JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

O. BORŮVKA

Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 12 (1933), p. 337-383.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12__337_0>

Sur les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce.

PAR O. BORŮVKA.

Les surfaces dont nous allons nous occuper sont définies, dans un espace à $2r$ dimensions ($r \geqq 2$) par $2r+1$ fonctions sphériques de première espèce d'ordre r, linéairement indépendantes. Ces surfaces, dans la géométrie projective, font partie d'une classe plus étendue de surfaces qui ont été rencontrées, par leur construction géométrique, en relation avec la théorie générale des réseaux à invariants égaux (1); dans la géométrie métrique, elles se sont présentées, récemment, dans les profondes recherches de M. E. Cartan, sur les espaces de Riemann symétriques clos, comme surfaces représentatives de l'espace sphérique à deux dimensions, et c'est en relation avec ces recherches que l'étude des propriétés géométriques des surfaces en question devient particulièrement intéressante (2).

Le présent Mémoire se divise en trois Chapitres. Le premier Chapitre est consacré à la construction géométrique et l'étude des propriétés de nature projective des surfaces en question. Le point de départ est fourni par un système d'équations de Pfaff qui définit, dans

(1) *Voir*, par exemple, G. TZITZÉICA, *Géom. diff. proj. des réseaux* (Bucarest, 1924, p. 161.

(2) E. CARTAN, *Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. LIII, 1929).

l'espace projectif réel à $2r$ dimensions, une surface réelle et en chaque point un repère intrinsèquement lié à la surface. La discussion de ce système donne la construction géométrique de la surface : la surface se trouve définie comme le lieu de points d'intersection des couples de S_r-osculateurs, aux points imaginaires conjugués, d'une courbe rationnelle normale imaginaire de degré $2r$. L'intégration effective du système de Pfaff en question montre que la surface est représentée paramétriquement précisément par les fonctions sphériques de première espèce d'ordre r. La construction géométrique et les formules correspondantes constituent la base sur laquelle est fondée, dans ce Chapitre, l'étude des propriétés projectives fondamentales des surfaces en question. Le deuxième Chapitre est consacré à l'étude des propriétés non euclidiennes de ces surfaces. La métrique considérée dans l'espace est celle qui a été introduite par M. E. Cartan, et avec laquelle les surfaces en question apparaissent comme surfaces représentatives de l'espace sphérique à deux dimensions, leurs transformations isométriques se traduisant par des déplacements de l'espace ambiant. J'indique, en particulier, des propriétés locales caractéristiques des surfaces considérées. Dans le troisième Chapitre, je m'occupe de la recherche des surfaces minima plongées dans l'espace non euclidien à six dimensions qui jouissent de la propriété que toutes ses courbes ont la même courbure normale constante. Je montre que ces surfaces sont toutes et seules les surfaces représentées par les fonctions sphériques de troisième ordre.

M. E. Cartan a bien voulu attirer mon attention à l'étude des propriétés géométriques des surfaces en question, et il m'a donné au sujet de ce travail des indications précieuses. Je me permets de lui adresser mes meilleurs remerciements.

I. — Sur la construction géométrique et les propriétés projectives des surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce.

1. Nous allons commencer par nous placer dans un espace projectif *réel* S_{2r} à $2r$ $(r \geqq 2)$ dimensions et par définir et étudier, dans cet espace, une famille de surfaces réelles (M). Nous considérons le

nombre de dimensions de l'espace choisi (arbitrairement mais) une fois pour toutes, et c'est ainsi que nous parlerons de *l'*espace S_{2r}. Les surfaces (M) de l'espace S_{2r} seront toutes projectivement identiques; nous parlerons donc de *la* surface (M).

2. Considérons dans l'espace S_{2r} $2r+1$ points linéairement indépendants quelconques M; $e_1, e_2, \ldots, e_{2r}$. Ils forment un système de référence en ce sens que chaque point A de l'espace peut être exprimé par une formule de la forme

$$A = xM + x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_{2r} e_{2r}, \tag{1}$$

les x étant les coordonnées projectives du point (analytique) A par rapport à ce système de référence. En particulier, on a les formules

$$\left\{\begin{aligned} dM &= \omega_{00} M + \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \ldots + \omega_{2r} e_{2r}, \\ de_j &= \omega_{j0} M + \omega_{j1} e_1 + \omega_{j2} e_2 + \ldots + \omega_{j,2r} e_{2r} \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2r) \end{aligned}\right. \tag{2}$$

les ω étant des formes linéaires, réelles, en différentielles des paramètres dont dépend le système de référence. Si le système est mobile et varie arbitrairement, il n'y a pas entre les ω de relations linéaires; mais, il y en a toujours de bilinéaires provenant du fait que, dans les formules (2), les seconds membres sont des différentielles exactes, et ces relations sont [1] :

$$\left\{\begin{aligned} \omega'_j &= [\omega_{00}\omega_j] + [\omega_1\,\omega_{1j}] + [\omega_2\,\omega_{2j}] + \ldots + [\omega_{2r}\,\omega_{2r,j}] \\ &\qquad (j = 1, 2, \ldots, 2r); \\ \omega'_{jk} &= [\omega_{j0}\,\omega_{0k}] + [\omega_{j1}\omega_{1k}] + [\omega_{j2}\omega_{2k}] + \ldots + [\omega_{j,2r}\omega_{2r,k}] \\ &\qquad (j, k = 0, 1, \ldots, 2r;\ \omega_{0k} = \omega_k). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Les formules (2) entraînent en particulier, que les coordonnées x d'un point analytique *fixe* A de l'espace changent, avec le système de référence, suivant les formules

$$\left\{\begin{aligned} &dx + x\omega_{00} + x_1\omega_{10} + x_2\omega_{20} + \ldots + x_{2r}\omega_{2r,0} = 0; \\ &dx_j + x\omega_j + x_1\omega_{1j} + x_2\omega_{2j} + \ldots + x_{2r}\omega_{2r,j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \end{aligned}\right. \tag{4}$$

---

[1] *Voir*, par exemple, E. CARTAN, *Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien* (*Bull. Soc. math. de France*, t. XLVII, 1919, p. 125-160; t. XLVIII, 1920, p. 132-208).

3. Nous allons attacher, à chaque point analytique A de l'espace, une forme quadratique F, formée avec les coordonnées x du point A par rapport au système mobile

$$F(x, x_1, x_2, \ldots, x_{2r}) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2r}^2 + \frac{1}{c} x^2, \tag{5}$$

c étant une constante ($\neq 0$). Si le système mobile est quelconque, la quantité F, attachée à un même point fixe A varie si l'on fait varier le système mobile. Or, en choisissant (arbitrairement, mais une fois pour toutes) *une position initiale* du système mobile, on peut particulariser le choix du repère et demander que la quantité F, attachée à un même point fixe A quelconque, soit indépendante de la position actuelle du repère et qu'elle soit égale à la quantité F_0 attachée au même point A par rapport à la position initiale du système. Cette particularisation du système mobile se manifeste par certaines équations entre les formes ω que l'on obtient en exprimant que la quantité F est constante si l'on fait varier les x suivant les formules (4), et ces équations sont

$$\omega_{00} = 0, \qquad \omega_{j0} = -c\omega_j, \qquad \omega_{jk} + \omega_{kj} = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, 2r). \tag{6}$$

Inversement, ces équations suffisent pour que le système mobile jouisse de la propriété voulue.

Avec un tel choix du repère mobile, en particulier, la quantité F, par rapport au système initial, attachée au point M, dans chaque position du repère, est égale à $\frac{1}{c}$ et la quantité F attachée à chaque autre sommet du repère dans n'importe quelle position est égale à l'unité. De plus, si l'on considère la quadrique fixe $F_0 = 0$ de l'espace, son équation est la même dans chaque position du repère, et dans chaque position encore, les sommets du repère sont conjugués deux à deux par rapport à cette quadrique. Sans nous préoccuper des explications de nature métrique qui s'attachent à la particularisation considérée du système mobile, nous appellerons dans la suite, pour abréger, la quadrique en question *la quadrique absolue*.

4. Cela étant, la surface (M) que nous allons étudier est définie de la manière suivante :

A chaque point M *de la surface, on peut faire correspondre un système mobile* M; $e_1, e_2, \ldots, e_{2r}$ *tel que les formes correspondantes satisfont, en outre des équations* (6), *au système suivant :*

$$
(7)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_{2r} = 0;\\
\omega_{2k-1,2k+1} + i\omega_{2k,2k+1} = \quad \alpha_k(\omega_1 - i\omega_2);\\
\omega_{2k-1,2k+1} - i\omega_{2k,2k+1} = \quad \alpha_k(\omega_1 + i\omega_2);\\
\omega_{2k-1,2k+2} + i\omega_{2k,2k+2} = \quad i\alpha_k(\omega_1 - i\omega_2);\\
\omega_{2k-1,2k+2} - i\omega_{2k,2k+2} = -i\alpha_k(\omega_1 + i\omega_2);\\
\omega_{2k-1,2k+3} = \omega_{2k-1,2k+4} = \ldots = \omega_{2k-1,2r} = 0;\\
\omega_{2k,2k+3} \quad = \omega_{2k,2k+4} \quad = \ldots = \omega_{2k,2r} \quad = 0;\\
\omega_{2k+1,2k+2} = (k+1)\,\omega_{12},
\end{array}
\right.
$$

dans lequel on a à poser

$$
i = \sqrt{-1}; \qquad c = 2\,\frac{r(r+1)}{(r-1)(r+2)};
$$

$$
\alpha_k = \sqrt{\frac{1}{2}\left[k(k+1) - \frac{(k-1)(k+2)}{2}\,c\right]}
$$

et à donner à l'indice k toutes les valeurs $1, 2, \ldots, r-1$ à condition de supprimer pour $k = r-1$ les formules qui sont écrites dans les sixième et septième lignes.

Au sujet de ce système, nous nous bornons pour le moment à affirmer qu'il est complètement intégrable; nous aurons l'occasion de revenir plus tard (n° II, **8**) à sa formation, et c'est à cette occasion que nous démontrerons la proposition en question. Cela étant admis, il est clair que par le système (7) se trouve bien définie une surface (M) de S_{2r}, évidemment réelle, le lieu du point M, et, dans chaque point M de cette surface, la position d'un repère mobile aux sommets M; e_1, $e_2, \ldots, e_{2r}$.

Quant aux constantes α_k, remarquons qu'on a l'inégalité évidente

$$
(8)\qquad 0 < \alpha_k < \alpha_j \leqq 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leqq j < k \leqq r-1.
$$

5. Nous allons donner d'abord la construction géométrique de la surface (M). Pour cela, remarquons que les équations (7) entraînent les formules suivantes :

$$
(9)\quad
\left\{
\begin{aligned}
dM &= \frac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2)(e_1 + ie_2) + \frac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2)(e_1 - ie_2);\\
d(e_1 \pm ie_2) &= -c(\omega_1 \pm i\omega_2)M \mp i\omega_{12}(e_1 \pm ie_2)\\
&\quad + x_1(\omega_1 \mp i\omega_2)(e_3 \pm ie_4);\\
d(e_{2k-1} \pm ie_{2k}) &= -x_{k-1}(\omega_1 \pm i\omega_2)(e_{2k-3} \pm ie_{2k-2}) \mp ik\omega_{12}(e_{2k-1} \pm ie_{2k})\\
&\quad + x_k(\omega_1 \mp i\omega_2)(e_{2k+1} \pm ie_{2k+2});\\
d(e_{2r-1} \pm ie_{2r}) &= -x_{r-1}(\omega_1 \pm i\omega_2)(e_{2r-3} \pm ie_{2r-2}) \mp ir\omega_{12}(e_{2r-1} \pm ie_{2r})\\
&\qquad (k = 2, 3, \ldots, r-1).
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on pose, pour simplifier l'écriture,

$$
(10)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\omega_1 + i\omega_2 = \Omega_1, \qquad \omega_1 - i\omega_2 = \Omega_{-1},\\
&e_{2k-1} + ie_{2k} = E_k, \qquad e_{2k-1} - ie_{2k} = E_{-k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),
\end{aligned}
\right.
$$

le système (9) s'écrira :

$$
(11)\quad
\left\{
\begin{aligned}
dM &= \frac{1}{2}\Omega_{-1}E_1 + \frac{1}{2}\Omega_1 E_{-1};\\
dE_1 &= -c\Omega_1 M - i\omega_{12}E_1 + x_1\Omega_{-1}E_2;\\
dE_{-1} &= -c\Omega_{-1}M + i\omega_{12}E_{-1} + x_1\Omega_1 E_{-2};\\
dE_k &= -x_{k-1}\Omega_1 E_{k-1} - ik\omega_{12}E_k + x_k\Omega_{-1}E_{k+1};\\
dE_{-k} &= -x_{k-1}\Omega_{-1}E_{-k+1} + ik\omega_{12}E_{-k} + x_k\Omega_1 E_{-k-1};\\
dE_r &= -x_{r-1}\Omega_1 E_{r-1} - ir\omega_{12}E_r;\\
dE_{-r} &= -x_{r-1}\Omega_{-1}E_{-r+1} + ir\omega_{12}E_{-r}\\
&\qquad (k = 2, 3, \ldots, r-1).
\end{aligned}
\right.
$$

6. Pour faire la discussion de ce système, remarquons d'abord que, dans chaque position du système de référence, d'après la définition même, les points E_k, E_{-k}, pour $k = 1, 2, \ldots, r$, sont imaginaires conjugués et situés sur la quadrique absolue ; de plus, les points E_1, E_2, $\ldots$, E_r d'une part, et les points E_{-1}, E_{-2}, $\ldots$, E_{-r} d'autre part, sont conjugués deux à deux par rapport à cette quadrique. Il en résulte que, dans chaque position du système de référence, les deux espaces (imaginaires) linéaires à $r - 1$ dimensions, déterminés par les points E_k et E_{-k} respectivement, sont entièrement situés sur la quadrique absolue. Enfin, le point M est conjugué par rapport à la quadrique en question, à tous les points E_k et E_{-k}.

Cela étant, les deux dernières équations (11) montrent, en particulier, que les points géométriques E_r et E_{-r} décrivent des courbes, soit (E_r) et (E_{-r}), et les paramètres (imaginaires) sur ces courbes dépendent de deux variables réelles indépendantes. On a une correspondance ponctuelle sur les deux courbes; les points E_r, E_{-r} correspondants sont imaginaires conjugués.

Or, posons, pour abréger le langage $\sqrt{2c}\,M = E_0$. Ensuite, les formules (11) montrent que, pour $k = 1, 2, \ldots, 2r-1$, on peut exprimer linéairement d'une part E_{r-k} par $E_r, dE_r, \ldots, d^k E_r$, et d'autre part, E_{-r+k} par $E_{-r}, dE_{-r}, \ldots, d^k E_{-r}$. Par suite, dans chaque position du repère de référence, le point géométrique E_k $(k = -r+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, r-1)$ est le point d'intersection du S_{r-k} osculateur de la courbe (E_r) au point E_r et du S_{r+k}-osculateur de la courbe (E_{-r}) au point E_{-r} et inversement, les points E_r, $E_{r-1}, \ldots, E_{r-k}$ déterminent le S_k-osculateur de la courbe (E_r) au point E_r, et les points $E_{-r}, E_{-r+1}, \ldots, E_{-r+k}$ déterminent le S_k-osculateur de la courbe (E_{-r}) au point E_{-r}. Il en résulte, en particulier, que dans chaque position du système mobile le point (réel) M est le point d'intersection du couple de S_r-osculateurs des courbes (E_r) et (E_{-r}) aux points (imaginaires conjugués) correspondants E_r et E_{-r} et que les deux courbes en question sont autoconjuguées par rapport à la quadrique absolue.

7. Pour aller plus loin, et en particulier, pour déterminer les deux courbes (E_r) et (E_{-r}), nous allons intégrer explicitement le système (11). Pour cela, remarquons d'abord que les formules (10) donnent, en vertu des équations (3), (6) et (7),

$$(12)\quad \Omega_1' = i[\Omega_1 \omega_{12}]; \quad \Omega_{-1}' = -i[\Omega_{-1}\omega_{12}]; \quad i\omega_{12}' = \frac{2}{(r-1)(r+2)}[\Omega_1 \Omega_{-1}],$$

de sorte qu'on peut poser

$$(13)\qquad \Omega_1 = h\,\frac{dz}{1+z\bar{z}}, \qquad \Omega_{-1} = h\,\frac{d\bar{z}}{1+z\bar{z}}, \qquad i\omega_{12} = \frac{z\,d\bar{z} - \bar{z}\,dz}{1+z\bar{z}},$$

h étant égal à $\sqrt{(r-1)(r+2)}$, z et $\bar{z}$ étant deux variables complexes et conjuguées.

Les variables indépendantes étant ainsi choisies, le système (11) prend une forme explicite, dans laquelle, dans les seconds membres, les coefficients des fonctions inconnues sont des fonctions déterminées en z et $\bar{z}$. Ce système peut se mettre sous la forme équivalente :

$$
(14a)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial E_r}{\partial \bar{z}} = -r\frac{z}{1+z\bar{z}}E_r ;\\
&\frac{\partial E_k}{\partial \bar{z}} = -k\frac{z}{1+z\bar{z}}E_k - \alpha_k h\frac{1}{1+z\bar{z}}E_{k+1} \qquad (k = r-1, \ldots, 1);\\
&\frac{\partial E_0}{\partial \bar{z}} = \sqrt{r(r+1)}\frac{1}{1+z\bar{z}}E_1 ;\\
&\frac{\partial E_{-1}}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{1+z\bar{z}}E_{-1} - \sqrt{r(r+1)}\frac{1}{1+z\bar{z}}E_0 ;\\
&\frac{\partial E_{-k}}{\partial \bar{z}} = k\frac{z}{1+z\bar{z}}E_{-k} - \alpha_{k-1} h\frac{1}{1+z\bar{z}}E_{-k+1} \qquad (k = 2, \ldots, r).
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(14b)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial E_{-r}}{\partial z} = -r\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}E_{-r} ;\\
&\frac{\partial E_{-k}}{\partial z} = -k\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}E_{-k} - \alpha_k h\frac{1}{1+z\bar{z}}E_{-k-1} \qquad (k = r-1, \ldots, 1);\\
&\frac{\partial E_0}{\partial z} = \sqrt{r(r+1)}\frac{1}{1+z\bar{z}}E_{-1} ;\\
&\frac{\partial E_1}{\partial z} = \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}E_1 - \sqrt{r(r+1)}\frac{1}{1+z\bar{z}}E_0 ;\\
&\frac{\partial E_k}{\partial z} = k\frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}}E_k - \alpha_{k-1} h\frac{1}{1+z\bar{z}}E_{k-1} \qquad (k = 2, \ldots, r).
\end{aligned}
\right.
$$

Or, pour éviter un calcul inutile, posons $\gamma = \frac{2^r r!\sqrt{2c}}{(2r)!}$ et considérons les expressions suivantes (¹) :

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&E_k = \gamma(-1)^k\sqrt{(r-k)!\,(r+k)!}\,\frac{\varepsilon_{-j} z^{k-j}}{(1+z\bar{z})^r}\sum_{\mu=0}^{r-k}(-1)^\mu\binom{r+j}{\mu}\binom{r-j}{r-k-\mu} z^\mu\bar{z}^\mu ;\\
&E_{-k} = \gamma(-1)^k\sqrt{(r-k)!\,(r+k)!}\,\frac{\varepsilon_j \bar{z}^{k+j}}{(1+z\bar{z})^r}\sum_{\mu=0}^{r-k}(-1)^\mu\binom{r-j}{\mu}\binom{r+j}{r-k-\mu} z^\mu\bar{z}^\mu ;\\
&\qquad\begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, r;\ j = -r, -r+1, \ldots, r; \\ \varepsilon_j = 1 \text{ pour } j \geq 0,\ \varepsilon_j = (-1)^j \text{ pour } j < 0. \end{pmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

(¹) C'est seulement pour simplifier les formules définitives que nous ajoutons, dans les premiers membres, le facteur γ.

D'abord, il est facile de voir que, quels que soient les indices k, j, aucune des fonctions E_k, E_{-k} ne s'annule identiquement. De plus, on a la formule suivante :

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &(-1)^j z^{k-j}\sum_{\mu=0}^{r-k}(-1)^\mu\binom{r+j}{\mu}\binom{r-j}{r-k-\mu}z^\mu\bar z^\mu \\ &=(-1)^j\bar z^{j-k}\sum_{\mu=0}^{r-j}(-1)^\mu\binom{r-j}{\mu}\binom{r+j}{r+k-\mu}z^\mu\bar z^\mu. \end{aligned}\right.$$

Celle-ci montre que les expressions E_k et E_{-k} sont, pour tous les indices k, j, au facteur $(1+z\bar z)^{-r}$ près, polynomes en z et $\bar z$; de plus, elle met en évidence que E_{-0} est identique à E_0, et les formules (15) définissent, pour le même indice j, $2r+1$ fonctions distinctes.

Or, on vérifie par un calcul facile que, quel que soit j, les fonctions E_k, E_{-k} satisfont au système (14 *a*) et (14 *b*). D'autre part, il résulte immédiatement de la forme même des fonctions E_k et E_{-k} que, entre les fonctions E_k, par exemple, qui ont le même indice k et différents indices j, aucune relation linéaire identique aux coefficients constants non tous nuls, n'est possible. Par suite, les formules (15) représentent $2r+1$ solutions indépendantes du système (14 *a*), (14 *b*), et par suite, elles déterminent l'intégrale générale de ce système.

8. Cela étant établi, les seconds membres des formules (15) peuvent être regardés, pour les différentes valeurs de j, comme les coordonnées projectives des points E_k et E_{-k} par rapport à un repère fixe. Or, si l'on désigne par X_0, X_j, X_{-j} ($j=1, 2, \ldots, r$) les coordonnées projectives d'un point quelconque de l'espace par rapport à ce repère, on a, en particulier :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &X_0 : X_j : X_{-j} = z^r : (-1)^j z^{r-j} : z^{r+j} \quad \text{(pour le point } E_r\text{)}, \\ &X_0 : X_j : X_{-j} = \bar z^r : \bar z^{r+j} : (-1)^j \bar z^{r-j} \quad \text{(pour le point } E_{-r}\text{)}. \end{aligned}\right.$$

Ces formules mettent en évidence que les deux courbes (E_r) et (E_{-r}) se confondent dans une courbe rationnelle normale de degré $2r$.

Remarque. — Le système de référence fixe, auquel sont rapportées les coordonnées projectives X, se confond en position avec le repère mobile E_k, E_{-k} $(k = 0, 1, \ldots, r)$ dans la position initiale $z = \bar{z} = 0$. Les coordonnées du point-unité de ce système initial sont

$$X_j = X_{-j} = \gamma\sqrt{(r-j)!\,(r+j)!} \qquad (X_0 = X_{-0}).$$

Il en résulte, en particulier, que l'équation de la quadrique absolue en coordonnées X est

$$(18)\quad \frac{1}{2}\binom{2r}{r}X_0^2 - \binom{2r}{r-1}X_1X_{-1} + \binom{2r}{r-2}X_2X_{-2} - \ldots - \binom{2r}{0}X_rX_{-r} = 0.$$

Pour $z = \bar{z} = 0$, l'hyperplan tangent à la quadrique absolue au point E_k (E_{-k}) $(k \geqq 1)$ est $X_{-k} = 0$ $(X_k = 0)$; le plan (réel) $[ME_kE_{-k}]$ est donné par les équations $X_j = X_{-j} = 0$ $(j \neq k)$.

9. Dans la suite, pour abréger, nous dirons qu'une courbe de l'espace S_{2r} est *imaginaire* si elle est formée par des couples de points imaginaires conjugués, mais sans points réels.

D'après ce qui précède, la surface (M) est engendrée par des couples de S_r-osculateurs, aux points imaginaires conjugués d'une courbe rationnelle normale de degré $2r$ imaginaire (E_0).

10. Nous allons maintenant établir le lemme suivant :

Toutes les courbes rationnelles normales de degré 2r, imaginaires, sont identiques vis-à-vis le groupe de déplacements de l'espace (réel) S_{2r}.

En effet, soit (E) une courbe rationnelle normale de degré $2r$, imaginaire, quelconque, et soit z son paramètre propre. Envisageons sur cette courbe la correspondance ponctuelle qui amène d'un point $E(z)$ au point imaginaire conjugué $E(z')$. Cette correspondance est donnée par une relation entre z et z', évidemment antihomographique et involutive, et comme il n'y a pas sur la courbe des points réels, sans points doubles. La correspondance entre z et z' est donc une antiinvolution de seconde espèce, et par suite, son équation est réductible à la forme

$$z' = -\frac{1}{\bar{z}},$$

$\bar{z}$ étant imaginaire conjugué de z.

Cela étant, considérons deux courbes rationnelles normales de degré $2r$, imaginaires, différentes (E) et ($\mathcal{E}$), et soient z et ζ paramètres propres sur ces deux courbes; la correspondance, qui amène sur chaque courbe d'un point z; ζ à son imaginaire conjugué, soit

$$z' = -\frac{1}{z}, \qquad \zeta' = -\frac{1}{\zeta}.$$

Établissons entre les deux courbes (E) et ($\mathcal{E}$) la correspondance $z = \zeta$. Dans cette correspondance, deux points imaginaires conjugués quelconques d'une courbe correspondent à deux points imaginaires conjugués de l'autre. Or, il existe une transformation homographique qui transforme les deux courbes (E) et ($\mathcal{E}$) l'une dans l'autre de manière à faire confondre chaque couple de points correspondants. La transformation en question amène donc, en particulier, deux points imaginaires conjugués quelconques d'une courbe en deux points imaginaires conjugués de l'autre. C'est une transformation réelle.

11. Il résulte du lemme précédent que deux surfaces engendrées chacune par des couples de S_r-osculateurs aux points imaginaires conjugués d'une courbe rationnelle normale de degré $2r$, imaginaire, sont identiques vis-à-vis le groupe de déplacements de l'espace S_{2r}. On a donc, en définitive, la construction géométrique suivante de la surface (M) :

On prend, dans l'espace projectif S_{2r} une courbe rationnelle normale de degré $2r$, imaginaire, quelconque; on construit en chaque couple de points imaginaires conjugués de cette courbe les deux espaces osculateurs à r dimensions; il existe un point d'intersection (réel) de ces deux espaces, et il dépend de deux paramètres réels. La surface (M) est le lieu de ce point d'intersection.

Remarque. — La surface (M) se trouve ainsi parfaitement déterminée par une courbe rationnelle normale de degré $2r$, imaginaire. Dans la suite, pour attirer l'attention à la construction géométrique de la surface, nous appellerons souvent une telle courbe *courbe génératrice* de la surface (M).

12. La construction géométrique de la surface (M) étant ainsi établie, posons-nous la question suivante : Dans l'espace S_{2r}, la surface (M) étant donnée, quel est le procédé géométrique qui fait passer de la surface à une courbe génératrice ?

Pour répondre à cette question, revenons au système (11). Nous allons d'abord montrer que les deux familles de courbes $\Omega = 0$, $\Omega_{-1} = 0$, situées sur la surface, ont une signification projective intrinsèque. En effet, d'après les formules (11), on a une relation de la forme

$$d^2 M = \varpi M - \varpi_1 E_1 - \varpi_{-1} E_{-1} - \frac{1}{2}\Omega_{-1}^2 E_2 - \frac{1}{2}\Omega_1^2 E_{-2}; \tag{19}$$

cette relation montre qu'à chaque point M de la surface, l'espace osculateur d'ordre 2 est déterminé par les points M, E_1, E_{-1}, E_2, E_{-2}. Or, considérons un point M quelconque de la surface, et prenons dans l'espace osculateur d'ordre 2 correspondant un espace linéaire à trois dimensions, arbitraire, mais passant par le plan tangent de la surface au point M. Cherchons s'il y a, parmi les directions issues du point M et situées dans le plan tangent de la surface des directions privilégiées par la propriété, que les plans osculateurs des courbes situées sur la surface et ayant ces directions, sont contenus dans l'espace à trois dimensions considéré. Or, l'espace en question est déterminé par les points M, E_1, E_{-1}, $\lambda E_2 + \bar{\lambda} E_{-2}$, λ pouvant être arbitraire. Pour qu'une direction dans le plan tangent, issue du point M, jouisse de la propriété voulue, il faut et il suffit que, dans cette direction, le point $d^2 M$ correspondant soit contenu dans l'espace considéré à trois dimensions ; donc, d'après (19), il faut et il suffit qu'on ait

$$\lambda \Omega_1^2 - \bar{\lambda} \Omega_{-1}^2 = 0. \tag{20}$$

A chaque espace à trois dimensions passant par le plan tangent et situé dans l'espace osculateur d'ordre 2 au point M, correspond donc précisément deux directions jouissant de la propriété voulue, et elles sont données par une équation de la forme (20). On a donc en chaque point M de la surface une involution intrinsèque, les directions doubles de cette involution étant précisément les deux directions $\Omega_1 \Omega_{-1} = 0$. Les deux familles de courbes $\Omega_1 \Omega_{-1} = 0$ ont donc une signification projective intrinsèque.

En vue des considérations ultérieures, nous appellerons, dans la suite, les courbes des deux familles $\Omega_1 \Omega_{-1} = 0$ *courbes minima*.

Cela étant, les formules (11) montrent immédiatement que les deux familles de courbes minima forment un réseau, et que le point $E_k(E_{-k})$ est le point transformé par k transformations successives de Laplace dans le sens des courbes $\Omega_1 = 0 \, (\Omega_{-1} = 0)$. En particulier, le point $E_r(E_{-r})$ est le point transformé par r transformations successives de Laplace dans le sens des courbes $\Omega_1 = 0 \, (\Omega_{-1} = 0)$.

On a donc le résultat suivant :

Dans l'espace S_{2r}, la surface (M) étant donnée, les courbes minima sur la surface forment un réseau conjugué. Pour avoir une courbe génératrice de la surface, il suffit de transformer ce réseau par r transformations successives de Laplace. La $r^{ième}$ transformée, dans un sens ou l'autre, se termine sur une courbe rationnelle normale de degré $2r$, imaginaire, qui est une courbe génératrice de la surface.

Remarque. — Nous montrerons plus tard (nos **19**, **20**) que, dans le domaine complexe, la courbe génératrice (E_r) est située sur la surface (M) et qu'il n'y a sur la surface d'autres courbes génératrices.

15. Nous allons maintenant indiquer une relation intrinsèque entre la surface (M) et la quadrique absolue. Dans ce but, nous démontrerons la proposition suivante :

Dans l'espace projectif à $2r$ dimensions, une courbe rationnelle normale de degré $2r$ étant donnée, il existe une quadrique et une seule par rapport à laquelle la courbe est autoconjuguée.

La proposition résulte immédiatement de la remarque suivante : Chaque quadrique dans l'espace qui, par rapport à la courbe donnée, jouit de la propriété voulue, détermine un système polaire qui fait correspondre à chaque point de la courbe son hyperplan osculateur ; inversement, chaque système polaire, qui fait correspondre à chaque point de la courbe son hyperplan osculateur, détermine une quadrique jouissant de la propriété voulue. Or, il est bien connu [1] que, pour

[1] *Voir*, par exemple, E. BERTINI, *Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume* (Wien, 1924, p. 325).

une courbe rationnelle normale quelconque de degré $2r$, il existe précisément un tel système polaire.

On peut aussi raisonner de la manière suivante. Dès qu'on sait que la courbe (E_r) déterminée par le système (11) est une courbe rationnelle normale de degré $2r$, on est sûr que, une courbe rationnelle normale de degré $2r$ étant donnée, il existe au moins une quadrique (absolue) jouissant de la propriété voulue. Il suffit donc de montrer qu'il existe au plus une telle quadrique. Supposons le contraire et envisageons deux quadriques différentes quelconques jouissant de la propriété considérée. La courbe étant autoconjuguée à ces deux quadriques, chacune d'elles contient la courbe et tous ses espaces osculateurs à $r-1$ dimensions. Or, les deux quadriques en question se coupent dans une V^4_{2r-2} qui contient encore la courbe donnée, et tous ses espaces osculateurs à $r-1$ dimensions. D'autre part, on sait qu'une telle V^4_{2r-2} contient précisément $\infty^{(m+1)(2r-2m-2)}$ $(m \leqq r-1)$ d'espaces linéaires à m dimensions [1]; par conséquent, elle ne contient qu'un nombre fini d'espaces linéaires à $r-1$ dimensions, et cela donne une contradiction.

Remarque. — Dans la suite, une courbe rationnelle normale de degré $2r$ étant donnée, nous appellerons pour abréger, la quadrique dont l'existence est assurée par la proposition précédente, *quadrique associée* à la courbe.

Cela étant, revenons à notre espace (réel) S_{2r}. Les considérations précédentes entraînent la relation intrinsèque suivante entre la surface (M) et la quadrique absolue :

La quadrique absolue qui est liée par le système d'équations différentielles (11) *à la surface* (M) *est la quadrique associée à la courbe génératrice* (E) *de la surface.*

14. Dans la suite, nous aurons à appliquer le lemme suivant :

Dans l'espace projectif à $2r$ dimensions, une courbe rationnelle nor-

---

[1] *Voir*, par exemple, E. BERTINI, *loc. cit.*, p. 168.

male de degré $2r$ étant donnée, les deux points d'intersection de deux couples différents quelconques de S_r-osculateurs de la courbe sont différents.

Considérons la quadrique associée à la courbe. Dans chaque point de la courbe, le S_{r-1}-osculateur et le S_r-osculateur sont deux espaces polaires par rapport à la quadrique en question; l'hyperplan polaire de chaque point du S_r-osculateur contient donc r points voisins de la courbe (les r points consécutifs qui déterminent le S_{r-1}-osculateur).

Cela étant, admettons pour le moment le contraire de la proposition. Supposons qu'il existe deux couples différents de S_r-osculateurs de la courbe tels que les deux points d'intersection correspondants ne soient pas différents. Cette proposition entraîne qu'il existe un point de l'espace par lequel il passe trois différents S_r-osculateurs de la courbe. Par suite, d'après la remarque précédente, l'hyperplan polaire de ce point contient 3 groupes de r points voisins de la courbe; par suite, il contient toute la courbe, et cela est absurde.

15. Revenons à la construction géométrique de la surface (M). Interprétons les valeurs du paramètre z sur la courbe génératrice (E_r) par les points de la sphère, de rayon 1, par exemple. A chaque point de la sphère correspond précisément une valeur de z, et par suite, précisément un point sur la courbe génératrice, et par suite, d'après la construction de la surface (M), précisément un point sur la surface. Deux points-antipodes sur la sphère, correspondant aux valeurs z et $-\frac{1}{\bar{z}}$ du paramètre, donnent le même point sur la surface. Inversement, chaque point de la surface se trouve déterminé, par la construction géométrique précisément (d'après le lemme du nº **14**) par deux points imaginaires conjugués sur la courbe génératrice (E_r), qui correspondent aux valeurs z et $-\frac{1}{\bar{z}}$ du paramètre, et par suite, qui déterminent deux points-antipodes de la sphère. On a donc une correspondance biunivoque entre les couples de points-antipodes sur la sphère et les points (géométriques) sur la surface. Nous désignons cette correspondance par $\mathcal{R}$.

Imaginons une rotation de la sphère autour du centre (ou une rotation autour du centre accompagnée par symétrie par rapport au centre). Cette rotation s'exprime au moyen de la variabte z par une transformation projective (ou antiprojective), et cette transformation entraîne la propriété de la rotation de conserver les points-antipodes de la sphère. Par suite, elle définit sur la courbe génératrice (E_r) une transformation projective (ou antiprojective) changeant simultanément deux points imaginaires conjugués de la courbe en deux points imaginaires conjugués, et par suite, elle engendre une transformation projective (réelle) dans tout l'espace S_{2r}. Cette transformation, d'après la construction même de la surface, et d'après la définition de la correspondance $\mathcal{R}$, conserve la surface et manifeste la rotation sur la surface. De plus, comme il n'y a pas, d'après le théorème du n° **13**, qu'une seule quadrique associée à la courbe génératrice, la transformation en question de l'espace S_{2r} conserve la quadrique absolue.

Inversement, imaginons une transformation projective (réelle) de l'espace S_{2r} qui conserve la surface (M). Cette transformation conserve nécessairement sur la surface le réseau de courbes minima, et par suite, la courbe génératrice (E_r); de plus, elle conserve la quadrique absolue. La transformation en question engendre sur la courbe génératrice une correspondance projective (ou antiprojective), et cette correspondance conserve les points imaginaires de la courbe. Elle se traduit donc sur la sphère par une rotation autour du centre (ou rotation autour du centre accompagnée par symétrie par rapport au centre); cette rotation manifeste sur la sphère la transformation dans l'espace S_{2r}.

On a donc le théorème suivant :

Il est possible d'établir entre couples de points-antipodes de la sphère et points de la surface une correspondance biunivoque $\mathcal{R}$ telle que chaque rotation de la sphère autour du centre, accompagnée ou non par symétrie, se manifeste sur la surface par un déplacement de l'espace S_{2r}, *et ce déplacement conserve la quadrique absolue; inversement, chaque déplacement de l'espace* S_{2r} *qui conserve la surface, et par suite aussi la* *quadrique absolue se manifeste sur la sphère par une rotation de la sphère autour du centre accompagnée ou non par symétrie.*

16. Nous allons appliquer le résultat précédent pour démontrer le théorème suivant :

Toutes les propriétés locales de la surface (M) *qui se conservent par le groupe de déplacements de l'espace* S_{2r}, *ou bien seulement par son sous-groupe qui conserve la quadrique absolue, sont les mêmes dans tous les points de la surface.*

Désignons par G le groupe de déplacements de l'espace S_{2r} qui conserve la quadrique absolue. Imaginons la correspondance $\mathcal{R}$ entre la sphère et la surface. Soient M, M' deux points quelconques de la surface et m, m' les deux couples correspondants sur la sphère. Soit $\mathcal{J}(M)$ un invariant quelconque par rapport à G, attaché à la surface au point M, et soit $\mathcal{J}(M')$ le même invariant attaché au point M'. Il existe une rotation de la sphère qui amène le couple m en m'; la transformation correspondante sur la surface qui amène M en M' est une transformation du groupe G. On a donc $\mathcal{J}(M) = \mathcal{J}(M')$.

17. Nous nous bornons ici à énoncer une propriété locale de nature projective de la surface (M); nous aurons l'occasion de la démontrer plus tard (n° II, **8**).

Dans un point M *quelconque de la surface l'espace osculateur d'ordre* k *a précisément* $2k$ *dimensions, et il se trouve déterminé par les points* M, E_j, E_{-j} $(j \leqq k)$.

Il en résulte en particulier que, dans le point initial de la surface, l'espace osculateur d'ordre k est donné par les équations

$$X_{k+1} = X_{-k-1} = \ldots = X_r = X_{-r} = 0.$$

18. Pour aller plus loin, nous allons déduire la représentation paramétrique de la surface (M). D'abord, les formules (15) et (16) montrent que les coordonnées projectives X d'un point quelconque M de la surface peuvent être écrites sous la forme

$$
(21)\qquad \left\{
\begin{aligned}
X_j &= \frac{2^r}{\binom{2r}{r}}\,\frac{\bar z^j}{(1+z\bar z)^r}\sum_{\mu=0}^{r-j}(-1)^\mu\binom{r-j}{\mu}\binom{r+j}{r-\mu}z^\mu\bar z^\mu;\\
X_{-j} &= \frac{2^r}{\binom{2r}{r}}\,\frac{z^j}{(1+z\bar z)^r}\sum_{\mu=0}^{r-j}(-1)^\mu\binom{r-j}{\mu}\binom{r+j}{r-\mu}z^\mu\bar z^\mu\\
&\qquad (j=0,\,1,\,\ldots,\,r;\ X_{-0}=X_0).
\end{aligned}
\right.
$$

Or, effectuons la représentation des valeurs z par les points de la sphère de rayon 1. La sphère étant rapportée aux coordonnées rectangulaires X, Y, Z, et le pôle de représentation étant le point $X = Y = 0$, $Z = 1$, on a les formules bien connues

$$
(22)\qquad X=\frac{z+\bar z}{1+z\bar z};\qquad Y=-i\,\frac{z-\bar z}{1+z\bar z};\qquad Z=\frac{1-z\bar z}{1-z\bar z}.
$$

Avec les variables nouvelles X, Y, Z, les formules (21) prennent la forme

$$
(23)\qquad \left\{
\begin{aligned}
X_j &= \frac{1}{\binom{2r}{r}}(X-iY)^j\sum_{\mu=0}^{r-j}\binom{r-j}{\mu}\binom{r-j}{r-\mu}(Z-1)^\mu(Z+1)^{r-j-\mu};\\
X_{-j} &= \frac{1}{\binom{2r}{r}}(X+iY)^j\sum_{\mu=0}^{r-j}\binom{r-j}{\mu}\binom{r+j}{r-\mu}(Z-1)^\mu(Z+1)^{r-j-\mu}\\
&\qquad (j=0,\,1,\,\ldots,\,r;\ X_{-0}=X_0).
\end{aligned}
\right.
$$

Cela étant, nous allons démontrer le théorème suivant :

La représentation paramétrique de la surface (M) *est fournie par* $2r+1$ *fonctions sphériques de première espèce d'ordre* r, *linéairement indépendantes, ou bien, et cela revient au même, par* $2r+1$ *polynomes harmoniques de degré* r, *homogènes en trois variables et linéairement indépendants.*

Pour démontrer le théorème, remarquons qu'on a, pour 0, 1, ..., r

la formule suivante :

$$(24)\qquad \frac{1}{j!\,r!}\frac{d^{r-j}}{dZ^{r-j}}(Z^2-1)^r = \binom{r}{j}\sum_{\mu=0}^{r-j}\binom{r-j}{\mu}\binom{r+j}{r-\mu}(Z-1)^{\mu}(Z+1)^{r-j-\mu}.$$

Or, cette formule montre que, en introduisant les fonctions sphériques adjointes de première espèce d'ordre r,

$$(25)\qquad P_{rj} = \frac{(r-j)!}{(2r)!}(\sqrt{1-Z^2})^j\frac{d^{r-j}(Z^2-1)^r}{dZ^{r-j}}$$

et en posant

$$(26)\qquad X = \cos\varphi\sin\theta;\qquad Y = \sin\varphi\sin\theta;\qquad Z = \cos\theta,$$

on peut mettre les formules (23) sous la forme

$$(27)\qquad \begin{cases} X_j = e^{-ij\varphi}P_{rj}(\cos\theta) \\ X_{-j} = e^{ij\varphi}\ P_{rj}(\cos\theta) \end{cases}\qquad (j = 0, 1, \ldots, r;\ X_{-0} = X_0).$$

Dans ces formules, les seconds membres sont précisément fonctions sphériques de première espèce d'ordre r, linéairement indépendantes. En vertu de la théorie générale des fonctions sphériques, les seconds membres peuvent s'écrire comme polynomes harmoniques de degré r, homogènes en trois variables X, Y, Z et linéairement indépendants.

Remarque I. — Comme il y a précisément $2r+1$ fonctions sphériques de première espèce d'ordre r linéairement indépendantes (polynomes harmoniques d'ordre r, homogènes en trois variables et linéairement indépendants), chaque surface de S_{2r}, dont la représentation paramétrique est fournie par fonctions sphériques de première espèce d'ordre r (polynomes harmoniques d'ordre r, etc.), est projectivement identique à la surface (M).

Remarque II. — Conformément à la première partie du théorème du n° **15**, les fonctions X_j, X_{-j} regardées comme polynomes harmoniques en X, Y, Z, subissent une substitution linéaire si l'on applique aux variables X, Y, Z une substitution orthogonale. D'après la seconde partie du théorème en question, inversement, chaque substitution analytique portée aux variables X, Y, Z qui fait subir aux polynomes harmoniques X_j, X_{-j} une substitution linéaire non singulière aux coefficients réels constants est nécessairement une substitution orthogonale.

Remarque III. — Les fonctions X_j, X_{-j} sont normées, d'après (18), de manière à satisfaire identiquement à la relation

$$(28)\qquad \frac{1}{2}\binom{2r}{r}X_0^2+\binom{2r}{r-1}X_1X_{-1}+\ldots+\binom{2r}{0}X_rX_{-r}=\frac{2^{2r-1}}{\binom{2r}{r}}.$$

Il existe donc entre les fonctions sphériques adjointes P_{rj} la relation quadratique

$$(29)\qquad \frac{1}{2}\binom{2r}{r}P_{r0}^2+\binom{2r}{r-1}P_{r1}^2+\ldots+\binom{2r}{0}P_{rr}^2=\frac{2^{2r-1}}{\binom{2r}{r}}.$$

19. On pourrait admettre pour z, $\bar{z}$ des valeurs complexes quelconques. Les formules (21) prolongent la surface dans le domaine complexe et donnent sa représentation sur la sphère complexe. Cette représentation est évidemment univoque dans le sens de la sphère $\to$ la surface; si z et $\bar{z}$ ne sont pas conjugués, elle est univoque encore, d'après le lemme du n° **14**, dans le sens inverse. Elle prolonge la correspondance $\mathcal{R}$ dans le domaine complexe. Dans cette correspondance $\mathcal{R}$ prolongée, aux points réels (imaginaires) de la sphère correspondent les points réels (imaginaires) sur la surface. Aux génératrices rectilignes sur la sphère correspondent les courbes minima sur la surface; ce sont des courbes rationnelles normales d'ordre r. Au cercle à l'infini sur la sphère $(1+z\bar{z}=0)$ correspond la courbe génératrice (E_r) sur la surface.

20. Avec le théorème du n° **15** et la remarque précédente, nous sommes en mesure de démontrer le théorème suivant :

Il n'y a sur la surface (M) *qu'une seule courbe génératrice, c'est-à-dire il n'y a sur la surface qu'une seule courbe rationnelle normale imaginaire de degré* $2r$ *telle que la surface puisse être définie comme le lieu des points d'intersection des couples de ses* S_r*-osculateurs aux points imaginaires conjugués.*

En effet, admettons pour le moment le contraire, et nous aurons une contradiction. Envisageons la correspondance $\mathcal{R}$ prolongée dans le domaine complexe. Soit sur la surface $(\mathfrak{S})$ une courbe génératrice différente de (E_r). L'image de la courbe $(\mathfrak{S})$ sur la sphère est une courbe imaginaire, et comme la correspondance dans le sens de la sphère → la surface est univoque, différente du cercle à l'infini $X^2+Y^2+Z^2=0$, qui, à son tour, est l'image de la courbe (E_r). Or, il existe (n° **10**) une transformation de l'espace S_{2r} qui fait confondre la courbe (E_{2r}) avec $(\mathfrak{S})$. Évidemment, cette transformation conserve la surface, et par suite, elle se manifeste sur la sphère par une rotation (n° **15**). Cette rotation d'une part, laisse invariant le cercle à l'infini, et d'autre part, comme la correspondance dans le sens de la surface → la sphère est univoque, elle fait confondre le cercle en question avec l'image de la courbe $(\mathfrak{S})$. On a donc une contradiction.

21. Nous allons encore examiner de plus près la représentation $\mathcal{R}$ entre la sphère et la surface. Dans ce but, plaçons-nous d'abord au point initial $X=Y=0$, $Z=1$ de la sphère, et examinons quelles sont les courbes sur la surface qui, dans la représentation $\mathcal{R}$, correspondent soit aux grands cercles passant par le point initial, soit aux cercles orthogonaux $Z=\text{const}$.

Considérons d'abord les grands cercles. Les équations des courbes correspondantes sur les surfaces s'obtiennent en faisant, dans les formules (27), $\varphi=\text{const}$. et en faisant varier θ. Or, il est facile de voir que $P_{rj}(\cos\theta)$ peut s'exprimer, avec une variable convenable, comme un polynome de degré $r-j$, abstraction faite d'un facteur rationnel indépendant de j. En effet, posons

$$\cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

t étant une variable nouvelle, et dans la série (24) qui figure dans la formule de définition de la fonction P_{rj}, associons pour chaque

$$\mu=0,1,\ldots,\left[\frac{r-j}{2}\right]$$

les deux termes correspondant à μ et $r-j-\mu$. Un calcul facile montre que, abstraction faite d'un facteur rationnel indépendant de j, la somme de ces deux termes est

$$(-1)^{r-j-\mu}\binom{r-j}{\mu}\binom{r+j}{r-\mu}\left\{t^{r-j-2\mu}-\left(-\frac{1}{t}\right)^{r-j-2\mu}\right\};$$

c'est donc un polynome en $t-\frac{1}{t}$ de degré $r-j-2\mu$. Par suite, à un facteur indépendant de j près, P_{rj} est un polynome de degré $r-j$ en $t-\frac{1}{t}$. Les courbes considérées sur la surface sont donc courbes rationnelles normales de degré r; évidemment, elles sont fermées.

Considérons maintenant les courbes $Z=\text{const.}$ Si l'on pose, dans les formules (27),

$$e^{i\varphi}=\frac{1+it}{1-it},$$

t étant une variable réelle, et que l'on multiplie les seconds membres de ces formules par un facteur convenable indépendant de j, on obtient les équations des courbes cherchées sous la forme

$$(30)\qquad \begin{cases} X_j=(1+it)^{r-j}(1-it)^{r+j}P_{rj}(Z), \\ X_{-j}=(1+it)^{r+j}(1-it)^{r-j}P_{rj}(Z). \end{cases}$$

Ces formules montrent que si Z est quelconque, c'est-à-dire si Z n'annule aucune des fonctions P_{rj}, la courbe correspondante est rationnelle normale de degré $2r$. Mais il existe un nombre fini de valeurs de Z pour lesquelles il n'en est pas ainsi. En effet, on a une valeur exceptionnelle de Z alors et alors seulement si elle annule une des fonctions de P_{rj}. Or, à chaque valeur de j correspondent précisément $r-j$ différentes valeurs de Z, deux à deux égales et de signes opposés (abstraction faite de la valeur possible $Z=0$), situées dans l'intervalle $1>Z>-1$ qui annulent $P_{rj}(Z)$; à ces valeurs correspondent précisément $r-j$ différents cercles sur la sphère dont les images sur la surface, en nombre de $\left[\frac{r-j-1}{2}\right]$ différentes, sont des courbes rationnelles situées dans l'espace $X_j=X_{-j}=0$; par suite, ces courbes sont soit d'un degré inférieur à $2r$, soit de degré $2r$, mais non normales. L'espace en question $X_j=X_{-j}=0$ pour $j\neq 0$, est l'espace polaire du plan $[ME_jE_{-j}]$ et, par suite, il est parfaitement déterminé par les espaces osculateurs de la surface et la quadrique absolue : pour $j = 0$, on a l'hyperplan polaire du point M dans sa position initiale.

Remarquons encore que toutes les courbes considérées, images des cercles $Z = \text{const.}$, sont évidemment fermées.

22. Les résultats que nous venons d'obtenir au sujet de la représentation $\mathcal{R}$ restent vrais si l'on considère au lieu du point initial un point quelconque P de la sphère. En effet, on peut amener par une rotation le point initial au point P. Par cette rotation, les grands cercles sur la sphère passant par le point initial, et les cercles orthogonaux s'amènent aux grands cercles passant par le point P et les cercles orthogonaux et les images de ces cercles sur la surface se transforment par une transformation projective.

On a donc le résultat suivant :

Dans la correspondance $\mathcal{R}$, à chaque cercle de la sphère correspond sur la surface une courbe rationnelle fermée. Aux grands cercles correspondent des courbes rationnelles normales de degré r. Aux petits cercles correspondent, en général, des courbes rationnelles de degré $2r$, mais il y a des exceptions. A chaque point de la sphère, se trouve associé un nombre fini de petits cercles, dont les images sont courbes rationnelles qui sont, soit de degré inférieur à $2r$, soit courbes non normales ; ces courbes exceptionnelles sont déterminées par la quadrique absolue et par les espaces osculateurs de la surface au point qui correspond au point considéré sur la sphère.

23. Au sujet des courbes rationnelles sur la surface, images des cercles sur la sphère, nous allons démontrer le théorème suivant :

Toutes les propriétés locales d'une courbe rationnelle sur la surface, image d'un cercle sur la sphère dans la correspondance $\mathcal{R}$, qui se conservent par le groupe de déplacements de l'espace S_{2r}, ou bien seulement par son sous-groupe qui laisse invariante la quadrique absolue, sont les mêmes en tous les points de la courbe.

Le théorème se démontre d'une manière analogue comme celui du n° **16**. Désignons par G le groupe de déplacements de l'espace S_{2r} qui laisse invariante la quadrique absolue. Soit, sur la surface, C une courbe rationnelle, et soit, sur la sphère, c le cercle (les deux cercles) qui est (sont) son image; soient M et M′ deux points quelconques sur C et m, m' les deux couples correspondants sur c; soit $\mathfrak{J}(M)$ un invariant quelconque par rapport à G attaché à la courbe au point M, et soit $\mathfrak{J}(M')$ le même invariant attaché au point M′. Il existe une rotation de la sphère qui conserve c et qui amène m en m'; la transformation correspondante sur C, qui amène M en M′ est, d'après le théorème du n° **15**, une transformation du groupe G. On a donc

$$\mathfrak{J}(M) = \mathfrak{J}(M').$$

II. — Sur les propriétés métriques non euclidiennes des surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce.

Avant de commencer l'étude des propriétés métriques de la surface (M), nous allons faire quelques explications préliminaires (¹).

1. Revenons au système d'équations différentielles (2) et regardons-y les ω comme vérifiant les relations (6). Ces relations font privilégier la forme

$$F = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2r}^2 - \frac{1}{r} x^2.$$

Si l'on introduit, dans l'espace R_{2r} une métrique non euclidienne, en prenant pour l'absolu la quadrique $F = 0$, les coordonnées projectives du point M, par rapport au système initial, sont coordonnées de l'espace non euclidien considéré, quelle que soit la position du repère. Les points e étant situés dans l'hyperplan polaire du point M par rapport à la quadrique absolue, ils peuvent être regardés comme vecteurs issus du point M; comme ils sont conjugués deux à deux par rapport à la quadrique absolue, les vecteurs correspondants issus du point M sont rectangulaires; enfin la quantité F (carré scalaire) attachée à

(¹) Au sujet des n°ˢ **1** et **2** de ce Chapitre, *voir* par exemple *loc. cit.*, p. 3, et E. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. IX, 1925). Au sujet du n° **4** de ce Chapitre, *voir loc. cit.*, p. 1.

chaque point e étant égale à l'unité, les vecteurs correspondants sont unitaires.

En somme, le système d'équations (2), (6) peut être regardé comme définissant une variété (M) de l'espace non euclidien à $2r$ dimensions, déterminé par la quadrique absolue $F = 0$, et en chaque point M de cette variété, un repère, formé par $2r$ vecteurs rectangulaires unitaires. S'il n'y a pas d'autres relations entre les ω, la variété (M) constitue tout l'espace, et le repère attaché à chaque point M de la variété est le plus général possible jouissant des propriétés en question. L'élément linéaire de la variété (M) est évidemment

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_{2r}^2.$$

2. Supposons que la variété (M) est une surface. Nous pouvons particulariser le repère mobile, attaché à chaque point M de la surface et prendre les vecteurs e_1, e_2 dans le plan tangent à la surface au point M correspondant. Cette particularisation étant faite nous dirons, pour abréger, que le repère, attaché à chaque point de la surface, est *normal*. Pour un tel repère, on a les formules

$$(31)\qquad \begin{cases} dM = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 \\ de_k = -\varepsilon\omega_k M + \omega_{k1}e_1 + \omega_{k2}e_2 + \ldots + \omega_{k,2r}e_{2r} \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, 2r),$$

les ω étant assujetties à remplir les relations linéaires (6) et

$$\omega_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 3, \ldots, 2r).$$

De plus on a les relations quadratiques (3) et par suite, en particulier,

$$(32)\qquad [\omega_1\omega_{1j}] + [\omega_2\omega_{2j}] = 0 \qquad (j = 3, \ldots, 2r).$$

Posons

$$(33)\qquad \begin{cases} \omega_{1j} = p_{1j1}\omega_1 + p_{1j2}\omega_2, \\ \omega_{2j} = p_{2j1}\omega_1 + p_{2j2}\omega_2; \end{cases}$$

on a, d'après (32), $p_{2j1} = p_{1j2}$. A chaque point de la surface, on appelle vecteur de *courbure moyenne* le vecteur $\sum_\alpha (p_{1\alpha 1} + p_{2\alpha 2})e_\alpha$ et l'on dit que la surface (M) est *minima*, si ce vecteur est identiquement nul.

Si (M) est une surface minima, on peut écrire évidemment

$$(34)\qquad \omega_{1j} + i\omega_{2j} = c_j(\omega_1 - i\omega_2); \qquad \omega_{1j} - i\omega_{2j} = \bar{c}_j(\omega_1 + i\omega_2) \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

c_j, $\bar{c}_j$ étant des quantités complexes conjuguées.

5 (¹). Imaginons une surface arbitraire plongée dans un espace non euclidien à $2r$ dimensions et supposons que, en chaque point, l'espace osculateur d'ordre k ($k = 1, 2, \ldots, r$) ait précisément $2k$ dimensions. Soit M un point de la surface et imaginons une courbe générale tracée sur la surface et passant par M. Au point M se trouve défini, d'une manière intrinsèque, $2r - 1$ vecteurs des courbures successives de la courbe, tous portés dans les directions des différentes normales de la courbe, ainsi que les $2r - 1$ courbures scalaires correspondantes. Considérons le vecteur, issu du point M, porté dans la direction de la $k^{\text{ième}}$ normale de la courbe, mais de longueur égale au produit de k premières courbures (scalaires) au point M. Ce vecteur, qui est parfaitement déterminé par la courbe considérée et qui, pour $k = 1$, n'est pas autre que le vecteur de la première courbure de la courbe lui-même, est situé évidemment, dans l'espace osculateur de la surface d'ordre $k + 1$ et il dépend, en général, de la courbe considérée sur la surface. Par suite, pour chaque k, au point M de la surface se trouve défini un cône, formé par les vecteurs en question, déterminé par les différentes courbes tracées sur la surface, et ce cône est situé dans l'espace osculateur d'ordre $k + 1$. Or, l'espace osculateur à la surface d'ordre $k + 1$ étant précisément à $2k + 2$ dimensions, et celui d'ordre k à $2k$ dimensions, il existe, pour $k \leq r - 1$, dans l'espace osculateur d'ordre $k + 1$, au point M, précisément un plan, passant par M, et normal à l'espace osculateur d'ordre k. Le cône considéré au point M se projette, sur ce plan, dans une *courbe*. Nous l'appelons *indicatrice de courbure normale d'ordre k*. Il y a donc, en somme, en chaque point d'une surface jouissant des propriétés supposées $r - 1$ indicatrices de courbures normales d'ordres respectivement $1, 2, \ldots, r - 1$.

(¹) Au sujet de ce numéro, *voir* mon Mémoire : *Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces à n dimensions à courbure constante*. Première partie (*Publ. de la Fac. des Sciences de l'Université Masaryk*, nº 165).

4. Nous allons maintenant rappeler comment les surfaces représentées par les fonctions sphériques se sont présentées dans les recherches de M. E. Cartan sur les espaces de Riemann symétriques clos.

Considérons un espace sphérique (ou elliptique) E à deux dimensions. Chaque point de cet espace est défini par trois coordonnées X, Y, Z, assujetties à la relation $X^2+Y^2+Z^2=1$. Le groupe de déplacements g de cet espace est constitué par le groupe orthogonal portant aux variables X, Y, Z. Étant donné un système de p fonctions réelles $x_0, \ldots, x_{p-1}$ en X, Y, Z, linéairement indépendantes, définies et continues ([1]) dans l'espace, on dit que ces fonctions constituent une *suite irréductible de fonctions fondamentales de l'espace* E, si par toute transformation du groupe g les fonctions de la suite varient suivant un groupe linéaire G irréductible. Il est clair qu'il existe de telles suites; il suffit de prendre par exemple $x_0=X$, $x_1=Y$, $x_2=Z$. Une suite irréductible de fonctions fondamentales étant donnée, on obtient encore une telle suite en remplaçant les fonctions de la suite par leurs combinaisons linéaires indépendantes, en nombre p, à coefficients constants réels arbitraires. Or, on peut démontrer qu'on peut profiter de cette propriété pour *normer* les fonctions x de la suite de manière que la forme $\sum_\alpha x_\alpha^2$ et la forme différentielle $\sum_\alpha dx_\alpha^2$ soient invariantes par les substitutions du groupe G; de plus on peut s'arranger que l'on ait $\sum_\alpha x_\alpha^2=\text{const.}$

Cela étant, supposons que nous ayons une suite irréductible de fonctions fondamentales normées x de l'espace E, réelles et telles qu'il y ait une correspondance biunivoque entre les points de l'espace E et les valeurs des fonctions de la suite. Évidemment, rien n'empêche de regarder les x comme les coordonnées d'une surface ($\mathfrak{M}$) plongée dans l'espace sphérique (ou elliptique) $\sum_\alpha x_\alpha^2=\text{const}$. La surface ($\mathfrak{M}$)

([1]) Au lieu de *continues*, il suffit de dire *bornées*. *Voir* à cet égard E. Cartan, *Les représentations linéaires des groupes clos simples et semi-simples* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, Paris, t. 190, 1930, p. 723-724).

ne possède aucune singularité; elle est, d'après hypothèse, en correspondance biunivoque avec les points de l'espace E. Son ds^2 se conserve par le groupe g et l'on peut démontrer qu'il est identique, à un facteur constant près, au ds^2 de l'espace E. L'espace E se trouve ainsi représenté par une surface $(\mathfrak{M})$, sans singularité, de l'espace sphérique ou elliptique à $p-1$ dimensions, les déplacements de l'espace E se traduisant sur la surface par des déplacements de l'espace ambiant. Nous dirons que la surface $(\mathfrak{M})$ est une *surface représentative* de l'espace E, ou bien qu'elle *représente* l'espace E.

Au sujet des surfaces représentatives de l'espace E, une question naturelle se pose : *Quelles sont toutes les surfaces représentatives de l'espace sphérique (ou elliptique), et quelles sont leurs propriétés géométriques?*

5. D'après les résultats dus à M. E. Cartan (¹), on sait que toutes les suites de fonctions fondamentales irréductibles de l'espace sphérique (ou elliptique) à deux dimensions, ne contiennent qu'un nombre impair $2r+1$ de fonctions et qu'elles sont fournies précisément par $2r+1$ polynomes harmoniques de degré r, homogènes en trois variables X, Y, Z et linéairement indépendants. Les surfaces représentatives de l'espace sphérique (ou elliptique) à deux dimensions n'existent donc que dans les espaces à nombre pair $2r$ de dimensions. Nous laissons de côté le cas $r=1$ qui ne présente évidemment aucun intérêt.

Si r est impair, il y a une correspondance biunivoque $\mathcal{R}^*$ entre les points de la sphère et les valeurs des polynomes harmoniques de degré r. Par suite, dans ce cas, la surface correspondante, regardée comme plongée dans l'espace *sphérique* (à $2r$ dimensions), représente l'espace *sphérique* à deux dimensions, mais regardée comme plongée dans l'espace elliptique (à $2r$ dimensions), représente l'espace elliptique à deux dimensions.

Si r est pair, il y a une correspondance $\mathcal{R}^*$ entre les points de la sphère et les valeurs des polynomes harmoniques de degré r. A chaque point de la sphère correspond un et un seul système de valeurs des polynomes harmoniques, mais inversement, à un système de valeurs

(¹) *Loc. cit.*, p. 1.

de polynomes harmoniques correspondent précisément deux points antipodes de la sphère. Par suite, dans ce cas, on a une représentation de l'espace *elliptique* à deux dimensions par une surface représentative plongée dans l'espace *sphérique* (à $2r$ dimensions).

Dans les deux cas, c'est la correspondance $\mathcal{R}^*$ entre les points de la sphère et les valeurs des polynomes harmoniques qui réalise la représentation biunivoque de l'espace représenté et la surface représentative. La relation entre la correspondance $\mathcal{R}^*$ et la correspondance $\mathcal{R}$ que nous avons considérée au n° **I**, **15** est évidente.

6. Les surfaces représentatives de l'espace sphérique ou elliptique à deux dimensions étant ainsi déterminées, nous allons nous occuper de leurs propriétés métriques. Pour abréger le langage, nous parlerons tout simplement de l'espace *sphérique* à deux dimensions et d'une surface représentative plongée dans l'espace *sphérique* à $2r$ dimensions; cependant, tous les raisonnements que nous ferons à ce sujet restent valables dans tous les autres cas de représentation.

7. D'abord, les résultats des n^os **I**, **11**, **I**, **15** donnent, dans l'espace S_{2r}, la définition projective des surfaces représentatives et la définition géométrique de l'absolu qui définit l'espace sphérique (à $2r$ dimensions) ambiant.

La formule (28) montre que *l'espace sphérique (à $2r$ dimensions) étant rapporté aux coordonnées x_0, x_1, ..., x_{2r} et étant déterminé par la relation*

$$x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{2r}^2 = \frac{2^{2r-1}}{\binom{2r}{r}}, \tag{35}$$

la surface représentative correspondante est donnée par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} x_0 = \sqrt{\frac{1}{2}\binom{2r}{r}}\,X_0; \qquad x_{2j-1} = \frac{1}{2}\sqrt{\binom{2r}{r-1}}\,(X_j + X_{-j}); \\ x_{2j} = \frac{1}{2i}\sqrt{\binom{2r}{r-1}}\,(X_j - X_{-j}) \\ \qquad\qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, r), \end{array}\right. \tag{36}$$

les X étant donnés par les formules (21). *L'élément linéaire de la sur-*

face est

$$ds^2 = (r-1)(r+2)\frac{dz\,d\bar{z}}{(1+z\bar{z})^2}.$$

Le théorème du nº **I, 16** montre que *toutes les propriétés locales métriques de la surface sont les mêmes dans tous les points de la surface*. En particulier, d'après le théorème du nº **I, 17**, *dans un point quelconque de la surface, l'espace osculateur d'ordre k a précisément $2k$ dimensions*.

Dans la correspondance $\mathcal{R}^*$ entre l'espace sphérique à deux dimensions et la surface représentative, aux *droites* (grands cercles de la sphère) correspondent des *géodésiques* sur la surface, et aux *circonférences du centre m* de l'espace en question (petits cercles sur la sphère), correspondent sur la surface *trajectoires orthogonales aux géodésiques passant par le point M correspondant*, les points de chaque trajectoire ayant la même distance du point M. Le théorème du nº **I, 22** montre que *les géodésiques sur la surface sont des courbes rationnelles normales fermées de degré r. Les trajectoires orthogonales aux geodésiques passant par un point quelconque de la surface sont courbes rationnelles normales fermées: elles sont en général de degré $2r$, mais à chaque point M de la surface il en est associé un nombre fini, qui sont soit de degré inférieur à $2r$, soit de courbes non normales*. Remarquons que *toutes ces courbes exceptionnelles, qui ne sont pas normales, sont situées dans les espaces orthogonaux aux différents plans*

$$[\mathrm{ME}_j\bar{\mathrm{E}}_j] \qquad (j = 1, \ldots, r),$$

qui ont une signification métrique intrinsèque [1]. Le théorème du nº **I, 23** montre que, *toutes les propriétés locales métriques d'une géodésique quelconque ou bien d'une trajectoire orthogonale aux géodésiques passant par un point arbitraire de la surface, sont les mêmes dans tous les points de la courbe*. En particulier, par exemple, *toutes les courbures d'une telle courbe ont, le long de la courbe, des valeurs constantes*.

Remarquons encore que, d'après le nº **I, 19**, *les courbes de longueur*

---

[1] Pour $j = 1$ on a le plan tangent à la surface, pour $j > 1$ on a les plans des différentes indicatrices des courbures normales.

nulle (courbes minima) sur la surface sont courbes rationnelles normales de degré r.

8. Nous nous proposons maintenant de caractériser les surfaces représentatives par leurs propriétés locales métriques. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Pour qu'une surface plongée dans un espace non euclidien à $2r$ dimensions ($r \geqq 2$) soit la surface étudiée (M) il faut et il suffit que, dans chaque point M :

1° *Le vecteur de courbure moyenne soit nul;*

2° *Pour $k = 1, 2, \ldots, r$ l'espace osculateur d'ordre k ait précisément $2k$ dimensions;*

3° *Toutes les indicatrices de courbures normales des différents ordres soient des circonférences, le rayon de chacune étant le même pour toute la surface.*

Pour démontrer le théorème, nous allons imaginer une surface quelconque (M), plongée dans un espace non euclidien à $2r$ dimensions à courbure c et jouissant des propriétés énoncées dans le théorème, et nous allons montrer qu'il est possible d'attacher à chaque point M de la surface un repère normal de manière à satisfaire aux équations (7).

a. D'abord, d'après 1°, le vecteur de courbure moyenne étant nul, la surface est minima, et l'on peut écrire, d'après (34),

$$(37)\qquad \begin{cases} \omega_{1l} + i\omega_{2l} = c_l^1(\omega_1 - i\omega_2) \\ \omega_{1l} - i\omega_{2l} = \bar{c}_l^1(\omega_1 - i\omega_2) \end{cases} \qquad (l = 3, \ldots, 2r),$$

c_l^1, $\bar{c}_l^1$ étant des quantités complexes conjuguées. Ces relations entraînent, d'après (3),

$$(38)\qquad \begin{cases} \left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(dc_l^1 + 2ic_l^1\omega_{12} - \sum_{\alpha=3}^{2r} c_\alpha^1\,\omega_{\alpha l}\right)\right] = 0 \\ \left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(d\bar{c}_l^1 - 2i\bar{c}_l^1\omega_{12} + \sum_{\alpha=3}^{2r} \bar{c}_\alpha^1\,\omega_{\alpha l}\right)\right] = 0 \end{cases} \qquad (l = 3, \ldots, 2r).$$

Considérons les deux vecteurs normaux à la surface

$$(39)\qquad \begin{cases} u_1 = c_3^1 e_3 + c_4^1 e_4 + \ldots + c_{2r}^1 e_{2r}, \\ \bar{u}_1 = \bar{c}_3^1 e_3 + \bar{c}_4^1 e_4 + \ldots + \bar{c}_{2r}^1 e_{2r}. \end{cases}$$

On a une relation de la forme

$$(40)\qquad d^2 M = -c M\, ds^2 + \varpi_1 e_1 + \varpi_2 e_2 + \frac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2)^2 u_1 + \frac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2)^2 \bar{u}_1,$$

et elle montre que, au point M, l'espace osculateur d'ordre 2 est contenu dans l'espace qui est déterminé par les vecteurs e_1, e_2, u_1, $\bar{u}_1$. Or, d'après 2°, l'espace osculateur d'ordre 2, au point M, ayant précisément quatre dimensions, les quatre vecteurs en question sont indépendants. Par suite, en particulier, les deux vecteurs u_1, $\bar{u}_1$ déterminent un plan. Ce plan étant normal à la surface et étant contenu dans l'espace osculateur d'ordre 2, au point M, il est le plan de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 et par suite il a une signification intrinsèque.

Dans le cas $r = 2$, les deux vecteurs e_3, e_4 déterminent, évidemment, le plan de l'indicatrice d'ordre 1 : les termes ω_{1l}, ω_{2l} et les quantités c_l^1, $\bar{c}_l^1$ pour $l \geqq 5$ n'existent pas.

Dans le cas $r > 2$ rien n'empêche de particulariser le repère mobile de manière à prendre les vecteurs e_3, e_4 dans le plan de l'indicatrice. Cela revient à supposer

$$c_5^1 = c_6^1 = \ldots = c_{2r}^1 = 0;$$
$$\bar{c}_5^1 = \bar{c}_6^1 = \ldots = \bar{c}_{2r}^1 = 0.$$

Dans les deux cas, on peut donc mettre les formules (37) sous la forme

$$(41)\qquad \begin{cases} \omega_{13} - i\omega_{23} = c_3^1 (\omega_1 - i\omega_2), \qquad \omega_{14} - i\omega_{24} = c_4^1 (\omega_1 - i\omega_2), \\ \omega_{13} - i\omega_{23} = \bar{c}_3^1 (\omega_1 + i\omega_2), \qquad \omega_{14} - i\omega_{24} = \bar{c}_4^1 (\omega_1 + i\omega_2), \end{cases}$$
$$\omega_{15} = \omega_{16} = \ldots = \omega_{1,2r} = 0,$$
$$\omega_{25} = \omega_{26} = \ldots = \omega_{2,2r} = 0,$$

à condition de supprimer, dans le cas $r = 2$, les formules qui sont écrites dans les deux dernières lignes. Avec cette particularisation du repère, l'espace osculateur d'ordre 2, au point M, est l'espace

M, e_1, e_2, e_3, e_4; le plan de l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 est M, e_3, e_4.

Cela étant, pour exprimer la propriété 3° de la surface pour $k=1$, nous allons déduire l'équation de l'indicatrice d'ordre 1. Pour cela, imaginons sur la surface une courbe générale passant par le point M. On peut poser, évidemment,

$$(42) \qquad \omega_1 = ds\cos\theta, \qquad \omega_2 = ds\sin\theta,$$

ds étant l'élément de l'arc de la courbe et θ l'angle de la tangente de la courbe et du vecteur e_1. Pour la courbe considérée, la relation (40) peut s'écrire sous la forme

$$(43) \quad \frac{d^2M}{ds^2} + cM = \ldots + \frac{1}{2}\left(e^{-2i\theta}c_3^{1} + e^{2i\theta}\bar{c}_3^{1}\right)e_3 + \frac{1}{2}\left(e^{-2i\theta}c_4^{1} + e^{2i\theta}\bar{c}_4^{1}\right)e_4,$$

les termes non écrits, dans le second membre, ne déterminant la projection du vecteur $\frac{d^2M}{ds^2} + cM$ que dans le plan tangent.

Or, on a, pour la courbe considérée, les formules de Frenet généralisées

$$(44) \quad \begin{cases} \dfrac{dM}{ds} = t, \\[2mm] \dfrac{dt}{ds} = -cM + \dfrac{1}{\rho_1}n_1, \\[2mm] \dfrac{dn_j}{ds} = -\dfrac{1}{\rho_j}n_{j-1} + \dfrac{1}{\rho_{j+1}}n_{j+1} \qquad \left(j = 1, \ldots, 2r;\ \dfrac{1}{\rho_{2r+1}} = 0,\ n_0 = t\right), \end{cases}$$

t étant la tangente, n_j étant les normales et les $\frac{1}{\rho_j}$ les courbures successives de la courbe considérée.

Ces formules montrent que le second membre de la formule (43) n'est pas autre que le vecteur de la première courbure de la courbe. Par suite, la projection du vecteur de la première courbure dans le plan de l'indicatrice d'ordre 1 est le vecteur aux composantes

$$(45) \qquad X_3^{1} = \frac{1}{2}\left(e^{-2i\theta}c_3^{1} + e^{2i\theta}\bar{c}_3^{1}\right); \qquad X_4^{1} = \frac{1}{2}\left(e^{-2i\theta}c_4^{1} + e^{2i\theta}\bar{c}_4^{1}\right).$$

Il en résulte que l'indicatrice de courbure normale d'ordre 1 est en général une ellipse, dont l'équation est donnée par les formules (45), θ y étant variable.

Pour que l'indicatrice en question soit une circonférence de rayon constant $R^{(1)}$, il faut et il suffit, évidemment, que l'on ait

$$(46)\qquad \begin{cases} e_3^{1\,2} + e_4^{1\,2} = \bar{e}_3^{1\,2} + \bar{e}_4^{1\,2} = 0; \\ \frac{1}{2}(e_3^1 \bar{e}_3^1 + e_4^1 \bar{e}_4^1) = R^{1\,2}, \end{cases}$$

de sorte que la propriété 3° de la surface conduit aux relations suivantes :

$$(47)\qquad e_4^1 = i e_3^1; \quad \bar{e}_4^1 = -i \bar{e}_3^1; \quad e_3^1 \bar{e}_3^1 = R^{1\,2} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

et ces relations, à leur tour, expriment la propriété 3° de la surface pour $k = 1$.

Or, il est clair qu'on peut encore supposer $R^1 = 1$ et de plus qu'on peut s'arranger, par une rotation convenable du bivecteur $[e_3 e_4]$ dans son plan qu'on ait $e_3^1 = \bar{e}_3^1$ et même $e_3^1 > 0$. Cela étant, les $e^{(1)}$ sont complètement déterminés, et l'on a

$$(48)\qquad e_3^1 = \bar{e}_3^1 = 1; \quad e_4^1 = i; \quad \bar{e}_4^1 = -i.$$

Les formules (41) s'écrivent

$$(49)\qquad \begin{cases} \omega_{13} - i\omega_{23} = \omega_1 - i\omega_2, \\ \omega_{13} - i\omega_{23} = \omega_1 - i\omega_2, \\ \omega_{14} - i\omega_{24} = i(\omega_1 - i\omega_2), \\ \omega_{14} - i\omega_{24} = -i(\omega_1 - i\omega_2), \\ \omega_{15} = \omega_{16} = \ldots = \omega_{1,2r} = 0, \\ \omega_{25} = \omega_{26} = \ldots = \omega_{2,2r} = 0, \end{cases}$$

avec la condition à supprimer, dans le cas $r = 2$, les formules qui sont écrites dans les deux dernières lignes, et elles entrainent, d'après (38), en particulier

$$(50)\qquad \begin{cases} [(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{34} - 2\omega_{12})] = 0, \\ [(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{34} - 2\omega_{12})] = 0, \end{cases}$$

de sorte qu'on a nécessairement

$$(51)\qquad \omega_{34} = 2\omega_{12}.$$

On voit ainsi apparaître un premier groupe d'équations qui correspond aux équations (7) pour $k=1$.

b. Cela étant, supposons $r>2$. Nous allons procéder dans la démonstration du théorème par la voie d'induction complète. Soit j un nombre entier positif $\leqq r-1$ et supposons que, pour chaque surface jouissant des propriétés énoncées dans le théorème, on puisse choisir le système de référence normale de manière à avoir pour chaque $1 \leqq k \leqq j-1$, les formules

$$(52)\qquad \begin{cases} \omega_{2k-1,2k+1}+i\omega_{2k,2k+1} = x_k(\omega_1-i\omega_2); \\ \omega_{2k-1,2k+1}-i\omega_{2k,2k+1} = x_k(\omega_1+i\omega_2); \\ \omega_{2k-1,2k+2}+i\omega_{2k,2k+2} = ix_k(\omega_1-i\omega_2); \\ \omega_{2k-1,2k+2}-i\omega_{2k,2k+2} = -ix_k(\omega_1+i\omega_2); \\ \omega_{2k-1,2k+3}=\omega_{2k-1,2k+4}=\ldots=\omega_{2k-1,2r}=0; \\ \omega_{2k,2k+3}=\omega_{2k,2k+4}=\ldots=\omega_{2k,2r}=0; \\ \omega_{2k-1,2k}=(k-1)\omega_{12}, \end{cases}$$

où

$$x_k=\sqrt{\frac{1}{2}\left[k(k+1)-\frac{(k-1)(k+2)}{2}c\right]},$$

c étant la courbure de l'espace. Nous allons montrer qu'on peut s'arranger, avec un choix convenable du repère attaché à la surface, que les équations (52) subsistent encore pour $k=j$ à condition de supprimer, pour $j=r-1$, les formules qui résultent de celles des cinquième et sixième lignes.

Dans ce but, remarquons d'abord que, avec le choix supposé du repère et avec les notations (10), on a

$$(53)\qquad \begin{cases} dM=\frac{1}{2}\Omega_{-1}E_1+\frac{1}{2}\Omega_1E_{-1}; \\ dE_1=-c\Omega_1M-i\omega_{12}E_1+x_1\Omega_{-1}E_2; \\ dE_{-1}=-c\Omega_{-1}M+i\omega_{12}E_{-1}+x_1\Omega_1E_{-2}; \\ dE_k=-x_{k-1}\Omega_1E_{k-1}-ik\omega_{12}E_k+x_k\Omega_{-1}E_{k+1}; \\ dE_{-k}=-x_{k-1}\Omega_{-1}E_{-k+1}+ik\omega_{12}E_{-k}+x_k\Omega_1E_{-k-1}, \\ \qquad (k=2,\ \ldots,\ j-1). \end{cases}$$

Ces formules montrent que, à cause de 2°, les x_k $(k\leqq j-1)$ sont nécessairement différents de zéro et que, dans chaque point M de la surface, l'espace osculateur d'ordre $k(\leq j)$ se trouve déterminé par les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{2k}$.

Cela étant remarqué, revenons aux formules (52) et appliquons les formules de structure (3). Un calcul facile montre que les équations provenant des formules écrites dans les quatre premières lignes (52) sont remplies identiquement en vertu des équations du système (52). Quant aux formules écrites dans les cinquième et sixième lignes (52), elles donnent tout simplement

$$(54) \qquad \begin{aligned} &[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{2j-1,l} + i\omega_{2j,l})] = 0 \\ &[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{2j-1,l} - i\omega_{2j,l})] = 0 \end{aligned} \qquad (l = 2j+1, \ldots, 2r).$$

Enfin, la dernière équation (52) donne

$$(55) \quad \sum_{\alpha=2j+1}^{2r} [(\omega_{2j-1,\alpha} + i\omega_{2j,\alpha})(\omega_{2j-1,\alpha} - i\omega_{2j,\alpha})] = 2x_j^2[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_1 + i\omega_2)].$$

Or, d'après (54), on peut poser

$$(56) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_{2j-1,l} + i\omega_{2j,l} &= c_l^j\,(\omega_1 - i\omega_2) \\ \omega_{2j-1,l} - i\omega_{2j,l} &= \bar{c}_l^j\,(\omega_1 - i\omega_2) \end{aligned} \right. \qquad (l = 2j+1, \ldots, 2r);$$

c_l^j, $\bar{c}_l^j$ étant des quantités complexes conjuguées qui sont liées, d'après (55), par la relation

$$(57) \qquad \sum_{\alpha=2j+1}^{2r} c_\alpha^j\,\bar{c}_\alpha^j = 2x_j^2.$$

Les formules (56) entraînent

$$(58) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(dc_l^j - i(j-1)c_l^j\,\omega_{12} - \sum_{\alpha=2j+1}^{2r} c_\alpha^j\,\omega_{\alpha l}\right)\right] = 0, \\ &\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(d\bar{c}_l^j - i(j-1)\bar{c}_l^j\,\omega_{12} - \sum_{\alpha=2j+1}^{2r} \bar{c}_\alpha^j\,\omega_{\alpha l}\right)\right] = 0 \\ &\qquad\qquad (l = 2j+1, \ldots, 2r). \end{aligned} \right.$$

Considérons les deux vecteurs normaux à l'espace osculateur d'ordre j

$$(59)\quad \begin{cases} u_j = c^j_{2j+1} e_{2j+1} + c^j_{2j+2} e_{2j+2} + \ldots + c^j_{2r} e_{2r}; \\ \bar{u}_j = \bar{c}^j_{2j+1} e_{2j+1} + \bar{c}^j_{2j+2} e_{2j+2} + \ldots + \bar{c}^j_{2r} e_{2r}. \end{cases}$$

On a une relation de la forme

$$(60)\quad d^{j+1}M = \ldots + \frac{x_1 x_2 \ldots x_{j-1}}{2} (\omega_1 - i\omega_2)^{j+1} u_j + \frac{x_1 x_2 \ldots x_{j-1}}{2} (\omega_1 + i\omega_2)^{j+1} \bar{u}_j,$$

les termes non écrits, dans le second membre, ne dépendant pas de e_l, $l \geqq 2j+1$. Cette relation montre que, au point M, l'espace osculateur d'ordre $j+1$ est contenu dans l'espace qui est déterminé par les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{2j-1}, e_{2j}, u_j, \bar{u}_j$. Or, d'après 2°, l'espace osculateur d'ordre $j+1$, au point M, ayant précisément $2j+2$ dimensions, les $2j+2$ vecteurs en question sont indépendants. Par suite, en particulier, les deux vecteurs u_j, $\bar{u}_j$ déterminent un plan. Ce plan étant normal à l'espace osculateur d'ordre j et étant contenu dans l'espace osculateur d'ordre $j+1$, au point M, il est le plan de l'indicatrice de courbure normale d'ordre j et par suite il a une signification intrinsèque.

Dans le cas $j = r-1$ les deux vecteurs e_{2j+1}, e_{2j+2} déterminent, évidemment, le plan de l'indicatrice d'ordre j; les formes $\omega_{2j-1,l}$, $\omega_{2j,l}$ et les quantités c_l^j, $\bar{c}_l^j$ pour $l \geqq 2j+3$ n'existent pas.

Dans le cas $r-1 > j$, rien n'empêche de particulariser le repère mobile de manière à prendre les vecteurs e_{2j+1}, e_{2j+2} dans le plan de l'indicatrice d'ordre j. Cela revient à supposer

$$c^j_{2j+3} = c^j_{2j+4} = \ldots = c^j_{2r} = 0,$$
$$\bar{c}^j_{2j+3} = \bar{c}^j_{2j+4} = \ldots = \bar{c}^j_{2r} = 0.$$

Dans les deux cas on peut donc mettre les formules (56) sous la forme

$$(61)\quad \begin{cases} \omega_{2j-1,2j+1} + i\omega_{2j,2j+1} = c^j_{2j+1}(\omega_1 - i\omega_2); \\ \omega_{2j-1,2j+1} - i\omega_{2j,2j+1} = \bar{c}^j_{2j+1}(\omega_1 + i\omega_2); \\ \omega_{2j-1,2j+2} + i\omega_{2j,2j+2} = c^j_{2j+2}(\omega_1 - i\omega_2); \\ \omega_{2j-1,2j+2} - i\omega_{2j,2j+2} = \bar{c}^j_{2j+2}(\omega_1 + i\omega_2); \\ \omega_{2j-1,2j+3} = \omega_{2j-1,2j+4} = \ldots = \omega_{2j-1,2r} = 0; \\ \omega_{2j,2j+3} = \omega_{2j,2j+4} = \ldots = \omega_{2j,2r} = 0, \end{cases}$$

à condition de supprimer, dans le cas $j=r-1$, les formules qui résultent de celles qui sont écrites dans les deux dernières lignes. Avec cette particularisation du repère, l'espace osculateur d'ordre $j+1$, au point M, est l'espace M, $e_1, e_2, \ldots, e_{2j-1}, e_{2j-2}$; le plan de l'indicatrice de courbure normale d'ordre j est le plan M, e_{2j-1}, e_{2j-2}.

Cela étant, pour exprimer la propriété 3° de la surface pour $k=j$, imaginons sur la surface une courbe générale passant par le point M; nous avons des formules telles que (42). Pour la courbe considérée, la relation (60) peut s'écrire sous la forme

$$
(62)\qquad \frac{d^{j+1}\mathrm{M}}{ds^{j+1}} = \ldots + \frac{x_1 x_2 \ldots x_{j-1}}{2}\left(e^{-i(j+1)\theta} c^j_{2j-1} + e^{i(j+1)\theta}\bar{c}^j_{2j-1}\right) e_{2j-1} + \frac{x_1 x_2 \ldots x_{j-1}}{2}\left(e^{-i(j+1)\theta} c^j_{2j-2} + e^{i(j+1)\theta}\bar{c}^j_{2j-2}\right) e_{2j-2},
$$

les termes non écrits, dans le second membre, déterminant la projection du vecteur, correspondant au premier membre, sur l'espace M, e_1, e_2, ..., e_{2j}. D'autre part, d'après les formules (44), on a

$$
(63)\qquad \frac{d^{j+1}\mathrm{M}}{ds^{j+1}} = \ldots + \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_j}\, n_j,
$$

les termes non écrits, dans le second membre, déterminant un vecteur situé dans l'espace M, t, n_1, ..., n_{j-1}, c'est-à-dire dans l'espace M, e_1, e_2, ..., e_{2j}. Par suite, la projection sur le plan de l'indicatrice d'ordre j, du vecteur, porté dans la direction de la $j^{\text{ième}}$ normale de la courbe et de longueur égale au produit de j premières courbures (scalaires), au point M, est le vecteur aux composantes

$$
(64)\qquad \begin{cases} X^j_{2j-1} = \dfrac{x_1 x_2 \ldots x_{j-1}}{2}\left(e^{-i(j+1)\theta} c^j_{2j-1} + e^{i(j+1)\theta}\bar{c}^j_{2j-1}\right); \\[2ex] X^j_{2j-2} = \dfrac{x_1 x_2 \ldots x_{j-1}}{2}\left(e^{-i(j+1)\theta} c^j_{2j-2} + e^{i(j+1)\theta}\bar{c}^j_{2j-2}\right). \end{cases}
$$

Il en résulte que l'indicatrice de courbure normale d'ordre j ne peut être qu'une ellipse, dont l'équation est donnée par les formules (64), θ étant variable.

Pour que l'indicatrice en question soit une circonférence de rayon constant $R^{(j)}$, il faut et il suffit, évidemment, que l'on ait

$$
\begin{gathered}
c^{j\,2}_{2j+1} + c^{j\,2}_{2j+2} = \bar{c}^{j\,2}_{2j+1} + \bar{c}^{j\,2}_{2j+2} = 0, \\
\frac{(x_1 x_2 \ldots x_{j-1})^2}{2}\left\{ c^{j}_{2j+1}\bar{c}^{j}_{2j+1} + c^{j}_{2j+2}\bar{c}^{j}_{2j+2} \right\} = R^{(j)2};
\end{gathered}
\tag{65}
$$

de sorte que la propriété 3° de la surface conduit aux relations suivantes :

$$
c^{j}_{2j+2} = i c^{j}_{2j+1}; \qquad \bar{c}^{j}_{2j+2} = -i \bar{c}^{j}_{2j+1}; \qquad R^{(j)} = x_1 x_2 \ldots x_j,
\tag{66}
$$

et ces relations, à leur tour, expriment la propriété 3° de la surface pour $k = j$.

Or, on peut s'arranger, par une rotation convenable du bivecteur $[e_{2j+1} e_{2j+2}]$ dans son plan, qu'on ait $c^{j}_{2j+1} = \bar{c}^{j}_{2j+1}$ et même $c^{(j)}_{2j+1} > 0$. Cela étant, les $c^{(j)}$ sont complètement déterminés et l'on a

$$
c^{j}_{2j+1} = \bar{c}^{j}_{2j+1} = x_j; \qquad c^{j}_{2j+2} = i x_j; \qquad \bar{c}^{j}_{2j+2} = -i x_j.
\tag{67}
$$

Les formules (61) s'écrivent

$$
\left\{
\begin{aligned}
\omega_{2j-1,2j+1} + i\omega_{2j,2j+1} &= x_j(\omega_1 - i\omega_2); \\
\omega_{2j-1,2j+1} - i\omega_{2j,2j+1} &= x_j(\omega_1 + i\omega_2); \\
\omega_{2j-1,2j+2} + i\omega_{2j,2j+2} &= i x_j(\omega_1 - i\omega_2); \\
\omega_{2j-1,2j+2} - i\omega_{2j,2j+2} &= -i x_j(\omega_1 + i\omega_2), \\
\omega_{2j-1,2j+3} = \ldots &= \omega_{2j-1,2r} = 0, \\
\omega_{2j,2j+3} = \ldots &= \omega_{2j,2r} = 0,
\end{aligned}
\right.
\tag{68}
$$

avec la condition à supprimer, dans le cas $j = r - 1$, les formules qui résultent de celles qui sont écrites dans les deux dernières lignes, et elles entraînent, d'après (58), en particulier

$$
\left\{
\begin{aligned}
&[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{2j+1,2j+2} - \overline{j+1}\,\omega_{12})] = 0; \\
&[(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{2j+1,2j+2} - \overline{j+1}\,\omega_{12})] = 0,
\end{aligned}
\right.
\tag{69}
$$

de sorte qu'on a nécessairement

$$
\omega_{2j+1,2j+2} = (j+1)\,\omega_{12}.
\tag{70}
$$

On voit ainsi apparaître le groupe d'équations (68), (70) qui correspond aux équations (52) pour $k = j$.

c. Cela étant établi, on voit que, quel que soit $r \geqq 2$, étant donnée une surface jouissant des propriétés énoncées dans le théorème, il est possible d'attacher à chaque point M un repère normal de manière à satisfaire au système d'équations (52) pour $k = 1, 2, \ldots, r-1$, à condition de supprimer pour $k = r-1$ les formules qui sont écrites dans les cinquième et sixième lignes de ce système. Le raisonnement précédent montre de plus que les formules de structure de toutes les équations du système sont vérifiées identiquement en vertu du système lui-même, sauf peut-être de la formule de structure provenant de l'équation

$$\omega_{2r-1,2r} = r\omega_{12}. \tag{71}$$

Or, on trouve facilement que la formule de structure correspondante donne précisément la relation

$$c = 2\frac{r(r+1)}{(r-1)(r+2)}. \tag{72}$$

On trouve donc un système complètement intégrable, qui n'est autre que le système (7), et le théorème se trouve ainsi démontré.

Remarque I. — D'après le raisonnement précédent, l'espace osculateur d'ordre k, à chaque point M de la surface, se trouve déterminé par les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{2k}$ correspondants.

Remarque II. — Les rayons des indicatrices de courbure normale d'ordres successifs sont $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$.

III. — Sur les surfaces minima plongées dans l'espace non euclidien à six dimensions dont l'indicatrice de courbure normale de premier ordre est une circonférence de rayon constant.

1. Étant donnée une surface minima quelconque, plongée dans un espace non euclidien à $2r$ dimensions, en chaque point M de la surface, l'espace osculateur d'ordre 2 a en général quatre dimensions, de sorte que s'y trouve définie l'indicatrice de courbure normale de premier ordre. Cette indicatrice est en général une ellipse dont le centre est le point M correspondant.

Les surfaces dont nous venons de nous occuper sont d'après le théorème du n° II, **8** surfaces minima et elles jouissent, en particulier, de la propriété que, en chaque point M de la surface, l'indicatrice de courbure normale de premier ordre se réduit à une circonférence de rayon constant pour toute la surface. On peut se poser la question de la recherche de *toutes* les surfaces minima, plongées dans un espace non euclidien à $2r$ dimensions ($r \geqq 2$), qui jouissent de la propriété d'avoir, en chaque point, pour l'indicatrice de premier ordre, une circonférence de rayon constant. *Existe-t-il, dans un espace non euclidien à $2r$ dimensions, en outre des surfaces, qui ont fait l'objet des études précédentes, d'autres surfaces minima qui jouissent de la propriété intéressée?*

La réponse est négative dans le cas $r = 2$ (1). Je vais démontrer qu'elle reste négative encore dans le cas $r = 3$ (2).

2. Plaçons-nous dans un espace non euclidien à six dimensions et proposons-nous d'y trouver toutes les surfaces minima, appartenant à cet espace, qui jouissent de la propriété d'avoir pour l'indicatrice de courbure normale de premier ordre une circonférence de rayon constant. Dans ce but, imaginons une telle surface (M) et faisons correspondre à chaque point M un repère normal formé par des vecteurs unitaires rectangulaires $e_1, \ldots, e_6$ et exprimons les propriétés supposées de la surface par des relations entre les formes ω correspondantes.

D'abord, la surface étant minima on a, d'après (34), les formules

$$(73) \qquad \begin{cases} \omega_{1l} + i\omega_{2l} = c_l^{1}(\omega_1 - i\omega_2) \\ \omega_{1l} - i\omega_{2l} = \bar{c}_l^{1}(\omega_1 + i\omega_2) \end{cases} \qquad (l = 3, 4, 5, 6);$$

(1) *Voir* ma Note *Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, t. **187**, 2e semestre 1928, p. 334-336).

(2) Dans le cas $r > 3$, pour répondre à la question, j'ai été conduit (par une méthode analogue à celle que je vais utiliser pour $r = 3$) à des calculs très longs et je n'ai pas obtenu des résultats définitifs. Cependant la nature de ces calculs ne semble point exclure la possibilité d'une réponse négative, et en tout cas elle laisse prévoir que toutes les surfaces minima jouissant de la propriété voulue dépendent au plus des constantes arbitraires.

qui entraînent, d'après (38),

$$
(74) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(dc_l^{(1)} + 2ic_l^{(1)}\omega_{12} + \sum_{\alpha=3}^{6} c_\alpha^{(1)}\omega_{\alpha l}\right)\right] = 0;\\
&\left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(d\bar{c}_l^{(1)} - 2i\bar{c}_l^{(1)}\omega_{12} + \sum_{\alpha=3}^{6} \bar{c}_\alpha^{(1)}\omega_{\alpha l}\right)\right] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

De plus, l'indicatrice de courbure normale de premier ordre étant une circonférence de rayon constant, on peut s'arranger, par un choix convenable du repère, à avoir

$$
c_3^{(1)} = \bar{c}_3^{(1)} = 1; \qquad c_4^{(1)} = i; \qquad \bar{c}_4^{(1)} = -i; \qquad c_5^{(1)} = c_6^{(1)} = \bar{c}_5^{(1)} = \bar{c}_6^{(1)} = 0.
$$

Cela étant, on a

$$
(75) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\omega_{13} + i\omega_{23} = \omega_1 - i\omega_2; \qquad \omega_{14} + i\omega_{24} = i(\omega_1 - i\omega_2);\\
&\omega_{13} - i\omega_{23} = \omega_1 + i\omega_2; \qquad \omega_{14} - i\omega_{24} = -i(\omega_1 + i\omega_2);\\
&\omega_{15} = \omega_{16} = 0;\\
&\omega_{25} = \omega_{26} = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

et ces relations, à leur tour, expriment les propriétés voulues de la surface. Elles entraînent, d'après (74),

$$
(76) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{34} - 2\omega_{12})] = 0;\\
&[(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{34} - 2\omega_{12})] = 0;\\
&[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{35} + i\omega_{45})] = 0; \qquad [(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_{36} + i\omega_{46})] = 0;\\
&[(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{35} - i\omega_{45})] = 0; \qquad [(\omega_1 + i\omega_2)(\omega_{36} - i\omega_{46})] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

On a donc nécessairement

$$
(77) \qquad \omega_{34} = 2\omega_{12},
$$

et de plus, avec les notations du n° II, 8,

$$
(78) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\omega_{35} + i\omega_{45} = c_5^{(2)}(\omega_1 - i\omega_2); \qquad \omega_{36} + i\omega_{46} = c_6^{(2)}(\omega_1 - i\omega_2);\\
&\omega_{35} - i\omega_{45} = \bar{c}_5^{(2)}(\omega_1 + i\omega_2); \qquad \omega_{36} - i\omega_{46} = \bar{c}_6^{(2)}(\omega_1 + i\omega_2).
\end{aligned}
\right.
$$

L'équation (77) entraîne

$$
(79) \qquad
\begin{aligned}
&[(\omega_{35} + i\omega_{45})(\omega_{35} - i\omega_{45})] + [(\omega_{36} + i\omega_{46})(\omega_{36} - i\omega_{46})]\\
&\quad = 2(3 - c)[(\omega_1 - i\omega_2)(\omega_1 + i\omega_2)].
\end{aligned}
$$

de sorte que l'on a

$$c_5^{(2)}\bar{c}_5^{(2)} + c_6^{(2)}\bar{c}_6^{(2)} = 2(3 - c). \tag{80}$$

Pour simplifier l'écriture nous omettons, dans la suite, les indices supérieurs des $c_k^{(2)}$, $\bar{c}_k^{(2)}$.

Quant aux équations (78) elles entraînent

$$\left\{\begin{aligned}
&[(\omega_1 - i\omega_2)(dc_5 + 3ic_5\omega_{12} - c_6\omega_{56})] = 0;\\
&[(\omega_1 + i\omega_2)(d\bar{c}_5 - 3i\bar{c}_5\omega_{12} - \bar{c}_6\omega_{56})] = 0;\\
&[(\omega_1 - i\omega_2)(dc_6 + 3ic_6\omega_{12} + c_5\omega_{56})] = 0;\\
&[(\omega_1 + i\omega_2)(d\bar{c}_6 - 3i\bar{c}_6\omega_{12} + \bar{c}_5\omega_{56})] = 0.
\end{aligned}\right. \tag{81}$$

On peut donc poser

$$\left\{\begin{aligned}
dc_5 &= -3ic_5\omega_{12} + c_6\omega_{56} + c_5^*(\omega_1 - i\omega_2);\\
d\bar{c}_5 &= 3i\bar{c}_5\omega_{12} + \bar{c}_6\omega_{56} + \bar{c}_5^*(\omega_1 + i\omega_2);\\
dc_6 &= -3ic_6\omega_{12} - c_5\omega_{56} + c_6^*(\omega_1 - i\omega_2);\\
d\bar{c}_6 &= 3i\bar{c}_6\omega_{12} - \bar{c}_5\omega_{56} + \bar{c}_6^*(\omega_1 + i\omega_2);
\end{aligned}\right. \tag{82}$$

et l'on a, d'après (80),

$$\left\{\begin{aligned}
&c_5\bar{c}_5^* + c_6\bar{c}_6^* = 0;\\
&\bar{c}_5 c_5^* + \bar{c}_6 c_6^* = 0.
\end{aligned}\right. \tag{83}$$

Or, aucune des quantités c_5, c_6 n'est nulle, car autrement la surface serait plongée dans un espace à moins de six dimensions. Il existe donc des quantités γ, $\bar{\gamma}$ imaginaires conjuguées, telles qu'on a

$$\left\{\begin{aligned}
c_5^* &= \gamma\bar{c}_6; &\quad c_6^* &= -\gamma\bar{c}_5;\\
\bar{c}_5^* &= \bar{\gamma}c_6; &\quad \bar{c}_6^* &= -\bar{\gamma}c_5,
\end{aligned}\right. \tag{84}$$

et les formules (82) peuvent se mettre sous la forme

$$\left\{\begin{aligned}
dc_5 &= -3ic_5\omega_{12} + c_6\omega_{56} + \gamma\bar{c}_6(\omega_1 - i\omega_2);\\
d\bar{c}_5 &= 3i\bar{c}_5\omega_{12} + \bar{c}_6\omega_{56} + \bar{\gamma}c_6(\omega_1 + i\omega_2);\\
dc_6 &= -3ic_6\omega_{12} - c_5\omega_{56} - \gamma\bar{c}_5(\omega_1 - i\omega_2);\\
d\bar{c}_6 &= 3i\bar{c}_6\omega_{12} - \bar{c}_5\omega_{56} - \bar{\gamma}c_5(\omega_1 + i\omega_2).
\end{aligned}\right. \tag{85}$$

Ces formules conduisent aux relations suivantes :

$$
(86)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(\bar c_6\, d\gamma + 2i\bar c_6\gamma\omega_{12} - \overline{c_5\gamma\bar\gamma + \frac{c_6}{2}(c_6\bar c_5 - c_5\bar c_6) - \frac{3}{2}(2-e)c_5(\omega_1 + i\omega_2)}\right)\right] = 0;\\
&\left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(c_6\, d\bar\gamma - 2ic_6\bar\gamma\omega_{12} - \overline{\bar c_5\gamma\bar\gamma + \frac{\bar c_6}{2}(\bar c_6 c_5 - \bar c_5 c_6) - \frac{3}{2}(2-e)\bar c_5(\omega_1 - i\omega_2)}\right)\right] = 0;\\
&\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(\bar c_5\, d\gamma + 2i\bar c_5\gamma\omega_{12} + \overline{c_6\gamma\bar\gamma + \frac{c_5}{2}(c_5\bar c_6 - \bar c_5 c_6) - \frac{3}{2}(2-e)c_6(\omega_1 + i\omega_2)}\right)\right] = 0;\\
&\left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(c_5\, d\bar\gamma - 2ic_5\bar\gamma\omega_{12} + \overline{\bar c_6\gamma\bar\gamma + \frac{\bar c_5}{2}(\bar c_5 c_6 - c_5\bar c_6) - \frac{3}{2}(2-e)\bar c_6(\omega_1 - i\omega_2)}\right)\right] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$
(87)\qquad \varphi = c_5^2 + c_6^2; \qquad \bar\varphi = \bar c_5^2 + \bar c_6^2; \qquad \psi = c_5\bar c_6 - \bar c_5 c_6.
$$

Avec ces notations, grâce à la relation (80), les formules (86) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$
(88)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(d\gamma + 2i\gamma\omega_{12} + \frac{1}{4(3-e)}\varphi\psi\,\overline{\omega_1 + i\omega_2}\right)\right] = 0;\\
&\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(\psi\,\overline{d\gamma + 2i\gamma\omega_{12}} - \overline{\varphi\gamma\bar\gamma - \frac{3}{2}(2-e)(\omega_1 + i\omega_2)}\right)\right] = 0;\\
&\left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(d\bar\gamma - 2i\bar\gamma\omega_{12} - \frac{1}{4(3-e)}\bar\varphi\psi\,\overline{\omega_1 - i\omega_2}\right)\right] = 0;\\
&\left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(\psi\,\overline{d\bar\gamma - 2i\bar\gamma\omega_{12}} + \overline{\varphi\gamma\bar\gamma - \frac{3}{2}(2-e)(\omega_1 - i\omega_2)}\right)\right] = 0
\end{aligned}
\right.
$$

et elles entrainent, évidemment,

$$
(89)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\varphi\left\{\frac{\psi^2}{4(3-e)} + \gamma\bar\gamma - \frac{3}{2}(2-e)\right\} = 0,\\
&\bar\varphi\left\{\frac{\psi^2}{4(3-e)} + \gamma\bar\gamma - \frac{3}{2}(2-e)\right\} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

On est donc conduit à distinguer deux cas : soit

$$
\varphi = \bar\varphi = 0,
$$

soit

$$
\varphi \neq 0, \qquad \bar\varphi \neq 0, \qquad \frac{\psi^2}{4(3-e)} + \gamma\bar\gamma - \frac{3}{2}(2-e) = 0.
$$

Or, le premier cas caractérise, d'après le raisonnement fait au n° II, 8, les surfaces pour lesquelles l'indicatrice de courbure normale d'ordre 2 est encore une circonférence (nécessairement de rayon constant) et, par suite, ce cas conduit aux surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce d'ordre 3.

Nous allons donc nous occuper seulement du second cas. Dans ce cas, nous avons les formules

$$(90)\qquad \begin{cases} \left[(\omega_1 - i\omega_2)\left(d\gamma + 7i\gamma\omega_{12} + \dfrac{\varphi\psi}{4(3-c)}\overline{\omega_1 + i\omega_2}\right)\right] = 0; \\ \left[(\omega_1 + i\omega_2)\left(d\bar{\gamma} - 7i\bar{\gamma}\omega_{12} - \dfrac{\bar{\varphi}\psi}{4(3-c)}\overline{\omega_1 - i\omega_2}\right)\right] = 0; \end{cases}$$

$$\frac{\psi^2}{4(3-c)} + \gamma\bar{\gamma} - \frac{3}{2}(2-c) = 0,$$

les formes φ, $\bar{\varphi}$ étant supposées différentes de zéro. Or, les formules (85) donnent

$$(91)\qquad d\psi = \gamma\bar{\varphi}(\omega_1 - i\omega_2) - \bar{\gamma}\varphi(\omega_1 + i\omega_2),$$

de sorte que la dernière équation (90) entraîne

$$(92)\qquad d\gamma\bar{\gamma} = \frac{\psi}{2(3-c)}\{\bar{\gamma}\varphi(\omega_1 + i\omega_2) - \gamma\bar{\varphi}(\omega_1 - i\omega_2)\}.$$

D'autre part, d'après les relations (90), on peut poser

$$(93)\qquad \begin{cases} d\gamma = -7i\gamma\omega_{12} - \dfrac{\varphi\psi}{4(3-c)}(\omega_1 + i\omega_2) + \gamma^*(\omega_1 - i\omega_2), \\ d\bar{\gamma} = 7i\bar{\gamma}\omega_{12} + \bar{\gamma}^*(\omega_1 + i\omega_2) + \dfrac{\bar{\varphi}\psi}{4(3-c)}(\omega_1 - i\omega_2), \end{cases}$$

de sorte qu'on a

$$(94)\qquad d\gamma\bar{\gamma} = \left(\gamma\bar{\gamma}^* - \bar{\gamma}\frac{\varphi\psi}{4(3-c)}\right)(\omega_1 + i\omega_2) + \left(\bar{\gamma}\gamma^* + \gamma\frac{\bar{\varphi}\psi}{4(3-c)}\right)(\omega_1 - i\omega_2).$$

Par suite, d'après (92), (94), on a les formules

$$(95)\qquad \gamma\bar{\gamma}^* = 3\bar{\gamma}\frac{\varphi\psi}{4(3-c)}; \qquad \bar{\gamma}\gamma^* = -3\gamma\frac{\bar{\varphi}\psi}{4(3-c)}.$$

Cela étant, nous allons distinguer deux cas suivant que $\psi \neq 0$ ou bien $\psi = 0$ et nous allons les ramener *ad absurdum* tous les deux.

Cas $\psi \neq 0$. — Dans ce cas, on a nécessairement $\gamma\bar{\gamma} \neq 0$ et l'on peut mettre les formules (93) sous la forme

$$(96)\quad \left\{\begin{aligned} d\gamma &= -2i\gamma\omega_{12} - \frac{\varphi\psi}{4(3-e)}(\omega_1 + i\omega_2) - 3\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\,\frac{\bar{\varphi}\psi}{4(3-e)}(\omega_1 - i\omega_2); \\ d\bar{\gamma} &= 2i\bar{\gamma}\omega_{12} + 3\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\,\frac{\varphi\psi}{4(3-e)}(\omega_1 + i\omega_2) + \frac{\bar{\varphi}\psi}{4(3-e)}(\omega_1 - i\omega_2). \end{aligned}\right.$$

et ces équations entrainent, d'après les formules de structure, la relation suivante

$$(97)\quad 16(3-e)(\gamma\bar{\gamma})^2 - \gamma\bar{\gamma}\{4\varphi\bar{\varphi} - 34(3-e)(2-e)\} - 9(2-e)\varphi\bar{\varphi} = 0.$$

Cette relation différentiée donne la relation suivante

$$(98)\quad 8\gamma\bar{\gamma} + \frac{2}{3-e}\varphi\bar{\varphi} + \frac{3}{2}(2-e) = 0$$

et celle-ci, à son tour, ne donne par différentiation aucune relation nouvelle. Or, pour que les deux relations (97), (98) soient (algébriquement) compatibles, elles exigent, comme on le vérifie par un calcul facile,

$$(99)\quad e - 2 = 0,$$

et par suite, d'après (98) et (89),

$$(100)\quad -4(3-e)\gamma\bar{\gamma} = \varphi\bar{\varphi} = \psi^2,$$

et par suite, en particulier,

$$\varphi\bar{\varphi} - \psi^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(101)\quad (e_3\bar{e}_3 + e_4\bar{e}_4)^2 = 0.$$

L'hypothèse $\psi \neq 0$ conduit donc aux conséquences contradictoires

$$e_3 = \bar{e}_3 = e_4 = \bar{e}_4 = 0;$$

donc elle est absurde.

Cas $\psi = 0$. — La relation $\psi = 0$ exprime que l'ellipse (dont la signification est intrinsèque)

$$
(102) \qquad \begin{cases} \lambda_5 = \frac{1}{2}\left(e^{-3i\theta} c_5 + e^{3i\theta} \bar{c}_5\right), \\ \lambda_6 = \frac{1}{2}\left(e^{-3i\theta} c_6 + e^{3i\theta} \bar{c}_6\right), \end{cases}
$$

située dans le plan [M, e_5, e_6] dégénère et se confond avec un segment d'une droite située dans ce plan. Or, rien n'empêche de faire une rotation du bivecteur [$e_5 e_6$] dans son plan, de manière à amener un quelconque des deux vecteurs e_5, e_6 dans la direction de la droite en question. Cela étant, on a $c_5 c_6 = 0$ et cela est absurde.

On a donc le théorème suivant :

Les surfaces minima plongées dans un espace non euclidien à six dimensions et appartenant à cet espace, dont l'indicatrice de courbure normale de premier ordre est une circonférence de rayon constant, sont toutes et seules les surfaces représentées par les fonctions sphériques de première espèce de troisième ordre.