JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. MANDELBROJT

Sur les suites de fonctions holomorphes. Les suites correspondantes des fonctions dérivées. Fonctions entières

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 173-195.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__173_0>

Sur les suites de fonctions holomorphes. Les suites correspondantes des fonctions dérivées. Fonctions entières;

PAR S. MANDELBROJT.

---

1. Une famille de fonctions peut être normale dans un domaine sans que la famille des fonctions dérivées des premières le soit. Il suffit de considérer une famille quelconque de fonctions $f(z)$ qui ne soit pas normale et d'envisager la famille des fonctions

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz + C = F(z) + C = \varphi(z),$$

où C est une constante assez grande qui dépend de la fonction $f(z)$. Dans un domaine D intérieur au domaine commun où toutes les fonctions $f(z)$ sont holomorphes, la famille $\varphi(z)$ sera sûrement normale si les constantes C sont choisies d'une manière convenable : il suffit par exemple de poser pour chaque C

$$|C| - m > \delta > 0,$$

où m est le maximum de $F(z)$ dans D et δ étant commun pour toutes les $f(z)$. La famille $\varphi(z)$ est donc normale sans que la famille $f(z) = \varphi'(z)$ le soit.

En particulier, une suite $\varphi_n(z)$ peut tendre dans D uniformément vers l'infini, sans même que la famille $\varphi'_n(z)$ soit normale.

Il est intéressant d'étudier les cas où le fait que la famille de $\varphi(z)$ est normale entraîne celui que la famille de $\varphi'(z)$ l'est. C'est un des sujets dont nous allons nous occuper. Nous aurons l'occasion de montrer quelques propriétés de familles normales spéciales qui nous permettront en particulier de juger de la manière dont une suite de fonctions holomorphes tend vers l'infini.

Nous abordons également des sujets connexes. Quelques-uns de ces résultats ont été exposés dans deux Notes présentées aux *Comptes rendus de l'Acvdémie des Sciences* (1). Depuis, plusieurs de ces résultats ont été généralisés et appliqués par des auteurs différents. Notamment par MM. Biernacki et Valiron. Nous les citerons en lieu correspondant.

2. Une famille de fonctions harmoniques $g(x, y)$ qui vérifient dans un domaine D à l'inégalité

$$g(x, y) > \mathrm{K},$$

où K est le même pour toute la famille, est normale. En désignant par $\mathrm{G}(x, y)$ la fonction conjuguée à la fonction $g(x, y)$ il suffit pour la démonstration de considérer la famille

$$e^{g(x,y)+i\mathrm{G}(x,y)},$$

de fonctions analytiques. Ce résultat dû à M. Montel est bien connu (2).

Au cours de ce travail nous désignerons par D_1 un domaine fermé complètement intérieur au domaine D.

LEMME I. — *Considérons dans* D *la famille des fonctions harmoniques*

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x, y) > 0,$$

à tout domaine D_1 *on peut faire correspondre un nombre fini* $\alpha > 1$, *tel que, quelle que soit la fonction* $\varphi(x, y)$ *de la famille et quel que soit le couple de points* (x_0, y_0), (x_1, y_1) *de* D_1 *on ait*

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{\alpha} < \frac{\varphi(x_1, y_1)}{\varphi(x_0, y^0)} < \alpha \quad (3).$$

(1) Voir *C. R. Acad. Sc.*, t. 189.

(2) Voir Paul MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications* (Paris, Gauthier-Villars, 1927). Nous désignerons cet ouvrage par *F. N.* La démonstration de ce résultat de M. Montel peut être modifiée.

(3) J'ai d'abord démontré le théorème qui suit d'où j'ai tiré ce lemme, mais comme

La famille des fonctions harmoniques en x, y

$$F_{x_0 y_0}(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x_0, y_0)},$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction quelconque de notre famille et où x_0, y_0 est un point quelconque de D, vérifie également la condition

$$F > 0;$$

d'autre part,

$$F_{x_0, y_0}(x_0, y_0) = 1,$$

la famille de F est donc normale et bornée, d'où notre lemme.

La famille de fonctions harmoniques dans D

$$\text{(B)} \qquad \varphi(x, y) \geqq 0$$

vérifie encore la conclusion du lemme I, ces fonctions ne s'annulant que sur la frontière de D.

Soit (K) une classe de fonctions extraites de la classe (B) et jouissant d'une propriété (α) caractérisée comme il suit :

1° Ces fonctions possèdent la propriété (α) dans tout domaine intérieur à D.

2° Cette propriété est vérifiée par toute fonction limite des fonctions de (K).

3° Les propriétés 1° et 2° restent invariantes par rapport à toute transformation conforme du domaine D en D'.

4° Si l'on multiplie chaque fonction de (K) par une constante positive qui dépend de la fonction, la nouvelle classe possède la même propriété (α).

M. Montel m'a communiqué ensuite cette démonstration simple du lemme, je le prends comme point de départ.

C'est aussi à M. Montel que je dois le fait d'avoir remplacé les suites de fonctions tendant vers l'infini, par des familles bornées inférieurement, les démonstrations ne devant pas être modifiées.

Désignons par α' la quantité telle qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ une fonction de la famille (K) vérifiant l'inégalité

$$\frac{\varphi(x_1, y_1)}{\varphi(x_0, y_0)} < \alpha' - \varepsilon, \tag{2}$$

quels que soient les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) dans D_1 fixe et telle qu'aucune fonction de (K) ne vérifie l'inégalité

$$\frac{\varphi(x_1, y_1)}{\varphi(x_0, y_0)} > \alpha' + \varepsilon, \tag{3}$$

pour aucun couple de points de D_1.

Soit ε_n une suite qui tend vers O, on peut pour chaque n déterminer une fonction de la famille (K) telle qu'on ait pour un couple de points de D_1

$$\frac{\varphi(x_1, y_1)}{\varphi(x_0, y_0)} > \alpha' - \varepsilon_n. \tag{3'}$$

Ces dernières fonctions forment une famille normale (D) dont chaque fonction limite qui est elle-même une fonction de (K) possède sur la frontière de D_1 deux points x_0, y_0 et x_1, y_1 pour lesquels on a

$$\frac{\varphi(x_1, y_1)}{\varphi(x_0, y_0)} = \alpha'.$$

On voit aussi que si l'on détermine α'' en partant de la famille (A) et de la même manière que nous avons déterminé α' en partant de (B) on a

$$\alpha'' = \alpha'.$$

D étant fixe et D_1 changeant la quantité α' considérée comme fonction de D_1 jouit des propriétés remarquables dont nous parlerons à la fin de ce Mémoire.

3. Il résulte immédiatement du lemme I que *la famille de fonctions analytiques $f(z)$ vérifiant dans* D *la condition*

$$|f(z)| > 1$$

jouit de la propriété qu'à chaque D_1 *on peut attribuer une quantité* *finie* $\alpha > 1$ *pour qu'on ait*

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{\log |f(z_1)|}{\log |f(z_0)|} < \alpha, \tag{3''}$$

quels que soient z_1 *et* z_0 *de* D_1 (1).

En particulier si la suite de fonctions holomorphes dans $D f_n(z)$ tend uniformément dans ce domaine vers une fonction $g(z)$, sans qu'aucune fonction $f_n(z) - f(z)$ ne s'annule dans D, on peut faire correspondre à chaque D_1 un $\alpha > 1$ tel qu'on ait

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{\log |f_n(z_1) - f(z_1)|}{\log |f_n(z_0) - f(z_0)|} < \alpha.$$

M. Ostrowski a démontré (2) que si une suite $f_n(z)$ tend dans D uniformément vers $f(z)$, alors à tout couple de domaine D′ et D″ complètement dans D correspond un nombre β tel qu'on ait

$$\frac{1}{\beta} < \frac{\log m_n}{\log m'_n} < \beta,$$

où $m_n = \max |f_n(z) - f(z)|$ quand z est dans D′ et

$$m'_n = \max |f_n(z) - f(z)|$$

quand z est dans D″, β dépend de D′ et D″. Dans le cas où $f_n(z) - f(z)$ ne s'annule pas dans D, ce théorème est un cas particulier du nôtre. On voit d'ailleurs que dans ces conditions β ne dépend plus de D′ et D″.

Il suffit de prendre dans notre théorème pour z_1 le point de D′ où $|f_n(z) - f(z)|$ devient maximum et pour z_0 le point de D″ où $|f_n(z) - f(z)|$ le devient.

Citons encore les deux faits suivants : *Si la famille* $f(z)$ *vérifie les conditions* $f(z) \neq 0$ *et*

$$\operatorname{Arg} f(z) < 2m\pi, \tag{3a}$$

où m est commun pour toute la famille, alors à chaque D_1 *on peut faire*

(1) En remplaçant la famille $|f(z)| > 1$ par la famille $|f(z)| > 1$, on pourrait démontrer ce théorème en partant d'un théorème de M. Valiron et de la forme qu'a donnée M. Landau au théorème de M. Schottky. Pour trouver les théorèmes de M. Valiron, *voir Bulletin des Sciences mathématiques*, 1927, p. 169.

(2) Voir *F. N.*

correspondre une quantité finie $\alpha' > 1$ *telle qu'on ait*

$$\frac{1}{\alpha'} < \left| \frac{f(z_1)}{f(z_0)} \right| < \alpha', \tag{3b}$$

quels que soient les points z_1 *et* z_0 *de* D_1 (¹).

De même si la famille de $f(z)$ *vérifie la condition*

$$\gamma < \mathrm{R} f(z) < \beta,$$

on peut déterminer une quantité finie $\alpha'' > 0$ *telle qu'on ait*

$$|f(z_1) - f(z_0)| < \alpha'.$$

Le premier de ces faits se démontre en partant du fait que la famille

$$\mathrm{F}_{z_0}(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi(z_0)},$$

où

$$\varphi(z) = \sqrt[4m]{f(z)},$$

est normale et bornée.

Le second en partant du fait que la famille

$$\theta(z) = f(z) - f(z_0)$$

est normale et bornée.

D'ailleurs les détails de la démonstration ne diffèrent pas de ceux du lemme I.

4. En partant d'une famille de fonctions $\varphi(x, y)$ vérifiant la condition

$$\varphi(x, y) > 0, \tag{4}$$

et en fixant un point x_0, y_0 à l'intérieur de D_1 nous avons vu que la famille de fonctions harmoniques

$$\mathrm{F}(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x_0, y_0)}$$

est normale dans D et bornée dans chaque domaine D_1.

Appelons *noyau* de la famille $\varphi(x, y)$ la famille de fonctions $\psi(x, y)$

(¹) La réciproque de ce théorème est aussi vraie. Les inégalités (3a) et (3b) sont donc équivalentes.

limites des fonctions de la famille $F(x, y)$. Nous écrirons :

$$\{\psi(x, y)\} \equiv N\{\varphi(x, y)\}.$$

En désignant par $\Phi(x, y)$ une fonction conjuguée à $\varphi(x, y)$ nous écrirons aussi :

$$\{\psi(x, y)\} \equiv N\{T(z)\},$$

où

$$T(z) = e^{\varphi(x, y) + i\Phi(x, y)}.$$

D'ailleurs les symboles :

1° $$N\{\psi(x, y)\} \equiv N\{\xi(x, y)\}$$

ou

2° $$N\{F(z)\} \equiv N\{T(z)\}$$

ont la signification suivante :

1° Désigne que la famille de $\psi(x, y)$ et celle de $\xi(x, y)$ ont les mêmes noyaux; 2° désigne le même fait pour les deux familles : celle des $F(z)$ et celle de $T(z)$ en supposant toujours que

$$\psi(x, y) > 0, \quad \xi(x, y) > 0, \quad |F(z)| > 1, \quad |T(z)| > 1,$$

dans D.

De plus en considérant une famille de fonctions $F(z)$ holomorphes dans D et n'y prenant ni la valeur 0 ni la valeur 1, nous appellerons *noyau* de $F(z)$ la famille de toutes les fonctions-limites finies dans D de la famille de fonctions harmoniques

$$\frac{\log|F(z)|}{\log|F(z_0)|},$$

z_0 étant un point fixe intérieur de D. Les désignations étant les mêmes qu'auparavant.

On sait qu'une famille de fonctions $F(z)$ ne prenant ni la valeur 0 ni la valeur 1 est normale ([1]).

Nous dirons qu'une famille de $F(z)$ est *normale* P, dans D, si aucune $F(z)$ ne prend dans D ni la valeur 0 ni la valeur 1 et si la

---

([1]) Voir *F. N.*

famille $N\{F(z)\}$ en fixant un point z_0 ne contient pas la fonction qui est la constante *un*.

Avant de donner un théorème concernant les familles normales P nous allons démontrer le théorème suivant [1] : *Si la suite des fonctions $F_n(z)$ holomorphes dans D et tendant dans ce domaine uniformément vers l'infini est telle que $N\{F_n(z)\}$ ne contienne pas la fonction qui est la constante un, alors quel que soit l'entier K la suite*

$$F_n^{(K)}(z)\,(n=1,2\ldots)$$

tend uniformément vers l'infini dans D *et l'on a*

$$N\{F_n(z)\}\equiv N\{F'_n(z)\}\equiv\ldots\equiv N\{F_n^{(K)}(z)\}\equiv\ldots.$$

Posons

$$F_n(z)=e^{\varphi_n(x,y)+i\Phi_n(x,y)},$$

la détermination de $\Phi_n(x,y)$ étant fixée de manière qu'on ait pour chaque $F_n(z)$

$$(5)\qquad 2\pi+\varphi_n(x_0,y_0)>\Phi_n(x_0,y_0)\leqq\varphi_n(x_0,y_0),$$

D_1 désignant un domaine fermé intérieur à D et contenant z_0, je dis qu'à ce domaine, correspond un nombre fini positif a, tel qu'on a

$$(6)\qquad \frac{1}{a}<\frac{|\log F_n(z)|}{\log|F_n(z_0)|}<a.$$

On a en effet dans D_1 d'après (3″)

$$(7)\qquad 0<\frac{1}{\alpha}<R\left[\frac{\log F_n(z)}{\log|F_n(z_0)|}\right]=\frac{\log|F_n(z)|}{\log|F_n(z_0)|}<\alpha.$$

La famille

$$\tau_n(z)=\frac{\log F_n(z)}{\log|F_n(z_0)|}$$

---

(1) Un théorème concernant le nombre de zéros des dérivées d'une famille dont le noyau ne contient pas la constante 1 a été démontré par M. Biernacki (*C. R.*, 186, p. 1799). M. Valiron a généralisé le théorème qui suit en considérant les fonetions qui ne prennent ni la valeur 0 ni 1. Cette généralisation porte sur la première derivée. M. Valiron publie son résultat dans *Rendiconti di Circolo de Palermo*.

vérifie donc la condition du théorème de la page 178, la famille

$$\frac{\log F_n(z)}{\log |F_n(z_0)|} - \frac{\log F_n(z_0)}{\log |F_n(z_0)|}$$

est donc normale et bornée dans D d'après le même théorème.

Donc

$$\left| \frac{\log F_n(z)}{\log |F_n(z_0)} - 1 - i\frac{\Phi_n(x_0, y_0)}{\varphi_n(x_0, y^0(} \right| < A,$$

et d'après (5) et (7)

$$\frac{1}{\alpha} < \left| \frac{\log F_n(z)}{\log |F_n(z_0)|} \right| < +A + 2 + \frac{2\pi}{\varphi_n(x_0, y_0)}.$$

D'où (6).

La famille

$$\tau_n'(z) = \left[\frac{\log F_n(z)}{\log |F_n(z_0)|} \right]'$$

est donc également bornée et normale, ce que l'on voit d'après un fait connu ([1]).

Comme dans D les fonctions $\tau_n'(z)$ ne s'annulent pas, alors aucune fonction-limite de la famille $\tau_n(z)$ ne s'annule à l'intérieur de D, à moins qu'une fonction-limite soit identiquement nulle, ce qui résulte d'un théorème connu.

Mais ce dernier cas ne peut pas se présenter. Car si ceci avait lieu on pourrait extraire de la suite $\tau_n(z)$ une suite partielle $\tau_{n_i}(z)$ admettant une fonction limite de la forme

$$1 + pi,$$

où p est une constante, car

$$\tau_{n_i}(z) = \tau_{n_i}(z_0) + \int_{z_0}^{z} \tau_{n_i}'(z)\, dz$$

et

$$\lim \tau_{n_i}(z) = \lim \tau_{n_i}(z_0) = 1 + pi.$$

([1]) Si de chaque suite partielle d'une famille normale on peut extraire une famille bornée, alors toute la famille est bornée, voir *F. N.*

On a

$$\tau_n'(z) = \frac{F_n'(z)}{F_n(z) \operatorname{Log} |F_n(z_0)|}.$$

On aurait donc

$$\lim_{i=\infty} \frac{\log |F_{n_i}(z)|}{\log |F_{n_i}(z_0)|} = 1,$$

ce qui est contradictoire aux hypothèses.

Pour des raisons invoquées précédemment ([1]) on a alors

$$(7\,bis) \qquad 0 < \frac{1}{b} < |\tau'_n(z)| = \frac{|F'_n(z)|}{|F_n(z)|\,|\log |F_n(z_0)|} < b.$$

D'où il résulte immédiatement

$$\lim F'_n(z) = \infty,$$

uniformément dans D, on peut même écrire en tenant compte de (7 *bis*)

$$F'_n(z) = o[F_n(z) \operatorname{Log} F_n(z)].$$

On a de même

$$(8) \qquad \log |F'_n(z)| = \log |F_n(z)| + \log |\tau'_n(z)| + \log_2 |F_n(z)|.$$

Et si l'une des deux égalités

$$(9) \qquad \lim_{j=\infty} \frac{\log |F'_{n_j}(z)|}{\log |F'_{n_j}(z_0)|} = q(x, y), \qquad \lim_{j=\infty} \frac{\log |F_{n_j}(z)|}{\log |F_{n_j}(z_0)|} = q_1(x, y)$$

a lieu, l'autre a lieu également et l'on a

$$q(x, y) = q_1(x, y).$$

Il suffit d'écrire d'après (8)

$$\frac{\log |F'_{n_j}(z)|}{\log |F'_{n_j}(z_0)|} = \frac{\log |F_{n_j}(z)| + \log |\tau'_{n_j}(z)| + \log_2 |F_n(z_0)|}{\log |F_{n_j}(z_0)| + \log |\tau'_{n_j}(z_0)| + \log_2 |F_n(z_0)|}$$

et de passer à la limite.

On a donc

$$N\{F_n(z)\} \equiv N\{F'_n(z)\}.$$

Posons maintenant :

$$\log F'_n(z) = \chi_n(x, y) + \xi_n(x, y)i$$

([1]) *Voir* la note de la page précédente.

avec

$$\chi_n(x_0, y_0) \leqq \xi_n(x_0, y_0) < \chi_n(x_0, y_0) + 2\pi.$$

On constate comme auparavant qu'il existe une quantité a' telle qu'on ait

$$(10) \qquad 0 < \frac{1}{a'} < \frac{|\log F'_n(z)|}{\log|F'_n(z)|} < a'.$$

De chaque suite $F_{n_i}(z)$ on peut donc extraire une suite partielle F_{m_j} telle que les deux suites

$$\frac{\log F_{m_j}(z)}{\log|F_{m_j}(z_0)|} \quad \text{et} \quad \frac{\log F'_{m_j}(z)}{\log|F'_{m_j}(z_0)|}$$

tendent respectivement uniformément vers une fonction holomorphe, mais si l'on tient compte de (9) on a

$$(11) \qquad \lim \frac{\log F_{m_j}(z)}{\log|F_{m_j}(z_0)|} = \lim \frac{\log F'_{m_j}(z)}{\log|F'_{m_j}(z_0)|} + Ci,$$

où C est une constante réelle fixe dépendant de la suite F_{m_j}.

En dérivant la formule (11) on a

$$\lim \frac{F'_{m_j}(z)}{F_{m_j}(z)\log|F_{m_j}(z_0)|} = \lim \frac{F''_{m_j}(z)}{F'_{m_j}(z)\log|F'_{m_j}(z)|} = \lim \tau'_{m_j}(z).$$

D'où en tenant compte de (7 *bis*) on voit que pour n assez grand on aura

$$0 < \frac{1}{b'} < \frac{F''_n(z)}{F'_n(z)\log|F'_n(z_0)|} < b'$$

dans D_1.

D'où il résulte que

$$\lim |F''_n(z)| = \infty$$

uniformément dans D et que

$$N\{F_n(z)\} \equiv N\{F'_n(z)\} \equiv N\{F''_n(z)\}.$$

On passe par induction à la démonstration de notre théorème.

On voit d'autre part d'après (6) et d'après l'inégalité $|\tau_n(z)| < b$ que si l'on choisit la détermination de l'argument de $F_n(z)$ comme nous l'avons fait à la page 183, alors la famille

$$(11') \qquad \frac{F'_n(z)}{F_n(z)\log F_n(z)}$$

reste bornée.

Donc *si une suite de fonctions* $F_n(z)$ *tend uniformément vers l'infini alors on peut choisir la détermination de l'argument de* $F_n(z)$ *de manière que la famille de fonctions*

$$[\mathrm{Log}_2 F_n(z)]'$$

soit bornée. On peut donc écrire

$$F'_n(z) = O[F_n(z)\log F_n(z)].$$

De même, on voit d'après le raisonnement qui précède qu'après avoir choisi la détermination de l'argument de $F_n(z)$ comme nous l'avons fait, les deux conditions :

1° $N\{F_n(z)\}$ ne contient pas la fonction qui est la constante un.

2° $$|[\mathrm{Log}_2 F_n(z)]'| > d > 0$$

sont équivalentes.

Il est évident qu'il n'y a rien à changer dans notre raisonnement pour prouver le fait suivant : Si la famille des fonctions holomorphes dans D vérifie dans l'ensemble l'inégalité

$$|F(z)| > \delta > 1,$$

alors en posant

$$(12) \qquad \log|F(z_0)| \leqq \arg F(z_0) < \log|F(z_0)| + 2\pi.$$

La famille

$$[\mathrm{Log}_2 F(z)]'$$

est bornée.

L'égalité (11') nous fournit une borne supérieure pour le mode de croissance de $F'_n(z)$ quand $F_n(z)$ tend vers l'infini. Il est évident d'autre part qu'il n'existe pas en général de borne inférieure pour cette croissance : il suffit d'ajouter aux fonctions $F_n(z)$ des constantes qui tendent vers l'infini très rapidement pour le voir.

Du théorème nous pouvons tirer la conclusion suivante :

Si la famille de fonctions $F(z)$ *est dans un domaine* D *normale* P, *alors pour tout* k *la famille de fonctions* $F^{(k)}(z)$ *est normale dans* D.

5. Nous allons tirer du théorème quelques résultats concernant les fonctions entières :

Soient $F(z)$ *une fonction entière, et* $D_n(1, 2, \ldots)$ *une suite de domaines dans le plan de* z *; soient* $\varphi_n(Z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *les fonctions qui donnent la représentation conforme du cercle de rayon un autour de l'origine sur les domaines* D_n, Z_0 *et* Z_1 *étant deux points intérieurs de ce cercle, supposons que*

$$\lim_{n=\infty} F[\varphi_n(Z_0)] = \infty \tag{13}$$

et que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log|F[\varphi_n(Z_1)]|}{\log|F[\varphi_n(Z_0)]|} = \infty; \tag{14}$$

alors dans l'ensemble des domaines $D_n(n = 1, 2, \ldots)$ *la fonction* $F(z)$ *prend toutes les valeurs possibles sauf peut-être une.*

En effet, si l'on supposait que la conclusion du théorème n'a pas lieu, alors la famille

$$\theta_n(Z) = F[\varphi_n(Z)]$$

aurait été normale dans le cercle de rayon un autour de l'origine ; il résulterait alors que de chaque suite partielle de cette famille on pourrait extraire une autre suite qui tende uniformément vers l'infini, ce qui est impossible d'après (14) comme l'indique le théorème de la page 176 (n° **2**), en prenant dans ce théorème comme D_1 le cercle de rayon r_1 autour de l'origine, où r_1 est la plus grande des quantités $|Z_0|$ et $|Z_1|$.

On voit d'ailleurs d'après cette démonstration qu'*on peut remplacer dans le théorème précédent la condition* (14) *par la suivante :*

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log|F[\varphi_n(Z_1)]|}{\log|F[\varphi_n(Z_0)]|} > \alpha_1(r_1) \quad (^1),$$

où α_1 *est ce que devient* α' *si la classe* (K) *est remplacée par la classe* (B), *sans changer la conclusion.*

(1) *Voir* la note de la page 176.

Du théorème précédent résulte le fait suivant :

Soit $F(z)$ une fonction entière, supposons que pour deux suites de nombres positifs

$$x_n^0 (n = 1, 2, \ldots), \qquad x'_n (n = 1, 2, \ldots),$$

les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$(15) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{x'_n}{x_n^0} = 1 \quad (x'_n > x_n^0),$$

$$\lim_{n=\infty} F(x_n^0) = \infty,$$

$$(16) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log|F(x'_n)|}{\log|F(x_n^0)|} = \infty,$$

alors l'axe réel positif est une droite de Julia [1].

Soient p et t deux nombres positifs quelconques.

Posons :

$$x_0 > 0, \qquad x' = x_0 + p, \qquad x'' = x_0 - t,$$

et formons un domaine D' dont la frontière est formée des deux droites L_1 et L_2 passant respectivement par les points

$$L_1 \text{ par } x'' \quad \text{et} \quad x'' + (t + p + \gamma) e^{i\varphi} = \zeta,$$
$$L_2 \text{ par } x'' \quad \text{et} \quad x'' + (t + p + \gamma) e^{-i\varphi} = \bar{\zeta},$$

où φ est une quantité fixe mais quelconque de l'intervalle ouvert $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, et où γ est positif arbitrairement fixe, et de l'arc de cercle dont le centre est le point x'' et dont le rayon est $t + p + \gamma$.

Le domaine D' est choisi de manière à contenir les points x_0 et x' à son intérieur.

Considérons les fonctions

$$(17) \qquad X = \psi_n(z) = \frac{x'_n - x_n^0}{p}(z - x_0) + x_n^0.$$

Il est facile à vérifier que les fonctions $\psi_n(z)$ font correspondre au domaine D' des domaines D_n tels que si l'on désigne par φ_1 une quantité positive telle qu'on ait

$$\varphi_1 > \varphi,$$

[1] On appelle droite de Julia de $F(z)$ une droite issue de l'origine et telle que dans tout angle dont elle est la bissectrice, $F(z)$ prend toutes les valeurs possibles sauf peut-être une.

tous les D_n sont à l'intérieur de l'angle T dont la bissectrice est l'axe réel et dont l'ouverture est $2\varphi_1$, ces domaines étant situés dans le demi-plan positif de la variable z. Ceci résulte de l'hypothèse (15) et du fait que

$$\operatorname{Arg}(X - x_n^0) = \operatorname{Arg}(z - x_0).$$

Il suffit d'appliquer le théorème pour avoir prouvé notre assertion.

Il est aussi évident que si l'on fait la transformation conforme du domaine D' sur le cercle de rayon *un* autour de l'origine par intermédiaire de la fonction

$$Z = \theta(z) \qquad (z \text{ étant la variable du cercle}),$$

et si l'on désigne par z_0 et z_1 les deux points du cercle tels qu'on ait

$$\theta(z_0) = x_0 \qquad \text{et} \qquad \theta(z_1) = x_1.$$

On peut remplacer la condition (16) par la condition

$$\overline{\lim} \frac{\log |F(x'_n)|}{\log |F(x_n^0)|} > \alpha_1(r_1),$$

où z_1 est la plus grande des quantités $|z_0|$ et $|z_1|$.

Mais comme p et t sont positifs arbitraires et que x_0 et γ sont assujettis à la seule condition d'être positifs on peut les choisir de manière que les points z_0 et z_1 soient aussi voisins de l'origine qu'on le veut. D'où l'on voit, en appliquant l'égalité (23 *bis*), page 197, que *si*

$$\lim_{n=\infty} \frac{x'_n}{x_n^0} = 1 \qquad (x'_n > x_n^0),$$

$$\lim_{n=\infty} F(x_n^0) = \infty$$

et

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log |F(x'_n)|}{\log |F(x_n^0)|} = 1 + \beta \qquad (\beta > 0),$$

l'axe réel positif est une droite de Julia [1].

Pour prouver que le domaine D', avec t, x_0 et p convenablement choisis, peut être représenté sur le cercle de rayon *un* autour de l'ori-

(1) M. Biernacki a obtenu des résultats très intéressants concernant les droites J et qui sont en relation par leur démonstration avec les faits cités dans ce travail (*voir*, Biernacki, *C. R. Acad. Sc.*, 186, p. 1260, 1410).

gine de manière que les points z_0 et z_1 soient aussi voisins que l'on veut de l'origine de manière que les points z_0 et z_1 soient aussi voisins que l'on veut de l'origine, il suffit de remarquer que d'une part, d'après la méthode classique de Schwarz, les points réels du cercle correspondent aux points réels du domaine D' ; et que d'autre part on peut *après avoir construit* le domaine D' choisir d'autres points χ_0 et χ' qui peuvent jouer le rôle des points x_0 et x' (c'est-à-dire que le domaine D' peut être considéré comme construit en partant des points χ_0 et χ' avec p_1, t_1 et γ_1 comme il a été construit en partant des points x_0 et x' avec des p, t et γ donnés, il faut seulement que

$$p_1+t_1+\gamma_1=p+t+\gamma,$$

pour que ceci puisse se faire) et tels que

$$\theta(\chi_0)=0$$

et $p_1=\chi'-\chi_0$ étant assez petit pour que la quantité $\theta(\chi_1)$ soit aussi petite qu'on veut.

Je tiens encore à énoncer le théorème élémentaire suivant qui résulte immédiatement du théorème de la page 176.

Si l'on a uniformément dans D

$$\left.\begin{array}{l}\lim f_n(z)=\infty\\ \lim F_n(z)=\infty\end{array}\right\}\quad(n=1,2,\ldots),$$

où les f *et les* F *sont des fonctions holomorphes dans* D, *et si pour un point* z *intérieur à* D, *on a*

$$\lim\frac{\log|f_n(z_0)|}{\log|F_n(z_0)|}=\infty,$$

alors

$$\lim|f_n(z)+F_n(z)|=\infty$$

uniformément dans D.

Je tiens enfin à énoncer le théorème suivant dont la démonstration est immédiate si l'on tient compte du théorème de la page 176.

Considérons une famille de fonctions holomorphes dans D $f(z)$ et qui ne s'annulent pas dans ce domaine. Soit D_1 un domaine fermé quelconque à l'intérieur de D mais fixe. En faisant varier les points z et ζ

dans D_1 formons d'une part l'expression

$$m = \max \frac{\log |f(z)|}{\log |f(\zeta)|}.$$

et d'autre part

$$m' = \max \left| \frac{f(z)}{f(\zeta)} \right|.$$

Désignons par L la plus petite des quantités m et m'.

La condition nécessaire et suffisante pour que la famille soit normale est que l'ensemble des quantités L formées pour toutes les fonctions de cette famille soit borné.

6. Dans ce numéro nous allons entreprendre l'évaluation numérique par intermédiaire des inégalités de la quantité α' du n° **2** quand D et D_1 sont des cercles autour de l'origine.

Soient D un cercle de rayon r autour de l'origine, et D_1 un cercle de rayon $r_1 < r$ autour de l'origine.

La famille de fonctions harmoniques dans D et vérifiant dans ce domaine l'inégalité

$$\text{(A)} \qquad \varphi(x, y) > 0$$

jouit de la propriété que, dans D_1, on a

$$\frac{1}{\alpha'} < \frac{\varphi(x_1, y_1)}{\varphi(x_0, y_0)} < \alpha',$$

α' désigne ici la borne inférieure des quantités α telles qu'on ait pour une classe (K)

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{\varphi(x_1, y_1)}{\varphi(x_0, y_0)} < \alpha,$$

α' est une fonction de r et r_1 : $\alpha'(r, r_1)$.

Il est évident que cette quantité est une fonction du quotient $\frac{r_1}{r}$. En effet, considérons la famille de fonctions harmoniques appartenant à une classe (K) dans le cercle de rayon r' autour de l'origine ; dans le cercle de rayon r'_1 autour de l'origine ces fonctions $\psi(x, y)$ vérifient une inégalité

$$\frac{1}{\alpha'} < \frac{\psi(x_1, y_1)}{\psi(x_0, y_0)} < \alpha^1(r', r'_1).$$

Si $\frac{r_1}{r} = \frac{r'_1}{r'}$ la transformation $\left(z \middle| \frac{r'}{r} z\right)$ ramène le cercle de rayon r au cercle de rayon r'_1 et celui de rayon r_1 en celui de rayon r'_1, d'où l'on conclut immédiatement que

$$\alpha'(r, r_1) = \alpha'(r', r'_1).$$

Nous pouvons donc écrire $\alpha' = \alpha'\left(\frac{r_1}{r}\right)$.

Considérons la famille (K) en supposant $r = 1$; désignons par $\Phi(x, y)$ une fonction conjuguée à $\varphi(x, y)$ et telle que l'on ait

$$\varphi(0, 0) \leqq \Phi(0, 0) < \varphi(0, 0) + 2\pi.$$

Posons :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\,\Phi(x, y) \tag{19}$$

et

$$\eta(z) = \frac{f(z)}{\varphi(0, 0)}, \tag{L}$$

la famille (L) est, comme nous l'avons vu, bornée ; en posant :

$$r^1 < r^{(2)} < 1,$$

on a, dans le cercle de rayon $r^{(2)}$ autour de l'origine,

$$0 < \frac{1}{\alpha'_2} \leqq \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(0, 0)} \leqq \alpha'(r^{(2)}) = \alpha_2.$$

Donc la famille de fonctions

$$F(z) = e^{\tau(x,y) + i P(x,y)},$$

où

$$\tau(x, y) = \frac{-\Phi(x, y)\pi}{2\varphi(0, 0)\alpha_2}$$

et

$$0 < P(x, y) = \frac{\varphi(x, y)\pi}{2\varphi(0, 0)\alpha_2} < \frac{\pi}{2}$$

jouit de cette propriété que

$$0 \leqq P(x, y) = R\,F(z)$$

et

$$0 \leqq Q(x, y) = J\,F(z)$$

dans le cercle de rayon $r^{(2)}$.

Donc dans le cercle de rayon r^1, on a

$$\frac{P(o, o)}{\alpha'(r^{(2)}, r^1)} \leqq P(x, y) \leqq P(o, o)\, \alpha'(r^{(2)}, r^1),$$
$$\frac{Q(o, o)}{\alpha'(r^{(2)}, r^1)} \leqq Q(x, y) \leqq Q(o, o)\, \alpha'(r^{(2)}, r^1).$$

On a donc dans ce cercle

$$\frac{1}{\alpha'(r^{(2)}, r^1)} < \left|\frac{F(z)}{F(o)}\right| \leqq \alpha'(r^{(2)}, r^1).$$

On a donc immédiatement dans ce même cercle

$$\left|\frac{\Phi(x, y) - \Phi(o, o)}{\varphi(o, o)}\right| \leqq \frac{2\alpha_2}{\pi} \log \alpha'(r^{(2)}, r^1).$$

On a aussi évidemment dans le même cercle

$$\left|\frac{\varphi(x, y) - \varphi(o, o)}{\varphi(o, o)}\right| < 1 + \alpha'(r^{(2)}, r^1).$$

D'où dans le cercle de rayon r'

$$(20) \qquad \left|\frac{f(z) - f(o)}{\varphi(o, o)}\right| < 1 + \alpha'(r^{(2)}, r^1) + \frac{2\alpha_2}{\pi} \log \alpha'(r^{(2)}, r^1).$$

En posant

$$r^{(2)} = \sqrt{r_1}$$

et en rappelant que

$$\alpha_2 = \alpha'(1, r^{(2)}),$$

on voit d'après ce que nous avons dit dès le début de ce numéro sur la fonction $\alpha(r, r_1)$ que

$$\alpha_2 = \alpha'(1, r^{(2)}) = \alpha'(r^{(2)}, r^1) = \alpha'(\sqrt{r^1}).$$

D'où, en tenant compte de (20), on a dans le cercle de rayon r' autour de l'origine

$$\left|\frac{f(z)}{\varphi(o, o)} - \frac{f(o)}{\varphi(o, o)}\right| < 1 + \alpha'(\sqrt{r^1}) + 2\alpha'(\sqrt{r^1}) \log \alpha'(\sqrt{r^1})$$
$$= 1 + \alpha'(\sqrt{r^1})\left\{1 + \frac{2}{\pi} \log \alpha'(\sqrt{r^1})\right\} = \lambda(r^1).$$

Il suffit maintenant d'appliquer le lemme classique de Schwarz à la fonction

$$T(z) = \frac{f(z)}{\varphi(0, 0)} - \frac{f(0)}{\varphi(0, 0)}$$

qui s'annule à l'origine pour voir que dans un cercle de rayon $r_2 < r^1$ autour de l'origine, on a

$$\left| \frac{f(z)}{\varphi(0, 0)} - \frac{f(0)}{\varphi(0, 0)} \right| < \frac{r_2}{r^1} \lambda(r^1).$$

Donc comme

$$RT(z) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(0, 0)} - 1.$$

On a pour la famille (K) ou dans le cercle de rayon r_2 autour de l'origine

$$\frac{\varphi(x, y)}{\varphi(0, 0)} \leqq 1 + \frac{r_2}{r^1} \left[1 + \alpha'(\sqrt{r^1}) \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \log \alpha'(\sqrt{r^1}) \right\} \right]. \tag{21}$$

Posons :

$$\frac{x - x_0}{1 - r_2} = X, \qquad \frac{y - y_0}{1 - r_2} = Y \tag{22}$$

et

$$\varphi(x, y) = \Psi(X, Y) > 0.$$

Si $3r_2 \leqq 1$, alors toutes les images de points $|z| \leqq r_2$ sont dans le cercle fermé de centre O et de rayon *un* construit dans le plan de la variable

$$Z = X + iY.$$

On a d'autre part, pour les fonctions $\Psi(XY)$, d'après (21), l'inégalité suivante :

$$\frac{\Psi(X, Y)}{\Psi(0, 0)} \leqq 1 + \frac{R_2}{R_1} \left[1 + \alpha'(\sqrt{R_1}) \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \log \alpha'(\sqrt{R_1}) \right\} \right]$$

où $R_2 < R_1 < 1$.

En posant maintenant

$$3 r_2 < r_1 < 1,$$

mettons

$$R_1 = \frac{r_1 - r_2}{1 - r_2} < 1 \qquad \text{et} \qquad R_2 = \frac{2 r_2}{1 - r_2} < R_1,$$

On voit, d'après les formules (22), que si le point z et le point z_0 sont tous les deux sur le cercle fermé de rayon r_2 autour de l'origine, alors le point correspondant Z est dans le cercle fermé de rayon R_2 autour de l'origine.

D'où l'on tire immédiatement

$$\frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x_0, y_0)} < 1 + \frac{2r_2}{r_1 - r_2}\left[1 + \alpha'\left(\sqrt{\frac{r_1 - r_2}{1 - r_2}}\right)\left\{1 + \frac{2}{\pi}\log\alpha'\left(\sqrt{\frac{r_1 - r_2}{1 - r_2}}\right)\right\}\right],$$

quel que soit le couple de points (x_0, y_0) et (x, y) dans le cercle de rayon r_2 autour de l'origine.

D'où

$$(23)\quad \alpha'(r_2) < 1 + \frac{2r_2}{r_1 - r_2}\left[1 + \alpha'\left(\sqrt{\frac{r_1 - r_2}{1 - r_2}}\right)\left\{1 + \frac{2}{\pi}\log\alpha'\left(\sqrt{\frac{r_1 - r_2}{1 - r_2}}\right)\right\}\right].$$

De cette formule résulte par exemple que

$$(23\ bis)\qquad \lim_{r=0}\alpha'(r) = 1$$

bien que ce dernier fait on puisse démontrer d'une manière beaucoup plus immédiate, en tenant compte, par exemple, du fait que la famille de fonctions

$$F_{x_0, y_0}(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x_0, y_0)}$$

est également continue dans D.

Remarquons maintenant que si l'on attache au domaine D_1 une quantité $\alpha^{(2)}$ qui joue le même rôle pour la famille (B″)

$$(C)\qquad |\varphi(x, y)| > P > 1$$

extraite de (K) que la quantité α' jouait pour la famille (K), alors

$$\alpha' = \alpha^{(2)}.$$

En effet, d'une part on a

$$\alpha^{(2)} \leqq \alpha'$$

et d'autre part on peut construire une famille (B‴) également extraite de la famille (K) et qui vérifiera l'inégalité (3′) pour deux points de D_1 : (x_0, y_0) et (x_1, y_1).

Soit

$$\varphi_n(x, y)$$

cette famille (B‴). Posons :

$$m_n = \min \varphi_n(x, y) \text{ dans D}$$

Les fonctions

$$\tau_n(x, y) = \frac{P}{m_n}\varphi_n(x, y)$$

vérifient encore l'inégalité (3′) pour les mêmes points tout en appartenant à la famille (C). Donc

$$\alpha^{(2)} \geqq \alpha'.$$

D'où notre assertion.

En considérant les fonctions $f(z)$ définies par l'égalité (19) où les $\varphi(x, y)$ sont les fonctions de la famille (C), on voit que

$$\eta(0) = \frac{f(0)}{\varphi(0, 0)} = 1 + i\frac{\Phi(0, 0)}{\varphi(0, 0)},$$

où

$$1 \leqq \frac{\Phi(0, 0)}{\varphi(0, 0)} < 1 + \frac{2\pi}{P}.$$

Les fonctions $-\eta(z)$ correspondant à la famille (C) ont donc les propriétés suivantes : $-\eta(z)$ ne prennent ni la valeur 0, ni la valeur 1 :

$$-\eta(0) = -1 + i\rho,$$

ρ étant une quantité liée à la fonction $\eta(z)$ et telle

$$-1 - \frac{2\pi}{P} < \rho \leqq -1.$$

Supposons maintenant comme auparavant que le domaine D est le cercle de rayon *un* autour de l'origine et que D_1 est le cercle concentrique de rayon r_1. Appelons fonction de Schotky la quantité connue

$$\Omega(a_0, \theta);$$

c'est la borne inférieure de toutes les quantités M telles que la famille de fonctions $F(z)$ qui ne prennent ni la valeur 0, ni la valeur 1, qui sont holomorphes dans le cercle de rayon *un* autour de l'origine et qui prennent la valeur a_0 à l'origine satisfait dans l'ensemble à l'inégalité

$$|F(z)| < M$$

dans le cercle de rayon θ autour de l'origine.

Posons $\theta = r_1$ et supposons que a_0 varie sur le segment dont les extrémités sont les points

$$[-1, -1i], \quad \left[-1\left(-1-\frac{2\pi}{P}\right)i\right].$$

Soit Ω le maximum de $\Omega(a_0, r_1)$ dans ces conditions.

On a donc d'après le théorème de Schotky-Carathéodory [1]

$$|\eta(z)| < \Omega$$

dans D_1 (cercle de rayon r_1 autour de l'origine).

D'où l'on voit immédiatement que dans D_1 l'inégalité suivante a lieu :

$$\frac{\varphi(x, y)}{\varphi(0, 0)} < \Omega.$$

D'après ce que nous avons dit au début de ce numéro, il est évident que le nombre P peut être pris arbitrairement grand. Il est donc visible que dans D_1 on a

$$\frac{\varphi(x, y)}{\varphi(0, 0)} < \Omega\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}, r_1\right).$$

Par des considérations analogues à celles que nous avons invoquées à la page 193, on voit que si $3r_1 < 1$, alors dans le cercle de rayon r_1 autour de l'origine, on aura

$$\frac{\varphi(x, y)}{\varphi(x_0, y_0)} < \Omega\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}, \frac{2r_1}{1-r_1}\right).$$

On a alors finalement, si $r_1 < \frac{1}{3}$,

$$\alpha'(r_1) < \Omega\left(e^{\frac{3\pi}{2}i}, \frac{2r_1}{1-r_1}\right).$$

Il est évident que cette limitation de $\alpha'(r)$ qui est prise d'une manière assez artificielle est assez éloignée de sa valeur exacte.

Le 13 décembre 1927.

N. B. — L'ensemble (K) de la page 175 a été introduit à la correction des épreuves.

Le 28 juin 1929.

(1) *Voir* la note de la page 176.