JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. VAN DOP

Sur une classe de congruences de droites

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 12 (1933), p. 205-218.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12__205_0>

Sur une classe de congruences de droites;

PAR A. VAN DOP

(Delft).

M. Tzitzéica a étudié récemment (¹) les propriétés géométriques de certaines congruences de droites, qu'il a nommées *congruences de M. Goursat*. Je me suis proposé dans ce travail de donner quelques résultats concernant une autre classe de congruences de droites, possédant des propriétés analogues.

1. Nous voulons définir, dans un espace projectif S_n à n dimensions, une congruence de droites à l'aide de ses deux réseaux focaux. Rappelons à cet effet que pour définir, dans S_n, une congruence de droites (xy) à l'aide des réseaux focaux (x) et (y), il faut prendre $n+1$ couples de solutions x^i, y^i d'un système de la forme

$$(1) \qquad x_v = ay, \qquad y_u = bx$$

où x_v et y_u sont des dérivées partielles, a et b des fonctions de u et v (²). On déduit de (1) les équations de Laplace suivantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} x_{uv} - \dfrac{a_u}{a} x_v - abx = 0, \\ y_{uv} - \dfrac{b_v}{b} y_u - aby = 0. \end{cases}$$

Dans la suite nous considérons les congruences de droites, qui ont la

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, p. 189.

(²) TZITZÉICA, *Géom. diff. proj. des réseaux*, p. 63.

propriété

$$(3) \qquad a_u = b_v.$$

L'image d'une *surface* R *de MM. Tzitzéica-Demoulin* dans un S_3 est une congruence de droites avec cette propriété. Elle est en outre alors quadratique.

2. Il y a pour les congruences, définies par (1) et (3), une propriété géométrique caractéristique.

On a immédiatement de (1)

$$x_{uv} = abx + a_u y,$$
$$y_{uv} = b_v x + aby.$$

Les points x_{uv} et y_{uv} sont donc situés sur la droite xy de la congruence (xy). Considérons en même temps les points $x+y$ et $x-y$. Chaque point arbitraire de la droite xy est donné par

$$\lambda x + \mu y$$

et les quatre points nommés sont définis par

$$\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_1 = \frac{a_u}{ab}, \qquad \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_2 = \frac{ab}{b_v} = \frac{ab}{a_u}, \qquad \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_3 = 1, \qquad \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)_4 = -1.$$

Le rapport anharmonique de ces quatre points est

$$(x+y,\ x-y,\ x_{uv},\ y_{uv}) = -1.$$

Les points $x+y$ et $x-y$ sont donc harmoniquement conjugués avec les points x_{uv} et y_{uv}. Réciproquement si les quatre points ont un rapport harmonique, on déduit $a_u = b_v$.

La propriété que nous avons démontrée est celle-ci :

Dans le cas général, les quatre points $x+y$, $x-y$, x_{uv}, y_{uv} ont un rapport anharmonique $\neq -1$. Le rapport anharmonique a la valeur -1 seulement dans le cas où (xy) est une congruence de l'espèce que nous venons de définir.

3. *Transformation* Γ. — Soit donnée une congruence de l'espèce nommée, définie à l'aide du système

$$(1) \qquad x_v = ay, \qquad y_u = bx$$

où

$$(3) \qquad a_u = b_v.$$

Soit ξ, η un couple particulier de solutions du système adjoint de (1), donc

$$(4) \qquad \xi_v = b\eta, \qquad \eta_u = a\xi,$$

et soit (z) un réseau harmonique à la congruence (xy), c'est-à-dire un réseau dont les tangentes passent respectivement par x et par y : le réseau (z) est défini (¹) à l'aide du système

$$(5) \qquad z_u = \xi x, \qquad z_v = \eta y.$$

L'équation de Laplace de ce réseau est donc

$$(6) \qquad z_{uv} = \frac{b\eta}{\xi} z_u + \frac{a\xi}{\eta} z_v.$$

En particulier, si l'on prend $x = \alpha$, $y = \beta$; α, β étant un couple particulier de solutions de (1), une solution ρ correspondante de (5) et de (6) est donnée par

$$(7) \qquad \rho_u = \xi\alpha, \qquad \rho_v = \eta\beta.$$

Au moyen de cette solution, à laquelle on peut ajouter une constante, on construit ∞^1 congruences $(x'y')$ harmoniques à (z).

D'après la théorie générale, on peut prendre pour les foyers du rayon $x'y'$

$$\rho z_u - \rho_u z = \rho\xi\left(x - \frac{\alpha}{\rho} z\right),$$
$$\rho z_v - \rho_v z = \rho\eta\left(y - \frac{\beta}{\rho} z\right),$$

ou bien

$$(8) \qquad x' = x - \frac{\alpha}{\rho} z, \qquad y' = y - \frac{\beta}{\rho} z.$$

(¹) TZITZÉICA, *Géom. diff. proj. des réseaux*, p. 75.

et l'on tire de (8)

$$(9)\qquad \begin{cases} x'_v = \left(a - \dfrac{x\eta}{\rho}\right)\left(y - \dfrac{\xi}{\rho} z\right) = \left(a - \dfrac{x\eta}{\rho}\right) y' = a' y', \\ y'_u = \left(b - \dfrac{\xi z}{\rho}\right) x' = b' x'. \end{cases}$$

Pour que la congruence $(x'y')$, obtenue à partir de (xy), soit une congruence de l'espèce nommée, il faut et il suffit qu'on ait

$$a'_u = b'_v.$$

Considérons d'abord deux couples très spéciaux de solutions de (1)

$$(10)\qquad \alpha^1 = \beta^1 = e^{\chi}, \qquad \alpha^2 = -\beta^2 = e^{-\chi},$$

si nous posons d'abord

$$(11)\qquad a = \chi_v, \qquad b = \chi_u,$$

qui vérifient bien la relation (3).

Or, on a

$$a'^1_u = \left(a - \frac{\alpha^1 \eta}{\rho}\right)_u = a_u - \frac{e^{\chi}\chi_u \eta}{\rho} - \frac{e^{\chi}\chi_v \xi}{\rho} + \frac{e^{2\chi}\xi\eta}{\rho^2},$$

$$b'^1_v = \left(b - \frac{\beta^1 \xi}{\rho}\right)_v = b_v - \frac{e^{\chi}\chi_v \xi}{\rho} - \frac{e^{\chi}\chi_u \eta}{\rho} + \frac{e^{2\chi}\xi\eta}{\rho^2}.$$

Donc

$$a'^1_u = b'^1_v,$$

et de même

$$a'^2_u = b'^2_v.$$

Les transformations suivantes donnent donc des congruences de la même espèce

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} x'^1 = x - \dfrac{e^{\chi}}{\rho^1} z, \\ y'^1 = y - \dfrac{e^{\chi}}{\rho^1} z, \end{cases} \qquad \rho^1_u = \xi e^{\chi}, \qquad \rho^1_v = \eta e^{\chi},$$

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{cases} x'^2 = x - \dfrac{e^{-\chi}}{\rho^2} z, \\ y'^2 = y - \dfrac{e^{-\chi}}{\rho^2} z, \end{cases} \qquad \rho^2_u = \xi e^{-\chi}, \qquad \rho^2_v = -\eta e^{-\chi}.$$

On tire de I, que les droites xy, $x'^1 y'^1$ se coupent au point

$$\xi^1 = x - y.$$

et de II, que les droites xy, $x'^{(2)}y'^{(2)}$ se coupent au point

$$\bar{z}^{2} = x + y.$$

Les quatre points x, y, $\bar{z}^{(1)}$ et $\bar{z}^{(2)}$ sont deux à deux harmoniquement conjugués.

Le point $\bar{z}^{(1)}$ décrit un réseau $(\bar{z}^{(1)})$, conjugué à ∞^1 congruences $(x'^{(1)}y'^{(1)})$ et le point $\bar{z}^{(2)}$ décrit un réseau $(\bar{z}^{(2)})$, conjugué à ∞^1 congruences $(x'^{(2)}y'^{(2)})$.

On obtient aisément l'équation de Laplace du réseau $(\bar{z}^{(1)})$

$$\bar{z}_u^{(1)} = x_u - y_u, \qquad \bar{z}_v^{(1)} = x_v - y_v,$$

$$\bar{z}_{uv}^{(1)} = x_{uv} - y_{uv} = \chi_{uv} y + \chi_u \chi_v x - (\chi_{uv} x + \chi_u \chi_v y),$$

$$\bar{z}_{uv}^{(1)} = (\chi_u \chi_v - \chi_{uv})\bar{z}^{(1)}. \tag{12}$$

L'équation de Laplace du réseau $(\bar{z}^{(2)})$ est

$$\bar{z}_{uv}^{(2)} = (\chi_u \chi_v + \chi_{uv})\bar{z}^{(2)}, \tag{13}$$

$(\bar{z}^{(1)})$ et $(\bar{z}^{(2)})$ sont donc des réseaux avec les équations de Laplace à invariants égaux.

Je désignerai dans la suite de ce travail la transformation (8) par *transformation* Γ.

4. Considérons maintenant un couple particulier de solutions ξ, η du système (4), en posant

$$\xi = \kappa(\mathfrak{x}_u - b\mathfrak{z}), \qquad \eta = -\kappa(\mathfrak{z}_v - a\mathfrak{x}) \qquad (\kappa = \text{const.}), \tag{14}$$

où $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{z}$ est un couple de solutions du système (1). La solution ρ correspondante de (6) est maintenant donnée par

$$\rho_u = \kappa\mathfrak{x}(\mathfrak{x}_u - b\mathfrak{z}), \qquad \rho_v = -\kappa\mathfrak{z}(\mathfrak{z}_v - a\mathfrak{x})$$

et l'on déduira

$$\rho_u = \quad \kappa(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_u - \mathfrak{z}b\mathfrak{x}) = \kappa(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_u - \mathfrak{z}\mathfrak{z}_u) = \left[\frac{\kappa}{2}(\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{z}^2)\right]_u,$$

$$\rho_v = -\kappa(\mathfrak{z}\mathfrak{z}_v - \mathfrak{x}a\mathfrak{z}) = \kappa(\mathfrak{x}\mathfrak{x}_v - \mathfrak{z}\mathfrak{z}_v) = \left[\frac{\kappa}{2}(\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{z}^2)\right]_v,$$

ce qui conduit à

$$\rho = \frac{\kappa}{2}(\alpha^2 - \beta^2) + \text{const.} \tag{15}$$

Il s'agit de choisir la constante de manière que l'on ait

$$a'_u = b'_v$$

ou

$$\left(a - \frac{\alpha\eta}{\rho}\right)_u = \left(b - \frac{\beta\xi}{\rho}\right)_v,$$

$$a_u - \frac{\alpha_u \eta}{\rho} - \frac{a\alpha\xi}{\rho} + \frac{\alpha^2\xi\eta}{\rho^2} = b_v - \frac{\beta_v\xi}{\rho} - \frac{b\beta\eta}{\rho} + \frac{\beta^2\xi\eta}{\rho^2}$$

Si l'on tient compte de (3) et que l'on tire α_u et β_v de (14), on pourra déduire

$$-\eta\left[\frac{\xi}{\kappa} + b\beta\right] - a\alpha\xi + \frac{\alpha^2\xi\eta}{\rho} = \xi\left[\frac{\eta}{\kappa} - a\alpha\right] - b\beta\eta + \frac{\beta^2\xi\eta}{\rho},$$

d'où nous tirons, après division par $\xi\eta$,

$$-\frac{1}{\kappa} + \frac{\alpha^2}{\rho} = \frac{1}{\kappa} + \frac{\beta^2}{\rho},$$

$$\rho = \frac{\kappa}{2}(\alpha^2 - \beta^2). \tag{16}$$

La constante de (15) est donc zéro.

On a le résultat suivant : *Étant donnée une congruence* (xy), *définie par ses réseaux focaux*

$$x_v = ay, \qquad y_u = bx, \tag{1}$$

$$a_u = b_v, \tag{3}$$

et si l'on définit la solution ρ *correspondante de* (5) *et* (6) *par* (16)

$$\rho = \frac{\kappa}{2}(\alpha^2 - \beta^2), \tag{16}$$

α, β *étant un couple de solutions de* (1), *la congruence* $(x'y')$ *transformée* Γ *de* (xy) *par*

$$x' = x - \frac{\alpha}{\rho}z, \qquad y' = y - \frac{\beta}{\rho}z \tag{8}$$

sera de la même espèce. Le point z est défini par

$$z_u = \varkappa(\alpha_u - b\beta)x, \qquad z_v = -\varkappa(\beta_v - a\alpha)y.$$

5. Théorème de permutabilité. — Il y a pour les transformations Γ, données par (8), un théorème de permutabilité. Dans le paragraphe suivant nous retournons au cas spécial, où $a_u = b_v$. Considérons maintenant le cas général d'une congruence (xy) définie à l'aide de ses deux réseaux focaux

$$(1) \qquad x_v = ay, \qquad y_u = bx.$$

La transformation Γ était donnée par

$$(8) \qquad x' = x - \frac{\alpha}{\rho} z, \qquad y' = y - \frac{\beta}{\rho} z.$$

Nous voulons démontrer la propriété suivante : *Si deux congruences $(x'y')$ et $(x''y'')$ sont des transformées Γ d'une même congruence (xy), elles le sont d'une double infinité.*

Soient en effet α', β' et α'', β'' les couples de solutions du système (1) qui conduisent aux congruences transformées $(x'y')$, $(x''y'')$. On a donc

$$(17) \qquad \begin{cases} x' = x - \dfrac{\alpha'}{\rho'} z', & y' = y - \dfrac{\beta'}{\rho'} z', \\[2mm] x'' = x - \dfrac{\alpha''}{\rho''} z'', & y'' = y - \dfrac{\beta''}{\rho''} z'', \end{cases}$$

où z', z'', ρ', ρ'' sont définis par

$$\begin{aligned} z'_u &= \xi' x, & z'_v &= \eta' y, \\ z''_u &= \xi'' x, & z''_v &= \eta'' y, \\ \rho'_u &= \xi' \alpha', & \rho'_v &= \eta' \beta', \\ \rho''_u &= \xi'' \alpha'', & \rho''_v &= \eta'' \beta''. \end{aligned}$$

Partons de la congruence $(x'y')$ et appliquons-lui une transformation Γ particulière. Remarquons que les formules (17) prouvent que le système

$$(18) \qquad x'_v = a'y', \qquad y'_u = b'x',$$

où

$$a' = a - \frac{\alpha'\eta'}{\rho'}, \qquad b' = b - \frac{\beta'\xi'}{\rho'},$$

admet le couple de solutions

$$\text{(19)} \qquad \overline{\alpha}' = \alpha'' - \frac{\alpha'}{\rho'}\sigma', \qquad \overline{\beta}' = \beta'' - \frac{\beta'}{\rho'}\sigma'$$

où σ' est une solution du système

$$\text{(20)} \qquad \sigma'_{1_u} = \alpha''\xi', \qquad \sigma'_{1_v} = \beta''\eta';$$

et le système adjoint du système (18) admet le couple de solutions

$$\text{(21)} \qquad \overline{\xi}' = \xi'' - \frac{\xi'}{\rho'}\sigma'_1, \qquad \overline{\eta}' = \eta'' - \frac{\eta'}{\rho'}\sigma'_1$$

où σ'_1 est une solution du système

$$\text{(22)} \qquad \sigma'_{1_u} = \alpha'\xi'', \qquad \sigma'_{1_v} = \beta'\eta''.$$

Au moyen du couple $\overline{\xi}'$, $\overline{\eta}'$ on peut déterminer un réseau $(\overline{z}')$, harmonique à $(x'y')$, par le système

$$\overline{z}'_u = \overline{\xi}'x' = \left(\xi'' - \frac{\xi'}{\rho'}\sigma'_1\right)\left(x - \frac{\alpha'}{\rho'}z'\right) = \left(z'' - \frac{\sigma'_1}{\rho'}z'\right)_u,$$
$$\overline{z}'_v = \left(z'' - \frac{\sigma'_1}{\rho'}z'\right)_v,$$

donc, à une constante additive près,

$$\text{(23)} \qquad \overline{z}' = z'' - \frac{\sigma'_1}{\rho'}z'.$$

On aura ensuite

$$\text{(24)} \qquad \overline{x}' = x' - \frac{\overline{\alpha}'}{\overline{\rho}'}\overline{z}', \qquad \overline{y}' = y' - \frac{\overline{\beta}'}{\overline{\rho}'}\overline{z}',$$

où $\overline{\rho}'$ est déterminé par

$$\overline{\rho}'_u = \overline{\alpha}'\overline{\xi}', \qquad \overline{\rho}'_v = \overline{\beta}'\overline{\eta}',$$

ou

$$\overline{\rho}'_u = \left(\alpha'' - \frac{\alpha'}{\rho'}\sigma'\right)\left(\xi'' - \frac{\xi'}{\rho'}\sigma'_1\right) = \left(\rho'' - \frac{\sigma'\sigma'_1}{\rho'}\right)_u,$$
$$\overline{\rho}'_v = \left(\rho'' - \frac{\sigma'\sigma'_1}{\rho'}\right)_v,$$

donc

$$\bar{\rho}' = \rho'' - \frac{\sigma'\sigma_1'}{\rho'}. \tag{25}$$

On déduit de (24) à l'aide de (25)

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x}' &= \frac{1}{\rho'\rho'' - \sigma'\sigma_1'}\begin{vmatrix} x & \xi' & \xi'' \\ x' & \rho' & \sigma_1' \\ x'' & \sigma' & \rho'' \end{vmatrix}, \\ \bar{y}' &= \frac{1}{\rho'\rho'' - \sigma'\sigma_1'}\begin{vmatrix} y & \eta' & \eta'' \\ \beta' & \rho' & \sigma_1' \\ \beta'' & \sigma' & \rho'' \end{vmatrix}. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Si l'on part maintenant de la congruence $(x''y'')$ avec les couples de solutions

$$\bar{\xi}'' = \xi' - \frac{\xi''}{\rho''}\sigma'', \qquad \bar{\eta}'' = \eta' - \frac{\eta''}{\rho''}\sigma'',$$
$$\bar{x}'' = x' - \frac{x''}{\rho''}\sigma_1'', \qquad \bar{\beta}'' = \beta' - \frac{\beta''}{\rho''}\sigma_1'',$$

où

$$\sigma''_x = x''\xi', \qquad \sigma''_y = \beta''\eta',$$
$$\sigma''_{1x} = x'\xi'', \qquad \sigma''_{1y} = \beta'\eta'',$$

on trouvera la même congruence si l'on prend

$$\sigma' = \sigma'' = \sigma + c, \qquad \sigma_1' = \sigma_1'' = \sigma_1 + c_1,$$

où c et c_1 sont deux constantes arbitraires. On a ainsi une double infinité de congruences $(\bar{x}\bar{y})$, où

$$\bar{x} = \frac{1}{\rho'\rho'' - (\sigma + c)(\sigma_1 + c_1)}\begin{vmatrix} x & \xi' & \xi'' \\ x' & \rho' & \sigma_1 + c_1 \\ x'' & \sigma + c & \rho'' \end{vmatrix},$$

$$\bar{y} = \frac{1}{\rho'\rho'' - (\sigma + c)(\sigma_1 + c_1)}\begin{vmatrix} y & \eta' & \eta'' \\ \beta' & \rho' & \sigma_1 + c_1 \\ \beta'' & \sigma + c & \rho'' \end{vmatrix},$$

qui admettent comme transformées Γ les congruences $(x'y')$ et $(x''y'')$. Pour $c = c_1 = \infty$ on a la congruence initiale (xy).

Le théorème de permutabilité des congruences de M. Goursat, donné par M. Tzitzéica [1] est un cas spécial de ce qui précède. Si le système (1) est de la forme

$$x_v = a y, \qquad y_u = a x, \tag{27}$$

ce système est identique à son adjoint et nous pouvons prendre pour ξ, η un couple de solutions de (27). La solution ρ correspondante est alors donnée par

$$\rho_u = \xi^2, \qquad \rho_v = \eta^2$$

et

$$\sigma = \sigma_1,$$

car les équations (20) et (22) deviennent

$$\sigma_u = \xi'\xi'', \qquad \sigma_v = \eta'\eta''.$$

6. Considérons maintenant le cas spécial, où la congruence initiale est de l'espèce définie par (3). Supposons en outre

$$\rho' = \frac{\varkappa'}{2}(\alpha'^2 - \beta'^2),$$

$$\rho'' = \frac{\varkappa''}{2}(\alpha''^2 - \beta''^2),$$

et

$$\xi' = \varkappa'(\alpha'_u - b\beta'), \qquad \eta' = -\varkappa'(\beta'_v - a\alpha'),$$
$$\xi'' = \varkappa''(\alpha''_u - b\beta''), \qquad \eta'' = -\varkappa''(\beta''_v - a\alpha''),$$

c'est-à-dire que les congruences $(x'y')$ et $(x''y'')$ sont de la même espèce. Les réseaux (z') et (z'') sont définis par

$$z'_u = \varkappa'(\alpha'_u - b\beta')x, \qquad z'_v = -\varkappa'(\beta'_v - a\alpha')y,$$
$$z''_u = \varkappa''(\alpha''_u - b\beta'')x, \qquad z''_v = -\varkappa''(\beta''_v - a\alpha'')y.$$

On peut alors demander : Si l'on part de deux congruences $(x'y')$ et $(x''y'')$, transformées Γ d'une congruence (xy), toutes les trois de la même espèce nommée, quand la congruence $(\overline{x}'\overline{y}')$ est-elle aussi de cette espèce ?

---

[1] TZITZÉICA, *Sur certaines congruences de droites* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, 1928, p. 189).

Partons de

$$\bar{\alpha}'^2 - \bar{\beta}'^2.$$

$$(28) \qquad \bar{\alpha}'^2 - \bar{\beta}'^2 = (\alpha'^2 - \beta'^2)\frac{\sigma^2}{\rho'^2} - 2\frac{\sigma}{\rho'}(\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'') + (\alpha''^2 - \beta''^2).$$

Or nous tenons compte que

$$\alpha'^2 - \beta'^2 = \frac{2\rho'}{\kappa'}, \qquad \alpha''^2 - \beta''^2 = \frac{2\rho''}{\kappa''},$$

On aura ensuite, de (20) et (22),

$$\frac{1}{\kappa'}\sigma_u + \frac{1}{\kappa''}\sigma_{1u} = \frac{\alpha''\xi'}{\kappa'} + \frac{\alpha'\xi''}{\kappa''} = \alpha''\alpha'_u + \alpha'\alpha''_u - \alpha''b\beta' - \alpha'b\beta'' = (\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'')_u$$

$$\frac{1}{\kappa'}\sigma_v + \frac{1}{\kappa''}\sigma_{1v} = (\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'')_v.$$

Donc

$$\frac{\sigma}{\kappa'} + \frac{\sigma_1}{\kappa''} = \alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + C.$$

On a donc de (28)

$$\frac{\kappa''}{2}(\bar{\alpha}'^2 - \bar{\beta}'^2) = \rho'' - \frac{\sigma\sigma_1}{\rho'} + \frac{C\kappa''\sigma}{\rho'},$$

et si l'on tient compte de (25), on a

$$\frac{\kappa''}{2}(\bar{\alpha}'^2 - \bar{\beta}'^2) = \bar{\rho}' + \frac{C\kappa''\sigma}{\rho'}.$$

Pour que la congruence $(\bar{x}'\bar{y}')$ soit de l'espèce nommée, il faut et il suffit qu'on ait

$$C = 0,$$

$$\bar{\rho}' = \frac{\kappa''}{2}(\bar{\alpha}'^2 - \bar{\beta}'^2).$$

On a donc le résultat suivant : *Étant données deux congruences de l'espèce nommée $(x'y')$ et $(x''y'')$, transformées d'une congruence initiale (xy) de la même espèce respectivement par $\Gamma_{\kappa'}$ et par $\Gamma_{\kappa''}$ — nous désignons une transformation, définie par (8) et (16) par transformation Γ_κ — il y a encore une congruence de l'espèce nommée transformée $\Gamma_{\kappa''}$ de $(x'y')$ et transformée $\Gamma_{\kappa'}$ de $(x''y'')$.*

7. Parmi les congruences de l'espèce nommée, celles qui sont en même temps quadratiques sont intéressantes. Dans un S_3 ces congruences sont l'image des surfaces R de MM. Tzitzéica-Demoulin.

De plus, si l'on transforme une surface R par la transformation $R_\varkappa$ de M. Jonas, on obtient une nouvelle surface R. Dans un S_3 on a donc une nouvelle congruence de l'espèce donnée et *cette congruence est maintenant une transformée* $\Gamma_\varkappa$ *de l'image de la surface* R *initiale*.

L'image d'une surface R dans S_3 est une congruence de droites (pq), définie par ses réseaux focaux (1)

$$\left\{\begin{aligned} q_v &= \gamma p, \\ p_u &= \beta q, \end{aligned}\right. \qquad \gamma_u = \beta_v. \tag{29}$$

l'image de la surface transformée est une congruence $(\overline{p}\overline{q})$, définie par

$$\left\{\begin{aligned} \overline{q}_v &= \overline{\gamma}\,\overline{p}, \\ \overline{p}_u &= \overline{\beta}\,\overline{q}, \end{aligned}\right. \qquad \overline{\gamma}_u = \overline{\beta}_v, \tag{30}$$

où les fonctions β, γ, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$ doivent vérifier les relations

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\gamma} &= -\gamma + \frac{ak}{\Lambda}, \\ \overline{\beta} &= -\beta + \frac{bh}{\Lambda}, \end{aligned}\right. \tag{31}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} a_v &= \gamma b, \\ b_u &= \beta a, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} h_v &= \beta k, \\ k_u &= \gamma h, \end{aligned}\right.$$

et la fonction Λ est donnée par (2)

$$\Lambda = \frac{\varkappa}{2}(a^2 - b^2).$$

---

(1) *Voir* A. Terracini, *Sulla teoria delle congruenze W*, (*Rendiconti del Reale Istituto Lombardo*, t. LX, 1927, p. 657).

(2) Dans toutes ces formules j'ai employé la notation de M. Jonas. *Voir* : H. Jonas, *Ueber die Konstruktion der W-Kongruenzen zu einen gegebenen Brennflächenmantel und über die Transformation der R-Flächen* (*Jahresber. der Deutschen Mathem. Verein.*, Bd 29, 1920).

Changeons maintenant la notation par

$$
(32)\quad \begin{cases} q = x, \\ p = y; \end{cases} \begin{cases} \gamma = a, \\ \beta = b; \end{cases} \begin{cases} \bar{q} = x', \\ \bar{p} = -y'; \end{cases} \begin{cases} -\bar{\gamma} = a', \\ -\bar{\beta} = b'; \end{cases} \begin{cases} a = \alpha, \\ b = \beta; \end{cases} \begin{cases} h = \xi, \\ k = \eta; \end{cases} \Lambda = \rho.
$$

Les équations (29) et (30) deviennent

$$
\begin{cases} x_v = a y, \\ y_u = b x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_v = a' y', \\ y'_u = b' x', \end{cases}
$$

et les équations (31) donnent

$$
a' = a - \frac{\alpha\eta}{\rho},
$$

$$
b' = b - \frac{\beta\xi}{\rho}.
$$

M. Terracini a fait voir aussi que le point d'intersection des droites $p\bar{p}$ et $q\bar{q}$ décrit un réseau (z) harmonique à la congruence $(p\bar{p})$ et à la congruence $(q\bar{q})$. Il donne les formules suivantes :

$$
(33)\qquad \begin{cases} z = -\dfrac{\Lambda}{a}(\bar{q} - q), \\[2mm] z = \dfrac{\Lambda}{b}(p + \bar{p}), \end{cases}
$$

et à l'aide de (32) l'on obtient

$$
z = -\frac{\rho}{\alpha}(x' - x),
$$

$$
z = \frac{\rho}{\beta}(y - y'),
$$

ou

$$
x' = x - \frac{\alpha}{\rho} z,
$$

$$
y' = y - \frac{\beta}{\rho} z;
$$

et

$$
\Lambda = \frac{\kappa}{2}(a^2 - b^2)
$$

donne

$$
\rho = \frac{\kappa}{2}(\alpha^2 - \beta^2).
$$

On a donc le résultat suivant : *La transformation* R_κ *de M. Jonas, qui* *transforme une surface* R *en une autre surface* R_1 *est dans un* S_5 *une transformation* Γ_x *de deux congruences de droites de l'espèce nommée.*

8. M. Tzitzéica a étudié (¹) les congruences de M. Goursat et une transformation Γ de ces congruences. Il remarque que l'image d'une surface isotherme-asymptotique de M. Fubini dans un S_5 est une congruence quadratique de M. Goursat. Si nous changeons la notation des résultats de M. Terracini par (32) et nous posons en outre $a = b$, nous considérons dans un S_5 l'image d'une surface isotherme-asymptotique de M. Fubini. Nous aurons donc du paragraphe précédent : *La transformation* W *de M. Fubini* (²) *des surfaces isothermes-asymptotiques correspond dans un* S_5 *à une transformation* Γ *de deux congruences de M. Goursat.*

En effet la transformation W de M. Fubini est caractérisée par

$$\begin{aligned} a &= ch \\ b &= ck \end{aligned} \qquad (c = \text{const.})$$

et

$$\begin{aligned} \Lambda_u &= ch^2, \\ \Lambda_v &= ck^2. \end{aligned}$$

Nous posons alors

$$\frac{\Lambda}{c} = \rho$$

au lieu de $\Lambda = \rho$ et nous aurons

$$\begin{aligned} \rho_u &= \xi^2, \\ \rho_v &= \eta^2, \end{aligned}$$

ce qui conduit aux formules de M. Tzitzéica.

(¹) G. Tzitzéica, *Sur certaines congruences de droites* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. VII, 1928, p. 189).

(²) Fubini-Čech, *Geometria Proiettiva Differenziale* (N. Zanichelli, Bologna, 1927), t. I, p. 283-286.