JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

OYSTEIN ORE

Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 311-326.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__311_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur la forme des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables;

Par Oystein ORE.

Yale University, New Haven (Conn.).

Une fonction hypergéométrique générale de deux variables est définie d'après Horn (¹) par une série double

$$F(x, y) = \sum_{m, n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n, \tag{1}$$

dont les coefficients vérifient les conditions

$$\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = R_1(m, n), \qquad \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = R_2(m, n), \tag{2}$$

où $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ sont des fonctions rationnelles *fixes* de m et n. Pour les fonctions hypergéométriques de plus de deux variables on a des définitions correspondantes. Les résultats obtenus dans la suite pour des fonctions de deux variables pourront être généralisés sans difficulté à des fonctions de plusieurs variables.

On a évidemment toujours $a_{0,0} \neq 0$, et nous allons supposer que

$$a_{0,0} = 1. \tag{3}$$

(¹) J. Horn, *Ueber die Konvergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen* (*Math. Ann.*, t. 34, 1889, p. 544-600).

La même définition a été adoptée par MM. Birkeland, Kampé de Fériet et Melin. *Voir* par exemple P. Appell et J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques*, § 57 (Paris, 1926).

On observe aussi qu'une transformation de similitude

$$(4) \qquad x = ax', \qquad y = by'$$

donne encore une fonction hypergéométrique dont les fonctions caractéristiques $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ sont multipliées par a et b respectivement.

Les fonctions $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ ne sont pas indépendantes; en effet, on a

$$\frac{a_{m+1,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{a_{m+1,n+1}}{a_{m,n+1}} \frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}} = R_1(m, n+1) R_2(m, n),$$

$$\frac{a_{m+1,n+1}}{a_{m,n}} = \frac{a_{m+1,n+1}}{a_{m+1,n}} \frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}} = R_2(m+1, n) R_1(m, n),$$

et par conséquent [1]

$$(5) \qquad R_1(m, n) R_2(m+1, n) = R_1(m, n) R_2(m, n+1).$$

On peut aussi donner une illustration géométrique de la relation (5). On voit facilement que le coefficient général $a_{m,n}$ de la série (1) est exprimé par la formule

$$(6) \qquad a_{m,n} = \prod_{r=0}^{m+n-1} R_{\varepsilon_r}(m_r, n_r) \qquad (m_r + n_r = r),$$

où les points de grillage (m_r, n_r) traversent un chemin ascendant de l'origine au point (m, n) et l'on a $\varepsilon_r = 1$ ou $\varepsilon_r = 2$ suivant la forme du chemin choisi. L'équation (5) montre alors que la valeur de $a_{m,n}$ ne dépend pas de la voie suivie, parce que les valeurs obtenues en parcourant un carré unitaire en deux directions opposées sont égales.

Les coefficients $a_{m,n}$ peuvent être considérés comme une généralisation du produit

$$f(1) f(2) \ldots f(n)$$

pour des fonctions d'une seule variable.

L'objet de ce Mémoire est de donner une méthode pour trouver la solution générale de l'équation fonctionnelle (5) en fonctions rationnelles $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$. Il résulte de cette solution l'expression

(1) HORN, *loc. cit.*, § 2.

explicite de toutes les formes possibles pour des fonctions hypergéométriques générales.

M. Birkeland [1] a étudié naguère la condition (5) et il a énoncé le théorème suivant : « Si les fonctions rationnelles (2) satisfont à (5), les numérateurs et les dénominateurs de ces fonctions sont des produits de facteurs linéaires en m et n. »

Le théorème de M. Birkeland n'est pas, comme je l'ai déjà fait remarquer [2], correct en général. Mais il résulte néanmoins de la solution générale de (5), que les cas, dans lesquels le théorème de M. Birkeland n'est pas vrai, sont, à un certain point vue, des cas spéciaux.

I.

Nous allons étudier dans la suite dans quels cas une relation (5) peut exister entre deux fonctions rationnelles $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$. Pour le moment nous ne ferons aucune supposition sur la convergence des séries hypergéométriques correspondantes.

La relation (5) est seulement établie pour des nombres entiers m et n, mais pour des fonctions rationnelles il s'ensuit que les deux côtés de (5) sont nécessairement identiques.

Il est évident que si $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ ainsi que $\overline{R}_1(m, n)$ et $\overline{R}_2(m, n)$ sont deux solutions de (5), alors

$$\frac{\overline{R}_1(m, n)}{R_1(m, n)}, \qquad \frac{R_2(m, n)}{R_2(m, n)}$$

et

$$R_1(m, n)\,\overline{R}_1(m, n), \quad R_2(m, n)\,\overline{R}_2(m, n)$$

auront la même propriété.

Mettons maintenant

$$(7)\qquad \begin{cases} R_1(m, n) = \dfrac{f(m, n)}{f_1(m, n)}, \\[2mm] R_2(m, n) = \dfrac{g(m, n)}{g_1(m, n)}, \end{cases}$$

---

[1] R. BIRKELAND, *Une proposition générale sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*Comptes rendus*, t. 185, 1927, p. 923).

[2] OYSTEIN ORE, *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*Comptes rendus*, t. 189, 1929, p. 1238).

où

$$f(m, n), \quad f_1(m, n), \quad g(m, n), \quad g_1(m, n) \tag{8}$$

sont des polynomes en m et n. On peut en outre supposer que $f(m, n)$ et $f_1(m, n)$ ainsi que $g(m, n)$ et $g_1(m, n)$ n'ont pas des facteurs communs.

En substituant (7) dans (5) on obtient

$$\begin{aligned} f(m, n)\, g(m+1, n)\, f_1(m, n+1)\, g_1(m, n) \\ = g(m, n)\, f(m, n+1)\, f_1(m, n)\, g_1(m+1, n), \end{aligned} \tag{9}$$

et cette relation sera l'objet des recherches suivantes.

Nous allons, premièrement, simplifier à un certain point la forme des polynomes (8). On représente ces polynomes comme des produits des facteurs irréductibles, et en assemblant les facteurs contenant m et n seulement, on obtient

$$\begin{aligned} f(m, n) &= A(m)\, B(n)\, F(m, n), \\ f_1(m, n) &= A_1(m)\, B_1(n)\, F_1(m, n), \\ g(m, n) &= C(m)\, D(n)\, G(m, n), \\ g_1(m, n) &= C_1(m)\, D_1(n)\, G_1(m, n). \end{aligned}$$

De l'équation (9) il s'ensuit immédiatement les relations suivantes :

$$A(m)\, C(m+1)\, A_1(m)\, C_1(m) = C(m)\, A(m)\, A_1(m)\, C_1(m+1), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} B(n)\, D(n)\, B_1(n+1)\, D_1(n) = D(n)\, B(n+1)\, B_1(n)\, D_1(n), \\ F(m, n)\, G(m+1, n)\, F_1(m, n+1)\, G_1(m, n) \\ = G(m, n)\, F(m, n+1)\, F_1(m, n)\, G_1(m+1, n). \end{aligned} \tag{11}$$

En abrégeant l'équation (10) du produit $A(m)A_1(m)$, on voit que ces polynomes ne sont plus contenus dans ces équations, et il résulte que deux polynomes $f(m, n)$ et $f_1(m, n)$ satisfaisant à (9) peuvent contenir des facteurs arbitraires qui sont des fonctions de m seulement. On fait les mêmes observations pour les facteurs $D(n)$ et $D_1(n)$ de $g(m, n)$ et $g_1(m, n)$.

De (10) on tire

$$C(m+1)\, C_1(m) = C(m)\, C_1(m+1);$$

d'après notre supposition $C_1(m)$ est relative prime à $C(m)$ et l'on conclut que

$$C(m) = C_1(m) = 1.$$

Théorème I. — *Si les polynomes* (8) *vérifient la condition* (9), *les polynomes* $f(m, n)$ *et* $f_1(m, n)$ *peuvent contenir des facteurs arbitraires dépendant de m seulement, mais aucun facteur contenant n seulement. Dans la même manière* $g(m, n)$ *et* $g_1(m, n)$ *peuvent contenir des facteurs arbitraires de n, mais aucun facteur contenant m seulement.*

La relation (12) ayant la même forme que (9), on peut toujours supposer que les polynomes (8), vérifiant (9), ne contiennent que des facteurs dépendant en même temps de m et n.

II.

Nous représenterons maintenant $f(x)$ comme un produit de facteurs absolument irréductibles; soit, en outre, $d(m, n)$ le P. G. F. C. de $f(m, n)$ et $f(m, n+1)$. Alors on a

$$f(m, n) = F^{(1)}(m, n) \ldots F^{(r)}(m, n)\, d(m, n), \tag{13}$$

où les $F^{(i)}(m, n)$ sont des facteurs irréductibles. Dans la suite, nous les appellerons les *facteurs réduits* de $f(m, n)$.

Déterminons encore la forme de $f(m, n+1)$ à l'aide des facteurs réduits. Le polynome $F^{(1)}(m, n+1)$ est évidemment un diviseur de $f(m, n+1)$. S'il est aussi un diviseur de $f(m, n)$ il doit être contenu dans $d(m, n)$. Dans ce cas $F^{(1)}(m, n+2)$ est aussi un facteur de $f(m, n+1)$, etc., et parce que le polynome $f(m, n)$ ne contient qu'un nombre fini de facteurs, on trouvera à la fin un nombre a_1 de sorte que $F^{(1)}(m, n+a_1)$ est un diviseur de $f(m, n+1)$, mais non de $f(m, n)$. De cette manière, on obtient pour $f(m, n+1)$ la représentation suivante :

$$f(m, n+1) = F^{(1)}(m, n+a_1) \ldots F^{(r)}(m, n+a_r)\, d(m, n). \tag{14}$$

Nous appellerons les nombres

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_r \tag{15}$$

les *longueurs des facteurs réduits* correspondants.

THÉORÈME II. — *Si*

$$F_1(m, n), \quad \ldots, \quad F_r(m, n)$$

sont les facteurs réduits de $f(m, n)$ *et si les longueurs correspondantes sont données par* (15) *le polynome* $f(m, n)$ *peut être représenté dans la forme*

$$(16) \qquad f(m, n) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{a_i-1} F^{(i)}(m, n+j).$$

Nous traitons $f_1(m, n+1)$ dans une manière correspondante, mais en choisissant une notation légèrement différente. Nous mettons

$$(17) \qquad f_1(m, n+1) = F_1^{(1)}(m, n) \ldots F_1^{(r')}(m, n) d_1(m, n),$$

où $d_1(m, n)$ est le P. G. D. C. de $f_1(m, n)$ et $f_1(m, n+1)$. Les $F^{(i)}(m, n)$ seront appelés les facteurs réduits de $f_1(m, n)$ et l'on obtient pour ce polynome la représentation

$$(18) \qquad f_1(m, n) = F_1^{(1)}(m, n-a'_1) \ldots F_1^{(r')}(m, n-a'_{r'}) d_1(m, n),$$

ou bien

$$(19) \qquad f_1(m, n) = \prod_{i=1}^{r'} \prod_{j=1}^{a'_i} F_1^{(i)}(m, n-j).$$

La fonction rationnelle $R_1(m, n)$ est le quotient des deux polynomes (16) et (19). On peut alors donner une représentation différente pour $R_1(m, n)$, ce qui sera très commode pour les applications suivantes. Soient en effet

$$(20) \qquad \Phi_1(m, n), \quad \Phi_2(m, n), \quad \ldots, \quad \Phi_k(m, n) \qquad (k = r + r')$$

les facteurs réduits de $f(m, n)$ et $f_1(m, n)$ pris dans un ordre arbitraire et soient en outre

$$(21) \qquad A_1, \quad \ldots, \quad A_k, \qquad A_i = a_i \quad \text{ou} \quad A_i = -a'_i$$

les longueurs correspondantes, les a'_i munis d'un signe négatif. Pour des valeurs négatives de A_i nous définissons

$$(22) \qquad \prod_{j=0}^{A_i-1} \Phi_i(m, n+j) = \prod_{j=1}^{|A_i|} \Phi_i(m, n-j)^{-1}.$$

Alors on voit sans difficulté que

$$\text{(23)} \qquad B_1(m, n) = \prod_{l=1}^{k} \prod_{j=0}^{A_l-1} \Phi_l(m, n+j).$$

Par des considérations analogues on obtient des expressions correspondantes pour les polynomes $g(m, n)$ et $g_1(m, n)$. On a

$$g(m, n) = \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=0}^{b_i-1} G^{(i)}(m+j, n)$$

et

$$g(m, n) \qquad = \bar{d}(m, n) \prod_{i=1}^{s} G^{(i)}(m, n),$$

$$g(m+1, n) = \bar{d}(m, n) \prod_{i=1}^{s} G^{(i)}(m+b_i, n),$$

où $\bar{d}(m, n)$ est le P. G. D. C. de $g(m, n)$ et $g(m+1, n)$. Pour $g_1(m, n)$ on obtient

$$g_1(m, n) = \prod_{i=1}^{s'} \prod_{j=1}^{b_i} G_1^{(i)}(m-j, n)$$

et

$$g_1(m, n) \qquad = \bar{d}_1(m, n) \prod_{i=1}^{s'} G_1^{(i)}(m-b'_i, n),$$

$$g_1(m+1, n) = \bar{d}_1(m, n) \prod_{i=1}^{s'} G_1^{(i)}(m, n),$$

où $\bar{d}_1(m, n)$ est le P. G. D. C. de $g_1(m, n)$ et $g_1(m+1, n)$.

Finalement, soient

$$\Psi_1(m, n), \quad \ldots, \quad \Psi_{k_1}(m, n) \qquad (k_1 = s + s')$$

les facteurs réduits de $g(m, n)$ et $g_1(m, n)$ arrangés dans un ordre arbitraire et soient

$$B_1, \quad B_2, \quad \ldots, \quad B_{k_1}, \qquad B_i = b_i \text{ ou } -b'_i$$

les longueurs correspondantes. Avec les mêmes conventions qu'auparavant, on aura

$$(24)\qquad R_2(m, n) = \prod_{i=1}^{k_1} \prod_{j=0}^{B_i-1} \Psi_i(m+j, n).$$

III.

Par les représentations ainsi obtenues pour les polynomes (8) on peut réduire le problème proposé à l'étude des facteurs réduits. En effet :

Nous remplaçons ces polynomes par leurs expressions en facteurs réduits et nous abrégeons l'équation (9) par le produit des facteurs communs

$$d(m, n)\, d_1(m, n)\, \bar{d}(m, n)\, \bar{d}_1(m, n).$$

On obtient alors la relation suivante entre les facteurs réduits

$$(25)\qquad \prod_{i=1}^{r} F^{(i)}(m, n) \prod_{i=1}^{r'} F_1^{(i)}(m, n) \prod_{i=1}^{s} G^{(i)}(m+b_i, n) \prod_{i=1}^{s'} G_1^{(i)}(m-b'_i, n)$$
$$= \prod_{i=1}^{r} F^{(i)}(m, n+a_i) \prod_{i=1}^{r'} F_1^{(i)}(m, n-a'_i) \prod_{i=1}^{s} G^{(i)}(m, n) \prod_{i=1}^{s'} G_1^{(i)}(m, n)$$

ou, plus simplement,

$$(26)\qquad \prod_{i=1}^{k} \Phi_i(m, n) \prod_{i=1}^{k_1} \Psi_i(m+B_i, n) = \prod_{i=1}^{k} \Phi_i(m, n+A_i) \prod_{i=1}^{k_1} \Psi_i(m, n).$$

Un facteur arbitraire $F^{(i)}(m, n)$ du côté gauche de l'identité (25) ne peut diviser, d'après nos suppositions, aucun des produits

$$\prod_{i=1}^{r} F^{(i)}(m, n+a_i), \qquad \prod_{i=1}^{r'} F_1^{(i)}(m, n-a'_i);$$

le même fait est vrai pour un facteur $F_1^{(i)}(m, n)$. Il s'ensuit alors que le produit

$$(27)\qquad \prod_{i=1}^{r} F^{(i)}(m, n) \prod_{i=1}^{r'} F_1^{(i)}(m, n)$$

est un diviseur du produit

$$\prod_{i=1}^{s} G^{(i)}(m, n) \prod_{i=1}^{s'} G_1^{(i)}(m, n). \tag{28}$$

Mais en considérant le côté droit de (25) on déduit, par le même procédé, que (28) est un diviseur de (27) et les deux expressions sont par conséquent égales. En divisant (25) par (27) ou (28) on voit que les facteurs restants sont aussi identiques.

Théorème III. — *Pour que les polynomes* (8) *satisfassent à la relation* (9) *il faut et il suffit que les facteurs réduits soient liés par les relations*

$$\prod_{i=1}^{r} F^{(i)}(m, n) \prod_{i=1}^{r'} F_1^{(i)}(m, n) = \prod_{i=1}^{s} G^{(i)}(m, n) \prod_{i=1}^{s'} G_1^{(i)}(m, n), \tag{29}$$

$$\prod_{i=1}^{r} F^{(i)}(m, n + a_i) \prod_{i=1}^{r'} F_1^{(i)}(m, n - a'_i) = \prod_{i=1}^{s} G^{(i)}(m + b_i, n) \prod_{i=1}^{s'} G_1^{(i)}(m - b'_i, n). \tag{30}$$

De ce théorème on tire le corollaire immédiat :

Théorème IV. — *Le nombre total k des facteurs réduits de $R_1(m, n)$ est égal au nombre total k_1 des facteurs réduits de $R_2(m, n)$, c'est-à-dire*

$$r + r' = s + s'. \tag{31}$$

Les égalités (29) et (30) peuvent être écrites

$$\prod_{i=1}^{k} \Phi_i(m, n) = \prod_{i=1}^{k} \Psi_i(m, n), \tag{32}$$

$$\prod_{i=1}^{k} \Phi_i(m, n + A_i) = \prod_{i=1}^{k} \Psi_i(n + B_i, m). \tag{33}$$

IV.

L'énumération des facteurs réduits $\Phi_i(m, n)$ et $\overline{\Psi}_i(m, n)$ a été jusqu'à présent parfaitement arbitraire. L'égalité (32) nous montre que l'ordre de ces facteurs peut être choisi de manière à faire

$$\Phi_i(m, n) = \Psi_i(m, n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{34}$$

L'équation (33) se réduit alors à une identité

$$\prod_{i=1}^{k} \Phi_i(m, n + \mathrm{A}_i) = \prod_{i=1}^{k} \Phi_i(m + \mathrm{B}_i, n) \tag{35}$$

entre les facteurs réduits de $\mathrm{R}_1(m, n)$.

Dans cette identité un facteur arbitraire, par exemple $\Phi(m, n + \mathrm{A}_1)$, doit être égal à un des facteurs du côté droit, par exemple

$$\Phi_1(m, n + \mathrm{A}_1) = \Phi_2(m + \mathrm{B}_2, n).$$

Nous abrégeons l'équation (35) par ce facteur et l'on obtient ensuite de la même manière

$$\Phi_2(m, n + \mathrm{A}_2) = \Phi_3(m + \mathrm{B}_3, n), \qquad \ldots.$$

Cette série finira par une identité

$$\Phi_l(m, n + \mathrm{A}_l) = \Phi_1(m + \mathrm{B}_1, n).$$

De ce système d'identités on déduit facilement

$$\Phi_1(m, n) = \Phi_1[m + \mathrm{B}_1 + \ldots + \mathrm{B}_l, n - (\mathrm{A}_1 + \ldots - \mathrm{A}_l)]. \tag{36}$$

Mettons alors

$$\begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 + \ldots + \mathrm{A}_l, \\ \mathrm{B} = \mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2 + \ldots + \mathrm{B}_l. \end{cases} \tag{37}$$

A la suite, il faut considérer des cas différents.

1° *Soient* $\mathrm{A} \neq 0$, $\mathrm{B} \neq 0$. — Dans ce cas on a, d'après (36),

$$\Phi_1(m, n) = \Phi_1(m + \mathrm{B}, n - \mathrm{A}),$$

et parce que $\Phi(m, n)$ est un polynome, il s'ensuit que ce polynome est une fonction de $Am + Bn$ seulement. Mais $\Phi_1(m, n)$ était par supposition un polynome irréductible, on aura par conséquent

$$\Phi_1(m, n) = F(m, n) = K(Am + Bn + C),$$

où K et C sont des constantes arbitraires. Par une substitution de la forme (4) on peut toujours faire $K = 1$, ce que nous allons supposer dans la suite. On aura alors

$$F(m, n) = Am + Bn + C$$

et pour les autres facteurs réduits on dérive facilement les formules

$$\Phi_i(m, n) = F(m, n) + T_i,$$

où $T_1 = 0$, et pour $i > 1$

$$(38) \qquad T_i = (A_1 + \ldots + A_{i-1})B - (B_2 + \ldots + B_i)A.$$

Pour les facteurs réduits $\Psi_i(m, n)$ de $R_2(m, n)$ on obtient, d'après (34), les mêmes formules et les formes de $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ sont déterminées par (23) et (24).

Théorème V. — *Soient* $A \neq 0$ *et* $B \neq 0$ *deux nombres entiers et soient*

$$A = A_1 + \ldots + A_t, \qquad A_i \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t),$$
$$B = B_1 + \ldots + B_t, \qquad B_i \neq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, t)$$

des décompositions de ces nombres en sommes de nombres entiers. Alors les fonctions rationnelles

$$(39) \qquad \left\{ \begin{aligned} R_1(m, n) &= \prod_{i=1}^{t} \prod_{j=0}^{A_i - 1} [F(m, n) + T_i + jB], \\ R_2(m, n) &= \prod_{i=1}^{t} \prod_{j=0}^{B_i - 1} [F(m, n) + T_i + jA] \end{aligned} \right.$$

sont des solutions de l'équation fonctionnelle (5). *Dans* (39) *les* T_i *sont définis par* (38) *et*

$$F(m, n) = Am + Bn + C,$$

où C *est une constante arbitraire.*

Je répète ici que quand A_i ou B_i sont négatifs, on a, par définition,

$$\prod_{j=0}^{A_i-1}[F(m, n)+T_i+jB]=\prod_{j=1}^{|A_i|}[F(m, n)+T_i-jB]^{-1},$$

$$\prod_{j=0}^{B_i-1}[F(m, n)+T_i+jA)=\prod_{j=1}^{|B_i|}[F(m, n)+T_i-jA]^{-1}.$$

On vérifie sans difficulté que les fonctions (39) réellement satisfont à l'équation (5). Dans ce cas on observe que $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ ont des décompositions en facteurs linéaires.

Le théorème V nous permet déjà de donner la solution générale de notre problème dans un cas spécial important, savoir quand les $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ sont des *polynomes*.

Dans ce cas, on voit d'après le paragraphe **2**, que tous les A_i et B_i sont des nombres *positifs*, et l'on aura par conséquent toujours $A > 0$, $B > 0$. $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ seront donc des produits de facteurs de la forme (39). $R_1(m, n)$ peut en outre contenir comme facteur, comme nous l'avons mentionné dans le théorème I, un polynome arbitraire dépendant de m seulement. Ce polynome peut évidemment être représenté comme un produit des facteurs linéaires $Km+C$, ou bien, à une constante multiplicative près, égal à un produit de facteurs $m+C$. Pour $R_2(m, n)$ on a un résultat analogue.

THÉORÈME VI. — *Soient* A *et* B *deux nombres entiers positifs et* (37) *une décomposition de ces nombres en addendes entières et positives. La solution la plus générale de l'équation fonctionnelle* (5) *en polynomes* $R_1(m, n)$ *et* $R_2(m, n)$ *est alors un produit de facteurs de la forme* (39). $R_1(m, n)$ *peut en outre contenir une constante arbitraire et un nombre arbitraire de facteurs de la forme* $m+C$. $R_2(m, n)$ *contient dans la même manière une constante et facteurs* $n+C$.

Dans ce cas spécial, l'énoncé de M. Birkeland [1] est donc vrai : $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ sont tous les deux des produits de facteurs linéaires en m et n. Nous allons voir cependant qu'il n'en est pas ainsi dans le cas général.

---

[1] *Loc. cit.*

Quand on suppose $t=1$ dans (37), on obtiendra le plus simple cas du théorème VI, savoir

$$R_1(m,n)=\prod_{j=0}^{A-1}[F(m,n)+jB],$$

$$R_2(m,n)=\prod_{j=0}^{B-1}[F(m,n)+jA].$$

La fonction hypergéométrique correspondant à des polynomes $R_1(m,n)$ et $R_2(m,n)$ est évidemment divergente dans tout le plan, sauf pour $x=0$, $y=0$. Les valeurs réciproques de $R_1(m,n)$ et $R_2(m,n)$ définissent cependant une fonction hypergéométrique convergente pour toutes valeurs de x et y.

V.

Nous allons maintenant traiter les cas restants, savoir premièrement le cas :

2° $A=0$, $B\neq 0$, *ou* $B=0$, $A\neq 0$. — D'après (36) et (37) on a alors

$$\Phi_1(m,n)=\Phi_1(m+B,n)$$

ou bien

$$\Phi_1(m,n)=\Phi_1(m,n-A),$$

et $\Phi(m,n)$ est évidemment une fonction de m ou de n seulement. Ces cas sont déjà exclus par supposition.

3° $A=B=0$. — Dans ce cas exceptionnel intéressant, l'identité (36) est satisfaite pour un polynome arbitraire $H(m,n)$ de m et n, et l'on a

$$\Phi_i(m,n)=H(m-B_2-\ldots-B_i,\ n+A_1+\ldots+A_{i-1}).$$

Par des considérations simples on est alors conduit au théorème suivant :

Théorème VII. — *Soient*

$$A_i\neq 0,\qquad B_i\neq 0\qquad (i=1,2,\ldots,t)$$

des nombres entiers et

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_t = 0,$$
$$B_1 + B_2 + \ldots + B_t = 0.$$

Soit davantage H(m, n) *un polynome arbitraire. Alors les fonctions rationnelles*

$$(40)\quad \begin{cases} R_1(m, n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{t} \prod_{j=0}^{A_i - 1} H(m - B_2 - \ldots - B_i,\quad n + A_1 + \ldots + A_{i-1} + j), \\ R_2(m, n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{t} \prod_{j=0}^{B_i - 1} H(m - B_2 - \ldots - B_i + j,\ n + A_1 + \ldots + A_{i-1}) \end{cases}$$

sont des solutions de l'équation (5).

Je répète encore une fois que pour des valeurs négatives de A_i et B_i on a la même définition des produits

$$\prod_{j=0}^{A_i - 1}, \quad \prod_{i=0}^{B_i - 1}$$

qu'auparavant. En outre, pour $i = 1$, le premier facteur de $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ est H(m, n).

Pour illustrer l'application de la formule (40) j'y prends $t = 2$ et

$$A_1 = B_1 = 1, \qquad A_2 = B_2 = -1.$$

La solution correspondante de (5) est

$$R_1(m, n) = \frac{H(m, n)}{H(m + 1, n)},$$
$$R_2(m, n) = \frac{H(m, n)}{H(m, n + 1)}$$

et le coefficient général $a_{m,n}$ sera une fonction rationnelle de m et n. De cet exemple, il est évident que le théorème de M. Birkeland n'est pas, en général, vrai.

L'analyse précédente contient clairement la solution complète du problème proposé. On voit en effet :

Théorème VIII. — *La solution générale de l'équation* (5) *en fonctions rationnelles* $R_1(m, n)$ *et* $R_2(m, n)$ *est le produit d'un nombre arbitraire* *de facteurs des types* (39) *et* (40). $R_1(m, n)$ *peut en outre contenir comme facteur une fonction rationnelle arbitraire de m seulement, et* $R_2(m, n)$ *peut, dans une manière analogue, contenir une fonction rationnelle quelconque de n seulement.*

VI.

Le théorème VIII nous permet de construire toutes les fonctions hypergéométriques possibles de deux variables. On peut établir des résultats analogues pour un nombre arbitraire de variables.

Il faut d'abord remarquer que les solutions $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ de (5) ne correspondent pas toutes à des fonctions hypergéométriques En effet, il faut nécessairement que les coefficients $a_{m,n}$ de la série correspondante soient tous finis. Cette condition est évidemment satisfaite si $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ sont finis pour toutes valeurs entières positives de m et n, c'est-à-dire si les dénominateurs de ces fonctions rationnelles n'ont pas de zéros pour ces valeurs. Je fais d'abord remarquer qu'on peut obtenir des fonctions hypergéométriques bien définies même dans le cas où $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ sont infinis pour quelques valeurs de m et n. En effet, considérons un exemple spécial

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n-2)x^n.$$

Cette fonction est évidemment une fonction hypergéométrique d'une seule variable et l'on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n) = \frac{n-1}{n-2}.$$

On voit que $f(1) = 0$, $f(2) = \infty$, et $f(n)$ correspond néanmoins à une série bien définie. On trouvera sans difficulté la condition nécessaire et suffisante pour que $f(n)$ ou plus généralement $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ représentent des séries hypergéométriques. Je n'y insiste pas.

On doit à Horn (¹) des recherches très complètes sur le domaine de convergence des séries hypergéométriques de deux variables. Ses

(¹) *Loc. cit.*

résultats dépendent seulement des fonctions

$$(41)\qquad \begin{cases} \Phi_1(m, n) = \lim\limits_{t=\infty} R_1(mt, nt), \\ \Phi_2(m, n) = \lim\limits_{t=\infty} R_2(mt, nt). \end{cases}$$

A l'aide des expressions obtenues pour $R_1(m, n)$ et $R_2(m, n)$ on peut facilement déduire les fonctions (41). $R_1(m, n)$ consiste, comme nous l'avons déjà vu, en facteurs des trois types :

1° Facteurs contenant m seulement. On peut toujours les représenter sous la forme $m + C$ ou $(m + C)^{-1}$. Dans ce cas nous mettons $A = 1$ ou $A = -1$ et $B = 0$.

2° Facteurs du type (39). On voit que A est le degré total de ce facteur considéré comme fonction de $Am + Bn$.

3° Facteurs du type (40). Dans ce cas $A = 0$, et le dénominateur et le numérateur ont le même degré en m aussi bien qu'en n.

On obtient alors facilement

$$\Phi_1(m, n) = \prod_{A} (Am + Bn)^{A},$$

$$\Phi_2(m, n) = \prod_{B} (Am + Bn)^{B},$$

où le produit est formé pour tout A et B. Ce résultat correspond au résultat obtenu d'une manière différente par Horn.