JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN CHAZY

Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 353-380.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__353_0>

Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps;

PAR JEAN CHAZY.

1. Dans un Mémoire antérieur [1] j'ai classé les mouvements du problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment en sept sortes. Je me propose ici de montrer comment sont réparties les quatre sortes de mouvements qui sont possibles quand *la constante des forces vives dans le mouvement par rapport au centre de gravité est négative.*

Ces quatre sortes de mouvement sont les suivantes. Ce sont d'abord les mouvements que j'ai appelés *hyperboliques-elliptiques*, où deux distances mutuelles, soit r_{13} et r_{23}, sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps, et où la troisième r_{12} est bornée; en général les éléments osculateurs du mouvement de la masse m_3 par rapport au centre de gravité des deux masses m_1 et m_2 sont hyperboliques pour les valeurs assez grandes du temps, et tendent vers des limites, et les éléments osculateurs du mouvement relatif des deux masses m_1 et m_2 sont de même elliptiques et tendent vers des limites : on peut dire brièvement que, quand le temps croît indéfiniment, le problème des trois corps se décompose à la limite en deux problèmes des deux corps. Si dans la condition précédente les distances r_{13} et r_{23} sont d'ordre $\frac{2}{3}$ seulement par rapport au temps, les éléments du mouvement de la

[1] *Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 39, 1922, p. 29-130).

masse m_3 par rapport au centre de gravité des masses m_1 et m_2 tendent vers des éléments paraboliques; cette deuxième sorte de mouvement est le mouvement *parabolique-elliptique*. Bien entendu il y a trois classes de mouvements hyperboliques-elliptiques et trois classes de mouvements paraboliques-elliptiques, selon celle des trois masses qui s'éloigne indéfiniment des deux autres.

Il existe évidemment aussi des mouvements où les trois distances mutuelles sont bornées quand le temps croît indéfiniment : les solutions périodiques du problème des trois corps et les solutions asymptotiques aux solutions périodiques donnent des exemples de cette troisième sorte de mouvement. Enfin la question de savoir s'il existe des *mouvements oscillants*, où tantôt les trois distances mutuelles sont bornées, et tantôt l'une de ces distances est bornée et les deux autres sont arbitrairement grandes, est posée depuis plus de cent ans par les théorèmes de Lagrange et de Poisson sur l'invariabilité des grands axes. Dans les mouvements oscillants, s'il en existe, comme dans les mouvements où les distances mutuelles sont bornées et dans les mouvements paraboliques-elliptiques, la constante des forces vives est nécessairement négative; au contraire dans les mouvements hyperboliques-elliptiques cette constante peut être négative, positive ou nulle.

Représentons les mouvements précédents dans l'espace à douze dimensions. Employons les coordonnées relatives bien connues depuis Jacobi : désignons par ξ, η, ζ les coordonnées de la masse m_3 par rapport au centre de gravité des masses m_1 et m_2, par ρ la distance de la masse m_3 à ce centre de gravité : $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, désignons par x, y, z les coordonnées de la masse m_2 par rapport à la masse m_1, et par r la distance de ces deux masses : $r_{12} = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Les six coordonnées relatives ξ, η, ζ, x, y, z satisfont au système différentiel du douzième ordre

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -m_0\xi\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1 a_2 m_0 x\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),\\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -m_0\eta\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1 a_2 m_0 y\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),\\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -m_0\zeta\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1 a_2 m_0 z\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),
\end{aligned}
\right.
$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{(m_1+m_2)x}{r^3} - m_3 x\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right) + m_3 \xi\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),\\
\frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{(m_1+m_2)y}{r^3} - m_3 y\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right) + m_3 \eta\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),\\
\frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{(m_1+m_2)z}{r^3} - m_3 z\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right) + m_3 \zeta\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),
\end{aligned}$$

si l'on pose

$$m_0 = m_1 + m_2 + m_3, \qquad a_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}, \qquad a_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2},$$

$$r_{13} = \sqrt{(\xi + a_1 x)^2 + (\eta + a_1 y)^2 + (\zeta + a_1 z)^2},$$
$$r_{23} = \sqrt{(\xi - a_2 x)^2 + (\eta - a_2 y)^2 + (\zeta - a_2 z)^2}.$$

Ce système différentiel admet l'intégrale des forces vives; posant

$$\mu = \frac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3}, \qquad m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2},$$
$$\mathrm{F} = \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_3 m_1}{r_{31}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}},$$

c'est-à-dire égalant à l'unité la constante de l'attraction universelle, nous écrirons l'*équation des forces vives* sous la forme

$$\frac{\mu}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \mathrm{F} + h,$$

où h est ce que nous avons appelé la *constante des forces vives dans le mouvement par rapport au centre de gravité*. Et le même système admet d'autre part les trois intégrales des aires

$$\begin{aligned}
\mu(\eta\zeta' - \zeta\eta') + m(yz' - zy') &= \alpha,\\
\mu(\zeta\xi' - \xi\zeta') + m(zx' - xz') &= \beta,\\
\mu(\xi\eta' - \eta\xi') + m(xy' - yx') &= \gamma,
\end{aligned}$$

α, β, γ désignant les constantes des aires dans le mouvement par rapport au centre de gravité.

A chaque mouvement du problème des trois corps correspond une courbe, ou *trajectoire*, décrite dans l'espace à douze dimensions par le point de coordonnées ξ, η, ζ, x, y, z, ξ', η', ζ', x', y', z' quand le temps varie : inversement à un point de cet espace correspondent en général une trajectoire issue de ce point, et, quand on se donne aussi l'instant initial, un mouvement des trois corps.

Ajoutons d'ailleurs que les trajectoires conduisant à un choc de deux corps doivent être continuées au delà de ce choc par le prolongement analytique de M. Sundman : les résultats obtenus dans ce Mémoire s'étendent aux trajectoires ainsi prolongées. Par suite, les seuls mouvements qui ne durent pas indéfiniment sont ceux qui aboutissent à un choc des trois corps ; M. Sundman a démontré que dans ces mouvements les trois constantes des aires α, β, γ sont nulles : les trajectoires correspondantes sont donc situées sur une multiplicité algébrique à neuf dimensions (¹). Ces trajectoires exceptées, les *trajectoires hyperboliques-elliptiques*, les *trajectoires paraboliques-elliptiques*, les *trajectoires bornées* et les *trajectoires oscillantes* remplissent toute la région

$$h < 0$$

de l'espace à douze dimensions, région qu'on peut appeler *région intérieure à la surface* $h = 0$.

2. J'ai montré antérieurement que dans la région extérieure $h > 0$ les trajectoires hyperboliques-elliptiques sont fonctions continues des conditions initiales du mouvement : la même continuité est valable dans la région intérieure $h < 0$. La démonstration que nous allons donner de cette nouvelle proposition s'étend immédiatement à la surface $h = 0$ elle-même, et d'ailleurs nous aurons besoin d'appliquer la proposition ainsi étendue à des trajectoires situées sur cette surface.

Supposons donc sur une trajectoire hyperbolique-elliptique que la constante des forces vives soit négative ou nulle, $h \leqq 0$, et que la masse m_3 s'éloigne indéfiniment des deux autres quand le temps croît indéfiniment : selon les notations que nous venons de définir, la distance r

---

(¹) Ces trajectoires forment d'ailleurs sur cette multiplicité algébrique une multiplicité transcendante à sept dimensions pour celles dont la figure-limite est le triangle équilatéral, et trois multiplicités transcendantes à cinq dimensions pour celles dont la figure-limite est rectiligne (*cf.* CHAZY, *Bulletin astronomique*, t. 35, 1918, p. 376 et 378).

est bornée, la distance ρ est un infiniment grand d'ordre 1 par rapport au temps, et même, selon l'étude que j'ai faite des trajectoires hyperboliques-elliptiques, la dérivée ρ' tend vers une limite positive. Revenons sur ce dernier point en rappelant (¹) une expression de la dérivée seconde ρ'' : par dérivation de l'égalité

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

on obtient

$$\rho\rho' = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta',$$

$$\rho\rho'' + \rho'^2 = S\xi\xi'' + S\xi'^2,$$

et, d'après l'identité de Lagrange,

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')^2 + S(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2,$$

$$(2) \qquad \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \rho'^2 + \frac{S(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^2};$$

d'où, par substitution des expressions des trois dérivées ξ'', η'', ζ'' tirées des trois équations (1), l'expression de la dérivée ρ''

$$(3) \quad \rho'' = -m_0\rho\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1 a_2 m_0 \frac{Sx\xi}{\rho}\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) + \frac{S(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^3}.$$

Or, r étant borné et ρ infiniment grand, on peut écrire (²)

$$\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3} = \frac{1}{\rho^3} + \frac{br^2}{\rho^5}, \qquad \frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} = \frac{br}{\rho^4};$$

d'ailleurs les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ tendent vers des limites finies (³) : de sorte que la dérivée ρ'' satisfait à une équation différentielle de la forme

$$(4) \qquad \rho'' = -\frac{m_0}{\rho^2}\left(1 + \frac{b}{\rho}\right).$$

Il résulte d'abord de cette équation que la dérivée première ρ' finit par décroître, et par conséquent par tendre vers une limite finie positive ou nulle, puisque la distance ρ ne peut devenir négative. Si cette limite

(¹) *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. 39, 1922, p. 37.

(²) Le symbole b désigne ici et dans la suite une *quantité bornée*, qui évidemment n'a pas toujours la même valeur.

(³) *Loc. cit.*, p. 62-63.

était nulle, on déduirait (¹) facilement de l'équation (4) que ρ est un infiniment grand d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps : la trajectoire correspondante serait parabolique-elliptique. Donc, sur la trajectoire considérée, *la dérivée ρ' tend vers une limite positive finie*, soit λ, et le quotient $\frac{\rho}{t}$ tend nécessairement vers la même limite.

Dès lors, sur la même trajectoire, pour les valeurs assez grandes du temps, soit $t \geqq t_1$, la dérivée ρ' est supérieure à la quantité $\frac{4\lambda}{5}$, et d'autre part la distance ρ est supérieure à toute longueur L fixée à l'avance. Par suite pour $t = t_1$ la valeur de la dérivée ρ', soit ρ'_1, est supérieure à $\frac{3\lambda}{5}$, la distance correspondante ρ_1 est supérieure à L, et la distance r_1 est bornée, sur toute trajectoire T définie par des conditions initiales assez voisines à l'instant initial t_0 : car la continuité est assurée pour tout intervalle de temps fini.

Suivons le mouvement sur une telle trajectoire T à partir de l'instant t_1, tant que ρ' est supérieur à $\frac{\lambda}{5}$: la distance ρ croît et reste supérieure à la longueur L ; d'autre part la distance r reste bornée. En effet, de l'équation des forces vives et l'égalité (2), on déduit l'inégalité

$$\frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_1 m_2}{r} + h \geqq \frac{\mu \rho'^2}{2},$$

et par suite

$$(5) \qquad \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_1 m_2}{r} > \frac{\mu \lambda^2}{100},$$

si h est négatif ou nul sur la trajectoire T, ou, s'il est positif, pourvu qu'il soit assez petit, savoir inférieur à $\frac{\mu\lambda^2}{100}$. Or, dans la dernière inégalité, à l'instant t_1 les deux premiers termes sont arbitrairement petits si la longueur L a été choisie assez grande ; donc au même instant le terme $\frac{m_1 m_2}{r}$ est supérieur à une longueur positive fixe, et la distance r est inférieure à une longueur fixe. Ces conditions, qui existent à l'instant t_1, ne pourraient cesser dans le mouvement considéré que s'il y avait échange de l'ordre de grandeur de la distance r et de l'une des deux autres distances mutuelles r_{23} et r_{13}, et par

(¹) *Loc. cit.*, p. 96.

continuité si d'abord les trois distances mutuelles devenaient du même ordre de grandeur, et par conséquent toutes trois bornées d'après l'inégalité (5) : mais cela est impossible, puisque la distance ρ est supérieure à la longueur L, si cette longueur a été choisie assez grande. De cette contradiction résulte bien que, tant que ρ' est supérieur à $\frac{\lambda}{5}$, la distance r est bornée. Dès lors l'on déduit comme précédemment de l'équation (3) une équation de la forme (4), puis, par multiplication par $2\rho'$, intégration dans l'intervalle de t_1 à t $(t_1 < t)$, et application de la formule de la moyenne, on obtient la nouvelle équation

$$\rho'^2 - \rho_1'^2 = 2m_0\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1}\right)\left(1 + \frac{b}{\rho_1}\right).$$

En retardant au besoin l'instant t_1 pour augmenter la distance ρ_1, et quitte à remplacer la trajectoire T par une trajectoire plus voisine de la trajectoire primitive, on peut, d'après la dernière équation, rendre ρ' aussi voisin que l'on veut de la valeur ρ_1', supérieure à $\frac{3\lambda}{5}$, et par exemple déduire l'inégalité

$$\rho' > \frac{2\lambda}{5}.$$

Dès lors, sur la trajectoire T, à partir de l'instant t_1, tant que ρ' est supérieur à $\frac{\lambda}{5}$, il est supérieur aussi à $\frac{2\lambda}{5}$. Donc ρ' ne peut franchir la valeur $\frac{2\lambda}{5}$, et en particulier reste positif quand le temps croît indéfiniment. Puisque la dérivée seconde ρ'' est négative d'après l'équation (4), *ρ' tend nécessairement vers une limite positive finie*, le quotient $\frac{\rho}{t}$ tend vers la même limite, et la trajectoire T est une trajectoire hyperbolique-elliptique, comme et de même classe que la trajectoire primitive. Donc, si nous joignons le résultat obtenu au résultat rappelé précédemment, *dans l'espace à douze dimensions*, TOUTE TRAJECTOIRE HYPERBOLIQUE-ELLIPTIQUE EST ENTOURÉE D'UN CONTINUUM DE TRAJECTOIRES HYPERBOLIQUES-ELLIPTIQUES *sur lesquelles c'est la même masse qui s'éloigne indéfiniment des deux autres* [1].

---

[1] Cette proposition rectifie une proposition que j'ai énoncée sans démonstration (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 39, 1922, p. 31, note 1, et p. 84, note 1).

En se reportant à l'étude que j'ai faite ([1]) des trajectoires-hyperboliques-elliptiques, on voit qu'il résulte que les éléments osculateurs limites de ce continuum de trajectoires sont de même voisins des éléments limites correspondant à la trajectoire primitive. Et l'on voit aussi qu'on peut passer de l'une à l'autre de deux trajectoires hyperboliques-elliptiques d'une même classe par une variation continue des éléments limites correspondants et par conséquent par une suite continue de trajectoires de même sorte et de même classe. Donc, au moins dans la région $h \leqq 0$, *les trajectoires-hyperboliques d'une même classe forment un continuum unique.*

3. Cherchons quelle peut être dans la région intérieure $h < 0$ la frontière de ce continuum. Cette frontière est évidemment constituée par des trajectoires particulières. Sur chacune de ces trajectoires, pour les valeurs assez grandes du temps la dérivée ρ' est positive ou nulle, puisque la valeur de cette dérivée est aussi voisine que l'on veut des valeurs positives correspondant aux trajectoires hyperboliques-elliptiques voisines : donc sur la trajectoire considérée la distance ρ finit par être croissante. D'ailleurs sur cette trajectoire comme sur les trajectoires hyperboliques-elliptiques voisines, pour les valeurs assez grandes du temps la distance ρ est arbitrairement grande et la distance r est bornée : toutefois il n'est pas démontré que sur ces trajectoires voisines la continuité soit uniforme, et il ne résulte pas immédiatement que sur la trajectoire limite la distance ρ tend vers l'infini avec le temps.

Mais d'après l'équation des forces vives où le second membre est positif ou nul comme le premier, et où la constante h est négative, les trois distances mutuelles ne peuvent être arbitrairement grandes à la fois; par suite il ne peut y avoir échange des ordres de grandeur, et sur la trajectoire considérée la distance ρ reste arbitrairement grande et la distance r reste bornée quand le temps croît indéfiniment. En outre, d'après les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad xx' + yy' + zz' = rr'$$

et l'identité de Lagrange, si l'on introduit au premier membre de

([1]) *Loc. cit.*, p. 73-87.

l'équation des forces vives l'égalité analogue à l'égalité (2)

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 + \frac{S(yz' - zy')^2}{r^2},$$

on voit que les trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ sont en valeur absolue inférieures au produit de la distance r par une quantité bornée, et par suite sont bornées aussi. Puis les trois intégrales des aires montrent que les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ sont encore bornées. Par conséquent l'expression (3) de la dérivée ρ'' peut encore se mettre sous la forme (4), et il résulte en particulier que cette dérivée finit par être négative.

Dès lors sur la trajectoire considérée, pour les valeurs assez grandes du temps, la dérivée première ρ' est positive ou nulle et en outre doit décroître : donc *cette dérivée tend vers une limite positive ou nulle quand le temps croît indéfiniment.* Mais, si la limite de la dérivée ρ' était positive, la trajectoire obtenue serait une trajectoire hyperbolique-elliptique : nécessairement ρ' tend vers zéro; la trajectoire considérée est une trajectoire parabolique-elliptique, où c'est aussi la masse m_3 qui s'éloigne indéfiniment des deux autres. Ainsi, DANS LA RÉGION $h < 0$, LA FRONTIÈRE DU CONTINUUM DES TRAJECTOIRES HYPERBOLIQUES-ELLIPTIQUES DE CHACUNE DES TROIS CLASSES EST FORMÉE DE TRAJECTOIRES PARABOLIQUES-ELLIPTIQUES DE LA MÊME CLASSE.

L'étude que j'ai faite (¹) des trajectoires paraboliques-elliptiques peut être complétée par les deux propositions suivantes. D'une part l'on peut passer de l'une à l'autre de deux trajectoires paraboliques-elliptiques d'une même classe par une suite continue de trajectoires de même nature : de sorte que *le continuum des trajectoires hyperboliques-elliptiques de chaque classe ne peut avoir de trou.* D'autre part les onze éléments osculateurs limites d'une trajectoire parabolique-elliptique sont fonctions analytiques des conditions initiales, et par suite dans l'espace à douze dimensions les trajectoires paraboliques-elliptiques de chaque classe engendrent une surface analytique, qu'on peut appeler *surface parabolique-elliptique* (²) : de sorte que *dans la région $h < 0$ le*

(¹) *Loc. cit.*, p. 96-106.

(²) Ajoutons qu'il résulte facilement d'un théorème célèbre de Bruns que les trois surfaces paraboliques-elliptiques ne peuvent être des surfaces algébriques. Je reviendrai sur cette question.

continuum des trajectoires hyperboliques-elliptiques de chaque classe est limité par la surface parabolique-elliptique de la même classe.

Enfin j'ai démontré (¹) que, quand la constante des forces vives h est nulle, les mouvements du problème des trois corps sont en général hyperboliques-elliptiques et dépendent de onze paramètres, et sont exceptionnellement *paraboliques*. Dans les mouvements paraboliques, les trois distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps, comme le rayon vecteur du mouvement parabolique des deux corps; la figure des trois corps tend, quant à la forme et à l'orientation, vers une figure fixe, qui est nécessairement l'une des deux figures d'équilibre relatif obtenues par Euler et par Lagrange, savoir le triangle équilatéral, et une figure rectiligne où les rapports des distances sont donnés en fonction des masses par une équation du cinquième degré célèbre. Dans l'espace à douze dimensions les trajectoires paraboliques correspondant au triangle équilatéral, engendrent une multiplicité analytique à neuf dimensions, et les trajectoires paraboliques correspondant à la figure limite rectiligne engendrent, selon l'ordre des trois masses, trois multiplicités analytiques à dix dimensions. Ces multiplicités limitent sur la surface $h = 0$ les trois continua de trajectoires hyperboliques-elliptiques. En effet la surface parabolique-elliptique engendrée par les trajectoires sur lesquelles la masse m_3 s'éloigne indéfiniment des deux autres ne peut sur la surface $h = 0$ aboutir à une trajectoire hyperbolique-elliptique, qui devrait être entourée d'un continuum de trajectoires de même nature : elle aboutit nécessairement à l'une des trois multiplicités paraboliques à dix dimensions. D'ailleurs dans le passage à la limite la masse m_3 ne peut passer entre les deux autres : *la surface parabolique-elliptique sur les trajectoires de laquelle la masse m_3 s'éloigne indéfiniment des deux autres aboutit à ses deux extrémités aux deux multiplicités paraboliques correspondant aux figures limites rectilignes où les masses sont dans les deux ordres $m_1 m_2 m_3$, $m_2 m_1 m_3$.*

Dans tout ce qui précède, les trajectoires sont considérées comme dirigées. Mais une trajectoire qui est hyperbolique-elliptique quand le temps t tend vers $+\infty$ pourrait *a priori* appartenir à une autre sorte

(¹) *Loc. cit.*, p. 88-94.

quand t tend vers $-\infty$. Nous allons montrer qu'en fait il n'en est rien, à moins qu'elle n'aboutisse à un choc des trois corps : sinon, cette trajectoire est hyperbolique-elliptique, et de la même classe, quand le temps croît indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives. Nous allons établir cette proposition à l'aide de la théorie des invariants intégraux, et d'une façon précise en complétant et rectifiant sur un point un calcul connu de Poincaré, d'où résultera en outre que les trajectoires bornées et les trajectoires oscillantes possèdent la stabilité à la Poisson.

4. Nous commençons par rappeler des résultats classiques. Considérons d'une façon générale le système différentiel d'ordre n

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{6}$$

où les n fonctions X_i dépendent des n variables x_i, et éventuellement de la variable indépendante t : la condition nécessaire et suffisante [1] pour que le système (4) admette l'invariant intégral

$$\int M\,dx_1\,dx_2, \ldots, dx_n,$$

où M désigne une fonction des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est que cette fonction satisfasse à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MX_2)}{\partial x_2} \cdots + \frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n} = 0, \tag{7}$$

c'est-à-dire soit un dernier multiplicateur des n équations (6).

Or le système différentiel d'ordre 12 auquel satisfont les six fonctions ξ, η, ζ, x, y, z et leurs dérivées premières peut s'écrire

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi', \quad \frac{d\eta}{dt} = \eta', \quad \frac{d\zeta}{dt} = \zeta', \quad \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dz}{dt} = z',$$

$$\frac{d\xi'}{dt} = -m_0\xi\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1a_2m_0x\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),$$

$$\frac{d\eta'}{dt} = -m_0\eta\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1a_2m_0y\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),$$

$$\frac{d\zeta'}{dt} = -m_0\zeta\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1a_2m_0z\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),$$

---

[1] Cf. *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 41.

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{(m_1+m_2)}{r^3}x - m_3 x\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right) + m_3\xi\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),$$
$$\frac{dy'}{dt} = -\frac{(m_1+m_2)}{r^3}y - m_3 y\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right) + m_3\eta\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),$$
$$\frac{dz'}{dt} = -\frac{(m_1+m_2)}{r^3}z - m_3 z\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right) + m_3\zeta\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right):$$

mis sous la forme

$$(8) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 12),$$

ce système admet pour dernier multiplicateur l'unité puisque dans l'équation aux dérivées partielles (7) aucune des douze fonctions X_i ne dépend de la variable x_i correspondante. Donc le système considéré admet l'invariant intégral

$$I_1 = \int d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dx\, dy\, dz\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'\, dx'\, dy'\, dz'.$$

En outre, si l'on considère une fonction quelconque M des douze variables x_i, et la nouvelle variable indépendante u telle que l'on ait

$$du = M\,dt,$$

les équations (8) prennent la forme

$$\frac{dx_i}{du} = \frac{X_i}{M} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 12),$$

et admettent l'invariant intégral

$$I_2 = \int M\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dx\, dy\, dz\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Nous utiliserons successivement les deux invariants intégraux I_1 et I_2 en choisissant dans le second une fonction M convenable.

5. Considérons dans la région intérieure $h < 0$ un faisceau de trajectoires, dans lequel les trois constantes des aires α, β, γ ne s'annulent pas à la fois, et même où le vecteur des aires $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ a un minimum positif. Il résulte comme première conséquence que les trajectoires considérées n'aboutissent pas à un choc des trois corps et peuvent être continuées indéfiniment; la même condition apportera dans la suite différentes simplifications, et, concernant le voisinage d'une multiplicité algébrique à neuf dimensions, ne restreindra en rien la généralité des propositions que nous obtiendrons dans des continua à douze dimensions.

Supposons en premier lieu que les trajectoires du faisceau considéré, suivies dans un même sens, soient toutes des trajectoires bornées, c'est-à-dire que les trois distances mutuelles y soient bornées. Nous allons démontrer que l'intégrale I_1, étendue à la région de l'espace à douze dimensions où pénètre ce faisceau de trajectoires, a une valeur finie.

Puisque les trois distances mutuelles sont bornées, les six coordonnées relatives ξ, η, ζ, x, y, z le sont aussi; et si en outre ces distances mutuelles sont supérieures à une longueur fixe, d'après l'équation des forces vives les six vitesses ξ', η', ζ', x', y', z' sont bornées aussi. Par suite le faisceau de trajectoires considéré ne quitte pas dans l'espace à douze dimensions une région finie, et l'intégrale I_1 étendue à cette région est finie.

Supposons au contraire que sur le faisceau considéré les trois distances mutuelles ne sont pas supérieures à une longueur fixe. Puisque le vecteur des aires a un minimum positif, à chaque instant sur chaque trajectoire, d'après une proposition démontrée par M. Sundman, une seule de ces distances mutuelles s'annule ou devient arbitrairement petite : et nous supposerons d'abord que cette distance sur toutes les trajectoires du faisceau, pendant des intervalles de temps successifs (¹), est toujours la même, soit $r_{12} = r$. En outre, selon une autre proposition de M. Sundman, pendant ces intervalles les trois vitesses ξ', η', ζ' correspondantes sont en valeur absolue inférieures à un nombre fixe; et il résulte immédiatement de l'équation des forces vives que pendant les mêmes intervalles les trois vitesses x', y', z' sont en valeur absolue inférieures à un nombre de la forme $\frac{b}{\sqrt{r}}$. Dans ce cas le faisceau

(¹) J'ai montré qu'il est impossible que sur une trajectoire l'une des distances mutuelles *tende vers zéro* quand le temps croît indéfiniment (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. 39, 1922, p. 124).

de trajectoires considéré occupe une région infinie de l'espace à douze dimensions, mais l'intégrale I_1 étendue à cette région infinie conserve encore une valeur finie. En effet, en écrivant cette intégrale sous la forme

$$\int d\xi\, d\eta\, d\zeta\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta' \int dx\, dy\, dz \int dx'\, dy'\, dz',$$

on voit que la première intégrale triple a une valeur de la forme $\frac{b}{r^{\frac{3}{2}}}$, et par conséquent la deuxième,

$$\int \frac{b\, dx\, dy\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{4}}},$$

étendue d'une région de l'espace à trois variables x, y, z qui est finie, mais comprend l'origine $x=y=z=0$, a selon une règle classique une valeur finie. Puisque d'autre part les six variables $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ sont bornées, l'intégrale d'ordre 12 I_1 est elle aussi finie.

Supposons maintenant qu'à d'autres instants sur certaines trajectoires du faisceau ce n'est pas la distance r_{12} qui est nulle ou arbitrairement petite : et effectivement, au moins *a priori*, la distance mutuelle qui devient nulle ou arbitrairement petite, même sur une même trajectoire, n'est pas nécessairement toujours la même. Dans ce cas on peut calculer l'intégrale I_1 par un changement de variables : on peut pendant chaque intervalle de temps et sur chaque trajectoire où une distance mutuelle autre que r_{12} est arbitrairement petite, mettre en évidence les coordonnées relatives des deux masses voisines, les coordonnées de la troisième masse par rapport au centre de gravité de ces deux premières, et les dérivées de ces six coordonnées. Les abscisses x_1, x_2, x_3 des trois masses s'expriment d'ailleurs en fonction des abscisses ξ et x et de l'abscisse, soit x_0, du centre de gravité total par les formules

$$x_1 = x_0 - \frac{m_3}{m_0}\xi - a_1 x, \qquad x_2 = x_0 - \frac{m_3}{m_0}\xi + a_2 x, \qquad x_3 = x_0 + \frac{m_1+m_2}{m_0}\xi :$$

d'où l'on déduit la valeur du déterminant fonctionnel

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x_0, \xi, x)} = -1,$$

et l'égalité entre éléments d'intégrales triples

$$dx_1\,dx_2\,dx_3 = -\,dx_0\,d\xi\,dx.$$

De sorte que, dans le changement de variables effectué dans l'intégrale d'ordre 12, l'expression $d\xi dx$ doit être remplacée par une expression de même forme en fonction des nouvelles variables, et aussi l'expression $d\xi' dx'$. Au total l'intégral I_1 a même forme en fonction des nouvelles variables dans chacun des intervalles de temps considérés, et sur la partie considérée du faisceau, qu'en fonction des anciennes. On peut ainsi décomposer l'intégrale I_1 en une somme de trois intégrales de même forme étendues chacune à des domaines d'intégration formant une suite, mais chacune des trois intégrales partielles étendue au domaine total comprenant tous les domaines partiels correspondants, est finie d'après la démonstration qui précède.

Donc, *d'une façon générale, l'intégrale* I_1 *est finie dans la région de l'espace à douze dimensions occupée par un faisceau de trajectoires bornées, au moins si le vecteur des aires a une longueur supérieure à une longueur fixe.*

De cette première proposition nous tirons la conséquence suivante. Supposons qu'il existe un faisceau de trajectoires, qui soient hyperboliques-elliptiques dans un sens, disons dans le passé, et sur lesquelles les trois distances mutuelles soient bornées dans l'autre sens, disons dans le futur : en réduisant au besoin ce faisceau, on peut supposer que le vecteur des aires y a un minimum positif. Considérons dans le faisceau ainsi réduit une surface de section S_0, la surface S_1 occupée par les points de S_0 au bout de l'intervalle de temps T, et le continuum limité par les deux surfaces S_0 et S_1 ; les antécédents et conséquents successifs de ce continuum au bout des intervalles $\pm T, \pm 2T, \ldots$, forment deux suites infinies, l'une le long des trajectoires hyperboliques-elliptiques, l'autre le long des trajectoires bornées que nous considérons. Si l'on assimile le mouvement sur ces trajectoires dans l'espace à douze dimensions au mouvement d'un fluide, on voit qu'on aboutit à une contradiction : une quantité de fluide dont le volume dans l'espace à douze dimensions, volume exprimé par l'intégrale I_1 correspondante, est aussi grand que l'on veut, devrait pénétrer dans une région de volume fini, puisque l'intégrale I_1 étendue à la région occupée par un faisceau de trajectoires bornées, a une valeur finie.

Il est donc impossible que dans un faisceau, si délié soit-il, les trajectoires soient hyperboliques-elliptiques dans un sens, et que les trois distances mutuelles soient bornées dans le sens opposé (¹).

6. Le vecteur des aires ayant toujours un minimum positif, considérons en second lieu dans la région $h < 0$ un faisceau de trajectoires, qui, suivies dans un même sens, soient toutes des trajectoires oscillantes, ou forment un mélange de trajectoires bornées et de trajectoires oscillantes : de sorte que cette nouvelle hypothèse est une généralisation de la première (²). Nous allons chercher encore à limiter la valeur de l'intégrale I_1 dans la région où pénètre ce faisceau de trajectoires.

Si l'on étend d'abord l'intégrale I_1 à une région finie de l'espace à douze dimensions, ou aux trois mêmes régions infinies, correspondant à des chocs ou à des approches de deux corps, que dans le raisonnement précédent cette intégrale a une valeur finie. Mais nous devons étendre en outre la même intégrale aux régions infinies correspondant à des mouvements où une masse s'éloigne indéfiniment des deux autres.

(¹) Schwarzschild a obtenu une proposition équivalente dans le cas où celui des trois corps qui est supposé s'éloigner indéfiniment des deux autres a une masse nulle (*Astronomische Nachrichten*, Band 141, 1896, p. 6). La démonstration de Schwarzschild, dont la nôtre est une extension, se résume en ceci : si l'on écrit les équations différentielles du mouvement d'une comète, supposée de masse nulle, sous l'action du Soleil et de Jupiter, les seconds membres de ces équations ne sont pas indépendants du temps, mais en sont des fonctions périodiques, dont la période est la durée de la révolution de Jupiter; et ces équations à six variables sous la forme canonique admettent encore comme dernier multiplicateur l'unité. En prenant pour intervalle T non plus un intervalle de temps arbitraire, mais la période des seconds membres, on aboutit à la même contradiction : dans l'espace à six dimensions, où l'on représente le mouvement de la comète par les coordonnées de celle-ci et leurs dérivées, une quantité de fluide de volume infini devrait pénétrer dans une région de volume fini.

(²) La proposition que nous venons d'obtenir au n° **5** est donc contenue dans celle que nous démontrerons au n° **7**. S'il n'existe pas de trajectoires oscillantes, la nouvelle hypothèse et la discussion des n°ˢ **6** et **7** sont inutiles. Si au contraire il existe des trajectoires oscillantes, et si les trajectoires bornées ne peuvent pas former de faisceau, la discussion du n° **5**, non seulement est un cas particulier de la discussion des n°ˢ **6** et **7**, mais encore repose sur une hypothèse irréalisable.

Supposons d'abord que cette masse, pendant des intervalles de temps successifs, soit toujours la même, soit m_3, c'est-à-dire que, selon les notations précédentes, les coordonnées x, y, z soient bornées et les coordonnées ξ, η, ζ arbitrairement grandes pendant ces intervalles. Dans la région infinie correspondante de l'espace à douze dimensions nous pouvons calculer l'intégrale I_1 par quatre intégrations triples successives en l'écrivant :

$$(9) \qquad \int d\xi\, d\eta\, d\zeta \int d\xi'\, d\eta'\, d\zeta' \int dx\, dy\, dz \int dx'\, dy'\, dz'.$$

Nous savons déjà que le résultat des deux premières intégrations triples est borné, même si les deux masses m_1 et m_2 se choquent ou deviennent arbitrairement voisines.

Pour limiter la troisième intégrale triple, cherchons à limiter le volume d'intégration correspondant dans l'espace à trois dimensions si l'on représente le point ξ', η', ζ'. Les trois expressions $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ sont bornées pendant les intervalles de temps considérés ; si la distance r_{12} est supérieure à une longueur fixe, car toutes les vitesses sont bornées par l'équation des forces vives ; si la distance r_{12} s'annule ou devient arbitrairement petite, car ces trois expressions sont elles-mêmes arbitrairement petites. Par suite, d'après les intégrales des aires, les trois expressions $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ sont bornées aussi. Ainsi le volume d'intégration cherché est d'abord compris entre trois couples de plans deux à deux parallèles, et parallèles à une même droite, dont les équations sont de la forme

$$\eta\zeta' - \zeta\eta' = \text{const.}, \qquad \zeta\xi' - \xi\zeta' = \text{const.}, \qquad \xi\eta' - \eta\xi' = \text{const.}$$

En outre, dans chacun des intervalles de temps où la masse m_3 s'éloigne à distance arbitrairement grande, puis se rapproche des masses m_1 et m_2, il est à peu près évident que la vitesse de la masse m_3 par rapport au centre de gravité des deux autres, vitesse dont le carré est $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$, est bornée. En effet, dans l'expression résultant de l'identité de Lagrange,

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \rho'^2 + \frac{(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + (\zeta\xi' - \xi\zeta')^2 + (\xi\eta' - \eta\xi')^2}{\rho^2},$$

le numérateur du dernier terme est borné dans l'intervalle de temps considéré, et le dénominateur est supérieur à δ^2, si pendant cet intervalle la distance ρ est supérieure à la longueur fixe δ. D'ailleurs cette distance, pendant le même intervalle, et si la longueur δ est assez grande, satisfait à une équation différentielle qui, d'après l'équation (3), peut recevoir la forme (4)

$$\rho'' = -\frac{m_0}{\rho^2}\left(1 + \frac{b}{\rho}\right),$$

donc la dérivée ρ' décroît constamment et la distance ρ a un maximum ρ_M, où cette dérivée s'annule. En multipliant la dernière équation par $2\rho'$, et en intégrant de l'instant de ce maximum à un instant quelconque du mouvement considéré, on obtient

$$\rho'^2 = 2m_0\left(1 + \frac{b}{\delta}\right)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_M}\right):$$

d'où résulte que le carré ρ'^2 est borné, et même de l'ordre de $\frac{1}{\delta}$. Donc l'expression $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ est elle-même bornée.

Ainsi, dans l'espace à trois dimensions où l'on représente les trois variables ξ', η', ζ', le volume d'intégration est compris d'une part à l'intérieur d'une sphère de centre origine et de rayon fixe, et d'autre part, si l'on veut, à l'intérieur d'un prisme quadrangulaire dont les quatre faces sont deux à deux des plans parallèles ayant des équations de la forme

$$(10) \qquad \eta\zeta' - \zeta\eta' = \text{const.}, \qquad \zeta\xi' - \xi\zeta' = \text{const.},$$

où les seconds membres ont des valeurs bornées. Ce volume sera au plus de l'ordre de l'aire du parallélogramme, section droite de ce prisme, c'est-à-dire de l'ordre du produit des distances des deux couples de faces parallèles (10) par l'inverse du sinus de l'angle θ de ces faces :

$$\frac{b}{\sqrt{(\eta^2 + \zeta^2)(\zeta^2 + \xi^2)}} \times \frac{1}{\sin\theta};$$

or, si l'on choisit pour θ l'angle aigu, l'on a

$$\cos\theta = \frac{|\eta\xi|}{\sqrt{(\eta^2 + \zeta^2)(\zeta^2 + \xi^2)}} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{\rho|\zeta|}{\sqrt{(\eta^2 + \zeta^2)(\zeta^2 + \xi^2)}}.$$

Donc la valeur du volume considéré peut s'écrire $\frac{b}{\rho\zeta}$, et aussi $\frac{b}{\rho\xi}$, $\frac{b}{\rho\eta}$, et par suite $\frac{b}{\rho^2}$.

Il résulte que l'intégrale I_1 est inférieure en valeur absolue à une expression de la forme

$$b\int\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\rho^2},$$

dans le domaine d'intégration de laquelle la distance $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ ne s'annule pas, mais croît indéfiniment dans une infinité de directions formant un cône. En passant en coordonnées polaires, ou en appliquant une règle classique, on voit que la dernière intégrale triple est infinie, de sorte que la valeur de l'intégrale I_1 n'est pas limitée par le raisonnement qui précède.

Mais c'est ici que nous utiliserons l'intégrale plus générale I_2, en introduisant dans cette intégrale la fonction

$$M=\frac{1}{H^n}, \qquad \text{avec} \qquad H=\mu\rho^2+mr^2,$$

où n désigne un exposant constant, et qui dépend des six variables ξ, η, ζ, x, y, z, mais non de leurs dérivées. L'intégrale I_2 ainsi formée a une valeur finie dans tous les cas précédents où l'intégrale I_1 a elle-même une valeur finie : en effet puisque sur le faisceau de trajectoires considéré, la somme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ est supérieure à une quantité positive fixe, selon une proposition de M. Sundman que nous avons déjà invoquée, la fonction H est elle aussi supérieure à une quantité positive fixe. En outre, dans l'expression (9) de l'intégrale I_1, si l'on multiplie par $\frac{1}{H^n}$ l'élément de l'intégrale triple en $dx\,dy\,dz$, la valeur de cette intégrale triple, d'après la formule de la moyenne, est multipliée par le facteur $\frac{1}{H^n}$, où figure une valeur moyenne $\mathbf{r}$ de la variable r, valeur moyenne qui est bornée. Et l'on arrive à une intégrale triple en ξ, η, ζ qui se met sous la forme

$$b\int\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\rho^2(\mu\rho^2+m\mathbf{r}^2)^n}.$$

Il est visible que cette nouvelle intégrale triple étendue à un domaine d'intégration infini a une valeur finie, si l'exposant constant n est supérieur à $\frac{1}{2}$: donc *l'intégrale correspondante a encore une valeur finie.*

Remarquons enfin que le résultat obtenu subsiste si sur les trajectoires considérées la masse qui s'éloigne indéfiniment des deux autres n'est pas toujours la même; on le voit en appliquant le même changement de variables que précédemment, changement qui conserve aussi la forme de l'expression H.

Ainsi *nous avons encore formé* dans ce second cas *un invariant intégral*, I_1 *ou* I_2, *des équations différentielles du mouvement, qui, étendu à la région occupée dans l'espace à douze dimensions par un faisceau de trajectoires bornées ou oscillantes, conserve une valeur finie, si du moins le vecteur des aires a un minimum positif.*

7. Dès lors on sait comment selon une proposition classique ([1]) de Poincaré, il résulte de l'existence d'un tel invariant intégral que, *sauf*

([1]) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 147-156.

Pour étendre la notion de stabilité à la Poisson, Poincaré a cherché à prolonger analytiquement les trajectoires que nous appelons ici hyperboliques-elliptiques au delà de la valeur infinie du temps (*ibid.*, p. 168-172). D'abord, la région occupée dans l'espace à douze dimensions par un faisceau de trajectoires hyperboliques-elliptiques est la même que celle que nous avons considérée pour limiter l'intégrale I_2 sur un faisceau de trajectoires oscillantes. En effet, sur une trajectoire hyperbolique-elliptique où la masse m_3 s'éloigne indéfiniment des deux autres, les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ ne sont pas seulement bornées, mais tendent vers des limites finies; et, d'autre part, la dérivée ρ' tend vers une limite finie et positive, et par suite aussi la quantité $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$. D'ailleurs la même variable :

$$\int \mathrm{M}\,dt = \int \frac{dt}{(\mu\rho^2 + mr^2)^n} \qquad \text{avec} \qquad n > \frac{1}{2},$$

qui croît indéfiniment avec le temps sur les trajectoires bornées et sur les trajectoires oscillantes, tend visiblement, au contraire, vers une valeur finie sur chaque trajectoire hyperbolique-elliptique, et cela suffirait à établir que la valeur de l'intégrale I_2 est finie dans la région occupée par un faisceau de telles trajectoires. Mais j'ai montré (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 39, 1922, p. 83) que le seul prolongement réel qui soit possible sur une trajectoire hyperbolique-elliptique est le rebroussement de la trajectoire sur elle-même. Après deux de ces rebroussements, il y a non seulement stabilité à la Poisson, mais périodicité.

Remarquons encore qu'on limite facilement aussi l'intégrale I_2 dans la région occupée par un faisceau de trajectoires hyperboliques-elliptiques, par un changement *des trajectoires exceptionnelles, l'ensemble des trajectoires* **bornées** *et des trajectoires oscillantes possède la stabilité à la Poisson.* Il importe d'ajouter que, sur les trajectoires oscillantes comme sur les trajectoires bornées, l'intégrale

$$\int \mathrm{M}\,dt = \int \frac{dt}{(\mu\rho^2 + m r^2)^n}, \qquad n > \frac{1}{2}$$

croît indéfiniment quand le temps t croît lui-même indéfiniment, car, étendue seulement à l'infinité d'intervalles où les trois distances mutuelles sont bornées, et dont aucun n'est infiniment petit, cette intégrale a déjà une valeur infinie; de sorte que ce sont les trajectoires elles-mêmes que nous avons définies qui possèdent la stabilité à la Poisson, et non des prolongements de ces trajectoires au delà de la valeur infinie du temps.

Mais nous allons tirer une autre conséquence de l'existence d'un invariant intégral fini dans la région de l'espace à douze dimensions occupée par un faisceau de trajectoires bornées ou oscillantes.

---

de variables; si c'est la masse m_3 qui s'éloigne indéfiniment des deux autres, remplaçons respectivement les six variables $\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta'$ et les six variables x, y, z, x', y', z par les éléments osculateurs correspondants $a, e, i, l, \varpi, \theta$ et $a_1, e_1, i_1, l_1, \varpi_1, \theta_1$ (*cf.* CHAZY, *loc. cit.*, p. 74-82). Les deux déterminants fonctionnels d'ordre 6 à considérer se déduisent immédiatement l'un de l'autre; le premier a pour valeur

$$\frac{\mathrm{D}(\xi, \eta, \zeta, \xi', \eta', \zeta')}{\mathrm{D}(a, e, i, l, \varpi, \theta)} = \frac{m_0^{\frac{3}{2}}}{2}\sqrt{ae}\sin i.$$

de sorte que l'intégrale I_2 devient, à un facteur constant près,

$$\int \frac{\sqrt{aa_1}\,ee_1 \sin i \sin i_1}{[\mu a^2(e \operatorname{ch} u - 1)^2 + m a_1^2(1 - e_1 \cos u_1)^2]^n}\, da\, de\, di\, dl\, d\varpi\, d\theta\, da_1\, de_1\, di_1\, dl_1\, d\varpi_1\, d\theta_1.$$

Dans le nouveau domaine d'intégration, sur chaque trajectoire hyperbolique-elliptique, les dix variables autres que l et l_1 tendent vers des limites finies, les deux variables l et l_1 tendent vers l'infini, mais l_1 doit être considéré comme un angle et l comme une distance, et l'on a d'ailleurs

$$l = e \operatorname{sh} u - u + \varpi.$$

Donc, la nouvelle intégrale d'ordre 12 a une valeur finie si l'intégrale simple $\int_{l_0}^{\infty} \frac{dl}{l^{2n}}$, où l_0 est positif, est elle-même finie, c'est-à-dire si l'exposant n est supérieur à $\frac{1}{2}$.

Supposons qu'il y ait un faisceau de trajectoires, qui soient hyperboliques-elliptiques dans un sens, soit dans le passé, et qui soient bornées ou oscillantes dans le futur.

Considérons dans ce faisceau un continuum à douze dimensions, où le vecteur des aires ait un minimum positif, et considérons les mouvements définis par les points de ce continuum et un certain instant initial t_0. A chaque instant t correspond dans les mouvements ainsi définis un continuum transformé du continuum initial. Il résulte de l'existence d'un invariant intégral fini, selon le raisonnement classique [1] de Poincaré, et selon une remarque de la page précédente, qu'il arrivera dans le futur un instant fini où le continuum tranformé aura une partie commune avec le continuum initial. Dès lors, si l'on considère les trajectoires définies par les points de cette partie commune, et si l'on suit ces trajectoires en remontant le cours du temps, on est conduit à une contradiction.

D'une part, les trajectoires obtenues, dans le sens considéré, sont hyperboliques-elliptiques, et si le continuum initial correspond à un passé assez reculé dans le cours de chaque mouvement, l'une au moins des trois coordonnées ξ, η, ζ doit varier indéfiniment dans le même sens. D'autre part les trajectoires obtenues sont dans l'espace à douze dimensions des courbes presque fermées, c'est-à-dire que les trois coordonnées ξ, η, ζ en particulier devraient dans la suite du mouvement considéré, au bout d'un intervalle de temps fini, reprendre des valeurs voisines de leurs valeurs initiales.

Donc IL NE PEUT EXISTER DE FAISCEAU, SI DÉLIÉ SOIT-IL, OU LES TRAJECTOIRES SOIENT HYPERBOLIQUES-ELLIPTIQUES DANS UN SENS, ET BORNÉES OU OSCILLANTES DANS LE SENS OPPOSÉ.

8. Il importe d'arriver au résultat précédent, et d'obtenir la limitation de l'intégrale I_2 dans la région occupée par un faisceau de trajectoires hyperboliques-elliptiques, par le calcul connu [2] où Poincaré a introduit les intégrales I_1 et I_2 dans l'étude des trajectoires du pro-

---

(1) Ce second raisonnement est une partie de la démonstration de la proposition rappelée a la page précédente (*loc. cit.*, p. 142-143).

(2) *Loc. cit.*, p. 167-168 et 172-173.

blème des trois corps : d'autant que nous aurons l'occasion de rectifier ce calcul sur un point.

Proposons-nous de calculer l'intégrale I_1 par deux intégrations sextuples successives :

$$\int d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dx\, dy\, dz \int d\xi'\, d\eta'\, d\zeta'\, dx'\, dy'\, dz',$$

et limitons d'abord dans l'espace à six dimensions le domaine auquel s'étend l'intégrale sextuple de droite. Les six variables ξ', η', ζ', x', y', z' sont liées sur chaque trajectoire par l'intégrale des forces vives et les intégrales des aires. Sur le faisceau de trajectoires considéré, la constante des forces vives et les constantes des aires sont comprises chacune entre deux systèmes de valeurs, soient $h \pm \varepsilon$, $\alpha \pm \varepsilon_1$, $\beta \pm \varepsilon_2$, $\gamma \pm \varepsilon_3$, ε, ε_1, ε_2, ε_3 désignant quatre quantités positives; et d'ailleurs, ce faisceau formant un continuum, chacune des quatre constantes possède effectivement sur certaines trajectoires toute valeur comprise entre les deux valeurs extrêmes correspondantes. Il résulte que le domaine d'intégration est limité d'une part par trois couples de plans deux à deux parallèles, d'autre part par deux surfaces analogues à deux sphères de centre origine.

On peut opérer un premier changement de variables en remplaçant les variables ξ', η', ζ', x', y', z' par $\frac{\xi'}{\sqrt{\mu}}$, $\frac{\eta'}{\sqrt{\mu}}$, $\frac{\zeta'}{\sqrt{\mu}}$, $\frac{x'}{\sqrt{m}}$, $\frac{y'}{\sqrt{m}}$, $\frac{z'}{\sqrt{m}}$, de façon que ces deux dernières surfaces soient deux sphères de l'espace à six dimensions :

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2F + 2(h \pm \varepsilon);$$

les trois couples de plans sont alors :

$$\sqrt{\mu}(\eta\zeta' - \zeta\eta') + \sqrt{m}(yz' - zy') = \alpha \pm \varepsilon_1,$$
$$\sqrt{\mu}(\zeta\xi' - \xi\zeta') + \sqrt{m}(zx' - xz') = \beta \pm \varepsilon_2,$$
$$\sqrt{\mu}(\xi\eta' - \eta\xi') + \sqrt{m}(xy' - yx') = \gamma \pm \varepsilon_3.$$

On peut opérer ensuite un second changement de variables défini par les six formules :

$$
\begin{aligned}
X &= \sqrt{\mu}(\eta\zeta' - \zeta\eta') + \sqrt{m}(yz' - zy'),\\
Y &= \sqrt{\mu}(\zeta\xi' - \xi\zeta') + \sqrt{m}(zx' - xz'),\\
Z &= \sqrt{\mu}(\xi\eta' - \eta\xi') + \sqrt{m}(xy' - yx'),\\
U &= a\xi' + b\eta' + c\zeta' + dx' + ey' + fz',\\
V &= a'\xi' + b'\eta' + c'\zeta' + d'x' + e'y' + f'z',\\
W &= a''\xi' + b''\eta' + c''\zeta' + d''x' + e''y' + f''z',
\end{aligned}
$$

et tel que les trois plans $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ soient orthogonaux entre eux et aux trois premiers plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. On reconnaît facilement que le problème de déterminer les dix-huit coefficients a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f', a'', b'', c'', d'', e'', f'' par les douze conditions d'orthogonalité ainsi posées comporte une infinité de solutions, et l'on peut évidemment supposer, en outre, que les trois sommes de carrés

$$
a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 + e'^2 + f'^2,
$$
$$
a''^2 + b''^2 + c''^2 + d''^2 + e''^2 + f''^2
$$

soient égales à l'unité : pourvu que les trois plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, qui ne sont pas orthogonaux deux à deux, ne passent pas non plus par la même multiplicité à quatre dimensions, c'est-à-dire que les six coordonnées relatives ξ, η, ζ, x, y, z ne vérifient pas les conditions de proportionnalité

$$
y\zeta - z\eta = 0, \qquad z\xi - x\zeta = 0, \qquad x\eta - y\xi = 0.
$$

Après ces deux changements de variables l'intégrale I_1 peut s'écrire :

$$
\frac{1}{(\mu m)^{\frac{3}{2}}}\int \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta\, dx\, dy\, dz}{\Delta} \int dX\, dY\, dZ \int dU\, dV\, dW,
$$

et les équations des surfaces limites deviennent :

$$
U^2 + V^2 + W^2 + SAX^2 + 2SBYZ = 2F + 2h \pm 2\varepsilon,
$$
$$
X = \alpha \pm \varepsilon_1, \qquad Y = \beta \pm \varepsilon_2, \qquad Z = \gamma \pm \varepsilon_3,
$$

avec

$$\Delta = \sqrt{\mu m(\mu\rho^2 + mr^2)[\rho^2 r^2 - (\xi x + \eta y + \zeta z)^2]},$$

$$A = \frac{(\mu\rho^2 + mr^2)(\mu\xi^2 + mx^2) + \mu m(y\zeta - z\eta)^2}{\Delta^2},$$

$$B = \frac{(\mu\rho^2 + mr^2)(\mu\eta\zeta + myz) + \mu m(z\xi - x\zeta)(x\eta - y\xi)}{\Delta^2}.$$

Les neuf variables de gauche ξ, η, ζ, x, y, z, X, Y, Z ayant des valeurs données, le volume d'intégration de l'intégrale triple en U, V, W est limité dans l'espace à trois dimensions par deux sphères de centre origine, et, si l'on suppose le faisceau de trajectoires infiniment délié, la partie principale de cette intégrale triple par rapport à la quantité ε considérée comme infiniment petite est

$$8\pi\varepsilon\sqrt{2F + 2h - SAX^2 - 2SBYZ}.$$

En intégrant par rapport à X, Y, Z la fonction obtenue, et se bornant de même à la partie principale par rapport aux trois infiniment petits ε_1, ε_2, ε_3, on trouve

$$64\pi\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\sqrt{2F + 2h - SA\alpha^2 - 2SB\beta\gamma}.$$

Et l'on obtient finalement l'intégrale sextuple en ξ, η, ζ, x, y, z.

$$\frac{64\pi\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}{\mu^2 m^2}\int\sqrt{\frac{2F + 2h - SA\alpha^2 - 2SB\beta\gamma}{(\mu\rho^2 + mr^2)[\rho^2 r^2 - (\xi x + \eta y + \zeta z)^2]}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\,dx\,dy\,dz.$$

On aperçoit plusieurs circonstances qui pourraient *a priori* empêcher l'intégrale obtenue d'avoir un sens : l'élément devient infini avec la fonction F quand l'une des trois distances mutuelles s'annule, les deux autres ayant une valeur arbitraire, et il peut de même devenir infini quand s'annule le second facteur du dénominateur de l'expression placée sous le radical. Mais, par application des règles connues, on constate que, malgré ces différentes singularités, l'intégrale considérée conserve un sens.

Au contraire, pour x, y, z finis arbitraires et ξ, η, ζ infinis, l'élément de l'intégrale sextuple s'annule comme $\frac{1}{\rho^2}$. Donc, étendue au domaine infini de l'espace à douze dimensions correspondant à des trajectoires oscillantes, l'intégrale I_1 a une valeur infinie (1).

Mais, si au lieu de l'intégrale I_1, on considère l'intégrale I_2 et la fonction $M = \frac{1}{(\mu\rho^2 + mr^2)^n}$, l'élément de la nouvelle intégrale sextuple en ξ, η, ζ, x, y, z s'annule pour ξ, η, ζ infinis comme $\frac{1}{\rho^{2+2n}}$: pour $n > \frac{1}{2}$, cette nouvelle intégrale est donc finie selon la règle classique relative aux intégrales triples, et, par conséquent, l'intégrale I_2 correspondante est finie aussi dans toute la région de l'espace à douze dimensions où s'étend le faisceau de trajectoires considéré. Nous arrivons à la même conclusion que précédemment.

9. De la proposition énoncée à la fin du n° **7**, résulte que, dans la région $h < 0$, les trois continua de trajectoires hyperboliques-elliptiques présentent la disposition la plus simple qu'il soit possible d'imaginer. En effet, considérons toutes les trajectoires qui, suivies dans un certain sens, sont hyperboliques-elliptiques d'une même classe et qui forment l'un de ces trois continua. Suivies dans le sens opposé, ces trajectoires ne peuvent être ni bornées, ni oscillantes : elles sont nécessairement (2) hyperboliques-elliptiques, mais *a priori* pourraient appar-

---

(1) C'est la conclusion par laquelle Poincaré termine son raisonnement concernant l'intégrale I_1 (*Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 168); cette conclusion est exacte, mais le calcul antérieur est faux. En effet, en se reportant à ce calcul (*loc. cit.*, p. 167-173), on voit qu'il doit être rectifié en ceci, que Poincaré calcule l'intégrale sextuple en ξ', η', ζ', x', y', z' comme si les trois plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ étaient orthogonaux deux à deux; or, l'on vérifie immédiatement que ces plans ne sont pas orthogonaux.

Selon l'expression de l'intégrale I_1 formée par Poincaré, il suffirait, dans la fonction $M = \frac{1}{(\mu\rho^2 + mr^2)^n}$, de choisir un exposant n positif quelconque pour assurer la convergence de l'intégrale I_2; dans le calcul exact, nous avons dû introduire un exposant n supérieur à $\frac{1}{2}$.

(2) Les trajectoires aboutissant à un choc des trois corps, et sur lesquelles il est nécessaire, mais non suffisant, que les trois constantes des aires s'annulent (cf. *supra*, p. 356, note 1), peuvent faire exception à cette proposition et aux résultats énoncés à la page suivante.

tenir à deux classes différentes ou aux trois classes. Une telle hypothèse est à rejeter, car l'on ne peut passer de façon continue, la constante h restant négative, de trajectoires hyperboliques-elliptiques d'une certaine classe à des trajectoires hyperboliques-elliptiques d'une classe différente que par l'intermédiaire de trajectoires bornées ou oscillantes.

Le continuum des trajectoires hyperboliques-elliptiques d'une même classe, sur lesquelles la masse m_3, par exemple, s'éloigne indéfiniment des deux autres, pourrait constituer une sorte de faisceau, à l'autre extrémité duquel les trajectoires seraient hyperboliques-elliptiques d'une classe différente. L'hypothèse est peu vraisemblable, mais en raisonnant par continuité, on démontre rigoureusement qu'une telle disposition est encore impossible. En effet, par continuité, annulons les valeurs des masses m_2 et m_3; dans le mouvement limite (¹), la masse m_1 est immobile à l'origine, et les deux masses m_2 et m_3 ont, par rapport à m_1, des mouvements, l'un elliptique, l'autre hyperbolique, mais sur chaque trajectoire, pour $t = \pm\infty$, c'est la même masse, m_2 ou m_3, qui s'éloigne indéfiniment de m_1.

Donc, nécessairement, *dans la région $h < 0$, les trajectoires hyperboliques-elliptiques sont réparties en trois continua dans chacun desquels les trajectoires sont hyperboliques-elliptiques de la même classe dans les deux sens.*

Par suite, *les trajectoires qui, suivies dans un sens, sont paraboliques-*

(¹) ξ, η, ζ et x, y, z sont à la limite les coordonnées des masses m_3 et m_2 respectivement par rapport à la masse m_1, et si l'on représente encore la combinaison des deux mouvements de ces deux masses par le point de l'espace à douze dimensions ayant pour coordonnées $\xi, \eta, \zeta, x, y, z, \xi', \eta', \zeta', x', y', z'$, on obtient quatre continua correspondant, l'un à deux mouvements elliptiques, un autre à deux mouvements hyperboliques, les deux derniers à des mouvements, l'un elliptique, l'autre hyperbolique. Des quatre continua existant dans le cas général dans la région $h < 0$, l'un s'est réduit à zéro, savoir le continuum des trajectoires où la masse m_1 s'éloigne indéfiniment des masses m_2 et m_3 restant à distance bornée. Les quatre continua obtenus sont limités par les deux surfaces :

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \frac{2m_1}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} = 0, \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 - \frac{2m_1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0;$$

et la surface $h = 0$ tend, elle aussi, vers une position limite si le rapport des masses m_2 et m_3 tend vers une valeur limite.

elliptiques, et qui engendrent les trois surfaces limitant ces trois continua, *sont aussi paraboliques-elliptiques, et de la même classe, dans le sens opposé*. Enfin, puisque les trois surfaces paraboliques-elliptiques viennent aboutir à la surface $h = 0$ le long des trois multiplicités à dix dimensions engendrées par les trajectoires paraboliques, ces dernières trajectoires possèdent encore le même caractère de réversibilité : *les trajectoires paraboliques dans un sens sont aussi paraboliques dans le sens opposé avec un même ordre des trois masses*.

En définitive nous arrivons aux résultats suivants : LES TRAJECTOIRES DU PROBLÈME DES TROIS CORPS DIVISENT LA RÉGION $h < 0$ DE L'ESPACE A DOUZE DIMENSIONS EN QUATRE CONTINUA. *Dans trois de ces continua, qui recouvrent la surface $h = 0$ à son intérieur, chaque trajectoire suivie dans les deux sens est hyperbolique-elliptique : quand le temps croît indéfiniment, deux distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps, et la troisième, la même dans un même continuum, est bornée. Dans le* CONTINUUM INTÉRIEUR, *limité par trois surfaces analytiques, dans chacun des deux sens où l'on peut suivre chaque trajectoire, ou bien les trois distances mutuelles sont bornées, ou bien cette trajectoire est une trajectoire oscillante.*

Bien entendu le continuum intérieur est le plus important au point de vue pratique, puisque c'est dans ce continuum que se représentent les mouvements des planètes. C'est dans ce continuum intérieur presque exclusivement qu'a travaillé Poincaré, que travaille aujourd'hui notamment M. Birkhoff; mais pour connaître une région, il peut être utile d'en marquer et d'en étudier les frontières, et de sortir de cette région.

Dans un second Mémoire j'étendrai les résultats précédents à la région extérieure $h > 0$ de l'espace à douze dimensions.