// JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SERGE BERNSTEIN

Sur les polynômes orthogonaux relatifs à un segment fini

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 127-177.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__127_0>

Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini;

PAR SERGE **BERNSTEIN**.

[Le présent Mémoire contient l'exposition, avec quelques développements, de mes Conférences faites au mois de juin 1929 à l'Institut Henri Poincaré à Paris, que j'ai reproduites ensuite au mois de juillet au Séminaire de Mathématiques, à l'École Polytechnique de Zurich (¹).]

Introduction.

1. En suivant la voie ouverte par Tchebycheff, on rattache, en général, la théorie des polynomes orthogonaux correspondant à un poids donné sur un segment déterminé à celle des fractions continues (²). Cependant, par cette voie, on n'est pas encore parvenu à résoudre certains problèmes importants comme, par exemple, celui de la représentation (asymptotique) du polynome orthogonal valable sur tout le segment considéré.

La méthode que je développe ici consiste à combiner un procédé algébrique élémentaire de réduction, avec un passage à la limite fondé sur le théorème de Weierstrass relatif à la représentation approchée des fonctions continues par des polynomes. Le point de départ de cette méthode que j'ai aussi employée dans mes *Leçons sur*

(¹) Plusieurs des principaux résultats ont été résumés auparavant dans des Communications que j'ai présentées à l'Académie des Sciences de Paris : *Sur quelques propriétés asymptotiques de la meilleure approximation*, t. 186, p. 840; *Sur les polynomes de Jacobi*, t. 186, p. 1090; *Sur les polynomes orthogonaux*, t. 188, p. 361).

(²) Une méthode différente est employée par M. Szegö dans deux travaux importants : *Entwickelung nach Polynomen eines Orthogonalsystems* (*Mathem. Ann.*, t. 82); *Ueber den asymptotischen Ausdruck von Polynomen die durch eine Ortogonalitätseigenschaft definiert sind* (*Ibid.*, t. 86).

les propriétés extrémales, etc., professées à la Sorbonne en 1923 (collection E. Borel), pour l'étude de l'écart minimum sur un segment fini ou infini d'un polynome multiplié par une fonction positive donnée, se trouve dans mon ancienne Note, *Sur quelques propriétés asymptotiques des polynomes* (*Comptes rendus*, 1^er^ décembre 1913).

On reconnaît ainsi que, sous des conditions très générales, *les polynomes orthogonaux sont asymptotiquement identiques à ceux d'écart minimum correspondant à un poids convenablement choisi.* Cependant, il y a des cas importants où cette identification n'est plus possible, et dans la seconde Partie, nous allons faire une étude spéciale de certains de ces cas plus difficiles, ce qui nous obligera de compléter sur quelques points la théorie classique des polynomes de Jacobi.

2. L'identification en question est une généralisation de la propriété correspondante des polynomes trigonométriques de Tchebycheff.

On sait, en effet, que les polynomes trigonométriques de Tchebycheff

$$(1)\qquad T_n(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n}{2^n} = \frac{\cos n\theta}{2^{n-1}},$$

où $x = \cos\theta$, jouissent de la double propriété :

1° Ces polynomes s'écartent le moins possible de zéro dans l'intervalle $(-1, +1)$ parmi tous les polynomes de la forme

$$(2)\qquad P_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = \frac{\cos n\theta}{2^{n-1}} + c_1 \cos\overline{n-1}\,\theta + \ldots + c_n,$$

cet écart minimum étant ainsi égal à

$$(3)\qquad L_n = \frac{1}{2^{n-1}};$$

2° Ces polynomes réalisent aussi parmi les polynomes considérés le minimum de l'écart quadratique intégral, correspondant au poids

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

qui se trouve ainsi être égal à

$$(4)\qquad H_n^{(2)} = \int_{-1}^{+1} T_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 n\theta\, d\theta}{2^{2n-2}} = \frac{\pi}{2^{2n-1}};$$

les polynomes $T_n(x)$ sont donc orthogonaux relativement au poids

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

et l'on a

$$\text{(5)} \qquad H_n^2 = \frac{\pi}{2} L_n^2.$$

3. Il est aisé de montrer que :

Les polynomes $T_n(x)$ de Tchebycheff réalisent d'une façon générale le minimum de l'intégrale

$$\text{(6)} \qquad I_n = \int_{-1}^{+1} f[|P_n(x)|] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

quelle que soit la fonction $f(x)$ non décroissante et convexe.

En effet, la fonction $f(z)$ jouit, par hypothèse, de la propriété que

$$f\left(\left|\frac{y+z}{2}\right|\right) \leq f\left(\frac{|y|+|z|}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(|y|)+f(|z|)].$$

de plus, le dernier signe d'égalité peut être rejeté si l'on admet d'abord que la convexité a lieu au sens *strict*. Il en résulte, sous cette condition supplémentaire, que le polynome $P_n(x)$, fournissant le minimum de l'intégrale I_n, doit être *unique*, car, si deux polynomes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ donnent la même valeur à cette intégrale, le polynome

$$\frac{P_n(x)+Q_n(x)}{2}$$

conduira à une valeur moindre.

Or, d'autre part, on a, quel que soit φ,

$$\text{(6 bis)} \qquad I_n = \frac{1}{2}\int_{-\pi+\varphi}^{\pi+\varphi} f[|P_n(\cos\theta)|]\, d\theta,$$

donc, en particulier, en prenant $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, et en remarquant que

$$P_n\left[\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right] = \frac{1}{2^{n-1}}\cos n\theta + c'_1 \cos\overline{n-1}\,\theta + \ldots + c'_n,$$

nous devrons avoir identiquement (puisque le polynome fournissant le minimum est unique)

$$P_n\left[\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{n}\right)\right]=P_n(\cos\theta). \tag{7}$$

Ceci exprime que $P_n(\cos\theta)$ admet la période $\frac{2\pi}{n}$, et, par conséquent, $P_n(\cos\theta)$ se réduit au terme unique

$$P_n(\cos\theta)=\frac{\cos n\theta}{2^{n-1}}=T_n(x).$$

La démonstration est achevée pour le cas où $f(z)$ est convexe au sens strict; pour passer au cas général, il suffit d'observer que toute fonction convexe au sens large peut être considérée comme limite de fonctions convexes au sens strict; donc, dans ce cas également, aucun polynome $P_n(x)$ ne pourrait donner à I_n une valeur inférieure à

$$\int_{-1}^{+1} f[|T_n(x)|]\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Remarque. — On prouverait par le même raisonnement que

$$a_0\cos n\theta+b_0\sin n\theta$$

fournit la plus petite valeur à l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f|a_0\cos n\theta+b_0\sin n\theta+a_1\cos\overline{n-1}\,\theta+\ldots+b_{n-1}\sin\theta+a_n|\,d\theta,$$

quelle que soit la fonction $f(z)$ non décroissante et convexe.

En particulier, en posant

$$f(z)=|z|^l \qquad (l\geqq 1),$$

on trouve immédiatement, d'après ce qui précède, que *le minimum* $H_n^{(l)}$ *de*

$$\int_{-1}^{+1}|P_n(x)|^l\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

est égal à

$$H_n^{(l)}=\int_0^{\pi}\left|\frac{\cos n\theta}{2^{n-1}}\right|^l d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)}L_n^l. \tag{8}$$

4. La question principale, qui dirige toute notre étude actuelle, est de reconnaître *dans quelle mesure et comment la propriété générale des polynomes trigonométriques qui vient d'être établie s'étend aux polynomes orthogonaux correspondant à un poids quelconque.*

Nous étudierons de la façon la plus complète les polynomes orthogonaux $R_n(x)$ correspondant au poids

$$q(x) = \frac{t(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{9}$$

où $t(x)$ que nous appellerons *poids trigonométrique* est une fonction continue, satisfaisant dans l'intervalle $(-1, +1)$ à la condition

$$0 < \lambda < t(x) < L, \tag{10}$$

λ et L étant des constantes fixes. Nous verrons ensuite que plusieurs de nos conclusions resteront vraies sous des conditions plus générales, tandis que d'autres ne le seront plus. Il semble ainsi préférable de ne pas fatiguer l'attention dès le début par ces généralisations qui trouveront leur place naturelle dans l'exposé systématique qui va suivre, en conservant pour le moment l'hypothèse de la continuité de $t(x)$ et la condition (10).

Désignons par $L_n[t(x)]$ *le minimum de l'écart du produit*

$$t(x)\,P_n(x) \tag{11}$$

sur le segment $(-1, +1)$, *et par* $H_n^{(l)}[t(x)]$ *le minimum de l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} [\,t(x)\,|\,P_n(x)\,|\,]^l \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{12}$$

où $P_n(x)$ est un polynome quelconque (2) de degré n, dont le terme du plus haut degré a son coefficient égal à 1. Il sera démontré que *l'égalité* (8) *s'étend asymptotiquement, et l'on a*

$$H_n^{(l)}[t(x)] \sim \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)} L_n^{(l)}[t(x)] \tag{13}$$

au moins pour $l \geqq 2$, *et que les polynomes orthogonaux* $R_n(x)$ *qui réa-*

lisent le minimum de l'intégrale (12) *pour* $l=2$ [*correspondant au poids trigonométrique* $t^2(x)$] *fournissent asymptotiquement le minimum de* (12) *pour* $l>2$ *et aussi celui* $L_n[t(x)]$ *de l'écart de* (11).

Ce résultat est une conséquence du théorème suivant :

Les polynomes orthogonaux $\overline{R}_n(x)$ *normés correspondant au poids trigonométrique* $t(x)$, *c'est-à-dire définis par les conditions que*

$$\int_{-1}^{+1} \overline{R}_n(x)\,\overline{R}_m(x)\frac{t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=0, \qquad \text{si } n \gtrless m \tag{14}$$

et

$$\int_{-1}^{+1} \overline{R}_n^2(x)\frac{t(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=1 \tag{15}$$

admettent l'expression asymptotique

$$\overline{R}_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi\,t(x)}}\cos(n\theta+\psi), \tag{16}$$

où $\theta=\arccos x$ *et*

$$\psi=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(z)-\log t(x)}{z-x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\,dz, \tag{17}$$

valable uniformément sur tout le segment $(-1,+1)$, *pourvu que la fonction* $t(x)$ [satisfaisant à (10)] *satisfasse encore à la condition*

$$|t(x+\delta)-t(x)|\,|\log\delta|^{1+\varepsilon}<k \qquad (\varepsilon>0,\ k>0). \tag{18}$$

5. La démonstration de ce théorème occupera la place centrale dans la première partie de notre travail; mais, en admettant l'exactitude de la formule (16), nous allons dès maintenant en déduire l'égalité (13). Pour le cas de $l=2$, cette affirmation est évidente, car le polynome $R_n(x)$ multiplié par $\sqrt{t(x)}$ atteint en $n+1$ points avec des signes successivement opposés son module maximum qui est asymptotiquement égal à $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, puisque ψ prend la valeur zéro aux deux extrémités ± 1. Donc, $\overline{R}_n(x)\sqrt{t(x)}$ donne asymptotiquement l'écart minimum du produit $\overline{P}_n(x)\sqrt{t(x)}$, où $\overline{P}_n(x)$ est un polynome quelconque de degré n, ayant le même terme de degré supérieur que $\overline{R}_n(x)$; par conséquent, l'égalité (13) pour $l=2$ [qui correspond à l'égalité (5) pour les polygomes trigonométriques] résulte de ce que

$$R_n^2(x) = H_n^{(2)}\left[\sqrt{l(x)}\right] \overline{R}_n^2(x), \tag{19}$$

où $\overline{R}_n(x)$ est le polynome orthogonal correspondant au même poids trigonométrique $l(x)$, non normé, mais ayant le coefficient de x^n égal à 1.

Pour obtenir l'égalité (13), lorsque $l > 2$, observons d'abord que (ψ étant continue) on a

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} |\cos(n\theta + \psi)|^l \, d\theta = \int_0^{\pi} |\cos n\theta|^l \, d\theta \tag{20}$$
$$= \int_0^{\pi} |\cos\theta|^l \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l}{2}+1\right)}.$$

En effet, δ étant un nombre positif arbitrairement petit, décomposons l'intervalle $(0, \pi)$ en parties suffisamment petites : $0, b_1, b_2, \ldots, b_{h-1}, \pi$, pour que la variation de ψ dans chaque partie reste inférieure à $\frac{\delta}{2l\pi}$; alors ψ_k désignant le milieu de la $k^{\text{ième}}$ partie, on aura

$$\left| \int_0^{\pi} |\cos(n\theta + \psi)|^l \, d\theta - \sum_1^h \int_{b_{k-1}}^{b_k} |\cos(n\theta + \psi_k)|^l \, d\theta \right| < \frac{\delta}{2},$$

et, d'autre part, on pourra prendre n assez grand pour que la différence entre

$$\int_{b_{k-1}}^{b_k} |\cos(n\theta + \psi_k)|^l \, d\theta = \int_{b_{k-1}+\frac{\psi_k}{n}}^{b_k+\frac{\psi_k}{n}} |\cos n\theta|^l \, d\theta$$

et

$$\int_{b_{k-1}}^{b_k} |\cos n\theta|^l \, d\theta$$

soit inférieure en valeur absolue à $\frac{\delta}{2h}$; donc,

$$\left| \int_0^{\pi} |\cos(n\theta + \psi)|^l \, d\theta - \int_0^{\pi} |\cos n\theta|^l \, d\theta \right| < \delta.$$

Ainsi, l'égalité (13) sera établie, si nous montrons que pour tout polynome $\overline{P}_n(x)$ de degré n, assez élevé, commençant par le même terme que $\overline{R}_n(x)$, on a

$$(21)\quad \int_{-1}^{1} |\overline{P}_n(x)|^l (\sqrt{t(x)})^l \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_{-1}^{+1} |\overline{R}_n(x)|^l (\sqrt{t(x)})^l \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} > -\varepsilon,$$

quelque petit que soit le nombre positif donné ε.

Or, quels que soient $y \geqq 0$, $z \geqq 0$, $m = \frac{l}{2} > 1$, on a

$$y^m - z^m \geqq m z^{m-1}(y-z);$$

donc,

$$\int_{-1}^{+1} \left\{ |\overline{P}_n(x)\sqrt{t(x)}|^l - |\overline{R}_n(x)\sqrt{t(x)}|^l \right\} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\geqq \frac{l}{2}\int_{-1}^{+1} \left\{ \overline{P}_n^2(x)\, t(x) - \overline{R}_n^2(x)\, t(x) \right\} \frac{|\overline{R}_n(x)\sqrt{t(x)}|^{l-2}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Il suffit, par conséquent, de prouver que, pour n assez grand,

$$(22)\quad \int_0^{\pi} \left\{ \overline{P}_n^2(x) - \overline{R}_n^2(x) \right\} t(x) |\cos(n\theta + \psi)|^{l-2}\, d\theta > -\varepsilon.$$

A cet effet, en développant $|\cos(n\theta+\psi)|^{l-2}$, en série trigonométrique,

$$|\cos(n\theta+\psi)|^{l-2} = A_0 + A_2\cos 2(n\theta+\psi) + \ldots + A_k \cos k(n\theta+\psi) + \varepsilon_k,$$

où $A_0 > 0$, nous pouvons fixer k (indépendamment de n) assez grand pour avoir $|\varepsilon_k| < \frac{\varepsilon}{2}$. De plus, en appliquant les formules (16) et (17), où $t(x)$ est remplacé par $t^p(x)$, on a

$$I_p = \int_0^{\pi} \left\{ \overline{P}_n^2(x) - \overline{R}_n^2(x) \right\} t(x) \cos p(n\theta+\psi)\, d\theta$$
$$\sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} [t(x)]^{1+\frac{p}{2}}\, \overline{R}_{pn,p}(x) \left[\overline{P}_n^2(x) - \overline{R}_n^2(x) \right] d\theta,$$

$\overline{R}_{pn,p}(x)$ désignant le polynome orthogonal normé de degré pn correspondant au poids trigonométrique $t^p(x)$. Donc, $p \geqq 2$ étant fixé, I_p tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; cela est évident pour $p = 2$ à cause des équations d'orthogonalité de $\overline{\mathrm{R}}_{2n,2}(x)$ et du fait que $\overline{\mathrm{P}}_n^2(x) - \overline{\mathrm{R}}_n^2(x)$ est un polynome de degré non supérieur à $2n-1$; de même, $\mathrm{Q}_h(x)$ étant un polynome de degré $h < n$ assez élevé pour que $\mathrm{Q}_h(x)$ diffère aussi peu qu'on veut de $[t(x)]^{1-\frac{p}{2}}$, nous aurons, pour $p > 2$,

$$(23) \qquad \int_0^{\pi} [t(x)]^p \, \overline{\mathrm{R}}_{pn,p}(x) \, \mathrm{Q}_h(x) \left[\overline{\mathrm{P}}_n^2(x) - \overline{\mathrm{R}}_n^2(x)\right] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

d'où il résulte que I_p tend vers zéro, de sorte que pour n assez grand, on a

$$|\mathrm{I}_p| < \frac{\varepsilon}{2k},$$

et l'inégalité (22) se trouve établie.

6. *Remarque.* — Par ce qui précède, l'égalité asymptotique (13) n'est démontrée que sous la condition (18), mais les considérations qui nous permettront dans la suite de nous débarrasser de cette restriction pour le cas de $l = 2$ sont applicables, quel que soit l; ainsi, *toutes les extensions de l'égalité* (13) *correspondant à $l = 2$ sont également vraies pour $l > 2$.*

Le raisonnement qu'on vient de faire n'est pas valable pour $l < 2$; cependant, il ne paraît pas douteux que l'égalité (13) subsiste pour toutes les valeurs $l \geq 1$. Pour trancher la question, il suffirait d'étudier le cas particulièrement intéressant de $l = 1$. L'étude de ce dernier cas permettrait de généraliser (asymptotiquement) encore d'autres propriétés des polynomes trigonométriques $\mathrm{T}_n(x)$; sans nous arrêter longuement sur cette question, bornons-nous à quelques indications sommaires.

La détermination des polynomes $\mathrm{Q}_{n-1}(x)$ de degré $n-1$ pour minimer l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} |f(x) - \mathrm{Q}_{n-1}(x)| \, q(x) \, dx.$$

où le poids $q(x) > 0$ et la fonction $f(x)$ sont donnés, conduit à un système de n équations [1]

$$(24)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{\alpha_1} x^p q(x)\,dx - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^p q(x)\,dx + \ldots \pm \int_{\alpha_k}^{1} x^p q(x)\,dx = 0 \\ (p = 0, 1, \ldots, n-1), \end{cases}$$

où α_k sont les points au nombre non inférieur à n, où $f(x) - Q_{n-1}(x)$ change de signe; on aura, en particulier, $k = n$ toutes les fois que $f^{(n)}(x)$ ne change pas de signe sur le segment $(-1, +1)$; alors, quelle que soit la fonction $f(x)$ de la classe considérée, les polynomes cherchés $Q_{n-1}(x)$ sont les polynomes interpolateurs de Lagrange correspondant au système bien déterminé de nœuds [2] qui sont les racines du polynome (2) de degré n qui rend minima l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} |P_n(x)|\, q(x)\,dx.$$

En particulier, d'après le résultat obtenu au paragraphe **5**, on a

$$P_n(x) = T_n(x),$$

lorsque $q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; donc, dans ce cas,

$$\alpha_h = \cos\frac{\pi\left(h - \frac{1}{2}\right)}{n}.$$

---

(1) Pour le cas de $q(x) = 1$, la solution du système (24) a été donnée pour la première fois par Korkine et Zolotareff dans l'article : *Sur un certain minimum* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XII, 1873).

(2) L'unicité du système de solutions de (24) s'établit de la façon suivante. Admettons qu'il existe encore un autre système $\beta_1, \ldots, \beta_n$ satisfaisant à (24). Le segment $(-1, +1)$ se trouvera alors décomposé en $2n+1$ intervalles (dont $\overline{n-1}$ ou plus pourraient être de longueur nulle) par les points α_i, β_j. Il y aura p de ces intervalles, où le signe devant l'intégrale dans (24) sera le même que dans l'équation correspondante formée avec les β; et p_1 de ces intervalles jouiront de la propriété inverse. Au moins, un des nombres p ou p_1 ne dépasse pas n : soit, par exemple, $p \leqq n$. L'intégrale formée avec un polynome arbitraire $R_{n-1}(x)$ de degré $\overline{n-1}$, prise suivant ces p intervalles avec les signes imposés par (24), devrait être nulle, ce qui n'est pas possible, puisqu'on peut disposer des racines de $Q_{n-1}(x)$ pour rendre positive la partie de l'intégrale relative à chacun de ces p intervalles.

Il est également facile de montrer que pour $q(x) = 1$, *on a*

$$\alpha_h = \cos\frac{h\pi}{n+1},$$

de sorte que $P_n(x) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)$ *est alors le polynome qui, multiplié par* $\sqrt{1-x^2}$, *s'écarte le moins de zéro dans l'intervalle* $(-1, +1)$; dans ce dernier cas, où toutes les formules sont également non seulement asymptotiques, mais rigoureuses, on a ainsi, conformément à (13),

$$H_n^{(1)}(\sqrt{1-x^2}) = 2L_n(\sqrt{1-x^2}).$$

On trouvera la démonstration de ceci dans mon article (¹) : *Sur une propriété des polynomes de Tchebycheff*, où j'en ai tiré la conséquence que de tous les polynomes $P_n(x)$ de forme (2), le polynome $T_n(x)$ est celui dont la variation totale sur $(-1, +1)$ est minima; cette variation minima est donc égale à $\frac{n}{2^{n-2}}$.

J'observerai, enfin, que les deux systèmes de nœuds que nous venons de signaler comme correspondant aux minima des intégrales des modules conduisent à des formules d'interpolation qui ont été employées par divers auteurs. La première a joué un rôle essentiel dans mon étude sur la meilleure approximation de $|x|$ où je l'ai appliquée à la fonction $f(x)$ égale à $+1$ ou -1, suivant que $x > 0$ ou $x < 0$. Sous une forme générale, cette formule d'interpolation a fait l'objet d'une étude importante de M. M. Riesz, qui en a tiré, en particulier, une démonstration élégante du théorème concernant le maximum du module de la dérivée d'une suite trigonométrique finie (²). La seconde formule, qui appartient à Lagrange, est intimement liée au développement en série trigonométrique de Fourier, et sa convergence est essentiellement du même ordre que celle de ce dernier.

(¹) *Comptes rendus de l'Académie de l'U. R. S. S.*, 1927.
(²) *C. R. Acad. Sc.*, 1914.

CHAPITRE I.

FONDEMENTS ALGÉBRIQUES.

1. Soient $P_n(x)$ des polynomes orthogonaux correspondant à un poids

$$q_0(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{1-x^2}}; \tag{25}$$

proposons-nous de former les polynomes $R_{n,h}(x)$ orthogonaux correspondant au poids

$$q_h(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{1-x^2}} t_h(x), \tag{26}$$

où

$$t_h(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_h}\right) \tag{27}$$

est un polynome de degré h, positif sur le segment $(-1, +1)$; le coefficient de la plus haute puissance dans $P_n(x)$ et dans $R_{n,h}(x)$ est toujours pris égal à 1.

Il est aisé de vérifier alors que (¹)

$$R_{n,h}(x)\, t_h(x) = \frac{(-1)^h}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_h} \frac{\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_h, x)}{\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_h)}, \tag{28}$$

où

$$\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_h) = \begin{vmatrix} P_n(a_1) & \ldots & P_n(a_h) \\ P_{n+1}(a_1) & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ P_{n+h-1}(a_1) & \ldots & P_{n+h-1}(a_h) \end{vmatrix} \tag{29}$$

(¹) Un cas particulier de cette formule a été indiqué par M. Szégö dans le travail *Entwickelung einer analytischen Funktion nach des Polynomen eines Orthogonal systems*, (*Mathem. Ann.*, t. 82, 1921, p. 188-212).

et

$$(29\ bis)\quad \Delta_n(a_1, \ldots, a_h, x) = \begin{vmatrix} P_n(a_1) & \ldots & P_n(a_h) & P_n(x) \\ P_{n+1}(a_1) & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ P_{n+h}(a_1) & \ldots & \ldots\ldots & P_{n+h}(x) \end{vmatrix},$$

puisque, d'après (28), $R_{n,h}(x)$ est effectivement un polynome de degré n, ayant son terme du plus haut degré égal à x^n, et que le second membre de (28) est linéaire et homogène par rapport aux polynomes $P_n(x), \ldots, P_{n+h}(x)$.

Donc, en employant les notations adoptées dans l'Introduction, on a

$$(30)\quad H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x) f_0(x)}\right] = \int_{-1}^{+1} R_{n,h}^2(x) \frac{f_0(x)\, t_h(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \int_{-1}^{+1} R_{n,h}(x)\, x^n \frac{f_0(x)\, t_h(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_h} \int \frac{\Delta_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_h)}{\Delta_n(a_1, \alpha_2, \ldots, a_h)} P_n(x)\, x^n \frac{f_0(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\Delta_{n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_h)}{a_1 a_2 \ldots a_h \Delta_n(a_1, \ldots, a_n)} H_n^2\left[\sqrt{f_0(x)}\right].$$

Il va de soi que, dans le cas où plusieurs des racines $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$, les colonnes correspondantes de nos déterminants contiendront, au lieu des valeurs des polynomes, celles de leurs dérivées successives jusqu'à l'ordre $k-1$.

2. Nous nous occuperons, dans ce Chapitre, uniquement du cas où $f_0(x) = 1$; nous avons donc actuellement

$$P_n(x) = T_n(x).$$

De plus, toutes les racines a_k de $t_h(x)$ étant extérieures au segment $(-1, +1)$, on a la formule asymptotique

$$(31)\quad T_n(a_k) \sim \left(\frac{\rho_k}{2}\right)^n,$$

où le module de

$$\rho_k = a_k + \sqrt{a_k^2 - 1}$$

est égal à la demi-somme des axes de l'ellipse passant par a_k et ayant pour foyers $(-1, +1)$.

Donc,

$$\Delta_n(a_1, a_2, \ldots, a_h) \sim \left(\frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_h}{2^h}\right)^n \left[\frac{\rho_2-\rho_1}{2}\,\frac{\rho_3-\rho_1}{2}\cdots\frac{\rho_h-\rho_{h-1}}{2}\right]$$

et, d'après (30),

$$(32)\qquad \mathrm{H}_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right] \sim \left(\frac{\rho_1}{2a_1}\right)\cdots\left(\frac{\rho_h}{2a_h}\right)\mathrm{H}_n^{(2)} = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\left(\frac{\rho_1}{2a_1}\right)\cdots\left(\frac{\rho_h}{2a_h}\right)$$

Il est aisé de vérifier, grâce à la remarque faite plus haut, que la formule (32) subsiste dans le cas où les racines a_k ne sont pas distinctes.

5. De la formule (28), nous pouvons également déduire une formule asymptotique pour $\mathrm{R}_{n,h}(x)$; nous avons, quel que soit x,

$$(33)\qquad \mathrm{R}_{n,h}(x)\,t_h(x) \sim \frac{(-1)^h}{a_1 a_2\ldots a_h}\;\frac{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & \mathrm{T}_n(x) \\ \frac{\rho_1}{2} & \ldots & \mathrm{T}_{n+1}(x) \\ . & \ldots & . \\ \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^h & \ldots & \mathrm{T}_{n+h}(x)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \frac{\rho_1}{2} & \ldots & \frac{\rho_h}{2} \\ . & \ldots & . \\ \left(\frac{\rho_1}{2}\right)^{h-1} & \ldots & \left(\frac{\rho_h}{2}\right)^{h-1}\end{vmatrix}}.$$

Dans le cas où x est *extérieur* au segment, on peut remplacer $\mathrm{T}_n(x)$ par son expression asymptotique $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n$; donc,

$$(34)\qquad \mathrm{R}_{n,h}(x) \sim \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2^{n+h}}\,\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}-\rho_1\right)\ldots\left(x+\sqrt{x^2-1}-\rho_h\right)}{(x-a_1)\ldots(x-a_h)}$$

$$= \frac{\rho_1\rho_2\ldots\rho_h\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{2^n\left(\rho_1-x+\sqrt{x^2-1}\right)\ldots\left(\rho_h-x+\sqrt{x^2-1}\right)},$$

où la dernière expression met en évidence que le facteur de $(x+\sqrt{x^2-1})^n$ reste fini, car son dénominateur ne s'annule jamais.

4. Pour le cas où x est un point du segment $(-1, +1)$, en posant $x=\cos\theta$, et en remarquant que le numérateur du second membre de (33) est une somme de deux déterminants de Vandermonde à cause de l'identité $T_n(x)=\dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2^n}$, nous obtenons la formule asymptotique

$$(35)\quad R_{n,h}(x\,|\,l_h(x)) \sim \frac{(-1)^h}{2^{n+h}a_1\ldots a_h}\big[e^{in\theta}(e^{i\theta}-\rho_1)\ldots(e^{i\theta}-\rho_h) + e^{-in\theta}(e^{-i\theta}-\rho_1)\ldots(e^{-i\theta}-\rho_h)\big].$$

Or, les quantités ρ_k étant réelles ou deux à deux conjuguées, les deux produits sont conjugués, et l'on a

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} &(-1)^h(e^{i\theta}-\rho_1)\ldots(e^{i\theta}-\rho_h)\\ &\quad=\sqrt{[x-\rho_1)^2+1-x^2]\ldots[(x-\rho_h)^2+1-x^2]}\,e^{i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_h)}\\ &\quad=\sqrt{2^h a_1\rho_1\ldots a_h\rho_h\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_h}\right)}\,e^{i(\alpha_1+\ldots+\alpha_h)},\\ &(-1)^h(e^{-i\theta}-\rho_1)\ldots(e^{-i\theta}-\rho_h)\\ &\quad=\sqrt{2^h a_1\rho_1\ldots a_h\rho_h\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a_h}\right)}\,e^{-i(\alpha_1+\ldots+\alpha_h)},\end{aligned}\right.$$

où α_k est l'argument de $\rho_k-e^{i\theta}$, lorsque ρ_k est réel, et $\alpha_k+\alpha_{k+1}$ est l'argument du produit $(e^{i\theta}-\rho_k)(e^{i\theta}-\rho_{k+1})$, lorsque ρ_k et ρ_{k+1} sont conjugués, en posant dans tous les cas (puisque $\rho_k^2+1=2a_k\rho_k$)

$$(37)\qquad \cos\alpha_k=\frac{\rho_k-x}{\sqrt{2\rho_k(a_k-x)}},\qquad \sin\alpha_k=\frac{-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2\rho_k(a_k-x)}}.$$

Lorsque x varie de -1 à $+1$, la somme

$$(38)\qquad \psi=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_h$$

reprend la même valeur qui, sans restreindre la généralité, peut être supposée égale à zéro ou π, car

$$\operatorname{tang}\alpha_k = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-\rho_k} \tag{37 bis}$$

ne devient pas infini dans l'intervalle considéré [1].

Nous tirons ainsi de (35), (36) et (38) que

$$R_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)} \sim \frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{M_h}\cos(n\theta+\psi), \tag{39}$$

où

$$M_h = \frac{\rho_1}{2a_1}\,\frac{\rho_2}{2a_2}\cdots\frac{\rho_h}{2a}. \tag{40}$$

Donc, *l'écart minimum d'un produit*

$$P_n(x)\sqrt{t_h(x)},$$

où $P_n(x)$ *est un polynome quelconque de la forme* (2), *est réalisé asymptotiquement par le polynome orthogonal* $R_{n,h}(x)$, *et l'on a*

$$L_n\left[\sqrt{t_h(x)}\right] \sim \frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{M_h}. \tag{41}$$

En tenant compte de (32), qui s'écrit sous la forme

$$H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right] \sim \frac{\pi}{2^{2n-1}}M_h, \tag{32 bis}$$

on a ainsi

$$H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right] \sim \frac{\pi}{2}L_n^2\left[\sqrt{t_h(x)}\right], \tag{42}$$

quel que soit le polynome $t_h(x)$.

La remarque faite plus haut permet de rejeter dans les formules

---

(1) Dans le cas où ρ_k et ρ_{k+1} sont conjugués,

$$\operatorname{tang}(\alpha_k+\alpha_{k+1}) = \frac{\sqrt{1-x^2}(2x-\rho_k-\rho_{k+1})}{2x^2-(\rho_k+\rho_{k+1})x+\rho_k\rho_{k+1}-1}$$

pourrait devenir infinie, mais ses pôles ne sont pas séparés par une racine, car le dénominateur est positif pour $x = \frac{\rho_k+\rho_{k+1}}{2}$ comme pour $x = \pm 1$.

asymptotiques qui précèdent la restriction que les racines de $t_h(x)$ soient simples. Ainsi, en particulier, lorsque $t_h(x)=p_h^2(x)$ est un carré parfait, la formule (41) est identique (aux notations près) à celle que j'ai donnée dans ma Note *Sur quelques propriétés asymptotiques des polynomes* (¹) où j'ai indiqué pour la première fois l'expression asymptotique (39).

5. Nous allons à présent étendre les formules (41) et (32 *bis*) [et, par conséquent, la formule (42) qui en résulte] au cas où t_h tend uniformément vers une fonction continue (²) quelconque $t(x)$.

A cet effet, observons que l'inégalité

$$(43)\qquad 1-\varepsilon<\frac{t(x)}{t_h(x)}<1+\varepsilon$$

entraîne

$$1-\varepsilon<\frac{\mathrm{H}_n^{(2)}\left[\sqrt{t(x)}\right]}{\mathrm{H}_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right]}<1+\varepsilon,\qquad \sqrt{1-\varepsilon}<\frac{\mathrm{L}_n\left[\sqrt{t(x)}\right]}{\mathrm{L}_n\left[\sqrt{t_h(x)}\right]}<\sqrt{1+\varepsilon},$$

quel que soit n. Donc, à cause de (32 *bis*), on peut prendre n assez grand pour avoir

$$(44)\qquad \frac{\pi}{2^{2n-1}}\mathrm{M}_h(1-2\varepsilon)<\mathrm{H}_n^{(2)}\left[\sqrt{t(x)}\right]<\frac{\pi}{2^{2n-1}}\mathrm{M}_h(1+2\varepsilon).$$

Par conséquent, si $t'_{h_1}(x)$ est un autre polynome approché de $t(x)$ qui satisfait aussi à (43), la quantité M'_{h_1} qui lui correspond devant également satisfaire à (44), on aura

$$\mathrm{M}_h\frac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}<\mathrm{M}'_{h_1}<\mathrm{M}_h\frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon},$$

d'où il résulte *qu'il existe un nombre parfaitement déterminé*

$$(45)\qquad \mathrm{M}=\lim_{n=\infty}\mathrm{M}_h=\lim\frac{\rho_1}{2a_1}\cdots\frac{\rho_h}{2a_h}$$

(¹) *C. R. Ac. Sc.*, 1er décembre 1913. *Voir* aussi mes *Leçons sur les propriétés extrémales*, p. 15-19.

(²) *Voir* le paragraphe 6 du premier Chapitre de mes *Leçons sur les propriétés extrémales*.

lié à la fonction $t(x)$ indépendant de la façon dont la suite des polynomes $t_h(x)$ tendant uniformément vers $t(x)$ a été choisie. D'après (44), on a

$$(46)\quad \mathrm{H}_n^{(2)}\left[\sqrt{t(x)}\right] \sim \frac{\pi}{2^{2n-1}}\mathrm{M} \qquad \text{et de même} \qquad \mathrm{L}_n\left[\sqrt{t(x)}\right] \sim \frac{1}{2^{n-1}}\sqrt{\mathrm{M}}.$$

Ainsi, la relation (42) subsiste, lorsqu'on y remplace $t_h(x)$ par une fonction continue quelconque $t(x)$ satisfaisant à (10), et l'on peut l'écrire aussi sous la forme

$$(42\ bis)\qquad \mathrm{H}_n^{(2)}[t(x)] \sim \frac{\pi}{2}\mathrm{L}_n^2[t(x)].$$

De la formule (45), on tire immédiatement la relation fonctiontionnelle (1)

$$(47)\qquad \mathrm{M}[t(x)s(x)] = \mathrm{M}[t(x)]\,\mathrm{M}[s(x)].$$

Je renverrai à mon article (2), *Sur la distribution des zéros des polynomes tendant vers une fonction positive* pour quelques autres conséquences de la formule (45).

6. La relation (47) fait prévoir que $\log\mathrm{M}$ est une fonctionnelle linéaire de la fonction $\log t(x)$ dont elle dépend.

La forme de cette fonctionnelle est aisée à trouver.

Partons de la formule (40). On a

$$\log\mathrm{M}_h = \sum_1^h \log\frac{\rho_k}{2a_k} = \sum_1^h \log\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{a_k^2}}}{2};$$

en appliquant la méthode des résidus de Cauchy à cette somme symétrique par rapport aux racines $t_h(x)$, on obtient

$$\log\mathrm{M}_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \frac{t_h'(z)}{t_h(z)}\log\left(\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}}{2}\right)dz,$$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 186, p. 840.

(2) *Journal de Mathématiques*, 1929, vol. II du *Jubilé de MM. P. Appell et E. Picard*, p. 327.

où le contour d'intégration C est formé par : 1° le segment $(\varepsilon i, \varepsilon i+1)$; 2° le demi-cercle de rayon très petit ε, ayant 1 pour centre; 3° le segment $(-\varepsilon i+1, -\varepsilon i-1)$; 4° le demi-cercle de rayon ε ayant -1 pour centre; 5° le segment $(\varepsilon i-1, \varepsilon i)$. En intégrant par parties, on trouve donc

$$\begin{aligned}\log M_h &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C \log t_h(z)\frac{1}{(z+\sqrt{1-z^2})\sqrt{z^2-1}}\frac{dz}{z}\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \log t_h(z)\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\right]dz\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\log t_h(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx.\end{aligned}$$

Puisque la dernière intégrale est prise entre des limites réelles, elle aura un sens lorsque $t_h(x)\to t(x)$, et, par conséquent, on a pour toute fonction positive continue $t(x)$ la formule

$$\log M = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx. \tag{48}$$

D'après (46), on aura ainsi

$$L_n[\sqrt{t(x)}] \sim \frac{1}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\log t(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx} \tag{49}$$

et

$$H_n^{(2)}[\sqrt{t(x)}] \sim \frac{\pi}{2^{2n-1}} e^{\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx}. \tag{50}$$

La formule (50) a été établie par M. Szégö [1], qui a même prouvé son exactitude dans l'hypothèse générale où la fonction bornée $\log t(x)$ est intégrable au sens de M. Lebesgue.

7. La formule (49), qui résulte essentiellement de la validité *uniforme* sur tout le segment $(-1, +1)$ de la formule asymptotique (39), ne se trouve pas chez M. Szégö. D'ailleurs, l'extension de la formule (49) aux fonctions discontinues est plus restreinte, et pour cela, l'intégrabilité au sens de M. Lebesgue est certainement *insuffisante*.

---

(1) *Loc. cit.*

En effet, considérons la fonction $t(x) = 1$ en tous les points où $\frac{1}{\pi}$ arc $\cos x$ est rationnel, et $t(x) = \frac{1}{4}$ en tous les autres points. La formule (49) conduirait à la même valeur $\frac{1}{2^n}$ pour $L_n\left[\sqrt{t(x)}\right]$ que dans le cas où on l'a identiquement $t(x) = \frac{1}{4}$. Or, le polynome $P_n(x)$, qui s'écarte le moins possible de zéro en $n+1$ points $\cos\frac{k\pi}{n}$, où $t(x) = 1$ par hypothèse, se réduit au polynome de Tchebicheff $T_n(x)$; donc, la valeur exacte de $L_n\left[\sqrt{t(x)}\right]$ est, quel que soit n, égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$, contrairement à la formule (49).

Il suffit pour que la formule (49) [*et, par conséquent*, (42) *également*] *soit exacte que la fonction* $\log t(x)$ *soit bornée et intégrable au sens de Riemann.*

En effet, la condition énoncée est équivalente à l'affirmation qu'il existe deux systèmes de fonctions *continues* $T_h(x)$ et $S_h(x)$ telles que

$$L \geqq T_h(x) > t(x) > S_h(x) \geqq \lambda > 0$$

et que

$$(51)\quad \lim_{h=\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{\log T_h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{h=\infty} \int_{-1}^{+1} \frac{\log S_h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{-1}^{+1} \frac{\log t(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or, pour n suffisamment grand, on a, quelque petit que soit ε,

$$\frac{1-\varepsilon}{2^{n-1}} M[T_h(x)] < L_n[T_h(x)] < \frac{1+\varepsilon}{2^{n-1}} M[T_h(x)],$$

$$\frac{1-\varepsilon}{2^{n-1}} M[S_h(x)] < L_n[S_h(x)] < \frac{1+\varepsilon}{2^{n-1}} M[S_h(x)];$$

donc, puisque

$$L_n[T_h(x)] > L_n[t(x)] > L_n[S_h(x)],$$

on a

$$\frac{1+\varepsilon}{2^{n-1}} M[T_h(x)] > L_n[t(x)] > \frac{1-\varepsilon}{2^{n-1}} M[S_h(x)],$$

d'où il résulte, à cause de (51), que la formule (49) s'applique effectivement à notre fonction $t(x)$.

8. Dans les formules précédentes on considère le segment fixe $(-1, +1)$; dans ces conditions, $M[t(x)]$ est une constante. Mais, si l'on fait le changement linéaire de variables $z = \frac{(x+1)}{2}u$, le segment $(-1, +1)$ sera remplacé par $(0, u)$, et l'écart minimum $L_n[t(z), u]$ du produit

$$t(z)(z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n)$$

sur le segment $(0, u)$ sera donné asymptotiquement par la formule

$$L_n[t(z), u] \sim 2\left(\frac{u}{4}\right)^n M(u), \tag{52}$$

où

$$\log M(u) = F(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^u \frac{\log t(z)\, dz}{\sqrt{z(u-z)}}. \tag{53}$$

Donc la fonction $\Phi(z) = \log t(z)$ est liée à $F(z)$ par l'équation intégrale d'Abel

$$F(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{\Phi(ux)\, dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(u \sin^2\theta)\, d\theta. \tag{53 bis}$$

Par conséquent, on a inversement

$$\Phi(u) = F(0) + u\int_0^1 \frac{F'(ux)\, dx}{\sqrt{1-x}},$$

dans le cas au moins où $F(u)$ admet une dérivée.

9. Le même procédé qui nous a servi pour représenter par une intégrale définie $\log M$ peut être appliqué pour transformer l'expression (34) et la somme ψ qui intervient dans (39) représentée par la formule (38). Occupons-nous d'abord de cette dernière. On a, d'après (37 *bis*),

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{i}{2}\sum_1^k \log\frac{x - \rho_k - \sqrt{x^2-1}}{x - \rho_k + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_C \frac{t'_h(z)}{t_h(z)} \log\frac{z + \sqrt{z^2-1} - x + \sqrt{x^2-1}}{z + \sqrt{z^2-1} - x - \sqrt{x^2-1}}\, dz, \end{aligned} \tag{54}$$

où le contour d'intégration C est le même qu'au paragraphe **6**. D'où, en intégrant par parties,

$$
\begin{aligned}
(55)\quad \psi &= -\frac{1}{4\pi}\int_C \log t_h(z)\Bigg[\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}-x+\sqrt{x^2-1}} \\
&\qquad -\frac{1}{z+\sqrt{z^2-1}-x-\sqrt{x^2-1}}\Bigg]\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_C \log t_h(z)\left[\frac{\sqrt{x^2-1}}{(z+\sqrt{z^2-1}-x)^2-(x^2-1)}\right]\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\right)dz \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_C \log t_h(z)\frac{\sqrt{x^2-1}}{z+\sqrt{z^2-1}-2x+\left(z-\sqrt{z^2-1}\right)}\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_C \log t_h(z)\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\,\frac{dz}{z-x}.
\end{aligned}
$$

Puisqu'on a $\psi = 0$, si $t_h(z)$ est constant, on peut mettre (55) sous la forme

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int_C \frac{\log t_h(z)-\log t_h(x)}{z-x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\,dz;$$

donc en faisant tendre le contour C vers le segment double $(-1, +1)$, on trouve finalement

$$(56)\qquad \psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_h(z)-\log t_h(x)}{z-x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\,dz.$$

L'expression (34), valable pour tout point x extérieur au segment $(-1, +1)$, transformée par le même procédé, donne

$$(57)\qquad R_{n,h}(x) \sim \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\log t_h(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}.$$

Par ce qui précède, les formules (39), (56) et (57) ne se trouvent établies que lorsque $t_h(x)$ sont des polynomes quelconques. L'extension de ces formules n'est pas aussi simple que celle des formules (32) et (41). Le Chapitre qui suit est consacré à cette étude.

CHAPITRE II.

EXTENSION DES EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES DES POLYNOMES ORTHOGONAUX.

1. Commençons par évaluer l'erreur de nos formules asymptotiques dans le cas algébrique. Dans ce but nous allons établir le

LEMME. — *Soit*

$$S = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{1,1} & \dots & 1+\varepsilon_{1,h} \\ \rho_1+\varepsilon_{2,1} & \dots & \rho_h+\varepsilon_{2,h} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_1^{h-1}+\varepsilon_{h,1} & \dots & \rho_h^{h-1}+\varepsilon_{h,h} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \rho_1 & \dots & \rho_h \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_1^{h-1} & \dots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}.$$

Si pour toute valeur de k et i on a $|\rho_k-\rho_i|>\delta|\rho_k|$, où $|\rho_k|\geqq\rho>1$, *et* $|\varepsilon_{i,k}|<\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2h}$, *alors*

$$\left|\frac{S}{\Delta}-1\right|<2h\left(\frac{\delta}{2}\right)^h, \tag{58}$$

pourvu qu'on ait $2h\left(\frac{\delta}{2}\right)^h\leqq 1$.

En effet, $S-\Delta$ se compose d'une somme de déterminants de la forme

$$I_k = \begin{vmatrix} \varepsilon_{1,1} & \varepsilon_{1,2} & \dots & \varepsilon_{1,k} & 1 & \dots & 1 \\ \varepsilon_{2,1} & \cdot & \dots & \cdot & \rho_{k+1} & \dots & \rho_h \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \varepsilon_{h,1} & \cdot & \dots & \varepsilon_{h,k} & \rho_{k+1}^{h-1} & \dots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}$$

dont le nombre pour chaque valeur de $k\leqq h$ est égal à C_h^k. Après la réduction des facteurs communs, on a

$$\frac{I_k}{\Delta}=\frac{E_k}{\Delta_k},$$

où

$$\Delta_k=\pm(\rho_1-\rho_2)\dots(\rho_{k-1}-\rho_k)f(\rho_1)\dots f(\rho_k).$$

en posant
$$f(\rho) = (\rho - \rho_{k+1}) \ldots (\rho - \rho_h).$$

Quant à E_k, il sera inférieur en valeur absolue à $\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2hk} k!$ multiplié par la somme Σ des modules de tous les mineurs des $h-k$ dernières colonnes de I_k débarrassées du produit $(\rho_{k+2} - \rho_{k+1}) \ldots (\rho_h - \rho_{h-1})$ qui se réduisent alors à des fonctions symétriques homogènes de $\rho_{k+1}, \ldots, \rho_h$, dont tous les coefficients sont positifs; par conséquent, cette somme Σ ne sera pas diminuée, si nous remplaçons $\rho_{k+1}, \ldots, \rho_h$ par leurs modules respectifs $|\rho_i| = R_i$.

Donc,

$$\Sigma \leqq \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \ldots & R_{k+1} & \ldots & R_h \\ 1 & -2 & 1 & \ldots & . & \ldots & R_h^2 \\ . & . & . & \ldots & . & \ldots & . \\ (-1)^{h-1} & . & . & \ldots & R_{k+1}^{h-1} & \ldots & R_h^{h-1} \end{vmatrix}}{|(R_{k+1} - R_{k+2}) \ldots (R_{h-1} - R_h)|} = [(1 + R_{k+1}) \ldots (1 + R_h)]^k,$$

car les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & p_1 & \frac{p_1(p_1-1)}{2} & \ldots \\ 1 & p_2 & \frac{p_2(p_2-1)}{2} & \ldots \\ . & . & . & \ldots \\ 1 & p_k & \frac{p_k(p_k-1)}{2} & \ldots \end{vmatrix} = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{e>i} (p_e - p_i)$$

sont des entiers positifs, si $p_1 < p_2, \ldots, < p_k$ sont des entiers non négatifs.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left|\frac{E_k}{\Delta_k}\right| &< \frac{k![(R_{k+1}+1) \ldots (R_h+1)]^k}{|f(\rho_1) \ldots f(\rho_k)|\, \delta^{\frac{k(k-1)}{2}}} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2hk} \\ &< k!\left[\frac{R_{k+1}+1}{R_{k+1}} \ldots \frac{R_h+1}{R_h}\right]^k \left(\frac{\delta^{h+\frac{k+1}{2}}}{2^{2h}}\right)^k \\ &< k!\left(\frac{\delta^{h+\frac{k+1}{2}}}{2^{h+k}}\right)^k < k!\left(\frac{\delta}{2}\right)^{hk}, \end{aligned}$$

puisque $\delta < 2$.

Donc, la somme de tous les quotients de même indice k est inférieure à

$$h(h-1)\dots(h-k+1)\left(\frac{\delta}{2}\right)^{hk} < \left[h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h}\right]^{k},$$

et finalement

$$\left|\frac{S}{\Delta}-1\right| < h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h}\left[1+h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h}+\dots\right] < 2h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h}.$$

Corollaire. — *Si*

(59) $$\delta = \frac{2}{\rho^{\frac{n}{h}}},$$

on a

(60) $$\left|\frac{S}{\Delta}-1\right| < \frac{2h}{\rho^{n}}.$$

2. Pareillement, posons

$$S_i = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{1,1} & \dots & 1+\varepsilon_{1,h} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_1^{i-1}+\varepsilon_{i-1,1} & \dots & \rho_h^{i-1}+\varepsilon_{i-1,h} \\ \rho_1^{i+1}+\varepsilon_{i+1,1} & \dots & \rho_h^{i+1}+\varepsilon_{i+1,h} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \rho_1^{h}+\varepsilon_{h,1} & \dots & \rho_h^{h}+\varepsilon_{h,h} \end{vmatrix}$$

et par A_i désignons le déterminant qui se déduit de S_i, lorsque tous les $\varepsilon_{i,k} = 0$. Dans les conditions du lemme précédent, on a alors

(61) $$\left|\frac{S_i - A_i}{\Delta}\right| < 2(|\rho_1|+1)(|\rho_2|+1)\dots(|\rho_h|+1)\,h\left(\frac{\delta}{2}\right)^{h},$$

car, en utilisant les évaluations faites pour la démonstration de ce lemme, on obtient immédiatement

$$\left|\frac{S_i - A_i}{\Delta}\right| < \sum_{k=1}^{k=h} h(h-1)\dots(h-k+1)\frac{[(R_{k+1}+1)\dots(R_h+1)]^{k+1}}{|f(\rho_1)\dots f(\rho_k)|\,\delta^{\frac{k(k-1)}{2}}}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2hk},$$

d'où résulte (61).

En particularisant les valeurs de δ, comme dans les inégalités (59), nous déduirons de (61) des inégalités qui s'obtiendront en multipliant (60) par $(|\rho|+1)\dots(|\rho_h|+1)$.

Donc, en tenant compte de (60) et (61), on déduit de (28) dans le cas de $f_0(x) = 1$ pour $-1 \leqq x \leqq 1$,

$$\sqrt{t_h(x)}\left| 2^{n+h-1} R_{n,h}(x) - \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cos n\theta \\ \rho_1 & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ \rho_1^h & . & \cdots & \cos(n+h)\theta \end{vmatrix}}{(x-a_1)\ldots(x-a_h)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ . & . & \cdots & . \\ \rho_1^{h-1} & . & \cdots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}} \right|$$

$$\leqq \sqrt{t_h(x)}\left| 2^{n+h-1} R_{n,h}(x) \left(1 - \frac{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\rho_1^{2n}} & \cdots & 1+\frac{1}{\rho_h^{2n}} \\ . & \cdots & . \\ \rho_1^{h-1}+\frac{1}{\rho_1^{h+2n-1}} & \cdots & \rho_h^{h-1}+\frac{1}{\rho_h^{h+2n-1}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \rho_1 & \cdots & \rho_h \\ . & \cdots & . \\ \rho_1^{h-1} & \cdots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}} \right) \right|$$

$$+ \left| \frac{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\rho_1^{2n}} & \cdots & \cos n\theta \\ . & \cdots & . \\ \rho_1^h+\frac{1}{\rho_1^{2n+h}} & \cdots & \cos(n+h)\theta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cos n\theta \\ . & \cdots & . \\ \rho_1^h & \cdots & \cos(n+h)\theta \end{vmatrix}}{\sqrt{(a_1-x)\ldots(a_n-x)}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \rho_1 & \cdots & \rho_h \\ . & \cdots & : \\ \rho_1^{h-1} & \cdots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}\sqrt{a_1 a_1 \ldots a_h}} \right|$$

$$< \frac{2^{h+1} h}{\rho^n}\sqrt{L} + \left| \frac{(|\rho_1|+1)\ldots(|\rho_h|+1)}{\sqrt{(x-a_1)a_1\ldots(x-a_a)a_h}} \right| \frac{2h(h+1)}{\rho^n},$$

car

$$\left| R_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)} \right| \leqq L_n\left[\sqrt{t_h(x)}\right] \leqq \frac{\sqrt{L}}{2^{n-1}}.$$

Par conséquent, ψ et $\mathring{M}_h$ étant donnés par les formules (38) et (40) respectivement, on a

$$(62) \qquad \left| 2^{n-1} R_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)} - \sqrt{\bar{M}_h}\cos(n\theta+\psi) \right| < \frac{2h}{\rho^n}\left[\sqrt{L} + (h+1)\,2^h \frac{L}{\sqrt{\lambda}}\right] < \frac{h(h+2)2^h}{\rho^n}\,\frac{L}{\sqrt{\lambda}}.$$

En introduisant le polynome *normé*

$$(19\ bis) \qquad \bar{R}_{n,h}(x) = \frac{1}{\sqrt{H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right]}} R_{n,h}(x).$$

nous déduisons d'abord de (32 *bis*) l'expression asymptotique

$$\overline{\mathrm{R}}_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\theta+\psi_h), \tag{63}$$

où ψ_h est donné par la formule (56); en tenant compte de (62) et de la grandeur de l'erreur provenant de (32 *bis*), on a ensuite

$$\left|\overline{\mathrm{R}}_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\theta+\psi_h)\right| < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{L}}{\lambda}\,\frac{h(h+3)2^h}{\rho^n} \tag{64}$$

et

$$\left|\overline{\mathrm{R}}_{n,h}(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi\, t_h(x)}}\cos(n\theta+\psi_h)\right| < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{L}}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\,\frac{h(h+3)2^h}{\rho^n}. \tag{64 bis}$$

3. Dans le cas où x est extérieur au segment $(-1, +1)$, l'évaluation de l'erreur de la formule (34) ou (57) (qui est la même) résulte également du lemme précédent. Ainsi on a (pour $h>0$)

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\frac{2}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^n \mathrm{R}_{n,h}(x) - e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\log t_h(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}}\right| \\
&\leqq \left|\left(\frac{2}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^n \mathrm{R}_{n,h}(x)\left(1-\frac{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\rho_1^{2n}} & \dots & 1+\frac{1}{\rho_h^{2n}} \\ . & \dots & . \\ \rho_1^{h-1}+\frac{1}{\rho_1^{2n+h-1}} & \dots & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ \rho_1^{h-1} & . & \dots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}}\right)\right| \\
&+\left|\frac{\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{\rho_1^{2n}} & \dots & 1+\frac{1}{\rho_h^{2n}} & 1+\frac{1}{\mathrm{R}^{2n}} \\ . & \dots & . & . \\ \rho_1^{h}+\frac{1}{\rho_1^{2n+h}} & \dots & . & \mathrm{R}^{h}+\frac{1}{\mathrm{R}^{2n+h}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ . & \dots & . \\ \rho_1^{h-1} & \dots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}} - \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & . \\ . & \dots & . \\ \rho_1^{h} & \dots & \mathrm{R}^{h} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ . & . & \dots & . \\ \rho_1^{h-1} & 1 & \dots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}}\right| \frac{1}{2^h|(x-a_1)\dots(x-a_h)|} \\
&= \left|\left(\frac{2}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^n \mathrm{R}_{n,h}(x)\right| \mathrm{O}\left(\frac{h}{r^n}\right),
\end{aligned} \tag{65}$$

où r est le plus petit des deux nombres ρ et $|\mathrm{R}| = |x+\sqrt{x^2-1}|$, pourvu qu'on ait également

$$|R-\rho_l| > \frac{2|R|}{\rho^{\frac{n}{h}}}, \qquad |R-\rho_l| > \frac{2|\rho_l|}{\rho^{\frac{n}{h}}}.$$

Donc, *en tout point extérieur* (*sans restrictions*) *l'erreur relative de l'expression asymptotique de* $R_{n,h}(x)$ [*ou* $\overline{R}_{n,x}(x)$] *est uniformément de l'ordre de* $\frac{h}{\rho^n}$, *si* $|R| > \rho$, car la différence (65) est régulière à l'extérieur du segment $(-1, +1)$.

4. Dans ce qui précède, nous sommes obligés de considérer les polynomes $t_h(x)$, ayant leurs racines distinctes et assez éloignées.

Les inégalités (64), (64 *bis*), (65) ne sont établies que sous la condition que, δ étant une borne inférieure de $\left|\frac{\rho_k}{\rho_l} - 1\right|$, où $k \gtrless l$ prennent toutes les valeurs de 1 à h, on ait

$$\delta = \frac{2}{\rho^{\frac{n}{h}}}. \tag{59}$$

Pour pouvoir utiliser ces inégalités, nous devons montrer que l'on peut sans modifier d'une façon appréciable la valeur des polynomes donnés $s_h(x)$, approchés d'une fonction continue, les remplacer par d'autres, dont les racines satisfont à (59).

Daus ce but, nous démontrerons le

LEMME. — *Soit*

$$S_h(x) = \left(1 - \frac{x}{b_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{b_h}\right)$$

un polynome de degré h, tel que $b_k + \sqrt{b_k^2 - 1} = r_k$ *satisfait à la seule condition* $|r_k| \geqq \rho > 1$. *Il est possible de construire un polynome*

$$t_h(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_k}\right),$$

tel que $|\rho_k| = |a_k + \sqrt{a_k^2 - 1}| \geqq \rho > 0$, *et qu'en plus* $|\rho_k - \rho_l| > \delta\rho_k$, *satisfaisant à la condition que l'on ait sur* $(-1, +1)$

$$\left|\log\frac{s_h(x)}{t_h(x)}\right| < \frac{4h^2\delta\rho^3}{(\rho-1)^3}, \quad \text{où } \delta \leqq \frac{3}{32h}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^8. \tag{66}$$

En effet, soit

$$\delta_0 \leqq \frac{3}{32}\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^2$$

une quantité positive donnée; décrivons autour de tous les points r_1, r_2, ..., r_{h-1}, r_h comme centres des cercles de rayon

$$|\delta_0 r_1| \leqq \ldots \leqq |\delta_0 r_h|$$

respectivement; conservons successivement ceux de ces cercles seulement qui, pris dans l'ordre indiqué, n'ont pas leurs centres dans les cercles précédemment conservés et qui contiennent au moins un point d'indice supérieur non contenu dans un cercle précédent. Les points appartenant à plus d'un cercle seront attachés au cercle d'indice inférieur. Soit $m_k \geqq 2$ le nombre de points attachés au cercle de centre r_k; nous pouvons transporter $m_k - 1$ de ces points $r_l (l > k)$ sur la circonférence concentrique de rayon $\frac{\delta_0}{3}|r_k|$, de façon que leurs distances mutuelles soient au moins égales à $\frac{\delta_0}{3}|r_k|$, lorsque $m_k \leqq 3$, et dépassent $\frac{2\delta_0|r_k|}{3} \sin\frac{\pi}{2(m_k-1)}$ pour $m_k > 3$, leurs modules n'étant pas inférieurs à $|r_k|$. Le polynome modifié $t_h(x)$ s'obtiendra en remplaçant les racines b_l de $S_h(x)$ qui correspondent aux points r_l ainsi transportés en ρ_l par les valeurs

$$a_l = \frac{1}{2}\left(\rho_l + \frac{1}{\rho_l}\right).$$

Puisque

$$|\rho_l - r_l| < \frac{4}{3}\delta_0 |r_l|$$

et que

$$|a_l - b_l| < \frac{1}{2}|\rho_l - r_l| + \frac{1}{2}\left|\frac{\rho_l - r_l}{\rho_l r_l}\right| < |\rho_l - r_l|,$$

donc

$$|a_l - b_l| < \frac{4}{3}\delta_0 |r_0|.$$

Par conséquent, pour $x = \cos\theta$, on a

$$\frac{1 - \dfrac{x}{b_l}}{1 - \dfrac{x}{a_l}} = 1 + x\frac{b_l - a_l}{b_l(a_l - x)} = 1 + \varepsilon,$$

où

$$|\varepsilon| < \frac{8\delta_0}{3|b_l|}\left|\frac{r_l}{\left(|\rho_l|^{\frac{1}{2}} - \left|\frac{1}{\rho_l}\right|^{\frac{1}{2}}\right)^2}\right|$$

$$< \frac{8\delta_0\rho}{3(\rho-1)^2}\left[\left|\frac{r_l}{b_l}\right| < \frac{16}{3}\frac{\delta_0\rho^3}{(\rho^2-1)(\rho-1)^2} < \frac{8\delta_0\rho^3}{3(\rho-1)^3} < \frac{1}{4}\right],$$

car

$$|a_l - x| = \left|\frac{1}{2}\left(\rho_l + \frac{1}{\rho_l}\right) - \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})\right|$$

$$= \frac{1}{2}|\rho_l - e^{i\theta}|\left|1 - \frac{1}{\rho_l e^{i\theta}}\right| \geqq \frac{1}{2}\frac{(|\rho_l| - 1)^2}{|\rho_l|}.$$

Donc,

$$\left|\log\frac{1 - \frac{x}{b_l}}{1 - \frac{x}{a_l}}\right| < \frac{4\delta_0\rho^3}{(\rho-1)^3}$$

et finalement

$$\left|\log\frac{s_h(x)}{t_h(x)}\right| < \frac{4h\delta_0\rho^3}{(\rho-1)^3};$$

par conséquent, en posant $\delta = \frac{\delta_0}{h}$, nous voyons que les racines a_k satisfont aux conditions voulues, et qu'on a effectivement

$$(66) \qquad \left|\log\frac{s_h(x)}{t_h(x)}\right| < \frac{4h^2\delta\rho^3}{(\rho-1)^3}.$$

Cette inégalité est manifestement d'autant plus avantageuse que ρ est plus grand, mais dans la suite nous serons obligés au contraire de supposer ρ voisin de 1; ainsi, pour simplifier un peu l'écriture, nous pouvons, sans inconvénient, faire $\rho \leqq \sqrt[3]{2}$ et utiliser au lieu de (66) la formule

$$(67) \qquad \left|\log\frac{s_h(x)}{t_h(x)}\right| < \frac{8h^2\delta}{(\rho-1)^3},$$

qui est certainement exacte dans l'hypothèse que $\frac{h\delta}{(\rho-1)^3}$ *tend vers zéro.*

Soit, en particulier,

$$(68) \qquad \rho = (ch)^{\frac{1}{2\sqrt{h}}},$$

où c est une constante, et faisons croître h indéfiniment; alors

$$(68\ bis) \qquad \rho - 1 \sim \frac{\log h}{2\sqrt{h}}.$$

Donc, sous la condition (68), on a, d'après (67),

$$(69) \qquad |s_h(x) - t_h(x)| = O\left[\frac{h^{\frac{7}{2}}\delta}{\log^3 h}\right].$$

Si l'on ajoute la condition (59) qui s'écrira

$$(70) \qquad \delta = \frac{2}{(ch)^{\frac{n}{2h\sqrt{h}}}},$$

on aura

$$(69\ bis) \qquad |s_h(x) - t_h(x)| = O\left[\frac{(ch)^{\frac{1}{2}\left(7-\frac{n}{h\sqrt{h}}\right)}}{\log^3 h}\right]$$

et, enfin, en supposant,

$$(71) \qquad n \geqq h^2,$$

$$(72) \qquad |s_h(x) - t_h(x)| = O\left[\frac{(ch)^{\frac{1}{2}(7-\sqrt{h})}}{\log^3 h}\right].$$

5. D'autre part, nous devons chercher l'ordre de grandeur de la différence entre les polynomes orthogonaux $\overline{R}_n(x)$ relatifs aux points trigonométriques $t(x)$, et les polynomes orthogonaux $\overline{R}_{n,h}(x)$ correspondant aux polynomes $t_h(x)$, auxquels la formule (63) et les inégalités (64) et (65) sont applicables d'après ce qui précède.

Nous avons le théorème suivant :

Théorème. — *Si sur* $(-1, +1)$

$$(73) \qquad |t(x) - t_h(x)| < \varepsilon,$$

où $t_h(x)$ *est un polynome de degré* h, *satisfaisant à* (10), *tel que* $\rho_h \geqq \rho$, *on a uniformément*

$$(74) \qquad |\overline{R}_n(x) - \overline{R}_{n,h}(x)| = O(\varepsilon \log n),$$

sur $(-1, +1)$, lorsque $\varepsilon \log n$, ainsi que

$$(59) \qquad \delta = \frac{2}{\rho^{\frac{n}{h}}} < \left|\frac{\rho_k}{\rho_l} - 1\right|$$

tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

En effet, posons

$$(75)\qquad \overline{R}_n(x)=\sum_0^n a_k\,\overline{R}_{k,h}(x),$$

où

$$a_k=\int_{-1}^{+1}\frac{\overline{R}_n(x)\,\overline{R}_{k,h}(x)\,t_h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{+1}\frac{\varepsilon'(x)\,\overline{R}_n(x)\,\overline{R}_{k,h}(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$[k<h;\ |\varepsilon'(x)|<\varepsilon],$$

à cause de (73) et de l'orthogonalité de $\overline{R}_n(x)$ par rapport à $t(x)$, et

$$(76)\qquad a_n=\sqrt{\frac{H_n^{(2)}\left[\sqrt{t(x)}\right]}{H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right]}}=1+\alpha,\qquad \text{où } \alpha=O(\varepsilon).$$

On a

$$(77)\qquad \sum\nolimits_n=\sum_0^{n-1} a_k\,\overline{R}_{k,h}(x)=\int_{-1}^{+1}\frac{\varepsilon'(z)\sum\limits_0^{n-1}\overline{R}_{k,h}(x)\,\overline{R}_{k,h}(z)\,\overline{R}_n(z)\,dz}{\sqrt{1-z^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right]}{H_{n-1}^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right]}}\int_{-1}^{+1}\frac{\overline{R}_{n,h}(x)\,\overline{R}_{n-1,h}(z)-\overline{R}_{n,h}(z)\,\overline{R}_{n-1,h}(x)}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}\,\varepsilon'(z)\,\overline{R}_n(z)\,dz.$$

Considérons l'intégrale

$$(78)\qquad I_n=\int_{-1}^{+1}\left|\frac{\overline{R}_{n,h}(x)\,\overline{R}_{n-1,h}(z)-\overline{R}_{n,h}(z)\,\overline{R}_{n-1,h}(x)}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}\right|dz.$$

Sous la condition (59), l'expression K_n au numérateur de cette intégrale différera infiniment peu de

$$C_n=\frac{2}{\pi\sqrt{t_h(x)\,t_h(z)}}\Big[\cos(n\theta+\psi_h)\cos(\overline{n-1}\,\theta_0+\psi_h^0)$$
$$-\cos(n\theta_0+\psi_h^0)\cos(\overline{n-1}\,\theta+\psi_h)\Big]$$
$$=\frac{2}{\pi\sqrt{t_h(x)\,t_h(z)}}\left\{\sin\left[(2n-1)\frac{\theta+\theta_0}{2}+\psi_h+\psi_h^0\right]\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\right.$$
$$\left.+\sin\left[(2n-1)\frac{\theta_0-\theta}{2}+\psi_h^0-\psi_h\right]\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right\},$$

où θ_0 et ψ_h^0 sont les valeurs de θ et ψ_h correspondant à z.

Il faut évaluer l'ordre de grandeur de la différence K_n-C_n. A cet effet, posons

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \cos n\theta \\ \rho_1 & . & \dots & \rho_h & \cos(n+1)\theta \\ . & . & \dots & . & . \\ \rho_1^h & . & \dots & . & \cos(n+h)\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \cos(n-1)\theta_0 \\ \rho_1 & . & \dots & \cos n\theta_0 \\ . & . & \dots & . \\ \rho_1^h & . & \dots & \cos(n+h-1)\theta_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \cos n\theta_0 \\ \rho_1 & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ \rho_1^h & . & \dots & \cos(n+h)\theta_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \cos(n-1)\theta \\ \rho_1 & . & \dots & \cos n\theta \\ . & . & \dots & . \\ \rho_1^h & . & \dots & . \end{vmatrix}}{2^{2h}(a_1 a_2 \dots a_h)^2 \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \rho_1 & \dots & \rho_h \\ . & \dots & . \\ \rho_1^{h-1} & \dots & \rho_h^{h-1} \end{vmatrix}^2 t_h(x)\, t_h(z)},$$

de sorte que

$$C'_n = \frac{\pi M_h}{2} C_n.$$

D'autre part, en posant

$$\frac{\begin{vmatrix} T_n(a_1) & \dots & \cos n\theta \\ T_{n+1}(a_1) & \dots & \cos(n+1)\theta \\ . & \dots & . \\ T_{n+h}(a_1) & \dots & \cos(n+h)\theta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{n-1}(a_1) & \dots & \cos(n-1)\theta_0 \\ . & \dots & \cos n\theta_0 \\ . & \dots & . \\ T_{n+h-1}(a_1) & \dots & \cos(n+h-1)\theta_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} T_n(a_1) & \dots & \cos n\theta_0 \\ T_{n+1}(a_1) & \dots & \cos(n+1)\theta_0 \\ . & \dots & . \\ T_{n+h}(a_1) & \dots & \cos(n+h)\theta_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{n-1}(a_1) & \dots & \cos(n-1)\theta \\ T_n(a_1) & \dots & \cos n\theta \\ . & \dots & . \\ T_{n+h-1}(a_1) & \dots & \cos(n+h-1)\theta \end{vmatrix}}{2^{2h}(a_1 a_2 \dots a_h)^2 \begin{vmatrix} T_n(a_1) & \dots & T_n(a_h) \\ T_{n+1}(a_1) & \dots & . \\ . & \dots & . \\ T_{n+h-1}(a_1) & \dots & T_{n+h-1}(a_h) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{n-1}(a_1) & \dots & T_{n-1}(a_h) \\ T_n(a_1) & \dots & T_n(a_h) \\ . & \dots & . \\ T_{n+h-2}(a_1) & \dots & T_{n+h-2}(a_h) \end{vmatrix} t_h(x)\, t_h(z)},$$

on a, d'après (28),

$$\begin{aligned} K'_n &= 2^{2n-3}[R_{n,h}(x)\, R_{n-1,h}(z) - R_{n,h}(z)\, R_{n-1,h}(x)] \\ &= 2n-3\sqrt{H_n^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right] H_{n-1}^{(2)}\left[\sqrt{t_h(x)}\right]}\, K_n = \frac{\pi M_h}{2} K_n \left[1 + O\left(\frac{h}{\rho^n}\right)\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, en calculant les déterminants du numérateur au moyen des éléments de la dernière colonne, on a

$$\begin{aligned} C'_n &= \sum_{k=0}^{h} \sum_{i=0}^{h} P_i P_k [\cos(n+i)\theta \cos(n+k-1)\theta_0 - \cos(n+k-1)\theta \cos(n+i)\theta_0] \\ &= \sum_{k=0}^{h} \sum_{i=0}^{h} P_i P_k \Big[\sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0-\theta) \sin\frac{2n+i+k-1}{2}(\theta_0+\theta) \\ &\qquad + \sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0+\theta) \sin\frac{2n+i+k-1}{2}(\theta_0-\theta) \Big]. \end{aligned}$$

où P_i (qui sont les mineurs correspondants divisés par la racine carrée du dénominateur) sont les coefficients du polynome

$$P_0 y^h + \ldots + P_h = \frac{(y-\rho_1)\ldots(y-\rho_h)}{2^h a_1 a_2 \ldots a_h \sqrt{t_h(x)\, t_h(z)}}.$$

En calculant de la même façon K'_n et en tenant compte de (61), nous voyons que

$$\begin{aligned} K'_n - C'_n = O\left(\frac{h\,2^h}{\rho^n}\right) \sum_i \sum_k \Bigg| & \sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0-\theta)\sin\frac{2n+i+k-1}{2}(\theta_0+\theta) \\ & + \sin\frac{i-k-1}{2}(\theta_0+\theta)\sin\frac{2n+i+k-1}{2}(\theta_0-\theta)\Bigg| \\ = O\left(\frac{h\,2^h}{\rho^n}\right) \sum_i \sum_k & (i-k-1)\left[\left|\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right|\right] \\ = O\left(\frac{h^4\,2^h}{\rho^n}\right) & \left[\left|\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right|\right]. \end{aligned}$$

Donc on a également

$$(79)\qquad \left\{ \begin{aligned} |K_n - C_n| &= n_*^2 O\left(\frac{h^4 2^h}{\rho^n}\right)|\cos\theta - \cos\theta_0|, \\ |K_n - C'_n| &= O\left(\frac{h^4 2^h}{\rho^n}\right)\left[\left|\sin\frac{\theta_0-\theta}{2}\right| + \left|\sin\frac{\theta_0+\theta}{2}\right|\right]. \end{aligned} \right.$$

Donc

$$(80)\qquad \frac{K_n}{\cos\theta - \cos\theta_0} = \frac{1}{\pi\sqrt{t_h(z)\,t_h(x)}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sin\left[(2n-1)\dfrac{\theta+\theta_0}{2} + \psi_h + \psi_h^0\right] + O\left(h^4\dfrac{2^h}{\rho^n}\right)}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta_0)} \\ & + \frac{\sin\left[(2n-1)\dfrac{\theta-\theta_0}{2} + \psi_h - \psi_h^0\right] + O\left(h^4\dfrac{2^h}{\rho^n}\right)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)} \end{aligned} \right\}.$$

D'après (37) et (38),

$$\frac{d\psi_h}{d\theta} = \sum_1^h \frac{1-\rho_k\cos\theta}{1+\rho_k^2 - 2\rho_k\cos\theta} = \frac{h}{2} - \frac{1}{2}\sum_1^h \frac{\sqrt{a_k^2-1}}{a_k - \cos\theta},$$

de sorte que

$$\left|\frac{d\psi_h}{d\theta}\right| < \frac{h\rho}{\rho-1},$$

car le maximum de $\left|\frac{\sqrt{a_k^2-1}}{a_k-x}\right|$ égal à $\frac{\rho+1}{\rho-1}$ est atteint pour $x=\pm 1$, si la partie réelle α_k de a_k est supérieure à 1 ; et lorsque la partie réelle α_k de a_k est non supérieure à 1, le maximum, qui est atteint pour $x=\alpha_k$, en désignant par φ_k l'argument de ρ_k, se réduirait à

$$\frac{\left|\rho_k-\frac{1}{\rho_k}\right|}{\left(|\rho_k|-\left|\frac{1}{\rho_k}\right|\right)\sin\varphi_k}=\frac{\sqrt{(|\rho_k^2|-1)^2+4|\rho_k^2|\sin^2\varphi_k}}{(|\rho_k^2|-1)\sin\varphi_k},$$

il correspondrait ainsi à $\alpha_k=1$ et serait donc inférieur à $\frac{\rho+1}{\rho-1}$. Donc,

$$|\psi_h+\psi_h^0|<\frac{h\rho}{\rho-1}|\theta+\theta_0|,$$

$$|\psi_h-\psi_h^0|<\frac{h\rho}{\rho-1}|\theta-\theta_0|;$$

et puisque, par hypothèse, n croissant indéfiniment, on a

$$\frac{h}{n\log\rho}>\frac{h}{n(\rho-1)}\to 0,$$

il est possible de fixer une constante B, telle que

$$(81)\qquad \begin{cases} \left|\dfrac{\sin\left[(2n-1)\dfrac{\theta+\theta_0}{2}+\psi_h+\psi_h^0\right]}{\sin\frac{1}{2}(\theta+\theta_0)}\right|<Bn, \\[2ex] \left|\dfrac{\sin\left[(2n-1)\dfrac{\theta-\theta_0}{2}+\psi_h-\psi_h^0\right]}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\theta_0)}\right|<Bn. \end{cases}$$

Par conséquent, grâce à (79) en appliquant (81) dans les intervalles $|\theta-\theta_0|<\frac{1}{n}$ et $|\theta+\theta_0-2\pi|<\frac{1}{n}$ et en remplaçant par 1 les numérateurs du second membre de (80) pour le reste du segment $(-1,+1)$, nous voyons, d'après (78), que

$$(82)\qquad I_n=O(\log n).$$

Donc, d'après (77),

$$(77\ bis)\qquad \Sigma_n=O(\varepsilon M_n\log n),$$

où M_n est le maximum de $|\overline{R}_n(x)|$ sur $(-1, +1)$; par conséquent, en vertu de (75), (76) et (77 *bis*), on peut fixer une constante C, telle que

$$|\overline{R}_n(x) - \overline{R}_{n,h}(x)| < C(\varepsilon \log n) M_n$$

sur tout le segment $(-1, +1)$; ainsi finalement, puisque $\varepsilon \log n \to 0$, on a

$$(74) \qquad |\overline{R}_n(x) - \overline{R}_{n,h}(x)| = O(\varepsilon \log n).$$

6. En conservant les notations du paragraphe précédent, on a pour les points x extérieurs au segment $(-1, +1)$ une proposition plus simple et plus générale, dont la démonstration ne suppose pas la connaissance préalable de la formule asymptotique (57), et par conséquent nous pourrons même admettre que $t_h(x)$, au lieu d'être un polynome, soit une fonction quelconque bornée et intégrable au sens de M. Lebesgue.

Lemme. — *Soient $t(x)$ et $t_h(x)$ deux fonctions intégrables satisfaisant à* (10) *et à l'inégalité*

$$(73) \qquad |t(x) - t_h(x)| < \varepsilon$$

sur $(-1, +1)$; dans ces conditions, on a

$$(83) \qquad |\overline{R}_n(x) - \overline{R}_{n,h}(x)| = O\left(\frac{M\varepsilon}{\delta} + M\varepsilon\right),$$

où M est la plus grande des deux valeurs $|\overline{R}_{n,h}(x)|$ et $|\overline{R}_{n-1,h_0}(x)|$ et δ est la plus petite distance de x au segment $(-1, +1)$.

En effet,

$$\left|\int_{-1}^{+1} \frac{\overline{R}_{n,h}(x)\overline{R}_{n-1,h}(z) - \overline{R}_{n,h}(z)\overline{R}_{n-1,h}(x)}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} \varepsilon'(z)\overline{R}_n(z)\,dz\right|$$
$$< \frac{\varepsilon M}{\delta}\int_{-1}^{1} \frac{|\overline{R}_{n-1,h}(z)\overline{R}_n(z)| + |\overline{R}_{n,h}(z)\overline{R}_n(z)|}{\sqrt{1-z^2}}\,dz < \frac{2\varepsilon M}{\delta\lambda};$$

donc, en tenant compte de (76) et (77), on obtient

$$(83) \qquad |\overline{R}_n(x) - \overline{R}_{n,h}(x)| = O\left(\frac{M\varepsilon}{\delta} + M\varepsilon\right).$$

7. Pour tirer des conséquences de ce qui précède, nous devons nous arrêter sur un certain mode d'approximation de notre fonction positive $t(x)$ par des polynomes $t_h(x)$. A cet effet, adoptons pour $\log t(x)$ des polynomes approchés $G_k(x)$ de degré k, fournissant sur $(-1, +1)$ une approximation de l'ordre de la meilleure; soit

$$|G_k(x) - \log t(x)| = O(\alpha_k). \tag{84}$$

Donc, on a aussi

$$|e^{G_k(x)} - t(x)| = O(\alpha_k);$$

posons ensuite

$$S_h(x) = 1 + G_k(x) + \ldots + \frac{G_k^k(x)}{k!},$$

de sorte que le degré h du polynome $S_h(x)$ est égal à k^2, et l'on a

$$|e^{G_k(x)} - S_h(x)| = O\left(\frac{P^k}{k!}\right),$$

où P est un nombre fixe (qui est égal pour h assez grand au plus grand des nombres $\log L$ et $|\log\lambda|$). Ainsi, en faisant abstraction du cas très particulier, où $\alpha_k < \frac{P^k}{k!}$, qui ne se présentera que lorsque $\log t(x)$ sera une fonction entière de genre non supérieur à 1, et de degré fini, nous écrirons simplement

$$|S_h(x) - t(x)| = O(\alpha_k) = O(\alpha_{\sqrt{h}}), \tag{85}$$

en signalant seulement que pour appliquer les formules qui suivent au cas exclu il suffira de remplacer partout α_k par $\frac{P^k}{k!}$.

Or, l'équation

$$F(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^k}{k!} = 0$$

ne peut avoir de racine dont le module soit inférieur à $\frac{k+1}{4}$, car on aurait pour cette valeur

$$e^{-|z|} < 2\left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\right|,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} < \frac{\left(e^{\frac{1}{4}}\frac{k+1}{4}\right)^{k+1}}{(k+1)!},$$

ce qui est faux.

Par conséquent, si b est une racine de $S_h(x) = 0$, on a

$$|G_k(b)| > \frac{k+1}{4};$$

d'autre part, P désignant le maximum de $|G_k(x)|$ sur $(-1, +1)$, on a

$$|G_k(b)| < P|b + \sqrt{b^2 - 1}|^k.$$

Donc,

$$(86) \qquad |b + \sqrt{b^2 - 1}| > \sqrt[k]{\frac{k+1}{4P}} > \left(\frac{h}{16P^2}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{h}}}.$$

Ainsi, ρ ayant la signification que nous lui avons attribuée précédemment, les polynomes $S_h(x)$ que nous venons de construire satisfont à la condition (68) et (68 *bis*) qui en résulte, en prenant $c = \frac{1}{16P^2}$.

Nous pouvons enfin, en vertu du lemme du paragraphe **4**, remplacer $S_h(x)$ par des polynomes $t_h(x)$, auxquels sont applicables les inégalités du paragraphe **3** ainsi que la formule (69 *bis*). Nous aurons, par conséquent,

$$(87) \qquad |t(x) - t_h(x)| = O\left[\alpha_{\sqrt{h}} + \frac{(ch)^{\frac{1}{2}\left(7 - \frac{n}{h\sqrt{h}}\right)}}{\log^3 h}\right],$$

et, en supposant

$$(71) \qquad n \geqq h^2,$$

il viendra

$$(89) \qquad |t(x) - t_h(x)| = O\left[\alpha_{\sqrt{h}} + \frac{(ch)^{\frac{1}{2}(7-\sqrt{h})}}{\log^3 h}\right].$$

Observons que dans le cas où $\log t(x)$ *n'est pas une fonction entière de degré fini*, on a

$$(88) \qquad \alpha_h > \frac{(ch)^{7-h}}{\log^3 h},$$

et l'on peut alors mettre (89) sous la forme

$$(89\ bis) \qquad |t(x) - t_h(x)| = O(\alpha_{\sqrt{h}});$$

dans le cas contraire [en tenant compte de la remarque faite au sujet de (85)], on aura

$$(89\ ter) \qquad |t(x)-t_h(x)| = O\left[\left(\frac{N}{\sqrt{h}}\right)^{\sqrt{h}}\right],$$

où N est une constante.

8. Il est aisé à présent d'établir *la validité de la formule asymptotique*

$$(57\ bis) \qquad R_n(x) \sim \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\log t(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz},$$

en tout point fixe extérieur au segment $(-1, +1)$, *quelle que soit la fonction continue donnée* $t(x)$ *positive sur le segment fermé* $(-1, +1)$.

En effet, à cause de (65), si l'on fait

$$(71\ bis) \qquad n = h^2,$$

on voit que l'erreur relative de la formule (57) qui est de l'ordre

$$\frac{h}{\rho^n} = \frac{h}{(ch)^{\frac{n}{2\sqrt{h}}}}$$

tend vers zéro; en d'autres termes, on a

$$(90) \qquad R_{n,h}(x) = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}+1\right)\frac{\log t_h(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz}(1+\beta_h),$$

où

$$(91) \qquad \beta_h = O\left[\frac{1}{(ch)^{\frac{h^{\frac{3}{2}}}{2}-1}}\right].$$

On aura la formule correspondante pour les polynomes normés

$$(92) \qquad \overline{R}_{n,h}(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_h(z)}{(z-x)\sqrt{1-z^2}}dz}(1+\beta'_h),$$

où β'_h est de l'ordre de β_h en multipliant (90) par $\dfrac{1}{\sqrt{H_n^{(n)}(\sqrt{t_h(x)})}}$ et en tenant compte de (50).

D'après (89 *bis*), on déduira de (92) que

$$(92\ bis)\qquad \overline{R}_{n,h}(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(z)}{(t-x)\sqrt{1-z^2}}dz}(1+\gamma_h),$$

où

$$\gamma_h=O\left[\alpha_{\sqrt{h}}+\frac{1}{(ch)^{\frac{h^{\frac{3}{2}}}{2}-1}}\right];$$

de sorte que, sous la condition (88),

$$(93)\qquad \gamma_h=O(\alpha_{\sqrt{h}});$$

et dans l'hypothèse contraire

$$\gamma_h=O\left[\left(\frac{N}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{h}}\right].$$

D'autre part, à cause de (92), on peut présenter (83) sous la forme

$$\overline{R}_n(x)=\overline{R}_{n,h}(x)[1+O(\varepsilon)],$$

où ε doit actuellement être remplacé par $\alpha_{\sqrt{h}}=\alpha_{n^{\frac{1}{4}}}$. Donc, d'après (92 *bis*), *on a finalement*

$$(94)\qquad \overline{R}_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{\sqrt{x^2-1}}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(z)\,dz}{(z-x)\sqrt{1-z^2}}}\left[1+O(\alpha_{\sqrt[4]{n}})\right];$$

dans cette formule $\alpha_{\sqrt[4]{n}}$ *sera remplacé par* $\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{4}\sqrt[4]{n}}$, *si* $\log t(x)$ *est une fonction entière de genre non supérieur à un et de degré fini* (1).

On a aussi manifestement

$$(95)\quad R_n(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(z)}{\sqrt{1-z^2}}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{z-x}\right)dz}\left[1+O(\alpha_{\sqrt[4]{n}})\right].$$

Remarque. — Nous pouvons poser

$$(96)\quad \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n e^{\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(z)}{\sqrt{1-z^2}}\left[1-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{z}{x}\right)^{-1}\right]dz}=P_n(x)+p_n(x),$$

---

(1) Ou d'une façon plus générale pour toutes les valeurs infiniment croissantes $h^2=k$ telles que $\sqrt[k]{\alpha_k}<\frac{N}{k}$ (où N est une constante).

où $P_n(x)$ est un polynome de degré n. Alors (95) s'écrira

$$R_n(x) = [P_n(x) + p_n(x)][1 + \gamma_n],$$

où $\gamma_n = O(\alpha_{\sqrt{n}})$ est un développement suivant les puissances négatives de x convergent pour $|x| > 1$; comme $p_n(x)(1+\gamma_n)$ ne contient pas de puissances positives de x, on peut écrire

$$R_n(x) = P_n(x)(1+\gamma_n) + \delta_n; \tag{97}$$

où δ_n ne contient que des puissances négatives de x_n, ce qui prouve que le polynome $P_n(x)$ est une expression asymptotique de $R_n(x)$ à l'infini, et leurs coefficients sont, en général, asymptotiquement égaux. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Observons seulement que sans modifier les formules on peut remplacer dans ce qui précède $\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^n$ par le polynome de Tchebycheff $T_n(x)$. Il résulte, en particulier de (95), que lorsque $t(x)$ est une fonction impaire, $P_n(x)$ sera [en même temps que $R_n(x)$] une fonction paire ou impaire, suivant la parité n.

9. Occupons-nous à présent de la convergence de l'expression asymptotique sur le segment $(-1, +1)$. Appliquons la formule (74) et utilisons les polynomes $t_h(x)$ du paragraphe **7**, en supposant $n = h^2$. Les conditions exigées par le paragraphe **5** seront remplies, d'après (89), si

$$\alpha_n \log n \to 0. \tag{98}$$

D'après un théorème connu (¹), la condition nécessaire et suffisante pour que (98) soit vérifiée est que la fonction $t(x)$ *satisfasse à la condition de Dini-Lipschitz*. Ainsi, sous cette dernière condition, nous avons

$$|\overline{R}_n(x) - \overline{R}_{n,h}(x)| = O\left[\alpha_{\sqrt{n}} \log n + \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{4}\sqrt{n}}\right],$$

où N est une constante.

(¹) LEBESGUE, *Sur les intégrales singulières* (*Ann. de Toulouse*, t. I, 1909). — BERNSTEIN, *Sur l'ordre de la meilleure approximation* (*Mémoires publiés par l'Académie de Belgique*, t. IV, 1912).

En même temps, en posant

$$(56\,bis)\qquad \psi_h(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t_h(z)-\log t_h(x)}{z-x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\,dz,$$

nous avons, d'après (64), et en tenant compte de (68),

$$\left|\overline{R}_{n,h}(x)\sqrt{t_h(x)}-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\theta+\psi_h)\right|=O\left(\frac{h^2 2^h}{\rho^n}\right)$$
$$=O\left[\left(\frac{A}{n}\right)^{\frac{1}{4}n^{\frac{3}{4}}}\right],$$

où A est une constante positive.

Donc, *sous la condition de Dini-Lipschitz pour le poids trigonométrique $t(x)$, on a sur $(-1, +1)$ la formule asymptotique*

$$(99)\qquad \sqrt{t(x)}\,\overline{R}_n(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\theta+\psi_{\sqrt{n}}),$$

et l'erreur de cette formule est uniformément de l'ordre

$$O\left[\alpha_{\sqrt[4]{n}}\log n+\left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{1}{4}\sqrt[4]{n}}\right].$$

L'expression (99) contient n explicitement dans l'argument de $\cos(n\theta+\psi_{\sqrt{n}})$ d'une façon assez compliquée à cause de la présence du terme $\psi_{\sqrt{n}}$ dépendant de n. Or, dans des cas très étendus, $\psi_h(x)$ tend uniformément vers une fonction continue

$$(17)\qquad \psi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{\log t(z)-\log t(x)}{z-x}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-z^2}}\,dz,$$

lorsque $t_h(x)$ tend uniformément vers $t(x)$. Il est clair que, s'il en est ainsi, la formule (99) se réduit à la formule (16). Donc, pour démontrer le théorème fondamental du paragraphe 4 de l'Introduction, il suffit de prouver que, sous la condition (18), l'intégrale (56 *bis*) tend uniformément sur le segment $(-1, +1)$ vers l'expression (17).

Observons d'abord que l'expression (17) a un sens, sous la condition (18). En effet, soit $x\geq 0$, pour fixer les idées; en décomposant l'intégrale (17) en deux parties $\psi_1(x)+\psi_2(x)$; la première de -1 à x et la seconde de x à 1, on voit que la première partie a un sens, puisque l'expression sous le signe d'intégration est inférieure en module à $\dfrac{M}{2\pi\,|(z-x)\log(z-x)^{1+\varepsilon}|\sqrt{1-z^2}}$ où M est une constante. De même,

$$
\begin{aligned}
|\psi_2(x)| &< \frac{M}{2\pi}\int_x^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{|z-x|\,|\log(z-x)|^{1+\varepsilon}}\,\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \\
&< \frac{M\sqrt{1-x}}{2\pi}\left[\int_x^{\frac{1+x}{2}} \frac{dz}{|z-x|\,|\log(z-x)|^{1+\varepsilon}\sqrt{1-z}}\right. \\
&\qquad\left. + \int_{\frac{1+x}{2}}^1 \frac{dz}{|z-x|\,|\log(z-x)|^{1+\varepsilon}\sqrt{1-z}}\right].
\end{aligned}
$$

Donc, en remarquant que dans la dernière intégrale

$$z - x \geqq \sqrt{\frac{1}{2}(1-x)(1-z)},$$

on a

$$
\begin{aligned}
|\psi_2(x)| &< \frac{M}{\varepsilon\pi\sqrt{2}\left|\log\dfrac{1-x}{2}\right|^{\varepsilon}} + \frac{M}{\pi\sqrt{2}}\int_{\frac{1+x}{2}}^1 \frac{dz}{(1-z)\left|\log\sqrt{\dfrac{1}{2}(1-x)(1-z)}\right|^{1+\varepsilon}} \\
&= \frac{3M}{\varepsilon\pi\sqrt{2}\left|\log\dfrac{1-x}{2}\right|^{\varepsilon}}.
\end{aligned}
$$

Cela prouve en même temps que $\psi(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers 1. D'ailleurs, la continuité de $\psi(x)$ sur tout le segment $(-1, +1)$ résulte du raisonnement qui suit.

Les polynomes $t_h(x)$ étant déterminés comme plus haut, posons $h_l = h^{l^{\frac{2}{\varepsilon}}}$, alors la série

$$\log t(x) = \log t_h(x) + \sum_{l=1}^{\infty}[\log t_{h_{l+1}}(x) - t_{h_l}(x)]$$

ainsi que la série

$$t(x) = t_h(x) + \sum_{l=1}^{\infty}[t_{h_{l+1}}(x) - t_{h_l}(x)],$$

seront absolument et uniformément convergentes. De plus, en posant

$$Q_l(x) = \log t_{h_{l+1}}(x) - \log t_{h_l}(x),$$

nous aurons, d'après un théorème connu ([1]), à cause de la condition (18),

$$|Q_l(x)| < \gamma_l = O\left(\frac{1}{|\log h_l|^{1+\varepsilon}}\right),$$

et, d'après le théorème de Markoff ([2]), on a sur $(-1, +1)$,

$$|Q'_l(x)| = O(h_{l+1}^2 \gamma_l).$$

Par conséquent, en posant

$$\psi(x) - \psi_h(x) = \sum_{l=1}^{\infty} T_l(x), \tag{100}$$

où

$$T_l(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{Q_l(x) - Q_l(z)}{x - z} \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - z^2}}\, dz,$$

on a

$$|T_l(x)| < \frac{1}{2\pi} \int_{x-\delta_1}^{x+\delta_1} |Q'_l| \sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - z^2}}\, dz$$
$$+ \frac{\gamma_l}{\pi} \left[\int_{-1}^{x-\delta_1} \frac{\sqrt{1 - x^2}\, dz}{(x - z)\sqrt{1 - z^2}} + \int_{x+\delta_1}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}\, dz}{(z - x)\sqrt{1 - z^2}} \right].$$

En posant $\delta_1 = \frac{1}{h_{l+1}^4}$, nous voyons que la première de ces intégrales ([3]) est de l'ordre de $\gamma_l h_{l+1}^2 \sqrt{\delta_1} = \gamma_l$; quant aux deux autres, elles sont de l'ordre de $\log \delta_1$ puisqu'on a, par exemple (pour $x \geqq 0$ et $x + \delta_1 \leqq 1$),

$$0 < \int_{x+\delta_1}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}\, dz}{(z - x)\sqrt{1 - z^2}}$$
$$= -\log \delta_1 + \log\left\{1 - x(x + \delta_1) + \sqrt{(1 - x^2)[1 - (x + \delta_1)^2]}\right\} < -\log \frac{\delta_1}{2}.$$

Donc,

$$|T_l(x)| = O(\gamma_l \log h_{l+1}) = O\left[\gamma e^{(l+1)^{\frac{2}{\varepsilon}}} \log h\right] = O\left[\frac{(l+1)^{\frac{2}{\varepsilon}}}{l^{\frac{2(1+\varepsilon)}{\varepsilon}}} \frac{1}{(\log h)^{\varepsilon}}\right]; \tag{101}$$

([1]) JACKSON, *Ueber die Genahigkeit der Annäherung stetige Funktionen*, p. 40.

([2]) BERNSTEIN, *Sur l'ordre de la meilleure approximation*, p. 11.

([3]) On considérera comme nulle la fonction sous le signe de l'intégrale pour $|z| > 1$.

d'où, d'après (100),

$$(102) \qquad |\psi(x)-\psi_h(x)| = O\left[2^{\frac{2}{\varepsilon}}\frac{1}{(\log h)^{\varepsilon}}\right] = O\left[\frac{1}{(\log h)^{\varepsilon}}\right].$$

Par conséquent, *la formule* (16) *a lieu sous la condition* (18) *et l'ordre de l'erreur est* $O\left[\frac{1}{(\log n)^{\varepsilon}}\right]$ *uniformément sur le segment* $(-1, +1)$.

D'une façon générale, il résulte de (101) que l'ordre de l'approximation de la formule (16) sera $O[\alpha_{\sqrt{n}}\log n]$ si la fonction $t(x)$ est susceptible d'une approximation de l'ordre α_n par des polynomes de degré n, pourvu que $\alpha_n = O\left[\frac{1}{(\log n)^{1+\varepsilon}}\right]$, où $\varepsilon > 0$.

10. La condition (18) étant supposée remplie, formons le développement trigonométrique

$$(103) \qquad \log t(\cos\theta) = A_0 + A_1\cos\theta + \ldots + A_n\cos n\theta + \ldots$$

qui sera uniformément convergent. Dans ce cas, on aura

$$(104) \qquad 2\psi(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\log t(\cos\varphi)-\log t(\cos\theta)}{\cos\varphi-\cos\theta}\sin\theta\, d\varphi$$
$$= A_1\sin\theta + A_2\sin 2\theta + \ldots + A_n\sin n\theta + \ldots,$$

et ce développement conjugué du précédent sera également uniformément convergent. Pour vérifier cette affirmation, il suffit d'observer que l'on a

$$(105) \qquad \sin k\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos k\varphi - \cos k\theta}{\cos\varphi-\cos\theta}\sin\theta\, d\varphi.$$

Remarque. — L'identité (105) que l'on vérifie par simple intégration est d'ailleurs une conséquence du fait que le développement en fraction continue de

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{(x-z)\sqrt{1-z^2}} = \frac{S_{k-1}(x)}{T_k(x)} + \frac{\alpha_0}{x^{2k}} + \frac{\alpha_1}{x^{2k+1}} + \ldots$$

admet comme réduites $\frac{S_{k-1}(x)}{T_k(x)}$, où les polynomes de degré k, $T_k(x)$

sont les polynomes de Tchebycheff et satisfont à la relation

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\frac{T_k(x)-T_k(z)}{(x-z)\sqrt{1-z^2}}dz = S_{k-1}(x).$$

Or, du moment que l'on a $\left(T_k(x) = \frac{1}{2^{k-1}}\cos k\theta\right)$

$$4T_{k+1}(x)+T_{k-1}(x) = 4xT_k(x),$$

on aura également

$$4S_{k+1}(x)+S_{k-1}(x) = 4xS_k(x).$$

Donc,

$$S_k(x) = A\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^k + B\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^k;$$

et puisque $S_0(x)=1$, $S_1(x)=x$, on a

$$A+B=1, \qquad x=(A-B)\sqrt{x^2-1},$$

d'où

$$A = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}, \qquad B = \frac{-x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{x^2-1}\,S_k(x) = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{2}\right)^{k+1},$$

c'est-à-dire

$$S_{k-1} = \frac{\sin k\theta}{2^{k-1}\sin\theta}.$$

Inversement, si l'on se donne la fonction

$$\psi(\cos\theta) = \frac{1}{2}(A_1\sin\theta+\ldots+A_n\sin n\theta+\ldots)$$

toutes les fois que la série conjuguée

$$\log[t(x)] = f(\cos\theta) = A_1\cos\theta+\ldots+A_k\cos k\theta+\ldots$$

converge uniformément et que $f(x)$ satisfait à la condition (18), les expressions $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\theta+\psi)$ seront les expressions asymptotiques des polynomes orthogonaux $\overline{\mathrm{R}_n(x)}$ multipliés par $\sqrt{t(x)} = e^{\frac{f(x)}{2}}$ correspondant au poids trigonométrique $t(x)$.

Il résulte aussi de ce qui précède que, si l'on désigne par $x_h = \cos\theta_h$ la $h^{\text{ième}}$ racine de $\overline{\mathrm{R}_n}(x)$, on aura

$$n\theta_h + \psi(x_h) = h\pi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon_h,$$

où ε_h est uniformément de l'ordre $\alpha_{\sqrt{n}} \log n$ pour toutes les racines ($h = 1, \ldots, n$). Donc,

$$\theta_h = \frac{h\pi}{n} - \frac{\frac{\pi}{2} + \psi\left(\cos\frac{h\pi}{n}\right) + \beta_h}{n} = a_h - \frac{\psi(\cos a_h) + \beta_h}{n},$$

où β_h tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et $\cos a_h = b_h$ sont les racines du polynome trigonométrique $\mathrm{T}_n(x)$. Ainsi, on peut mettre les racines x_h de $\overline{\mathrm{R}_n}(x)$ sous la forme

$$(106) \qquad x_h = b_h + \frac{\sqrt{1 - b_h^2}\,[\psi(b_h) + \beta'_h]}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad (h = 1, \ldots, n),$$

où β'_h tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Par conséquent, si l'on se donne un déplacement de l'ordre de $\frac{1}{n}$ caractérisé par la fonction continue $\psi(x)$ des racines du polynome orthogonal $\mathrm{R}_n(x)$, par rapport à celles de $\mathrm{T}_n(x)$, le poids trigonométrique $t(x)$ sera asymptotiquement déterminé (à une constante près) par l'équation intégrale (104), dont la solution peut être présentée sous la forme

$$(107) \qquad f(x) = 2x\psi_1(x) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\cos\theta} \frac{\psi_1(x) - \psi_1(u)}{x - u}\cos\theta\, du\, d\theta,$$

où $\psi_1(x) = \frac{\psi(x)}{\sin\theta}$, la formule (107) ayant un sens, pourvu que $\psi_1(x)$ satisfasse à (18). Sans discuter les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction $t(x) = e^{f(x)}$ satisfaisant à la condition (18) et correspondant à la fonction $\psi(x)$, observons qu'il est en tout cas nécessaire que $\psi(x)$ soit continue et que $\psi(\pm 1) = 0$; d'autre part, il suffirait que $\psi_1(x)$ satisfasse à la condition (18) avec $\varepsilon > 1$.

11. En particulier, si

$$t(x) = \frac{1}{t_h(x)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_h}\right)}, \tag{108}$$

où $t_h(x)$ est un polynome, les fonctions $\psi(x)$ et $\psi_h(x)$ correspondant à ces poids trigonométriques seront liées par la relation

$$\psi(x) + \psi_h(x) = 0.$$

Donc

$$\psi(x) = \sum_1^h \alpha'_k,$$

où

$$\cos\alpha'_k = \frac{\rho_k - x}{\sqrt{2\rho_k(a_k - x)}}, \qquad \sin\alpha'_k = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{2\rho_k(a_k - x)}}. \tag{109}$$

On a donc actuellement

$$\overline{R}_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi} t_h(x)} \cos\left(n\theta + \sum_1^h \alpha'_k\right) \tag{110}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n(\rho_1 - x + \sqrt{x^2-1}) + \ldots + (x-\sqrt{x^2-1})^n(\rho_1 - x - \sqrt{x^2-1})\ldots}{\sqrt{2^h \rho_1 a_1 \ldots \rho_h a_h}}$$

et

$$R_n(x) \sim \frac{\sqrt{t_h(x)}\cos(n\theta + \Sigma\alpha'_k)}{2^{n-1}\sqrt{M_h}} = H_n(x),$$

où M_h est donné par la formule (40).

Ainsi, conformément aux résultats du premier Chapitre, on a

$$L_n\left[\frac{1}{\sqrt{t_h(x)}}\right] \sim \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{M_h}};$$

mais à présent l'expression asymptotique $H_n(x)$ de $R_n(x)$ est elle-même un polynome de degré n, pour $n \geq h$.

Il en résulte qu'actuellement le polynome $H_n(x)$ est celui des polynomes (2) qui réalise l'écart minimum du produit

$$P_n(x)\frac{1}{\sqrt{t_h(x)}} = \frac{\cos(n\theta + \psi)}{2^{n-1}\sqrt{M_h}},$$

et l'égalité

$$L_n\left[\frac{1}{\sqrt{t_h(x)}}\right]=\frac{1}{2^{n-1}\sqrt{M_h}} \tag{111}$$

est non seulement asymptotique, mais même rigoureusement exacte pour $n \geq h$.

Ce résultat qui, dans le cas particulier où $t_h(x)$ est un carré parfait, se trouve déjà chez Tchebycheff, est à rapprocher des recherches de M. Fejér [1] et de ses élèves sur les sommes trigonométriques positives.

Nous allons prouver que *le cas où le poids trigonométrique se présente sous la forme* $t(x)=\frac{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{t_h(x)}$, *où* $t_h(x)$ *est un polynome non négatif sur* $(-1,+1)$ *et* α *et* β *sont égaux à* 0 *ou* 1, *est le seul où l'expression asymptotique*

$$\mathcal{F}_n(x)=\frac{\cos(n\theta+\psi)}{\sqrt{t(x)}} \tag{112}$$

est un polynome [2].

En effet, $\mathcal{F}_n(x)$ satisfait à l'équation aux différences

$$\mathcal{F}_{n+1}(x)+\mathcal{F}_{n-1}(x)=2x\,\mathcal{F}_n(x). \tag{113}$$

Par conséquent, la forme nécessaire de $\mathcal{F}_n(x)$ est

$$\mathcal{F}_n(x)=A(x)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+B(x)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n.$$

Et, pour que $\mathcal{F}_l(x)$ et $\mathcal{F}_{l+1}(x)$ soient des polynomes, il faut que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} A(x)&=\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_l(x)+\frac{\mathcal{F}_{l+1}(x)-x\mathcal{F}_l(x)}{\sqrt{x^2-1}}\right]\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^l,\\ B(x)&=\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}_l(x)+\frac{\mathcal{F}_{l+1}(x)-x\mathcal{F}_l(x)}{\sqrt{x^2-1}}\right]\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^l.\end{aligned}\right. \tag{114}$$

---

[1] *Ueber trigonometrische Polynome* (*Journal für reine und angew. Mathem.*, t. 146, 1916). — Szégö, *Ueber die Entwickelung einer willkürlichen Funktion etc.*, *Math. Zeitschrift*, t. XII.

[2] *Voir* mon article : *Sur une classe de polynomes orthogonaux* (Communication de la *Société Math. de Kharkow* et de l'*Institut des Sc. Math. de l'Ukraine*, t. IV, 1930).

Ainsi le produit

$$A(x)B(x) = \frac{1}{4}\left[P^2(x) + \frac{Q^2(x)}{1-x^2}\right],$$
$$[\text{où } P(x) = \mathcal{F}_l(x),\ Q(x) = \mathcal{F}_{l+1}(x) - x\mathcal{F}_l(x)],$$

est un polynome (¹) non négatif sur $(-1, +1)$, ou bien un tel polynome divisé par $1-x^2$ ou par $1 \pm x$, suivant que $Q(x)$ s'annule ou non pour $x = \pm 1$.

On a donc

$$(115)\quad \frac{1}{\sqrt{AB}}\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{A}{B}}(x+\sqrt{x^2-1})^n + \sqrt{\frac{B}{A}}(x-\sqrt{x^2-1})^n\right]$$
$$= \cos(n\theta + \psi),$$

de sorte que

$$t(x) = \frac{1}{AB}$$

et

$$\psi = \operatorname{arc\,tang} \frac{Q(x)}{P(x)\sqrt{1-x^2}} - l\theta.$$

Le cas où AB serait un polynome possédant des racines d'ordre pair à l'intérieur du segment $(-1, +1)$ se ramène directement à celui où $AB = t_n(x)$ n'y a pas de racines, puisque alors $\mathcal{F}_l(x)$ et $\mathcal{F}_{l+1}(x)$ ont cette racine comme racine commune, et il en est de même de $\mathcal{F}_n(x)$ pour toute valeur de $n > l$, de sorte que la formule (115) ne serait pas modifiée à cause de la réduction des facteurs communs du numérateur et du dénominateur du premier membre.

En général, pour que

$$\frac{\mathcal{F}_n(x)}{\sqrt{AB}}$$

conduise à l'écart minimum parmi tous les polynomes ayant le même coefficient du terme de degré supérieur, pour tous les degrés $n \geqq l$, il sera nécessaire et suffisant que cette circonstance se présente pour $l = n$.

En effet, si AB ne devient ni nul, ni infini aux points ± 1, pour qu'un polynome $\mathcal{F}_n(x)$ de degré n fixe conduise à l'écart minimum, il

(¹) Pour cela il faut et il suffit que $\mathcal{F}_{l+1}(1) = \mathcal{F}_l(1)$, $\mathcal{F}_{l+1}(-1) = -\mathcal{F}_l(-1)$.

sera nécessaire et suffisant que les maxima de (115) soient atteints en $(n+1)$ points avec des signes opposés, ce qui signifie que ψ doit reprendre la même valeur o, lorsque x varie de -1 à $+1$. Si AB devient infini en ces deux points, ψ devra diminuer de $+\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$, pour que $\cos(n\theta+\psi)$ s'annule aux deux bords et possède $n+1$ extrema de signes opposés à l'intérieur; de même, si AB devient infini en un de ces points (-1, par exemple), en restant fini au point $+1$, ψ devra varier de $\frac{\pi}{2}$ à o. Le cas où AB s'annule en un de ces points se ramène évidemment à celui où AB devient infini au point considéré.

Ainsi $\mathcal{F}_l(x)$, étant un polynome arbitraire de degré l, dont toutes les racines sont intérieures au segment $(-1, +1)$, on peut d'une infinité de façons lui associer une fonction non négative $t(x)$, telle que $\mathcal{F}_l(x)\sqrt{t(x)}$ s'écarte le moins de zéro sur ce segment parmi tous les produits $P_l(x)\sqrt{t(x)}$, où le polynome $P_l(x)$ possède le même terme de degré supérieur que $\mathcal{F}_l(x)$. A cet effet, il suffira de choisir un polynome arbitraire $\mathcal{F}_{l+1}(x)$ de degré $l+1$, tel que les racines de $\mathcal{F}_l(x)$ et de $Q(x)=\mathcal{F}_{l+1}(x)-x\mathcal{F}_l(x)$ se séparent; alors on aura

$$\frac{1}{t(x)}=A(x)B(x)=\frac{1}{4}\left[\mathcal{F}_l^2(x)+\frac{Q^2(x)}{1-x^2}\right]. \tag{116}$$

Dans ces conditions, tous les polynomes $\mathcal{F}_n(x)$ de degré $n>l$, déterminés par la formule (115) ou, ce qui revient au même, par l'équation (113), jouiront de la propriété voulue.