JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACQUES CHAPELON

Sur les minima des formes quadratiques binaires et positives

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 391-417.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__391_0>

Sur les minima des formes quadratiques binaires et positives ;

PAR JACQUES CHAPELON.

1. *Notations.* — Dans ce qui suit, j'envisage des formes quadratiques binaires, positives, de déterminant négatif, à coefficients entiers :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (a, b, c).$$

Les lettres grecques seront réservées à la représentation des formes réduites. Dans l'énumération des classes, la classe $a(x^2 + y^2)$ compte pour $1/2$, et la classe $a(2x^2 + 2xy + 2y^2)$ compte pour $1/3$.

Je représente, selon l'usage, la forme (a, b, c) par un point M du plan de la variable complexe τ, savoir :

$$\tau = -\frac{b}{a} + i\frac{\sqrt{ac - b^2}}{a},$$

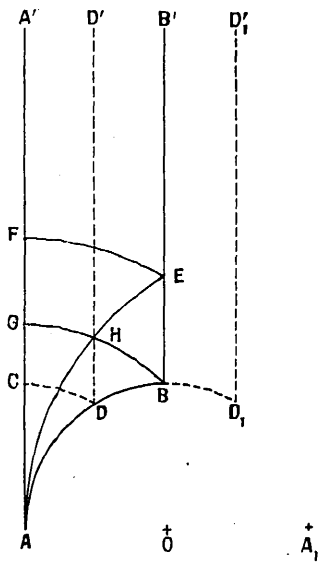
où le radical est positif. Pour abréger, il m'arrivera de parler du point (a, b, c), du point symétrique de (a, b, c) par rapport à une circonférence, etc. Ces expressions doivent, bien entendu, s'entendre comme étant relatives aux points représentatifs.

Dans la représentation géométrique s'introduit, comme il est classique, un domaine fondamental du groupe modulaire, par exemple le domaine $D'DBD_1D'_1$ (voir la figure), limité par la circonférence de rayon unité ayant pour centre l'origine et les deux parallèles

$$x = \pm\frac{1}{2}.$$

La forme réduite (α, β, γ) est située dans ce quadrilatère, les côtés BD_1 et $D_1 D'_1$ étant exclus.

Pour les formes de l'ordre propre (a, b, c), j'appellerai μ_1, μ_2 les premiers minima impairs $(\mu_1 \leqq \mu_2)$, μ le premier minimum pair, et, de même, μ'_1, μ'_2, μ' pour les formes (a', b', c'), etc.; j'appellerai aussi $\nu_1, \nu_2, \nu_3 (\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \nu_3)$ les trois premiers minima.



Pour les formes de l'ordre impropre de discriminant $8N + 3$, j'appellerai n_1, n_2, n_3 les trois premiers minima, nécessairement congrus à 2 (mod 4) et $n_1 \leqq n_2 \leqq n_3$. Dans le cas du discriminant $8N + 7$ j'appellerai m_1, m_2 les deux premiers minima multiples de $4 (m_1 \leqq m_2)$ et m le premier minimum congru à 2 (mod 4).

Il s'introduira des fonctions arithmétiques, sommes de minima ou de combinaisons de minima. Il est entendu que de telles sommes portent sur toutes les classes du discriminant envisagé, de l'ordre propre ou de l'ordre impropre, selon les cas, chaque classe introduisant une fois la combinaison correspondante, sauf les classes $a(x^2 + y^2)$ et $a(2x^2 + 2xy + 2y^2)$ pour lesquelles on convient de diviser respectivement par 2 ou 3 la combinaison de minima.

Enfin, tous les minima dont il s'agit sont des minima propres, c'est-à-dire sont représentables proprement par la forme.

2. *Introduction.* — Les premières relations entre minima ont été données sans démonstration par Liouville ([1]). Les résultats de Liouville ont été établis par G. Humbert ([2]), qui, de plus, a donné d'abord pour les formes du discriminant $8N+7$ une relation non indiquée par Liouville ([3]), puis, dans divers travaux, de nombreuses relations qui jouent, vis-à-vis des fonctions sommes de combinaisons de minima, le même rôle que les célèbres formules de Kronecker vis-à-vis des fonctions nombre de classes de formes. Je laisse pour le moment ce second point de vue de côté, me réservant d'y revenir dans un travail ultérieur.

Les résultats de Liouville et de G. Humbert portent exclusivement sur des formes de discriminant $4N+3$. Rien n'est ajouté en ce qui concerne les formes de discriminant $8N+3$, mais pour les formes de discriminant $8N+7$, je montre qu'il existe une correspondance $(1-1)$ entre les classes de l'ordre impropre. Il en résulte diverses formules liant des combinaisons de sommes de minima (*cf.* n° **27**). Une de ces formules, dans un cas particulier, donne précisément le résultat qu'Humbert a obtenu incidemment par la théorie des fonctions thêta.

En ce qui concerne les discriminants $4N+1$ et $4N+2$, il existe également une correspondance $(1-1)$ entre les classes, de sorte que, à toute classe de minima μ_1, μ_2, μ correspond une classe de minima μ'_1, μ'_2, μ et

$$\mu'_1 = \frac{1}{2}\mu.$$

$$\mu'_2 = \mu_1 + \mu_2 - \frac{1}{2}\mu.$$

$$\mu' = 2\mu_1.$$

Pour les formes propres de discriminant $4N$, on connaît la relation classique

$$F(4N) = 2F(N).$$

Elle est le reflet d'une correspondance $(1-2)$ entre les formes de discriminant N et celles de discriminant $4N$. La règle formulant cette correspondance est la suivante : soient μ'_1, μ'_2, μ' les minima d'une

([1]) *Journal de Mathématiques*, 1866, p. 191-192.

([2]) *Journal de Mathématiques*, 1907, p. 384-393.

([3]) *Journal de Mathématiques*, 1907, p. 410.

classe de discriminant N; μ_1, μ_2, μ les minima d'une classe correspondante de discriminant 4N, on a, $(i, k = 1, 2 \text{ ou } 2, 1)$:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \mu'_i,\\
\mu_2 &= 2\mu' - \mu'_i + 2\mu'_k,\\
\mu &= 2(\mu'_k + \mu') - 2|\mu'_k - \mu'|.
\end{aligned}$$

d'où résultent trois groupes de relations générales liant des sommes de combinaisons de minima de l'ordre propre de discriminant 4N à des combinaisons de l'ordre propre, de discriminant N [n° **16**, formules (F), (F′), (F″)].

Enfin, on montre que ces correspondances peuvent s'interpréter géométriquement d'une manière simple : on peut représenter les classes en correspondance par des points symétriques par rapport à la circonférence bissectrice intérieure de l'angle B du triangle A′ABB′,

I. — $\Delta \equiv 0$ (mod 4).

3. Partons de l'expression

$$X^2 - Y^2 - Z^2 = 4N, \tag{1}$$

qui s'écrit

$$(X - Y)(X + Y) - Z^2 = 4N \tag{2}$$

et

$$(X - Z)(X + Z) - Y^2 = 4N \tag{3}$$

et peut donc, indifféremment, être considérée comme un discriminant d'une forme quadratique $(X - Y, Z, X + Y)$ ou $(X - Z, Y, X + Z)$.

4. Posons

$$\begin{aligned}
X &= 2n + 2p + 1,\\
Y &= 2p,\\
Z &= 2l - 1,
\end{aligned}$$

n, p, l sont des entiers, et, de plus,

$$n \geqq 0, \qquad l \geqq 1, \qquad p \geqq 0, \qquad n \geqq l. \tag{C}$$

Dans le premier cas, la forme quadratique $(a, b, c) = (X - Y, Z,$

$X+Y$) est telle que

$$a = 2n + 1,$$
$$b = 2l - 1,$$
$$c = 2n + 4p + 1,$$

d'où

$$n = \frac{a-1}{2},$$
$$l = \frac{b+1}{2},$$
$$p = \frac{c-a}{4}.$$

Si donc on se donne une forme quadratique positive de discriminant $4N$, de l'ordre propre, et si a et b sont simultanément impairs, alors nécessairement

$$c \equiv a \pmod 4,$$

et l'on peut calculer les entiers n, p, l.

Les conditions d'inégalité pour n, l, p se traduisent en

$$c \geqq a, \qquad a \geqq b, \qquad b > 0.$$

Si l'on introduit la figure modulaire, il en résulte que le point figuratif de la forme, soit τ, est dans le triangle A'ABB', le côté BB' étant exclu. En traçant alors l'arc de cercle CD, de centre A et de rayon 1, on voit aisément que :

1° Si le point τ est dans D'DBB', la forme est réduite, je lui associe $(a, -b, c)$ qui est également réduite.

2° Si le point τ est dans A'CDD', la translation $\tau' = \tau - 1$ le ramène dans $B'BD_1D'_1$ et la substitution correspondante sur x, y réduit la forme. Je lui associe également son opposée, sauf si la forme est ambiguë ($a = b$). Les deux formes réduites sont donc $[a, \pm(b-a), a - 2b + c]$.

3° Si le point τ est dans CAD, la substitution correspondant à $\tau = -\frac{1+\tau'}{\tau'}$ réduit la forme. Je lui associe son opposée, sauf si la forme est ambiguë. Les deux formes réduites sont donc $[a - 2b + c, \pm(b-a), a]$.

On en déduit le tableau suivant :

	Formes réduites.
$0 \leqq b < \frac{a}{2} \leqq \frac{c}{2}$	$(a, \pm b, c)$
$\frac{a}{2} < b < \frac{c}{2}$	$[a, \pm(b-a), a-2b+c]$
$\frac{c}{2} < b$	$[a-2b+c, \pm(b-a), a]$

5. Réciproquement, soit (α, β, γ) une forme réduite, de discriminant $4N$, et de l'ordre propre.

1° Si $\beta < 0$, β impair, la forme (a, b, c) coïncide avec $(\alpha, -\beta, \gamma)$.

Si β pair, α impair, la transformation $\tau' + 1 = \tau$ donne la forme $(\alpha, \beta + \alpha, \alpha + 2\beta + \gamma)$ dont le point représentatif est dans $A'ADD'$ et qui est la forme (a, b, c).

Si β pair, α pair : à la forme (α, β, γ) je substitue la forme opposée $(\alpha, -\beta, \gamma)$ que je transporte dans CAD par $\tau = \frac{-1}{\tau' + 1}$, d'où la forme $(\gamma, \beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma)$ qui est une forme (a, b, c).

2° Si $\beta > 0$, une discussion analogue donne les résultats suivants :

β impair : (a, b, c) coïncide avec (α, β, γ).

β pair, α impair : (a, b, c) est $(\alpha, -\beta + \alpha, \alpha - 2\beta + \gamma)$ équivalente à $(\alpha, -\beta, \gamma)$.

β pair, α pair : (a, b, c) est $(\gamma, -\beta + \gamma, \alpha - 2\beta + \gamma)$ équivalente à (α, β, γ).

3° Si $\beta = 0$, α impair : (a, b, c) est $(\alpha, \alpha, \alpha + \gamma)$. Si α pair : (a, b, c) est $(\gamma, \gamma, \alpha + \gamma)$.

Ces résultats sont groupés dans le tableau suivant :

β	α	a	b	c
impair		α	$\lvert\beta\rvert$	γ
pair	impair	α	$\alpha - \lvert\beta\rvert$	$\alpha - 2\lvert\beta\rvert + \gamma$
	pair	γ	$\gamma - \lvert\beta\rvert$	$\alpha - 2\lvert\beta\rvert + \gamma$

La conséquence est que : à toute forme (α, β, γ) correspond une forme (a, b, c), unique, et, réciproquement, à toute forme (a, b, c) correspondent deux formes réduites (opposées), et une seule, si la forme est ambiguë.

Si donc, $F(4N)$ est le nombre des classes de formes de l'ordre propre et de discriminant $4N$, ce sera également le nombre des formes (a, b, c), avec la convention de compter deux fois toute forme non ambiguë et une fois toute forme ambiguë. C'est également le nombre des solutions de l'équation (1), en n, l, p, avec les restrictions (C) et des conventions analogues.

6. *Évaluation des minima.* — On forme facilement le tableau suivant :

β	α	μ_1	μ_2	μ
impair		α	γ	$\alpha - 2\vert\beta\vert + \gamma$
pair	impair	α	$\alpha - 2\vert\beta\vert + \gamma$	γ
pair	pair	γ	$\alpha - 2\vert\beta\vert + \gamma$	α

Donc, dans tous les cas,

$$\mu_1 = a,$$
$$\mu_2 = c,$$
$$\mu = a - 2b + c.$$

Le calcul des réduites en fonction des minima est donné par le tableau suivant :

	α	β	γ
$\mu < \mu_1 < \mu_2$	μ	$\pm \frac{\mu_1 + \mu - \mu_2}{2}$	μ_1
$\mu_1 < \mu < \mu_2$	μ_1	$\pm \frac{\mu + \mu_1 - \mu_2}{2}$	μ
$\mu_1 < \mu_2 < \mu$	μ_1	$\pm \frac{\mu_1 + \mu_2 - \mu}{2}$	μ_2

ou encore, si l'on désigne par n_1, n_2, n_3 les trois premiers minima $(n_1 \leqq n_2 \leqq n_3)$, dans tous les cas

$$\alpha = n_1, \qquad \beta = \pm \frac{n_3 - n_1 - n_2}{2}, \qquad \gamma = n_2.$$

7. Passons maintenant à l'équation (3) qui donne une forme

$$(A, B, C) = (X - Z, Y, X + Z).$$

où A, B, C sont pairs, de sorte que

$$(A, B, C) = (2a', 2b', 2c')$$

et

$$a' = n + p - l + 1,$$
$$b' = p,$$
$$c' = n + p + l,$$

de sorte que, par l'intermédiaire de n, p, l, on peut établir une correspondance entre les formes (a, b, c), de discriminant $4N$ et les formes (a', b', c'), de discriminant N.

On a

$$n = \frac{a' + c' - 2b' - 1}{2},$$
$$p = b',$$
$$l = \frac{c' - a' + 1}{2}.$$

D'après les conditions imposées à n, p, l, on voit que a' et c' doivent être de parités contraires. Donc la forme (a', b', c') est de l'ordre propre. De plus, on doit avoir

$$b' \geqq 0, \qquad c' - a' \geqq 0, \qquad a' \geqq b'.$$

Donc le point représentatif est encore dans le triangle A'ABB'.

La correspondance annoncée est exprimée par les formules

$$a = a' - 2b' + c',$$
$$b = c' - a',$$
$$c = a' + 2b' + c'$$

ou, en résolvant,

$$a' = \frac{a - 2b + c}{4},$$
$$b' = \frac{c - a}{4},$$
$$c' = \frac{a + 2b + c}{4}.$$

On en déduit, en appelant τ et τ' les valeurs représentatives des formes (a, b, c) et (a', b', c'), la relation

$$\tau' = \frac{1 - \tau}{1 + \tau},$$

substitution elliptique de période 2 dont les points doubles sont $-1+\sqrt{2}$ et $-1-\sqrt{2}$ et, par suite, représentant une symétrie autour de la circonférence décrite sur le segment déterminé par ces deux abscisses comme diamètre, suivie d'une symétrie autour de l'axe des abscisses. Soit BG l'arc de cette circonférence situé dans le domaine A'ABB'. On peut négliger la seconde symétrie qui fait passer de la racine τ à la racine imaginaire conjuguée de la représentative de la forme (a', b', c') et l'on en déduit une *correspondance entre les classes de formes propres d'ordre* 4N *et les classes propres d'ordre* N, *par symétrie des points représentatifs par rapport à la circonférence bissectrice intérieure de l'angle* B *du triangle* A'ABB'.

8. Précisons cette correspondance. Supposons d'abord qu'on donne une réduite de discriminant N, soit $(\alpha', \beta', \gamma')$. On peut en déduire (a', b', c') par une discussion analogue à celle déjà faite (n° **5**) et dont je me borne à résumer les résultats dans le tableau suivant :

α'	γ'	a'	b'	c'
pair	impair	α'	$\vert\beta'\vert$	γ'
		α'	$\alpha'-\vert\beta'\vert$	$\alpha'-2\vert\beta'\vert+\gamma'$
impair	pair	α'	$\vert\beta'\vert$	γ'
		γ'	$\gamma'-\vert\beta'\vert$	$\alpha'-2\vert\beta'\vert+\gamma'$
impair	impair	α'	$\alpha'-\vert\beta'\vert$	$\alpha'-2\vert\beta'\vert+\gamma'$
		γ'	$-\gamma'-\vert\beta'\vert$	$\alpha'-2\vert\beta'\vert+\gamma'$

La conséquence est que, en général, à toute réduite $(\alpha', \beta', \gamma')$ correspondent deux formes (a', b', c') : elles coïncident si $\alpha' = 2\beta'$ ou si $\alpha' = \gamma'$, mais on les compte deux fois toutes deux quand même.

Réciproquement, partons d'une forme (a', b', c') et cherchons la réduite : elle est donnée par le tableau suivant :

$$0 \leqq b' \leqq \frac{a'}{2} \qquad (a', \pm b', c'),$$

$$\frac{a'}{2} < b' \leqq \frac{c'}{2} \qquad [a', \pm(b'-a'), a'-2b'+c'],$$

$$\frac{c'}{2} < b' \qquad [a'-2b'+c', \pm(a'-b'), a'].$$

Donc, à toute forme (a', b', c') correspondent deux réduites. Néanmoins, il n'en correspond qu'une seule si la forme est ambiguë. Enfin, on convient de compter partout pour $\frac{1}{2}$ les formes équivalentes à $k(x^2+y^2)$.

La conclusion est que le nombre des formes (a', b', c') est $2\,\mathrm{F}(\mathrm{N})$, à condition de marquer deux fois toute forme non ambiguë ou toute forme ambiguë pour laquelle $\mu'_1 = \mu'_2$ (n° **9**), et une fois les autres formes ambiguës.

Remarquons maintenant que, à une forme (a, b, c) ambiguë correspond une forme (a', b', c') ambiguë. Car si la forme (a, b, c) est ambiguë, son point représentatif est sur AA′ ou sur AB, ce qui, par symétrie par rapport à la bissectrice BG, donne un point sur AA′ ou sur BB′, donc une forme (a', b', c') ambiguë. Réciproquement, toute forme (a', b', c') ambiguë a son point représentatif sur AA′ et sur BB′. Il y en a aussi qui ont leur point représentatif sur DD′ ou DC, mais ce sont celles pour lesquelles $\mu'_1 = \mu'_2$ et nous avons convenu de les faire se comporter dans l'énumération comme des formes non ambiguës. D'où résulte que dans la symétrie, une forme (a', b', c') ambiguë marquée une fois seulement se transforme en une forme (a, b, c) ambiguë marquée une fois seulement. Donc nos conventions établissent bien une correspondance $(1-1)$ entre les formes (a, b, c) et les formes (a', b', c') et, par suite, on obtient d'abord la relation classique

$$\mathrm{F}(4\mathrm{N}) = 2\,\mathrm{F}(\mathrm{N}).$$

9. *Évaluation des minima.* — Leurs valeurs, d'abord en fonction de la forme réduite, puis en fonction des deux formes (a', b', c') qui correspondent à cette réduite sont données par le tableau suivant :

α'	γ'	μ'_1	μ'_2	μ'	μ'_1	μ'_2	μ'
pair	impair	γ'	$\alpha' - 2\vert\beta'\vert + \gamma'$	α'	c' $a' - 2b' + c'$	$a' - 2b' + c'$ c'	a' a'
impair	pair	α'	$\alpha' - 2\vert\beta'\vert + \gamma'$	γ'	a' $a' - 2b' + c'$	$a' - 2b' + c'$ c'	c' a'
impair	impair	α'	γ'	$\alpha' - 2\vert\beta'\vert + \gamma'$	a' $a' - 2b' + c'$	$a' - 2b' + c'$ a'	c' c'

10. Il en résulte la réduction des formes (a', b', c') en fonction de leurs minima :

	α'	β'	γ'
$\mu' < \mu'_1 < \mu'_2$	μ'	$\pm \dfrac{\mu'_2 - \mu' - \mu'_1}{2}$	μ'_1
$\mu'_1 < \mu' < \mu'_2$	μ'_1	$\pm \dfrac{\mu'_2 - \mu' - \mu'_1}{2}$	μ'
$\mu'_1 < \mu'_2 < \mu'$	μ'_1	$\pm \dfrac{\mu'_1 + \mu'_2 - \mu'}{2}$	μ'_2

11. Enfin le tableau inverse de l'avant-dernier tableau permet le calcul des formes (a', b', c') en fonction des minima

	a'	b'	c'
$\mu' < \mu'_1 < \mu'_2$	μ'	$\dfrac{\mu' + \mu'_2 - \mu'_1}{2}$	μ'_2
	μ'	$\dfrac{\mu' + \mu'_1 - \mu'_2}{2}$	μ'_2
$\mu'_1 < \mu' < \mu'_2$	μ'	$\dfrac{\mu' + \mu'_2 - \mu'_1}{2}$	μ'_2
	μ'_1	$\dfrac{\mu'_1 + \mu' - \mu'_2}{2}$	μ'
$\mu'_1 < \mu'_2 < \mu'$	μ'_2	$\dfrac{\mu'_2 + \mu' - \mu'_1}{2}$	μ'
	μ'_1	$\dfrac{\mu'_1 + \mu' - \mu'_2}{2}$	μ'

12. La correspondance entre les deux formes (a', b', c') ayant les mêmes minima est exprimée par les systèmes suivants où (a'_1, b'_1, c'_1) et (a'_2, b'_2, c'_2) désignent ces deux formes :

$$\mu' < \mu'_1 < \mu'_2 \qquad \begin{aligned} a'_1 &= a'_2 \\ b'_1 &= a'_2 - b'_2 \\ c'_1 &= a'_2 - 2b'_2 + c'_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a'_2 &= a'_1 \\ b'_2 &= a'_1 - b'_1 \\ c'_2 &= a'_1 - 2b'_1 + c'_1 \end{aligned}$$

$$\mu'_1 < \mu' < \mu'_2 \qquad \begin{aligned} a'_1 &= c'_2 \\ b'_1 &= c'_2 - b'_2 \\ c'_1 &= a'_2 - 2b'_2 + c'_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a'_2 &= a'_1 - 2b'_1 + c'_1 \\ b'_2 &= a'_1 - b'_1 \\ c'_2 &= a'_1 \end{aligned}$$

et

$$\mu'_1 < \mu'_2 < \mu' \qquad \begin{aligned} a'_1 &= a'_2 - 2b'_2 + c'_2 \\ b'_1 &= c'_2 - b'_2 \\ c'_1 &= c'_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a'_2 &= a'_1 - 2b'_1 + c'_1 \\ b'_2 &= c'_1 - b'_1 \\ c'_2 &= c'_1 \end{aligned}$$

Géométriquement, dans le premier cas, la forme d'indice 1 est dans le triangle A'CDD', la forme d'indice 2 est la symétrique par rapport à DD'.

Dans le deuxième cas, la forme 1 est dans le triangle CDA et l'on en déduit la forme 2 par symétrie par rapport à CD et DD'.

Dans le troisième cas, la forme 1 est dans le triangle CDA et la forme 2 est la symétrique par rapport à CD.

13. Étant en possession des expressions des minima des formes (a', b', c') et (a, b, c) en fonction de leurs coefficients, et des relations qui lient les coefficients de ces formes, il est manifestement aisé d'en déduire d'abord des relations entre les minima des formes (a, b, c) et (a', b', c'), puis une correspondance entre les deux formes (a, b, c) correspondant elles-mêmes aux deux formes (a'_1, b'_1, c'_1) et (a'_2, b'_2, c'_2). Désignons-les par (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) respectivement, et soient μ_{i1}, μ_{i2} $(\mu_{i1} \leqq \mu_{i2})$ les deux premiers minima impairs de (a_i, b_i, c_i), μ_{i0} le premier minimum pair.

Comme correspondance entre les minima, on obtient les résultats rassemblés dans le tableau suivant :

	μ_{11}	μ_1	μ_{10}	μ_{21}	μ_{22}	μ_{20}
$\mu' < \mu'_1 < \mu'_2$	μ'_1	$2\mu' - \mu'_1 + 2\mu'_2$	$4\mu'$	μ'_2	$2\mu' - \mu'_2 + 2\mu'_1$	$4\mu'$
$\mu'_1 < \mu' < \mu'_2$	μ'_1	$2\mu' - \mu'_1 + 2\mu'_2$	$4\mu'$	μ'_2	$2\mu' - \mu'_2 + 2\mu'_1$	$4\mu'_1$
$\mu'_1 < \mu'_2 < \mu'$	μ'_1	$2\mu' - \mu'_1 + 2\mu'_2$	$4\mu'_2$	μ'_2	$2\mu' - \mu'_2 + 2\mu'_1$	$4\mu'_1$

On peut les condenser dans les formules suivantes, valables dans tous les cas :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu'_i, \\ \mu_2 &= 2\mu' - \mu'_i + 2\mu'_k, \\ \mu &= 2(\mu'_k + \mu') - 2|\mu'_k - \mu'|. \end{aligned}$$

i, k prennent successivement les couples de valeurs 1, 2 et 2, 1.

14. Comme correspondance entre les formes (a, b, c), on obtient les formules suivantes :

$$\mu' < \mu'_1 < \mu'_2, \qquad a_2 = \frac{a_1 + 2b_1 + c_1}{4}, \quad b_2 = \frac{3a_1 + 2b_1 - c_1}{4}, \quad c_2 = \frac{9a_1 - 6b_1 + c_1}{4},$$

et l'on peut permuter les indices;

$$\mu'_1 < \mu' < \mu'_2, \qquad a_2 = \frac{a_1 + 2b_1 + c_1}{4}, \quad b_2 = \frac{-3a_1 - 2b_1 + c_1}{4}, \quad c_2 = \frac{9a_1 - 6b_1 + c_1}{4}$$

ou

$$a_1 = \frac{a_2 - 2b_2 + c_2}{4}, \quad b_1 = \frac{3a_2 - 2b_2 - c_2}{4}, \quad c_1 = \frac{9a_2 + 6b_2 + c_2}{4};$$

$$\mu'_1 < \mu'_2 < \mu', \qquad a_2 = \frac{a_1 - 2b_1 + c_1}{4}, \quad b_2 = \frac{-3a_1 + 2b_1 + c_1}{4}, \quad c_2 = \frac{9a_1 + 6b_1 + c_1}{4},$$

et l'on peut permuter les indices.

Ces formules peuvent, elles aussi, se rassembler en un système unique.

Le premier cas est caractérisé par

$$a_i + 2b_i + c_i \equiv 4 \pmod{8}, \qquad 3a_i + 2b_i - c_i > 0.$$

Dans le deuxième cas

$$a_1 + 2b_1 + c_1 \equiv 4 \pmod{8}, \qquad -3a_1 - 2b_1 + c_1 > 0.$$

Encore dans le deuxième cas, mais en partant du second groupe de formules,

$$3a_2 - 2b_2 - c_2 > 0, \qquad a_2 - 2b_2 + c_2 \equiv 4 \pmod{8}.$$

Enfin, dans le troisième cas,

$$a_i - 2b_i + c_i \equiv 4 \pmod 8,$$
$$3a_i - 2b_i - c_i < 0,$$

et ces conditions, qui sont nécessaires, sont suffisantes.

Prenons alors $i = 1$ et rassemblons le premier cas et la première partie du deuxième cas : on peut écrire

$$a_2 = \frac{a_1 + 2b_1 + c_1}{4},$$
$$b_2 = \varepsilon \frac{3a_1 + 2b_1 - c_1}{4},$$
$$c_2 = \frac{9a_1 - 6b_1 + c_1}{4}$$

avec, seulement, la condition

$$a_1 + 2b_1 + c_1 \equiv 4 \pmod 8),$$

ε étant choisi de sorte que $b_2 > 0$.

Rassemblons maintenant le quatrième cas et la deuxième partie du deuxième cas, on trouve, pour $i = 2$,

$$a_1 = \frac{a_2 - 2b_2 + c_2}{4},$$
$$b_1 = \varepsilon \frac{3a_2 - 2b_2 - c_2}{4},$$
$$c_1 = \frac{9a_2 + 6b_2 + c_2}{4},$$

avec, seulement, la condition

$$a_2 - 2b_2 + c_2 \equiv 4 \pmod 8).$$

Maintenant, on peut rassembler ces deux derniers groupes de formule et écrire les équations

$$a_2 = \frac{a_1 + 2\varepsilon' b_1 + c_1}{4},$$
$$b_2 = \varepsilon \frac{3a_1 + 2\varepsilon' b_1 + c_1}{4},$$
$$c_2 = \frac{9a_1 - 6\varepsilon' b_1 + c_1}{4},$$

où ε et ε' sont ± 1, mais choisis de telle sorte que b_2 soit positif et que a_2, b_2, c_2 soient impairs. L'ambiguïté des signes n'est qu'apparente. Les indices 1, 2 ne correspondent d'ailleurs plus aux mêmes formes que tout à l'heure.

15. On peut aussi présenter sous une forme géométrique la correspondance entre les formes (a, b, c).

On sait que l'on passe de (a', b', c') à (a, b, c) par symétrie autour de GB. Donc (n° **12**) :

Si $\mu' < \mu'_1 < \mu'_2$ la forme (a_1, b_1, c_1) est dans AEF (EF est l'arc de circonférence de centre A et de rayon 2). La forme (a_2, b_2, c_2) est dans AEB (AE : arc de circonférence de rayon 2 ayant A_1 pour centre). Et (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) sont symétriques par rapport à AE.

Si $\mu'_1 < \mu' < \mu'_2$, la forme (a_1, b_1, c_1) est dans A'FEB', la forme (a_2, b_2, c_2) est dans ABE et se déduit de la première par deux symétries, successivement autour de EF et de EA.

Si $\mu'_1 < \mu' < \mu'_2$, la forme (a_1, b_1, c_1) est dans A'FEB', la forme (a_2, b_2, c_2) est dans AFE et l'on passe de (a_1, b_1, c_1) à (a_2, b_2, c_2), par symétrie autour de EF.

En résumé : si l'on donne une forme (a, b, c) de discriminant 4N, pour avoir sa correspondante, on prend de toutes les manières possibles sa symétrique par rapport à AE, EF, et, le cas échéant, la symétrique du point ainsi obtenu par rapport à AE, EF. On obtient ainsi, en tout, trois points dans le domaine A'ABB' (y compris le point de départ). Parmi ces trois points, deux, et deux seulement, représentent des formes en correspondance. Le troisième point représente une forme de l'ordre impropre.

16. *Relations entre les minima.* — Des relations entre les minima des formes (a, b, c) et (a', b', c') on déduit que

$$\mu_{11} = \mu'_1,$$
$$\mu_{21} = \mu'_2,$$

d'où

$$\sum \mu_1^{\lambda} = \sum \mu_1'^{\lambda} + \sum \mu_2'^{\lambda}. \tag{F}$$

quel que soit λ. La somme du premier membre est étendue à toutes les classes de formes de l'ordre propre, de discriminant $4N$ et les sommes du second membre sont étendues aux classes de formes de l'ordre propre et de discriminant N.

Ensuite

$$\mu_{12} = 2\mu' - \mu'_1 + 2\mu'_2,$$
$$\mu_{21} = 2\mu' - \mu'_2 + 2\mu'_1.$$

Donc

$$(\mathrm{F}') \qquad \sum \mu_2^\lambda = \sum (2\mu' - \mu'_1 + 2\mu'_2)^\lambda + (2\mu' - \mu'_2 + 2\mu'_1)^\lambda.$$

On a aussi

$$\mu_{11} + \mu_{12} - \mu_{10} = 2|\mu'_2 - \mu'|,$$
$$\mu_{21} + \mu_{22} - \mu_{20} = 2|\mu'_1 - \mu'|.$$

Donc

$$(\mathrm{F}'') \qquad \sum (\mu_1 + \mu_2 - \mu)^\lambda = \sum [2|\mu'_2 - \mu'|]^\lambda + \sum [2|\mu'_1 - \mu'|]^\lambda.$$

Puis

$$3\mu_{11} + \mu_{21} = 2\mu' + 2\mu'_1 + 2\mu'_2,$$
$$3\mu_{21} + \mu_{22} = 2\mu' + 2\mu'_1 + 2\mu'_2,$$

et par suite

$$\sum (3\mu_1 + \mu_2)^\lambda = 2\sum (2\mu' + 2\mu'_1 + 2\mu'_2)^\lambda.$$

De même

$$\sum \mu^\lambda = \sum [2(\mu'_1 + \mu' - |\mu'_1 - \mu'|)]^\lambda + \sum [2(\mu'_2 + \mu' - |\mu'_2 - \mu'|)]^\lambda.$$
$$\sum (\mu_2 + \mu_1)^\lambda = \sum [2(\mu' + \mu'_1)]^\lambda + \sum [2(\mu' + \mu'_2)]^\lambda, \qquad \ldots.$$

Toutes ces relations ne sont évidemment pas indépendantes, et comme, des trois premières, on peut déduire les formules de correspondance entre les minima μ_1, μ_2, μ et μ'_1, μ'_2, μ', il en résulte que toutes les autres en sont des conséquences.

Comme application, on en déduit, pour $\lambda = 1$, la relation simple

$$\sum_{4N} (\mu_2 - \mu_1) = 4\sum_{N} \mu'.$$

et pour $\lambda = 2$, diverses relations quadratiques qui, combinées avec la formule évidente (calcul du discriminant)

$$\sum_{4N} (2\mu'_1\mu'_2 + 2\mu'\mu'_1 + 2\mu'\mu'_2 - \mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu^2) = N\,F(N)$$

donnent, par exemple,

$$\sum_{4N} (\mu_1 + \mu_2)^2 = 4\sum_{N} (\mu'_1 + \mu')^2 + 4\sum_{N} (\mu'_2 + \mu')^2,$$

$$2\sum_{4N} \mu_2^2 = \sum_{N} (4\mu' + \mu'_1 + \mu'_2)^2 + 9\sum_{N} (\mu'_2 - \mu'_1)^2,$$

$$\sum_{4N} \mu(2\mu_1 + 2\mu_2 - \mu) = 16\sum_{N} \mu'(\mu'_1 + \mu'_2),$$

$$\sum_{N} \mu_1\mu_2 = 4N\,F(N) + \sum_{N} (\mu'^2 + 2\mu'_1\mu'_2), \qquad \ldots\ldots$$

II. — $\Delta \equiv 1 \pmod 4$.

17. Je pose

$$X - Y = a = 2n + 1,$$
$$Z = b = 2l,$$
$$X + Y = c = 2n + 4p + 1$$

avec

(C) $$n \geqq 0, \qquad l \geqq 0, \qquad p \geqq 0, \qquad n \geqq l.$$

On en déduit

$$n = \frac{a-1}{2},$$
$$l = \frac{b}{2},$$
$$p = \frac{c-a}{2}.$$

Donc, (a, b, c) étant donnée, de discriminant $4N + 1$, on pourra trouver n, si a est impair et b pair, et donc p, car alors, nécessairement,

$$c \equiv a \pmod 4.$$

De plus, les conditions (C) donnent

$$c \geqq a, \qquad a > b, \qquad b \geqq 0.$$

Le point représentatif τ est donc dans le triangle A′ ÀBB′, côté AA′ exclu.

On trouve alors les deux mêmes tableaux qu'aux n° **4** et **5**, avec les mêmes conventions. Toutefois, dans le deuxième tableau, au lieu de « β impair », il faut mettre « β pair », et vice versa.

Donc le nombre des formes (a, b, c) est $F(4N+1)$, en comptant pour deux unités toute forme non ambiguë et pour une unité, toute forme ambiguë.

Le calcul des minima, la réduction des formes (a, b, c) en fonction des minima conduisent encore aux résultats groupés dans les tableaux du n° **6**.

18. En posant maintenant

$$a' = 2n + 1 + 2p - 2l,$$
$$b' = 2p,$$
$$c' = 2n + 1 + 2l + 2p,$$

on en déduit

$$n = \frac{a' - 2b' + c' - 2}{2},$$
$$p = \frac{b'}{2},$$
$$l = \frac{c' - a'}{4};$$

on voit que les formes (a', b', c') coïncident, dans leur ensemble, avec les formes (a, b, c), et la correspondance s'exprime par les formules

$$a = \frac{a' - 2b' + c'}{2},$$
$$b = \frac{c' - a'}{2},$$
$$c = \frac{a' + 2b' + c'}{2},$$

dont l'interprétation géométrique est la même que celle donnée au n° **7**.

19. *Relations entre les minima.* — Soient μ_{00} le premier minimum pair de la forme (a, b, c), μ_{01} le second minimum pair, et de même μ'_{00} et μ'_{01} les minima pairs pour (a', b', c').

Alors

$$a' = \frac{\mu_{00}}{2}, \qquad b' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2}, \qquad c' = \frac{\mu_{01}}{2},$$

$$a = \frac{\mu'_{00}}{2}, \qquad b = \frac{\mu'_2 - \mu'_1}{2}, \qquad c = \frac{\mu'_{01}}{2}.$$

Il en résulte, entre les minima de deux formes convenablement choisies de discriminant $4N+1$, les relations simples

$$\mu_1 = \frac{\mu}{2},$$

$$\mu'_2 = \mu_1 + \mu_2 - \frac{\mu}{2},$$

$$\mu' = 2\mu_1$$

et par suite

$$\sum (2\mu_1)^\alpha = \sum \mu^\alpha$$

et aussi

$$\sum (2\mu_2)^\alpha = \sum (2\mu_1 + 2\mu_2 - \mu)^\alpha.$$

III. — $\Delta \equiv 2 \pmod{4}$.

20. Je pose

$$X - Y = a = 2n + 1,$$

$$Z = b = 2l - 1,$$

$$X + Y = c = 2n + 4p + 3$$

avec

$$n \geqq 0, \qquad l \geqq 1, \qquad p \geqq 0, \qquad n \geqq l$$

d'où

$$n = \frac{a-1}{2},$$

$$l = \frac{b-1}{2},$$

$$p = \frac{c-a-2}{2}.$$

Donc, (a, b, c) étant donnée, de discriminant $4N+2$, de l'ordre propre, on pourra trouver n et l si a et b sont impairs, et alors p, car nécessairement

$$c - a \equiv 2 \pmod{4}.$$

On a, de plus, pour a, b, c, les conditions

$$c > a, \qquad a \geqq b, \qquad b > 0.$$

En posant alors

$$\begin{aligned} a' &= 2n + 2p - 2l + 3, \\ b' &= 2p + 1, \\ c' &= 2n + 2p + 2l + 1, \end{aligned}$$

on retrouve la même correspondance que dans le cas

$$\Delta \equiv 1 \pmod 4,$$

et par suite les mêmes relations entre les minima.

IV. — $\Delta \equiv 3 \pmod 8$.

21. C'est, avec le cas de $\Delta \equiv 7 \pmod 8$, le cas traité par G. Humbert en posant

$$\begin{aligned} X - Y &= a = 2n + 1, \\ Z &= 2l, \\ X + Y &= 2n + 4p + 3. \end{aligned}$$

J'ai trouvé plus commode de poser

$$\begin{aligned} X - Y &= a = 2n, \\ Z &= b = 2l - 1, \\ X + Y &= c = 2n + 4p \end{aligned}$$

avec

$$n > 0, \qquad l \geqq 1, \qquad p \geqq 0, \qquad n \geqq l.$$

Alors

$$n = \frac{a}{2},$$

$$l = \frac{b+1}{2},$$

$$p = \frac{a-c}{4}.$$

Donc, (a, b, c), forme de l'ordre impropre et de discriminant $8N + 3$, étant donnée, on peut calculer n et l et alors p en résulte car, nécessairement,

$$a \equiv c \equiv 2 \pmod 4$$

pour une telle forme.

De plus

$$(C) \qquad c \geqq a, \qquad a > b, \qquad b > 0.$$

Partons maintenant d'une réduite de l'ordre impropre et formons le système

$$(\alpha, |\beta|, \gamma),$$
$$(\alpha, \alpha - |\beta|, \alpha - 2|\beta| + \gamma),$$
$$(\gamma, \gamma - |\beta|, \alpha - 2|\beta| + \gamma).$$

Ces trois formes sont des formes (a, b, c), de sorte que le nombre des formes (a, b, c) de discriminant $8N + 3$ et de l'ordre impropre satisfaisant aux conditions (C) est $3F_1(8N+3)$. Comme ces trois formes proviennent de la même réduite, elles ont les mêmes minima. Si n_1, n_2, n_3 sont les trois premiers minima, nécessairement congrus à $2 \pmod 4$, la forme réduite est alors

$$\left(n_1, \pm \frac{n_1 + n_2 - n_3}{2}, n_2\right).$$

22. Je pose maintenant

$$a' = 2n + 2p - 2l + 1,$$
$$b' = 2p,$$
$$c' = 2n + 2p + 2l - 1$$

avec

$$b' \geqq 0, \qquad c' > a', \qquad a' > b',$$

qui donne une forme de l'ordre impropre, de discriminant $8N + 3$, d'où une correspondance donnée par les formules

$$a = \frac{a' - 2b' + c'}{2},$$
$$b = \frac{c' - a'}{2},$$
$$c = \frac{a' + 2b' + c'}{2};$$

d'où la relation classique

$$F(8N+3) = 3F_1(8N+3).$$

Enfin, en fonction de la forme réduite $(\alpha, |\beta|, \gamma)$, on trouve immédiatement les expressions suivantes pour les trois formes propres (a'_i, b'_i, c'_i) $(i = 1, 2, 3)$:

$$(a'_i, b'_i, c'_i) \qquad (i = 1, 2, 3):$$

$$a'_1 = \frac{\alpha - 2|\beta| + \gamma}{2}, \qquad a'_2 = \frac{\gamma}{2}, \qquad a'_3 = \frac{\alpha}{2},$$

$$b'_1 = \frac{\gamma - \alpha}{2}, \qquad b'_2 = \frac{\gamma - 2|\beta|}{2}, \qquad b'_3 = \frac{\alpha - 2|\beta|}{2},$$

$$c'_1 = \frac{\alpha + 2|\beta| + \gamma}{2}, \qquad c'_2 = \frac{4\alpha - 4|\beta| + \gamma}{2}, \qquad c'_3 = \frac{4\gamma - 4|\beta| + \alpha}{2},$$

d'où les relations de G. Humbert :

1re forme : $\mu_1 = \frac{\nu_3}{2}$, $\mu_2 = \nu_1 + \nu_2 - \frac{1}{2}\nu_3$, $\mu = 2\nu_1$,

2e » : $\mu_1 = \frac{\nu_2}{2}$, $\mu_2 = \nu_1 + \nu_3 - \frac{1}{2}\nu_2$, $\mu = 2\nu_1$,

3e » : $\mu_1 = \frac{\nu_1}{2}$, $\mu_2 = \nu_2 + \nu_3 - \frac{1}{2}\nu_1$, $\mu = 2\nu_2$.

V. — $\Delta \equiv 7 \pmod 8$.

23. Je prends

$$X - Y = a = 2n,$$
$$Z = b = 2l - 1,$$
$$X + Y = c = 2n + 4p + 2$$

avec

$$n > 0, \qquad l \geqq 1, \qquad p \geqq 0, \qquad n \geqq l.$$

Donc

$$n = \frac{a}{2},$$
$$l = \frac{b+1}{2},$$
$$p = \frac{c - a - 2}{4};$$

$$c > a, \qquad a > b, \qquad b > 0.$$

Une forme impropre, de discriminant $8N + 7$ étant donnée, on peut calculer n, l, p pourvu que

$$c - a \equiv 2 \pmod 4.$$

Or, si, partant d'une réduite, on forme le système

$$(\alpha, |\beta|, \gamma),$$
$$(\alpha, \alpha - |\beta|, \alpha - 2|\beta| + \gamma),$$
$$(\gamma, \gamma - |\beta|, \alpha - 2|\beta| + \gamma),$$

on constate que deux de ces formes satisfont à cette condition. On obtient, en effet, le tableau suivant (mod 4) :

α	γ	α	$\alpha - 2\lvert\beta\rvert + \gamma$	γ	$\alpha - 2\lvert\beta\rvert + \gamma$
2	0	2	0	0	0
0	2	0	0	2	0
0	0	0	2	0	2

Appelons (a_i, b_i, c_i) ces trois formes, les indices $i = 1, 2, 3$ étant relatifs respectivement aux triangles B′BDD′, D′DCA′, DCA.

24. Le tableau des minima est

	m_1	m_2	m
$m < m_1 < m_2$	γ	$\alpha - 2\lvert\beta\rvert + \gamma$	α
$m_1 < m < m_2$	α	$\alpha - 2\lvert\beta\rvert + \gamma$	γ
$m_1 < m_2 < m$	α	γ	$\alpha - 2\lvert\beta\rvert + \gamma$

ou, si l'on veut,

	m_1	m_2	m	
$m < m_1 < m_2$	c_1	$a_1 - 2b_1 + c_1$	a_1	
	$a_2 - 2b_2 + c_2$	c_2	a_2	
	a_3	c_3	$a_3 - 2b_3 + c_3$	φ
$m_1 < m < m_2$	a_1	$a_1 - 2b_1 + c_1$	c_1	
	a_2	c_2	$a_2 - 2b_2 + c_2$	φ
	$a_3 - 2b_3 + c_3$	c_3	a_3	
$m_1 < m_2 < m$	a_1	c_1	$a_1 - 2b_1 + c_1$	φ
	a_2	$a_2 - 2b_2 + c_2$	c_2	
	$a_3 - 2b_3 + c_3$	a_3	c_3	

et les trois formes marquées φ ne sont pas des formes (a, b, c) car pour elles

$$a_l \equiv c_l \equiv 0 \pmod 4.$$

25. Appelons (A, B, C) une forme φ. Dans tous les cas

$$\begin{aligned} A &= m_1, \\ 2B &= m_1 + m_2 - m, \\ C &= m_2. \end{aligned}$$

Par symétrie par rapport au cercle BG, je lui fais correspondre

$$\begin{aligned} A' &= \frac{A - 2B + C}{2}, \\ B' &= \frac{C - A}{2}, \\ C' &= \frac{A + 2B + C}{2}, \end{aligned}$$

et (A', B', C') est de l'ordre propre, de discriminant $8N + 7$, d'où aisément

$$\begin{aligned} A' &= \frac{m}{2}, \\ B' &= \frac{m_2 - m_1}{2}, \\ C' &= m_1 + m_2 - \frac{1}{2} m. \end{aligned}$$

et, enfin, les formules de G. Humbert

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{m}{2}, \\ \mu_2 &= m_1 + m_2 - \frac{1}{2} m, \\ \mu &= 2m. \end{aligned}$$

26. Revenons maintenant aux formes (a, b, c).

Je pose

$$\begin{aligned} a' &= 2(n + p - l + 1), \\ b' &= 2p + 1, \\ c' &= 2(n + p + l), \end{aligned}$$

d'où

$$a' = \frac{a - 2b + c}{2},$$

$$b' = \frac{c - a}{2},$$

$$c' = \frac{a + 2b + c}{2},$$

et la forme (a', b', c') est de l'ordre impropre, et de discriminant $8N + 7$. Il en résulte une correspondance entre formes de l'ordre impropre. Soient (a'_i, b'_i, c'_i) et (a'_k, b'_k, c'_k) ces deux formes correspondantes. En éliminant a_i, b_i, c_i et a_k, b_k, c_k, à l'aide du tableau n° **24**, on est conduit à des relations analogues à celles du n° **14** et que nous n'écrirons pas. Bornons-nous à signaler que, dans tous les cas, ces deux formes (a'_i, b'_i, c'_i) et (a'_k, b'_k, c'_k) sont

$$\left(\frac{m}{2}, \frac{|m_1 - m|}{2}, m + m_1 - \frac{1}{2} m_2\right)$$

et

$$\left(\frac{m}{2}, \frac{|m_2 - m|}{2}, m + m_2 - \frac{1}{2} m_1\right).$$

27. A cette correspondance appartiennent des relations que je vais calculer par une méthode déjà utilisée par G. Humbert.

Cherchons à évaluer

$$(4n + 4p + 4 - 4l)^\lambda.$$

En se reportant au tableau des réduites et distinguant trois cas selon la nature de la réduite (mod 4), on forme le tableau suivant :

α	γ	$(4n + 4p + 4 - 4l)^\lambda$
2	0	$(\alpha - 2\|\beta\| + \gamma)^\lambda + \gamma^\lambda$
0	2	$(\alpha - 2\|\beta\| + \gamma)^\lambda + \alpha^\lambda$
0	0	$\alpha^\lambda \qquad + \gamma^\lambda$

c'est-à-dire, dans tous les cas,

$$m_1^\lambda + m_2^\lambda.$$

En fonction des formes (a', b', c'), la somme à calculer est $\Sigma(2a')^\lambda$, ou, en passant à la forme réduite $(\alpha', \beta', \gamma')$ et distinguant encore trois cas (mod 4) :

	α'	γ'	$(4m+4p+4-4l)^\lambda$
$m' < m'_1 < m'_2$	2	0	$(2\alpha')^\lambda + (2\alpha')^\lambda$
$m'_1 < m' < m'_2$	0	2	$(2\alpha')^\lambda + (2\gamma')^\lambda$
$m'_1 < m'_2 < m'$	0	0	$(2\alpha')^\lambda + (2\gamma')^\lambda$

ou,

$$m' < m'_1 < m'_2, \qquad \sum (2m')^\lambda + \sum (2m')^\lambda,$$

$$m'_1 < m' < m'_2, \qquad \sum (2m'_1)^\lambda + \sum (2m')^\lambda,$$

$$m'_1 < m'_2 < m', \qquad \sum (2m'_1)^\lambda + \sum (2m'_2)^\lambda,$$

qui s'écrit, dans tous les cas,

$$\sum [m' + m'_1 - |m' - m'_1|]^\lambda + \sum [m' + m'_2 - |m' - m'_2|]^\lambda.$$

On peut supprimer les accents, puisque, dans leur ensemble, les systèmes m, m_1, m_2 et m', m'_1, m'_2 sont les mêmes. Donc, quel que soit λ,

$$\sum_{8N+7} (m_1^\lambda + m_2^\lambda) = \sum_{8N+7} [m + m_1 - |m - m_1|]^\lambda + \sum_{8N+7} [m + m_2 - |m - m_2|]^\lambda,$$

les sommes étant étendues aux classes de l'ordre impropre et à leurs minima ; λ est quelconque.

Ensuite, en évaluant par la même méthode la somme

$$\sum (4p + 2)^\lambda,$$

on trouve la relation

$$\text{(F)} \qquad \begin{aligned} &\sum_{8N+7} |m - m_1|^\lambda + \sum_{8N+7} |m - m_1|^\lambda \\ &= \sum_{8N+7} (m + m_1 - m_2)^\lambda + \sum_{8N+7} (m + m_2 - m_1)^\lambda, \end{aligned}$$

qui, pour $\lambda = 2$, donne la relation

$$\sum_{8N+7} (2mm_1 + 2mm_2 - 4m_1 m_2 + m_1^2 + m_2^2) = 0.$$

établie par G. Humbert par une méthode toute différente.

Puis, en évaluant

$$\sum_{8N+7} (2m + 4p + 2)^{\lambda} \quad \text{et} \quad \sum_{8N+7} (8m + 8p - 4l + 6)^{\lambda},$$

on trouve

$$\sum_{8N+7} (2m + 2m_1 - m_2)^{\lambda} + \sum_{8N+7} (2m + 2m_2 - m_1)^{\lambda}$$
$$= \sum_{8N+7} (m + m_1 + |m - m_1|)^{\lambda} + \sum_{8N+7} (m + m_2 + |m - m_2|)^{\lambda}$$

et

$$2 \sum_{8N+7} (m + m_1 + m_2)^{\lambda} = \sum_{8N+7} [2(m + m_1) - |m - m_1|]^{\lambda}$$
$$+ \sum_{8N+7} [2(m + m_2) - |m - m_2|]^{\lambda},$$

et l'on pourrait continuer indéfiniment, mais toutes ces relations se déduisent de (F).