordre en μ :

$$\varkappa = \frac{4\pi}{\lambda}\mu\int_0^1 \rho(\rho^2-1)\, h_1(\rho)\, d\rho + \ldots$$

et *la vitesse de propagation de l'onde diffère de celle de Airy par une quantité du même ordre que la hauteur de l'onde*. Dans le cas irrotationnel, ou si le tourbillon est du second ordre, la vitesse est égale à celle de Airy au deuxième ordre près. Mais il en est encore ainsi si $h_1(\rho)$, non identiquement nul, satisfait à

$$\int_0^1 \rho(1-\rho^2)\, h_1(\rho)\, d\rho = 0,$$

équation qui a une infinité de solutions en h_1.

Remarquons que si l'on cherchait les ondes pour lesquelles $p = 1$, $\left(c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi}\right)$, on obtiendrait, en annulant dans l'équation de ramification tous les coefficients des puissances de μ (termes indépendants de $\varkappa$), des relations intégrales pour $h_2, \ldots, h_n, \ldots$ qui détermineraient une infinité de fonctions h répondant à la question. L'onde de Gerstner n'est donc pas caractérisée par la propriété d'avoir une vitesse donnée par

$$c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi}.$$

Elle est au contraire caractérisée univoquement par la relation

$$(\beta) \qquad \int_X^{X+\lambda} \left(\frac{1}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}} - \frac{1}{c} \right) dX = 0,$$

dont nous avons donné précédemment la signification physique. Cette relation s'écrit, dans notre système,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial \rho} ds = 0,$$

quel que soit ρ; d'où, en vertu du choix de l'axe des x,

$$\int_0^{2\pi} v\, ds = 0,$$

ou, puisque $\int_0^{2\pi} V\, ds = 0$ quel que soit ρ :

$$\int_0^{2\pi} (\omega + \Theta)\, ds = 0.$$

On en déduit

$$\int_0^{2\pi} (\mu h + F)\, ds = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\beta') \qquad \mu h = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\, ds.$$

Si l'on remplace dans F les quantités inconnues qui y figurent par la solution exprimée en μh, μ, $\varkappa$, on obtient une équation intégrale en μh du type de Schmidt (généralisé au cas où les noyaux peuvent devenir infinis). Cette équation a une solution unique puisque l'équation linéarisée se réduit, F étant du second ordre, à $\mu h = 0$. On vérifie en même temps que le transport de masse global, égal au produit de c

par la valeur de v au centre,

$$v(0,0) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D (F + \mu h)\log\frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho\,ds$$

est bien nul.

Ayant déterminé $\varkappa$ univoquement en fonction de μ et Ω, il nous reste à déterminer Ω. Nous écrivons pour cela la condition $v^*(0) = 0$, c'est-à-dire

$$V^*(0) + \omega^*(0) = 0, \tag{9}$$

où l'on doit remplacer $\varkappa$ par le développement en μ donné par l'équation de ramification.

Or, des calculs précédents résulte aisément que la solution est donnée au troisième ordre près par

$$\begin{aligned} V(\rho,\alpha) = &-\mu\rho\cos(\alpha-\Omega) \\ &-\frac{2\pi}{\lambda}\mu^2\left\{2\rho\cos(\alpha-\Omega)\int_0^1 u(u^2-1)\,h_1(u)\,du + \frac{\rho^2}{2}\cos 2(\alpha-\Omega)\right\} \\ &+\mu\varkappa\rho\cos(\alpha-\Omega)+\ldots \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de la valeur de $\varkappa$ trouvée,

$$V(\rho,\alpha) = -\mu\rho\cos(\alpha-\Omega) - \frac{\pi}{\lambda}\mu^2\rho^2\cos 2(\alpha-\Omega)+\ldots,$$

et par

$$\omega(\rho,\alpha) = \mu^2 C(\rho,\alpha;\Omega)+\ldots,$$

où C a la valeur donnée par l'équation (6). On a, en particulier,

$$\begin{aligned} v^* = V^* + \omega^* = &-\mu\cos(\alpha-\Omega) \\ &-\mu^2\frac{\pi}{\lambda}\left[\cos(\alpha-\Omega)\int_0^1 u(2u^2+1)\,h_1(u)\,du + \cos 2(\alpha-\Omega)\right]+\ldots \end{aligned}$$

et l'équation (9) déterminant Ω s'écrit, après division par μ,

$$-\cos\Omega - \mu\frac{\pi}{\lambda}\left[\cos\Omega\int_0^1 u(2u^2+1)\,h_1(u)\,du + \cos 2\Omega\right]+\ldots = 0.$$

Pour $\mu = 0$ (ce qui entraîne naturellement $\varkappa = 0$) l'équation donne $\cos\Omega = 0$, $\Omega = \frac{\pi}{2}$. La dérivée du premier membre de l'équation par rapport à Ω

$$\sin\Omega + \mu\frac{\pi}{\lambda}\left[\sin\Omega\int_0^1 u(2u^2+1)\,h_1(u)\,du + 2\sin 2\Omega\right] + \ldots$$

est différente de zéro pour $\mu = 0$, $\Omega = \frac{\pi}{2}$; cette équation définit donc Ω d'une manière unique en fonction de μ. Ω est voisin de $\frac{\pi}{2}$ et les axes de symétrie sont voisins des droites $\frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$.

CHAPITRE III.

CAS DE LA PROFONDEUR FINIE.

Nous nous proposons de démontrer l'existence d'une infinité d'ondes comprenant comme cas particulier l'onde irrotationnelle. Nous allons montrer pour cela que, pour toute fonction $h(\rho)$ arbitrairement donnée, mais bornée et continue au sens de Hölder, on peut trouver, dans la couronne (D), $\rho_0 \leqq \rho \leqq 1$, une fonction v petite et continue au sens de Hölder ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres et telle qu'on ait

$$\Delta v = \mu h + F,$$

où F a la valeur donnée par (a) ou (a') et est par conséquent du deuxième ordre, avec les conditions aux limites suivantes :

Sur le cercle de rayon 1,

$$\frac{dv^*}{dn} + pv^* - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dv^*}{dn}\,d\sigma = \Phi^*,$$

où Φ^* a l'expression (b) et est du second ordre;

Sur le cercle de rayon ρ_0,

$$v^{**} = 0,$$

en désignant d'une façon générale par z^{**} la valeur que prend sur le cercle de rayon ρ_0 une fonction z définie dans la couronne.

15. Transformation du problème. — Nous procédons comme dans le cas de la profondeur infinie. Nous appelons Θ la fonction de ρ (et de μ) solution de

$$\Delta\Theta = \mu h,$$

régulière à l'intérieur de la couronne et nulle sur le contour $\Theta^{*} = 0$, $\Theta^{**} = 0$. Nous aurons encore

$$\frac{\partial\Theta^{*}}{\partial n} - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\partial\Theta^{*}}{\partial n}\,d\sigma = 0.$$

Cette fonction Θ est d'ailleurs donnée par

$$(1)\qquad \Theta(\rho) = \int_{\rho}^{1}\mu\log u\,h(u)\,u\,du + \mu\log\rho\left[\int_{\rho_0}^{\rho}u\,h(u)\,du - \int_{\rho_0}^{1}\frac{\log u}{\log\rho_0}\,h(u)\,u\,du\right].$$

On pose, comme dans le cas de la profondeur finie,

$$\omega(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{D}F(v, \ldots, \xi, \eta)\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta.$$

La formule de Poisson donne encore

$$\Delta\omega = F,$$

et la fonction V définie par la relation

$$v = \Theta + \omega + V,$$

est harmonique et satisfait sur le cercle de rayon 1 à

$$\frac{\partial V^{*}}{\partial n} + pV^{*} - \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\partial V^{*}}{\partial n}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{\partial\omega^{*}}{\partial n}\,d\sigma - \frac{\partial\omega^{*}}{\partial n} - p\omega^{*} + \Phi(V^{*} + \omega^{*}, \ldots).$$

On est donc encore ramené à trouver, dans la couronne $D(\rho_0 \leqq \rho \leqq 1)$ la fonction ω, et la fonction harmonique V sachant que l'on a, dans la couronne

$$(2)\qquad \omega(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int_{D}F(V + \Theta + \omega, \ldots, \xi, \eta)\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta.$$

sur le cercle de rayon 1,

$$(3)\quad \frac{\partial V^*}{\partial n} + pV^* - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^*}{\partial n}\,ds = -\left(\frac{\partial \omega^*}{\partial n} + p\omega^* - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial \omega^*}{\partial n}\,ds\right) + \Phi(V^* + \omega^*, \ldots),$$

sur le cercle de rayon ρ_0,

$$(4)\quad V^{**} = -\omega^{**}.$$

On démontre, comme au Chapitre précédent, que la relation

$$\int_0^{2\pi} V^*\,d\sigma = 0,$$

subsiste. Au contraire on n'a plus cette fois $\int_0^{2\pi}\frac{\partial V^*}{\partial n}\,ds = 0$, mais seulement

$$(5)\quad \int_0^{2\pi}\frac{\partial V^*}{\partial n}\,ds + \int_0^{2\pi}\frac{\partial V^{**}}{\partial n}\,\rho_0\,dt = 0,$$

t désignant l'angle polaire sur le cercle de rayon ρ_0.

Comme dans le Chapitre II, nous déduisons V à l'intérieur de la couronne par la formule de Green. V est alors donné, en posant encore

$$U = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \qquad \text{d'où} \qquad U^* = \frac{\partial V^*}{\partial n}, \qquad U^{**} = -\frac{\partial V^{**}}{\partial n},$$

par

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\left(V\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r} - \frac{\partial V}{\partial n}\log\frac{1}{r}\right)ds,$$

l'intégrale étant étendue au contour total limitant D, c'est-à-dire

$$(6)\quad V(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V^*\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^*\log\frac{1}{r}\,ds + \frac{\rho_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^{**}\log\frac{1}{r}\,dt - \frac{\rho_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega^{**}\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,dt.$$

Si l'on fait tendre le point (x, y) vers un point σ du cercle de rayon 1, les trois dernières intégrales ont un sens à la limite et tendent vers ces valeurs limites. La première est un potentiel de double couche qui tend d'une façon continue vers

$$\lim \int_0^{2\pi} V^* \frac{\partial}{\partial n} \log \frac{1}{r} ds = \pi V^*(\sigma) - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} V^*(s)\, ds = \pi V^*(\sigma).$$

D'où la relation

$$(7) \qquad V^*(\sigma) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U^* \log \frac{1}{r(s, \sigma)} ds + \frac{\rho_0}{\pi} \int_0^{2\pi} U^{**} \log \frac{1}{r(t, \sigma)} dt$$
$$- \frac{\rho_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega^{**} \frac{\partial}{\partial n_t} \log \frac{1}{r(t, \sigma)} dt.$$

où $r(P, Q)$ désigne la distance des points P et Q; nous convenons d'autre part de désigner par s, σ, ... des points du cercle de rayon 1, et par t, τ, ... les points du cercle de rayon ρ_0. $\frac{\partial}{\partial n_t}$ représente la dérivée au point t prise suivant la normale intérieure au domaine D.

En combinant cette équation avec l'équation (3) on obtient, pour déterminer U^*, l'équation

$$(8) \qquad U^*(\sigma) - \frac{p}{\pi} \int_0^{2\pi} U^* \log \frac{1}{r(s, \sigma)} ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^*(s)\, ds$$
$$+ \frac{p\rho_0}{\pi} \int_0^{2\pi} U^{**}(t) \log \frac{1}{r(t, \sigma)} dt$$
$$= \frac{p\rho_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega^{**} \frac{\partial}{\partial n_t} \log \frac{1}{r(t, \sigma)} dt - \left(\frac{\partial \omega^*}{\partial n} + p\omega^* - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \omega^*}{\partial n} ds \right) + \Phi^*.$$

Mais cette équation fait intervenir U^{**}. Pour obtenir cette quantité, nous dérivons par rapport à ρ l'équation donnant V à l'intérieur de la couronne. Il vient

$$(9) \qquad U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^* \frac{\partial}{\partial \rho} \log \frac{1}{r} ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V^* \frac{\partial^2}{\partial n\, \partial \rho} \log \frac{1}{r} ds$$
$$- \frac{\rho_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} U^{**} \frac{\partial}{\partial \rho} \log \frac{1}{r} dt - \frac{\rho_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega^{**} \frac{\partial^2}{\partial n_t\, \partial \rho} \log \frac{1}{r} dt.$$

et nous faisons tendre le point (x, y) vers un point t du cercle de rayon ρ_0.

Les deux premières intégrales n'apportent évidemment aucune complication, il suffit dans leurs expressions de remplacer le point (ρ, α)

par le point (ρ_0, t). La troisième intégrale représente une dérivée première de potentiel de simple couche. Nous avons rappelé au Chapitre II les théorèmes de Korn relatifs aux dérivées premières et secondes des potentiels de simple et double couches. Tous ces théorèmes sont encore valables qualitativement pour un domaine extérieur au cercle et compris tout entier à distance finie. Les bornes données (§ 8) pour ces potentiels et leurs dérivées dans le domaine intérieur doivent être légèrement modifiées pour le domaine extérieur frontière comprise. Les termes qui s'ajoutent proviennent des discontinuités de ces dérivées quand on traverse la frontière. On peut prendre, pour le cas extérieur, les bornes suivantes :

Potentiel de simple couche :

$$\overline{\frac{\partial \mathrm{I}_n}{\partial x}}, \qquad \overline{\frac{\partial \mathrm{I}_n}{\partial y}} \leqq \mathrm{A}_2[\mathrm{U}_n^*]_\lambda + \mathrm{A}^2 \overline{\mathrm{U}}_n^*;$$

$$\left[\frac{\partial \mathrm{I}_n}{\partial x}\right]_\lambda, \qquad \left[\frac{\partial \mathrm{I}_n}{\partial y}\right]_\lambda \leqq \mathrm{A}'_2[\mathrm{U}_n^*]_\lambda + \mathrm{A}'^2 \overline{\mathrm{U}}_n^*;$$

$$\overline{\frac{\partial^2 \mathrm{I}_n}{\partial x^2}}, \qquad \overline{\frac{\partial^2 \mathrm{I}_n}{\partial x\, \partial y}}, \qquad \overline{\frac{\partial^2 \mathrm{I}_n}{\partial y^2}} \leqq \mathrm{A}_3 \frac{d\overline{\mathrm{U}}_n^*}{ds} + \mathrm{A}_4 \left[\frac{d\mathrm{U}_n^*}{ds}\right]_\lambda + \mathrm{A}^3 \overline{\mathrm{U}}_n^* + \mathrm{A}^4 [\mathrm{U}_n^*]_\lambda;$$

$$\left[\frac{\partial^2 \mathrm{I}_n}{\partial x^2}\right]_\lambda, \qquad \left[\frac{\partial^2 \mathrm{I}_n}{\partial x\, \partial y}\right]_\lambda, \qquad \left[\frac{\partial^2 \mathrm{I}_n}{\partial y^2}\right]_\lambda \leqq \mathrm{A}'_3 \frac{d\overline{\mathrm{U}}_n^*}{ds} + \mathrm{A}'_4 \left[\frac{d\mathrm{U}_n^*}{ds}\right]_\lambda + \mathrm{A}'^3 \overline{\mathrm{U}}_n^* + \mathrm{A}'^4 [\mathrm{U}_n^*]_\lambda.$$

et conserver les bornes données pour le potentiel de double couche.

En particulier, nous sommes assurés ici de l'existence d'une limite pour l'intégrale $\int_0^{2\pi} \mathrm{U}^{**} \frac{\partial}{\partial \rho} \log \frac{1}{r}\, dt$. Cette limite s'obtient immédiatement en remarquant qu'à l'extérieur du cercle, on a

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{U}^{**} \frac{\partial}{\partial \rho} \log \frac{1}{r}\, dt = -\int_0^{2\pi} \mathrm{U}^{**} \frac{\rho - \rho_0 \cos \varphi}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi}\, d\varphi,$$

et

$$\left| \int_0^{2\pi} \mathrm{U}^{**} \frac{\rho - \rho_0 \cos \varphi}{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos \varphi + \rho_0^2}\, d\rho \right| \leqq \overline{\mathrm{U}}^{**} \frac{2\pi}{\rho_0}.$$

Par suite, on montre, à l'aide d'un raisonnement classique, que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} [\mathrm{U}^{**}(\tau) - \mathrm{U}^{**}(t)] \frac{\partial}{\partial \rho} \log \frac{1}{r}\, d\tau,$$

est continue quand le point (ρ, α) tend vers le point (ρ_0, t), et l'on en déduit que

$$\lim \int_0^{2\pi} U^{**}(\tau) \frac{\partial}{\partial\rho} \log\frac{1}{r}\, d\tau = -\frac{\pi}{\rho_0} U^{**}(t) - \frac{1}{2\rho_0} \int_0^{2\pi} U^{**}(\tau)\, d\tau.$$

Enfin la dernière intégrale du second membre de l'équation (9)

$$\frac{\partial}{\partial\rho} \int_0^{2\pi} \omega^{**} \frac{\partial}{\partial n_t} \log\frac{1}{r}\, d\tau,$$

est la dérivée première d'un potentiel de double couche, elle tend donc vers une limite $\mathcal{L}(\omega^{**})$ lorsque le point (ρ, α) tend vers un point (ρ_0, t) du cercle de rayon ρ_0. On vérifie sans difficulté, par un calcul analogue à ceux du Chapitre II (§ 8), que l'on a dans ce cas, l'expression simple

$$\frac{\partial}{\partial\rho} \int_0^{2\pi} \omega^{**} \frac{\partial}{\partial n_t} \log\frac{1}{r}\, d\tau$$
$$= \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} \mathcal{O}^{\lambda}_{\alpha, \alpha+\theta(\tau-\alpha)} \left(\frac{d\omega^{**}}{d\tau}\right) \frac{-(\tau-\alpha)|\tau-\alpha|^{\lambda}\theta^{\lambda}[(\rho^2+\rho_0^2)\cos(\tau-\alpha)-2\rho\rho_0]}{[\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\tau-\alpha)]^2}\, d\tau,$$

d'où

$$\mathcal{L}(\omega^{**}) = \int_{t-\pi}^{t+\pi} \mathcal{O}^{\lambda}_{t, t+\theta(\tau-t)} \left(\frac{d\omega^{**}}{d\tau}\right) \frac{\theta^{\lambda}(\tau-t)|\tau-t|^{\lambda}}{4\rho_0^2 \sin^2\frac{(\tau-t)}{2}}\, d\tau.$$

Il en résulte que $\mathcal{L}(\omega^{**})$ est bornée par une expression de la forme

$$\overline{\mathcal{L}(\omega^{**})} < A_1 \left[\frac{d\omega^{**}}{dt}\right]_{\lambda}.$$

On montre d'ailleurs également que

$$[\mathcal{L}(\omega^{**})]_{\lambda} < A'_1 \left[\frac{d\omega^{**}}{dt}\right]_{\lambda}.$$

On peut donc finalement écrire, pour déterminer U^{**}, l'équation

$$(10) \qquad U^{**}(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U^{**}(\tau)\, d\tau$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^{*} \frac{\partial}{\partial n_t} \log\frac{1}{r(s, t)}\, ds - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V^{*} \frac{\partial^2}{\partial n_s\, \partial n_t} \log\frac{1}{r(s, t)}\, ds + \frac{\rho_0}{\pi} \mathcal{L}(\omega^{**}).$$

Mais cette équation ne détermine U^{**} en fonction de U^*, V^*, ω^{**} qu'à une constante près. Si d'ailleurs on étudie le système donnant la première approximation du système (2), (7), (8), (10), on constate que U_1^* et U_1^{**} ne sont déterminés qu'à des constantes près, constantes introduites par les termes $\int_0^{2\pi} U_1^*\, ds$, $\int_0^{2\pi} U_1^{**}\, dt$ et liées par

$$\int_0^{2\pi} U_1^*\, ds = \rho_0 \int_0^{2\pi} U_1^{**}\, dt.$$

Pour les éliminer des équations et lever la difficulté que nous venons de signaler, nous allons montrer qu'elles sont d'ordre supérieur et pour cela calculer ces quantités en fonction de ω. Pour ce faire, remarquons que, à l'intérieur de la couronne, $\log\rho$ est une fonction harmonique et régulière. Il en est de même de V. Nous pouvons donc appliquer la formule de Green

$$\int\int_D (\Phi\,\Delta\Psi - \Psi\,\Delta\Phi)\,dx\,dy + \int_C \left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n} - \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) d\sigma = 0,$$

à ces deux fonctions dans le domaine considéré. Il vient

$$\int_{\text{Contour total}} \left(V\frac{\partial\log\rho}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial n}\log\rho\right) d\sigma = 0.$$

Mais, sur le cercle de rayon 1, $\log\rho$ est nul. On a donc

$$-\int_0^{2\pi} V^*\, ds + \frac{1}{\rho_0}\int_0^{2\pi} V^{**}\rho_0\, dt - \int_0^{2\pi} \frac{\partial V^{**}}{\partial n}\log\rho_0\,\rho_0\, dt = 0.$$

Or, nous savons que

$$\int_0^{2\pi} V^*\, ds = 0,$$

$$V^{**} = -\omega^{**},$$

et nous avons posé

$$\frac{\partial V^{**}}{\partial n} = -U^{**}.$$

La relation obtenue donne donc

$$\int_0^{2\pi} U^{**}\,dt = \frac{1}{\rho_0 \log\rho_0}\int_0^{2\pi} \omega^{**}\,dt,$$

d'où l'on déduit que

$$\int_0^{2\pi} U^{*}\,ds = \frac{1}{\log\rho_0}\int_0^{2\pi} \omega^{**}\,dt.$$

Ces deux quantités sont donc du deuxième ordre au moins. Nous sommes ainsi ramenés à résoudre le système intégro-différentiel fondamental

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}
&\omega = -\frac{1}{2\pi}\iint F(V+\Theta+\omega,\ \ldots,\ \xi,\ \eta)\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta,\\
&U^{*}(\sigma) - \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi} U^{*}\log\frac{1}{r(\sigma,s)}\,ds + \frac{p\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi} U^{**}\log\frac{1}{r(\sigma,t)}\,dt\\
&\quad = \frac{\int_0^{2\pi}\omega^{**}\,dt}{2\pi\log\rho_0} + \frac{p\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega^{**}\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n_t}\,dt\\
&\qquad - \left(\frac{\partial\omega^{*}}{\partial n} + p\,\omega^{*} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^{*}}{\partial n}\,ds\right) + \Phi^{*},\\
&U^{**}(t) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^{*}\frac{\partial\log\frac{1}{r(t,s)}}{\partial n_t}\,ds + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} V^{*}(s)\frac{\partial^2}{\partial n_s\,\partial n_t}\log\frac{1}{r(t,s)}\,ds\\
&\quad = \frac{\int_0^{2\pi}\omega^{**}\,dt}{2\pi\rho_0\log\rho_0} + \frac{\rho_0}{\pi}\mathcal{L}(\omega^{**}),\\
&V^{*}(\sigma) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^{*}(s)\log\frac{1}{r(\sigma,s)}\,ds\\
&\qquad + \frac{\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi} U^{**}(t)\log\frac{1}{r(\sigma,t)}\,dt - \frac{\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega^{**}\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{r(\sigma,t)}\,dt.
\end{aligned}\right.$$

Ce système est un peu plus compliqué que le système fondamental intervenant dans le cas de la profondeur infinie, mais il se résout également sans difficulté par approximations successives. La discussion du système linéarisé nécessite un certain nombre de calculs d'intégrales que nous avons réunis, pour simplifier, dans le paragraphe suivant.

16. Quelques intégrales définies. — Calculons d'abord

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r(\sigma, t)} \frac{\partial}{\partial n_t} \log \frac{1}{r(t, s)}\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log[R^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0 R \cos(t - \sigma)] \frac{\rho_0 - R\cos(t-s)}{R^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0 R\cos(t-s)}\, dt,
\end{aligned}
$$

avec $R > \rho_0$, les points σ et s étant sur le cercle de rayon R. Nous posons $t - \sigma = \varphi$, $\sigma - s = \beta$. Il vient

$$
I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log[R^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0 R \cos\varphi] \frac{\rho_0 - R(\cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi)}{R^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0 R(\cos\beta\cos\varphi - \sin\beta\sin\varphi)}\, d\varphi.
$$

Posons enfin : $z = e^{i\varphi}$ d'où

$$
d\varphi = -iz^{-1}\, dz, \qquad \cos\varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}.
$$

L'intégrale se transforme en une intégrale curviligne sur le cercle unité C, prise dans le sens positif, du point $+1$ au point $+1$,

$$
\begin{aligned}
I_1 = -\frac{i}{4} \int_{(C)} \log \left[\frac{z(R^2 + \rho_0^2) - R\rho_0(1 + z^2)}{z} \right] \\
\times \frac{2\rho_0 z - R e^{i\beta} z^2 - R e^{-i\beta}}{z(R^2 + \rho_0^2) - z^2 \rho_0 R e^{i\beta} - \rho_0 R e^{-i\beta}} \times \frac{dz}{z}.
\end{aligned}
$$

Si l'on remarque que l'on a

$$
\begin{aligned}
&\int_{(C)} \frac{2\rho_0 z - R e^{i\beta} z^2 - R e^{-i\beta}}{z[z(R^2 + \rho_0^2) - \rho_0 R e^{i\beta} z^2 - \rho_0 R e^{-i\beta}]}\, dz \\
&= \int_{(C)} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - \dfrac{\rho_0}{R} e^{-i\beta}} + \frac{1}{z - \dfrac{R}{\rho_0} e^{-i\beta}} \right) dz = 0,
\end{aligned}
$$

on voit que la détermination choisie au départ pour le logarithme est sans importance, et que l'on peut écrire

$$
\begin{aligned}
I_1 = -\frac{i}{4\rho_0}\Bigg\{ & \int_{(C)} \log\left(\frac{R}{\rho_0} - z\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - \frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}} + \frac{1}{z - \frac{R}{\rho_0}e^{-i\beta}}\right) dz \\
& + \int_{(C)} \log\left(z - \frac{\rho_0}{R}\right)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - \frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}} + \frac{1}{z - \frac{R}{\rho_0}e^{-i\beta}}\right) dz \\
& - \int_{(C)} \log z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - \frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}} + \frac{1}{z - \frac{R}{\rho_0}e^{-i\beta}}\right) dz \Bigg\} \\
= -\frac{i}{4\rho_0}(I_{1.1} + I_{1.2} + I_{1.3}).
\end{aligned}
$$

L'intégrale I_1 étant réelle on peut d'ailleurs, pour simplifier, se borner à calculer les parties purement imaginaires $I^0_{1.1}$, $I^0_{1.2}$, $I^0_{1.3}$ de $I_{1.1}$, $I_{1.2}$, $I_{1.3}$. On a immédiatement

$$I^0_{1.1} = 2i\pi \log \frac{R}{\rho_0 d^1},$$

où d^1 désigne la distance $r\left(\frac{R}{\rho_0}, \frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}\right)$ des points $\frac{R}{\rho_0}$ et $\frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}$.

Pour calculer $I_{1.2}$ il suffit de considérer le contour formé du cercle unité C et d'un lacet partant du point 1 et entourant le point $\frac{\rho_0}{R}$. En désignant par $\mathcal{R}_\zeta$ le résidu relatif au pôle $z = \zeta$, on a

$$I_{1.2} + 2i\pi \int_1^{\frac{\rho_0}{R}} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u - \frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}} + \frac{1}{u - \frac{R}{\rho_0}e^{-i\beta}}\right) du = 2i\pi\left(\mathcal{R}_0 + \mathcal{R}_{\frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}}\right);$$

d'où, en posant

$$d^2 = r\left(\frac{\rho_0}{R}, \frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}\right), \qquad d^3 = r\left(1, \frac{R}{\rho_0}e^{-i\beta}\right), \qquad d^4 = r\left(1, \frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}\right):$$

$$I^0_{1.2} + 2i\pi\left(\log\frac{\rho_0}{R} - \log\frac{d^2}{d^4} + \log\frac{d^1}{d^3}\right) = 2i\pi\left(\log\frac{\rho_0}{R} - \log d^2\right),$$

c'est-à-dire

$$I^0_{1.2} = 2i\pi \log \frac{d^3}{d^1 d^4}.$$

Pour calculer $I_{1.3}$ considérons le contour formé du cercle unité C, d'une coupure rectiligne joignant le point 1 au point ε voisin de O sur le demi-axe réel positif, et d'un petit cercle (γ) de centre O et de rayon $O\varepsilon$; nous obtenons

$$-I_{1.3}+2i\pi\int_1^{\varepsilon}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-\frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}}+\frac{1}{t-\frac{R}{\rho_0}e^{-i\beta}}\right)dt$$
$$+\int_{\gamma}\log z\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-\frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}}+\frac{1}{z-\frac{R}{\rho_0}e^{-i\beta}}\right)dz=2i\pi\mathcal{R}_{\frac{\rho_0}{R}e^{-i\beta}}.$$

Si l'on remarque que

$$2i\pi\int_1^{\varepsilon}\frac{dt}{t}=2i\pi\log\varepsilon,\qquad \int_{\gamma}\frac{\log z}{z}\,dz=i\int_{2\pi}^{0}(\log\varepsilon+i\varphi)\,d\varphi=-2i\pi\log\varepsilon+2\pi^2,$$

on voit, en faisant tendre ε vers zéro, que l'on a, à la limite

$$-I^0_{1.3}+2i\pi\left(-\log\frac{\rho_0}{R\,d^1}+\log\frac{R}{\rho_0\,d^3}\right)=-2i\pi\log\left(\frac{\rho_0}{R}\right),$$

c'est-à-dire

$$I^0_{1.3}=-2i\pi\log\frac{\rho_0\,d^3}{R\,d^1}.$$

Nous trouvons donc

$$I_1=\frac{\pi}{2\rho_0}\left(\log\frac{R}{\rho_0\,d^1}\times\frac{d^3}{d^1\,d^1}\times\frac{R\,d^1}{\rho_0\,d^3}\right)=\frac{\pi}{\rho_0}\log\frac{R}{\rho_0\,d^1},$$

or

$$(d_1)^2=\frac{R^2}{\rho_0^2}+\frac{\rho_0^2}{R^2}-2\cos\beta=\frac{R^4-2\rho_0^2R^2\cos\beta+\rho_0^4}{\rho_0^2R^2},$$

d'où

$$(1')\qquad I_1=\frac{\pi}{\rho_0}\log\frac{R^2}{\sqrt{R^4-2\rho_0^2R^2\cos\beta+\rho_0^4}},$$

et finalement, pour $R=1$,

$$(1)\qquad I_1=\frac{\pi}{\rho_0}\log\frac{1}{\sqrt{1-2\rho_0^2\cos(\sigma-s)+\rho_0^4}}.$$

On en déduit aisément l'intégrale

$$I_2=\int_0^{2\pi}\log r(\sigma,\,t)\,\frac{\partial^2}{\partial n_s\,\partial n_t}\log r(s,\,t)\,dt.$$

Remarquons en effet que l'on a

$$\frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial \mathrm{R}} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \log r(\sigma, t)}{\partial \mathrm{R}} \frac{\partial \log r(s, t)}{\partial n_t} dt - \mathrm{I}_2,$$

mais d'après (1')

$$\frac{\partial \mathrm{I}_1}{\partial \mathrm{R}} = \frac{2\pi\rho_0}{\mathrm{R}} \frac{\rho_0^2 - \mathrm{R}^2\cos\beta}{\mathrm{R}^4 - 2\rho_0^2\mathrm{R}^2\cos\beta + \rho_0^4}.$$

D'autre part, on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \log r(\sigma, t)}{\partial \mathrm{R}} \frac{\partial \log r(s, t)}{\partial n_t} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{R} - \rho_0\cos(\sigma - t)}{\mathrm{R}^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\mathrm{R}\cos(\sigma - t)} \times \frac{\rho_0 - \mathrm{R}\cos(s - t)}{\mathrm{R}^2 + \rho_0^2 - 2\rho_0\mathrm{R}\cos(s - t)} dt.$$

ou, en passant toujours en φ et β, et posant $z = e^{i\varphi}$,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \log r(\sigma, t)}{\partial \mathrm{R}} \frac{\partial \log r(s, t)}{\partial n_t} dt$$
$$= -\frac{i}{4} \int_{\mathrm{C}} \frac{2z\mathrm{R} - \rho_0(1 + z^2)}{z(\mathrm{R}^2 + \rho_0^2) - \mathrm{R}\rho_0(1 + z^2)} \times \frac{2\rho_0 z - \mathrm{R}e^{i\beta}z^2 - \mathrm{R}e^{-i\beta}}{z(\mathrm{R}^2 + \rho_0^2) - z^2\rho_0\mathrm{R}e^{i\beta} - \rho_0\mathrm{R}e^{-i\beta}} \frac{dz}{z}.$$

Et un simple calcul de résidus donne

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \log r(\sigma, t)}{\partial \mathrm{R}} \frac{\partial \log r(s, t)}{\partial n_t} dt = \frac{\pi\rho_0}{\mathrm{R}} \frac{\rho_0^2 - \mathrm{R}^2\cos\beta}{\mathrm{R}^4 + \rho_0^4 - 2\rho_0^2\mathrm{R}^2\cos\beta}. \tag{2}$$

D'où pour $\mathrm{R} = 1$, et en repassant aux variables initiales,

$$\mathrm{I}_2 = -\pi\rho_0 \frac{\rho_0^2 - \cos(s - \sigma)}{1 + \rho_0^4 - 2\rho_0^2\cos(s - \sigma)}. \tag{3}$$

Enfin nous obtiendrons les quantités

$$\mathrm{A}_m = \int_0^{2\pi} \cos ms \log \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho_0^2\cos(s - \sigma) + \rho_0^4}} ds$$
$$\mathrm{B}_m = \int_0^{2\pi} \sin ms \log \frac{1}{\sqrt{1 - 2\rho_0^2\cos(s - \sigma) + \rho_0^4}} ds \qquad (m \neq 0),$$

en calculant

$$\mathfrak{A}_m = -2\mathrm{A}_m - 2i\mathrm{B}_m = \int_0^{2\pi} e^{ims} \log[1 - 2\rho_0^2\cos(s - \sigma) + \rho_0^4]\, ds.$$

On a alors, en posant encore $z = e^{is}$,

$$\mathcal{A}_m = -i\int_{(C)} z^{m-1} \log \frac{\rho_0^2 e^{-i\sigma}(z-\rho_0^2 e^{i\sigma})\left(\dfrac{e^{i\sigma}}{\rho_0^2}-z\right)}{z}\,dz.$$

En intégrant par parties on obtient, puisque m est différent de zéro,

$$\mathcal{A}_m = \frac{-i}{m}\text{ variation de }\left[z^m \log \frac{\rho_0^2 e^{-i\sigma}(z-\rho_0^2 e^{i\sigma})\left(\dfrac{e^{i\sigma}}{\rho_0^2}-z\right)}{z}\right]$$
$$+\frac{i}{m}\int_{(C)} z^m\left[\frac{1}{z-\rho_0^2 e^{i\sigma}} - \frac{1}{\dfrac{e^{i\sigma}}{\rho_0^2}-z} - \frac{1}{z}\right]dz.$$

Or l'argument de la fraction intervenant sous le logarithme reprend sa valeur initiale quand z décrit le cercle de rayon 1; la variation du crochet est donc nulle et nous avons

$$\mathcal{A}_m = -\frac{2\pi}{m}\rho_0^{2m} e^{im\sigma}.$$

D'où

$$\text{(4)}\qquad A_m = \frac{\pi}{m}\rho_0^{2m}\cos m\sigma,$$

$$\text{(5)}\qquad B_m = \frac{\pi}{m}\rho_0^{2m}\sin m\sigma.$$

On en déduit les quantités

$$C_m = \int_0^{2\pi}\cos ms\,\frac{\rho_0^2-\cos(s-\sigma)}{1+\rho_0^4-2\rho_0^2\cos(s-\sigma)}\,ds,$$
$$D_m = \int_0^{2\pi}\sin ms\,\frac{\rho_0^2-\cos(s-\sigma)}{1+\rho_0^4-2\rho_0^2\cos(s-\sigma)}\,ds,$$

en remarquant que

$$C_m + iD_m = \int_0^{2\pi} e^{ims}\frac{\rho_0^2-\cos(s-\sigma)}{1+\rho_0^4-2\rho_0^2\cos(s-\sigma)}\,ds = \frac{1}{4\rho_0}\frac{\partial\mathcal{A}_m}{\partial\rho_0} = -\pi\rho_0^{2m-2}e^{im\sigma},$$

d'où

$$\text{(6)}\qquad C_m = -\pi\rho_0^{2(m-1)}\cos m\sigma,$$
$$\text{(7)}\qquad D_m = -\pi\rho_0^{2(m-1)}\sin m\sigma.$$

17. Forme définitive du système intégro-différentiel. — Nous remarquons que la quatrième équation du système fondamental (11)

(§ **15**) est, en tenant compte de la deuxième, équivalente à

$$V^* = -\frac{1}{p}U^* + \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\omega^{**}\,dt}{2\pi p\log\rho_0} + \frac{\Phi^*}{p} - \frac{\dfrac{\partial\omega^*}{\partial n} + p\omega^* - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^*}{\partial n}\,ds}{p}.$$

Nous pouvons donc pour simplifier le système porter cette valeur de V^* dans la troisième équation. Celle-ci s'écrit alors

$$\begin{aligned}
U^{**} = {} & \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^*\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{r(t,s)}\,ds \\
& + \frac{1}{p\pi}\int_0^{2\pi} U^*\frac{\partial^2}{\partial n_s\,\partial n_t}\log\frac{1}{r(t,s)}\,ds - \frac{1}{p\pi}\int_0^{2\pi}\Phi^*\frac{\partial^2}{\partial n_s\,\partial n_t}\log\frac{1}{r(t,s)}\,ds \\
& + \frac{1}{p\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\omega^*}{\partial n} + p\,\omega^*\right)\frac{\partial^2}{\partial n_s\,\partial n_t}\log\frac{1}{r(t,s)}\,ds + \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\omega^{**}\,dt}{2\pi\rho_0\log\rho_0} + \frac{\rho_0}{\pi}\mathcal{L}(\omega^{**}),
\end{aligned}$$

puisque

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial n_s\,\partial n_t}\log\frac{1}{r(s,t)}\,ds = 0.$$

Portons cette valeur de U^{**} dans la première équation du système; en remarquant que

$$\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{r(s,t)}\,dt = 0,$$

que, d'après (1) (§ **16**), on a, en posant pour simplifier

$$\mathrm{r} = \sqrt{1 - 2\rho_0^2\cos(\sigma - s) + \rho_0^4},$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} U^*(s)\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{r(s,t)}\,ds\right]\log\frac{1}{r(\sigma,t)}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{r(\sigma,t)}\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{r(s,t)}\,dt\right]U^*(s)\,ds = \frac{\pi}{\rho_0}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{\mathrm{r}(\sigma,s)}U^*(s)\,ds,
\end{aligned}$$

et que d'après (3) (§ **16**), on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} U^*(s)\frac{\partial^2}{\partial n_s\,\partial n_t}\log\frac{1}{r(s,t)}\,ds\right]\log\frac{1}{r(\sigma,t)}\,dt \\
&\quad = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial n_s\,\partial n_t}\log\frac{1}{r(s,t)}\log\frac{1}{r(\sigma,t)}\,dt\right]U^*(s)\,ds \\
&\quad = \pi\rho_0\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial(\rho_0^2)}\log\frac{1}{\mathrm{r}(\sigma,s)}U^*(s)\,ds,
\end{aligned}$$

il vient

$$
\begin{aligned}
& U^*(\sigma) + \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi} U^* \log\frac{r(\sigma, s)}{\mathrm{r}(\sigma, s)}\,ds + \frac{\rho_0^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial(\rho_0^2)}\log\frac{1}{\mathrm{r}(\sigma, s)}\,U^*(s)\,ds \\
& = \Phi^* + \frac{\rho_0^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial(\rho_0^2)}\log\frac{1}{\mathrm{r}(\sigma, s)}\,\Phi^*(s)\,ds + \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\omega^{**}\,dt}{2\pi\log\rho_0} \\
& \quad - \frac{\rho_0^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial(\rho_0^2)}\log\frac{1}{\mathrm{r}}\left(\frac{\partial\omega^*}{\partial n} + p\,\omega^*\right)ds + \frac{p\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega^{**}\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{r}\,dt \\
& \quad - \frac{p\rho_0^2}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathcal{L}(\omega^{**})\log\frac{1}{r}\,dt - \left(\frac{\partial\omega^*}{\partial n} + p\,\omega^* - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^*}{\partial n}\,ds\right).
\end{aligned}
$$

Et le système (11) (§ 15) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$
\omega = -\frac{1}{2\pi}\iint F(V + \Theta + \omega, \ldots, \xi, \eta)\log\frac{1}{r}\,d\xi\,d\eta,
$$

$$
U^* + \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\log\frac{r(\sigma, s)}{\mathrm{r}(\sigma, s)} + \frac{\rho_0^2}{p}\frac{\partial}{\partial(\rho_0^2)}\log\frac{1}{\mathrm{r}(\sigma, s)}\right]U^*(s)\,ds = E(\omega^*) + D(\omega^{**}) + G^*,
$$

$$
\begin{aligned}
U^{**} = {} & \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^*\left(\frac{\partial\log\frac{1}{r}}{\partial n_t} + \frac{1}{p}\frac{\partial^2}{\partial n_s\,\partial n_t}\log\frac{1}{r}\right)ds \\
& - \frac{1}{p\pi}\int_0^{2\pi}\left(\Phi^* - \frac{\partial\omega^*}{\partial n} - p\,\omega^*\right)\frac{\partial^2}{\partial n_s\,\partial n_t}\log\frac{1}{r}\,ds + \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\omega^{**}\,dt}{2\pi\rho_0\log\rho_0} + \frac{\rho_0}{\pi}\mathcal{L}(\omega^{**}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V^* = {} & -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^*\log\frac{1}{r(\sigma, s)}\,ds + \frac{\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi} U^{**}(t)\log\frac{1}{r(\sigma, t)}\,dt \\
& - \frac{\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega^{**}\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{r(\sigma, t)}\,dt,
\end{aligned}
$$

en posant

$$
\begin{aligned}
E(\omega^*) = {} & -\left(\frac{\partial\omega^*}{\partial n} + p\,\omega^* - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\omega^*}{\partial n}\,ds\right) \\
& - \frac{\rho_0^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial(\rho_0^2)}\log\frac{1}{\mathrm{r}(\sigma, s)}\left(\frac{\partial\omega^*}{\partial n} + p\,\omega^*\right)ds. \\
G^* = {} & \Phi^* + \frac{\rho_0^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial(\rho_0^2)}\log\frac{1}{\mathrm{r}(\sigma, s)}\,\Phi^*\,ds, \\
D(\omega^{**}) = {} & \frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\omega^{**}\,dt}{2\pi\rho_0\log\rho_0} + \frac{p\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega^{**}\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{r(\sigma, t)}\,dt \\
& - \frac{p\rho_0^2}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{r(\sigma, t)}\,\mathcal{L}(\omega^{**})\,dt.
\end{aligned}
$$

18. Étude de la première approximation. — La première approximation est donnée par

$$(1)\qquad \omega_1 = 0,$$

$$(2)\qquad U_1^* + \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\log\frac{r(\sigma, s)}{\mathrm{r}(\sigma, s)} + \frac{\rho_0^2}{p}\frac{\partial}{\partial(\rho_0^2)}\log\frac{1}{\mathrm{r}(\sigma, s)}\right]U_1^*(s)\,ds = 0,$$

$$(3)\qquad U_1^{**} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U_1^*(s)\left[\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{r(s, t)} + \frac{1}{p}\frac{\partial^2}{\partial n_s\partial n_t}\log\frac{1}{r(s, t)}\right]ds,$$

$$(4)\qquad V_1^* = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U_1^*(s)\log\frac{1}{r(s, \sigma)}\,ds + \frac{\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi}U_1^{**}\log\frac{1}{r(\sigma, t)}\,dt.$$

U_1^{**} puis V_1^* sont donc univoquement déterminés quand on connaît U_1^*. Il suffit par conséquent de discuter l'équation intégrale linéaire donnant U_1^*.

Lorsque p est quelconque l'équation (2) n'a pas de solution différente de zéro. Nous allons montrer que l'on peut, comme dans le cas de la profondeur infinie, déterminer p pour que $L_m \cos ms + M_m \sin ms$ où L_m et M_m sont arbitraires, soit solution. En effet, si l'on porte cette expression dans l'équation (2), il vient

$$\begin{aligned} &L_m \cos m\sigma + M_m \sin m\sigma \\ &\quad - \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi}(L_m\cos ms + M_m \sin ms)\log\frac{1}{r(\sigma, s)}\,ds \\ &\quad + \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi}(L_m\cos ms + M_m \sin ms)\log\frac{1}{\mathrm{r}(\sigma, s)}\,ds \\ &\quad - \frac{\rho_0^2}{\pi}\int_0^{2\pi}(L_m\cos ms + M_m \sin ms)\frac{\rho_0^2 - \cos(s-\sigma)}{1+\rho_0^4 - 2\rho_0^2\cos(s-\sigma)}\,ds = 0. \end{aligned}$$

Ce qui peut s'écrire en vertu des formules (4), (5), (6), (7) (§ **16**)

$$(L_m \cos m\sigma + M_m \sin m\sigma)\left(1 - \frac{p}{m} + \frac{p}{m}\rho_0^{2m} + \rho_0^{2m}\right) = 0,$$

d'où

$$p = m\frac{1+\rho_0^{2m}}{1-\rho_0^{2m}} = m\,\mathrm{cotgh}\left(m\log\frac{1}{\rho_0}\right),$$

p étant ainsi déterminé, il n'y a pas d'autre solution de la forme

$$L_{m'}\cos m'\sigma + M_{m'}\sin m'\sigma$$

puisque l'équation

$$m = p \operatorname{tangh}\left(m \log \frac{1}{\rho_0}\right),$$

a au plus une racine positive en m.

La suite des fonctions

$$\cos\sigma, \quad \sin\sigma, \quad \ldots, \quad \cos m\sigma, \quad \sin m\sigma, \quad \ldots,$$

à laquelle il faut ajouter 1, pour p infini, est un système complet de fonctions orthogonales. Nous obtenons ainsi toutes les solutions fondamentales de l'équation (2), les valeurs caractéristiques correspondantes étant

$$\frac{1+\rho_0^2}{1-\rho_0^2}, \quad \ldots, \quad m\frac{1+\rho_0^{2m}}{1-\rho_0^{2m}}, \quad \ldots,$$

en appelant encore valeurs caractéristiques les valeurs de p pour lesquelles il y a une solution non nulle, bien que l'équation n'ait pas la forme classique. Mais on se ramène immédiatement à ce cas. En effet, l'équation (2) peut s'écrire

$$U_1^*(\sigma) - \frac{\rho_0^2}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\rho_0^2 - \cos(s-\sigma)}{1+\rho_0^4 - 2\rho_0^2\cos(s-\sigma)}\,ds = \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{\mathrm{r}(\sigma, s)}{r(\sigma, s)}\, U_1^*(s)\,ds,$$

or on constate, à l'aide des formules (6), (7) (§ **16**), que le noyau

$$-\frac{\lambda\rho_0^2}{\pi}\,\frac{\rho_0^2 - \cos(s-\sigma)}{1+\rho_0^4 - 2\rho_0^2\cos(s-\sigma)}$$

a pour valeurs caractéristiques

$$\lambda = \frac{1}{\rho_0^2}, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\rho_0^{2m}}, \quad \ldots.$$

Il admet donc pour $\lambda = 1$ un noyau résolvant $\mathfrak{N}(s, \sigma)$ lui-même symétrique et l'équation considérée est équivalente à

$$U_1^*(\sigma) = \frac{p}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\log\frac{\mathrm{r}(\sigma, s)}{r(\sigma, s)} + \int_0^{2\pi}\mathfrak{N}(\sigma, u)\log\frac{\mathrm{r}(u, s)}{r(u, s)}\,du\right] U_1^*(s)\,ds,$$

où le noyau est encore symétrique en $(\sigma - s)$.

Comme dans le cas de la profondeur infinie nous ne considérerons que l'onde fondamentale et négligerons les harmoniques.

Nous avons alors en première approximation

$$p = \frac{1+\rho_0^2}{1-\rho_0^2}.$$

Or nous avons posé

$$\rho_0 = e^{-\frac{2\pi A q}{\lambda}}$$

et

$$H = Aq,$$

on a donc

$$p = \operatorname{cotgh} \frac{2\pi H}{\lambda},$$

et puisque $p = \frac{\lambda g A^2}{2\pi}$ et que A est, au premier ordre près, égal à $\frac{1}{c}$, on a

$$c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi} \operatorname{tangh} \frac{2\pi H}{\lambda}.$$

La vitesse de propagation est donc encore égale en première approximation à la valeur classique donnée par Airy dans le cas irrotationnel, mais elle en diffère en général d'une quantité du premier ordre.

Nous posons d'une façon générale

$$p = \frac{1+\rho_0^2}{1-\rho_0^2} - \varkappa.$$

où $\varkappa$ est un paramètre petit. Enfin nous allons, comme dans le cas de la profondeur infinie, nous ramener pour déterminer U^* à une équation intégrale n'ayant plus de solutions fondamentales. Nous posons

$$-\frac{1}{\pi}\frac{1+\rho_0^2}{1-\rho_0^2}\log\frac{\mathrm{r}(\sigma, s)}{r(\sigma, s)} - \frac{\rho_0^2}{\pi}\frac{\rho_0^2-\cos(s-\sigma)}{1+\rho_0^4-2\rho_0^2\cos(s-\sigma)}$$
$$= \mathcal{K}(s, \sigma) = -\frac{1}{\pi}(\cos s\cos\sigma + \sin s\sin\sigma) + \mathrm{N},$$

d'où

$$\mathrm{N}(s, \sigma) = \mathcal{K}(s, \sigma) + \frac{\cos(s-\sigma)}{\pi},$$

et l'équation donnant U^* peut s'écrire

$$U^*(\sigma) + \int_0^{2\pi} \mathrm{N}(s, \sigma)\, U^*(s)\, ds$$
$$= \frac{r_1\cos\sigma + r_2\sin\sigma}{\pi} - \frac{\varkappa}{\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{\mathrm{r}(\sigma, s)}{r(\sigma, s)}\, U^*(s)\, ds + E(\omega^*) + D(\omega^{**}) + G^*,$$

en posant encore

$$r_1 = \int_0^{2\pi} U^* \cos s \, ds, \qquad r_2 = \int_0^{2\pi} U^* \sin s \, ds.$$

En appelant $\mathfrak{N}(\sigma, s)$ le noyau résolvant de $N(\sigma, s)$, on a l'équation équivalente

$$U^*(\sigma) = \frac{r_1 \cos\sigma + r_2 \sin\sigma}{\pi} - \frac{\varkappa}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\mathrm{r}(\sigma, s)}{r(\sigma, s)} U^*(s) \, ds + E(\omega^*) + D(\omega^{**}) + G^*$$
$$+ \int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(s, \sigma) \left[-\frac{\varkappa}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\mathrm{r}(s, u)}{r(s, u)} U^*(u) \, du + E^* + D^{**} + G^* \right] ds,$$

que nous écrirons pour simplifier

$$(5) \qquad U^*(\sigma) = \frac{r_1 \cos\sigma + r_2 \sin\sigma}{\pi} + \mathcal{E}(\omega^*) + \mathcal{D}(\omega^{**}) + \mathcal{G}^*,$$

en posant

$$\mathcal{E}(\omega^*) = E(\omega^*) + \int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(s, \sigma) E(\omega^*) \, ds,$$

$$\mathcal{D}(\omega^{**}) = D(\omega^{**}) + \int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(s, \sigma) D(\omega^{**}) \, ds,$$

$$\mathcal{G}^* = G^* - \frac{\varkappa}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\mathrm{r}(\sigma, s)}{r(\sigma, s)} U^*(s) \, ds$$
$$+ \int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(s, \sigma) \left[G^* - \frac{\varkappa}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{\mathrm{r}(u, s)}{r(u, s)} U^*(u) \, du \right] ds.$$

19. Résolution du système intégro-différentiel par approximations successives. — Nous avons trouvé pour la première approximation

$$\omega_1 = 0,$$
$$U_1^* = \frac{r_1 \cos\sigma + r_2 \sin\sigma}{\pi}.$$

Pour calculer la $n^{\text{ième}}$ approximation connaissant la $(n-1)^{\text{ième}}$, nous posons d'une façon générale

$$(1) \qquad \omega_n = -\frac{1}{2\pi} \int\int_D F(V_{n-1} + \Theta + \omega_{n-1}, \ldots, \xi, \eta) \log \frac{1}{r} \, d\xi \, d\eta,$$

$$(2) \qquad U_n^* = \frac{r_1 \cos\sigma + r_2 \sin\sigma}{\pi} + \mathcal{E}(\omega_n^*) + \mathcal{D}(\omega_n^{**}) + \mathcal{G}_{n-1}^*.$$

Connaissant ω_n et U_n^* on en déduit U_n^{**} au moyen de

$$(3)\qquad U_n^{**} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \left(\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{r} + \frac{1}{p}\frac{\partial^2}{\partial n_s \partial n_t}\log\frac{1}{r}\right) ds$$
$$+ \frac{1}{p\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial \omega_n^*}{\partial n} + p\,\omega_n^*\right)\frac{\partial^2}{\partial n_s \partial n_t}\log\frac{1}{r}\,ds + \frac{\int_0^{2\pi}\omega_n^{**}\,dt}{2\pi\rho_0\log\rho_0}$$
$$+ \frac{\rho_0}{\pi}\mathcal{L}(\omega_n^{**}) - \frac{1}{p\pi}\int_0^{2\pi}\Phi_{n-1}^*\frac{\partial^2}{\partial n_s \partial n_t}\log\frac{1}{r}\,ds,$$

puis V_n^* à l'aide de

$$(4)\qquad V_n^* = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U_n^* \log\frac{1}{r(s,\sigma)}\,ds + \frac{\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi} U_n^{**}\log\frac{1}{r(\sigma,t)}\,dt$$
$$- \frac{\rho_0}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega_n^{**}\frac{\partial}{\partial n_t}\log\frac{1}{r(\sigma,t)}\,dt.$$

Il en résulte que V_n est donné par

$$(5)\qquad V_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_n^*\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,ds - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n^*\log\frac{1}{r}\,ds$$
$$+ \frac{\rho_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_n^{**}\log\frac{1}{r}\,dt - \frac{\rho_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_n^{**}\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r}\,dt,$$

et par dérivation on obtient toutes les quantités nécessaires au calcul de la $(n+1)^{\text{ième}}$ approximation.

Si l'on adjoignait aux équations déjà écrites les équations donnant les cinq dérivées premières et secondes de ω_n et de V_n, celles donnant $\frac{dU^{**}}{dt}$, $\frac{dU^*}{ds}$, $\frac{dV^*}{ds}$; $\frac{d^2V^*}{ds^2}$ (quantités que les dérivées précédentes font intervenir), et les équations donnant les quantités $\mathcal{O}$ de toutes ces inconnues, on obtiendrait un système d'équations intégrales non linéaires, qui serait, grâce aux théorèmes de Korn utilisés pour le calcul des dérivées et de leurs crochets, de la forme de Schmidt étendue au cas de noyaux non bornés. Il en résulte que le problème a, pour r_1, r_2 et $\varkappa$ plus petits qu'un certain nombre δ une solution unique fonction analytique de ces trois paramètres. La démonstration directe donnée dans le Chapitre II s'étend d'ailleurs immédiatement. En effet, les bornes données pour ω_n et ses dérivées sont encore valables. D'après l'équation (3),

U_n^{**} est borné par la somme du produit du maximum de U_n^* par une constante et d'un polynome du second degré P_2 par rapport aux bornes $\delta, d_1, d_2, \ldots$ assignées aux approximations d'ordre $n-1$. $\frac{dU_n^{**}}{dt}$ s'obtient sans difficulté par simple dérivation de l'équation (3) et est borné par une expression de même forme. Les crochets de ces deux quantités ont de même des bornes analogues. Il en résulte que toutes les bornes données dans le Chapitre précédent sont encore valables dans ce cas, à des polynomes P_2 près. Nous ne referons donc pas tous les raisonnements qui subsistent intégralement.

Il nous reste à montrer seulement que l'on peut déterminer les paramètres r_1, r_2, $\varkappa$ de manière à satisfaire à toutes les conditions du problème.

On montre exactement comme au Chapitre précédent que la solution est symétrique. En posant

$$r_1 = \pi\mu\cos\Omega, \qquad r_2 = \pi\mu\sin\Omega,$$

les deux équations de ramification se réduisent encore à l'unique équation

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} U^*(s)\cos(s-\Omega)\,ds.$$

20. Discussion de l'équation de ramification. — Comme pour la profondeur infinie, on voit que μ est en facteur dans la solution que nous chercherons donc sous la forme

$$(1) \qquad U^*(\sigma) = \mu[\cos(\sigma-\Omega) + \mu a_1^1(\sigma, \Omega) + \varkappa a_1^2(\sigma, \Omega) + \ldots],$$

$$(2) \qquad \omega(x, y) = \mu^2[C(x, y; \Omega) + \ldots].$$

L'équation de ramification s'écrit encore, en divisant par μ qui est nécessairement différent de zéro

$$(3) \qquad 0 = \mu\int_0^{2\pi} a_1^1\cos(\sigma-\Omega)\,d\sigma + \varkappa\int_0^{2\pi} a_1^2\cos(\sigma-\Omega)\,d\sigma + \ldots.$$

En portant l'expression (1) de U^* dans l'équation (5) (§ **18**) et identifiant en μ et $\varkappa$, il vient

$$a_1^2(\sigma, \Omega) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(s-\Omega) \log\frac{1}{r}\,ds$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(s,\sigma)\left[\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{r}\cos(s'-\Omega)\,ds'\right]ds.$$

Mais puisque l'on a encore

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{N}(s,\sigma)\cos(s-\Omega)\,ds = 0,$$

on trouve, en utilisant les formules (4), (5) (§ **16**)

$$a_1^2(\sigma, \Omega) = -(1-\rho_0^2)\cos(\sigma-\Omega).$$

D'où comme coefficient de $\varkappa$ dans l'équation de ramification

$$-\pi(1-\rho_0^2),$$

quantité essentiellement différente de zéro, qui tend vers zéro, si la profondeur H devient infiniment petite. $\varkappa$ devant être toujours plus petit que δ, le rayon de convergence pour μ, c'est-à-dire la hauteur possible de l'onde, est d'autant plus faible que la profondeur est plus petite.

Un calcul facile mais un peu long donne pour le coefficient de μ dans l'équation de ramification

$$\frac{4\pi^2}{\lambda}\int_{\rho_0}^1\left[\frac{\rho^4-\rho_0^4}{\rho(1-\rho_0^2)} + (1+\rho_0^2)\rho\frac{\log\rho-\log\rho_0}{\log\rho_0}\right]h_1(\rho)\,d\rho,$$

$\varkappa$ est donc en général du premier ordre par rapport à la hauteur de l'onde. Il est encore du deuxième ordre dans le cas irrotationnel et lorsque $h(\rho)$ est du second ordre ou satisfait à

$$\int_{\rho_0}^1\left[\frac{\rho^4-\rho_0^4}{\rho(1-\rho_0^2)} + (1+\rho_0^2)\rho\frac{\log\rho-\log\rho_0}{\log\rho_0}\right]h_1(\rho)\,d\rho = 0,$$

avec $h(\rho) = h_1(\rho) +$ ordre supérieur.

L'angle Ω est encore donné par

$$V^*(0) + \omega^*(0) = \mu \frac{\rho_0^2 - 1}{\rho_0^2 + 1} \cos\Omega + 2^e \text{ ordre} + \ldots = 0,$$

et les axes de symétrie sont encore voisins des droites $\frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}$.

Enfin remarquons pour terminer qu'il existe encore un mouvement unique ayant la propriété caractéristique d'être un mouvement purement apparent, les trajectoires absolues étant toutes des courbes fermées décrites pendant le même temps. Pour ce mouvement, comme pour l'onde de Gerstner dans le cas de la profondeur infinie, $h(\rho)$ est la solution unique de l'équation intégrale non linéaire caractéristique

$$\mu h = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F\, ds. \tag{4}$$

Ce mouvement généralise donc très bien l'onde de Gerstner pour la profondeur finie.