JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIERRE HUMBERT

Sur une généralisation de l'équation de Laplace

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 145-159.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__145_0>

Sur une généralisation de l'équation de Laplace;

Par Pierre HUMBERT.

---

1. Les liens étroits qui existent entre l'équation de Laplace

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \ldots = 0$$

à un nombre quelconque de variables, et les fonctions hypergéométriques du second ordre, sont bien connus. On sait depuis longtemps que les produits de Laplace pour l'espace ordinaire contiennent, suivant les cas, soit des polynomes de Legendre ou de Gegenbauer, cas particuliers de la série hypergéométrique de Gauss, soit des fonctions de Weber ou de Bessel, cas limites de la même série. Dans l'espace à quatre dimensions, M. Appell a montré que le lien subsistait entre l'équation de Laplace à quatre variables et les fonctions hypergéométriques de deux variables, découvertes par lui. Ce résultat a été généralisé à n dimensions par M. Kampé de Fériet, au moyen des séries de Lauricella; j'ai montré moi-même le rôle joué dans ce genre de problèmes par les fonctions hypergéométriques confluentes de deux variables. Bien entendu, des remarques identiques peuvent être faites sur l'équation des ondes

$$\Delta_2 U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

qui se ramène immédiatement à l'équation de Laplace ([1]).

([1]) Pour tout ce qui concerne l'équation de Laplace, l'équation des ondes, les fonctions hypergéométriques des divers ordres et leurs cas particuliers, on consultera Whittaker and Watson (*Modern Analysis*, 4^e^ édition, Cambridge, 1928), ou Appell et Kampé de Fériet (*Fonctions hypergéométriques et hypersphériques*, Paris, 1926).

Proposons-nous alors le problème suivant, auquel ces pages vont esquisser une réponse : *peut-on mettre en évidence un lien semblable, entre des équations analogues à l'équation de Laplace ou à celle des ondes, mais du troisième ordre, et les fonctions hypergéométriques du troisième ordre*, complètes ou confluentes, qui se rattachent à la série de Clausen

$$ {}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; x). $$

I.

2. Cherchons d'abord quelle équation nous devons étudier, c'est-à-dire quelle est l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre qui semble être la généralisation la plus directe de l'équation de Laplace. Bornons-nous au cas le plus simple, et considérons l'équation à deux variables seulement

$$ \Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \tag{1} $$

Si l'on y fait le changement de variables

$$ \left\{ \begin{aligned} u &= x + iy, \\ v &= x - iy, \end{aligned} \right. \tag{2} $$

elle devient

$$ \frac{\partial^2 U}{\partial u\, \partial v} = 0, \tag{3} $$

et l'on en déduit sa solution générale

$$ f(u) + g(v), $$

où f et g sont des fonctions arbitraires.

L'équation du troisième ordre que nous cherchons sera donc celle qui, par un changement de variables analogue à (2), deviendra

$$ \frac{\partial^3 U}{\partial u\, \partial v\, \partial w} = 0. \tag{4} $$

Il est alors indiqué de poser

$$ \begin{aligned} u &= x + y + z \\ v &= x + j\,y + j^2 z \qquad (j^3 = 1) \\ w &= x + j^2 y + j\,z \end{aligned} $$

et l'on obtient l'équation suivante, généralisation évidente, à trois variables et du troisième ordre, de l'équation de Laplace à deux variables :

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 0. \tag{5}$$

Nous désignerons son premier membre, pour simplifier, par $\Delta_3 U$.

3 (1). Pour chercher s'il existe un lien entre cette équation et la fonction de Clausen, nous commencerons par suivre la méthode employée par M. Appell pour rattacher les fonctions hypergéométriques de deux variables à l'équation de Laplace dans l'espace à quatre dimensions : cette méthode est d'ailleurs due à M. Giulotto, qui s'en est servi dans un problème analogue (2).

L'équation (4) admet, comme on le constate aisément, la solution générale suivante

$$F(u, v) + G(v, w) + H(w, u), \tag{6}$$

où F, G, H sont arbitraires. En particulier, la fonction

$$\log u + \log v + \log w = \log uvw$$

sera solution de (4). Mais

$$uvw = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz,$$

donc la fonction

$$\log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$$

sera solution de (5).

D'ailleurs l'équation (5) est satisfaite aussi par

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz),$$

et par conséquent par la fonction

$$\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial h^n}\log[(x-h)^3 + y^3 + z^3 - 3(x-h)yz],$$

(1) Un résumé des résultats contenus dans ce paragraphe a été communiqué au Congrès international des mathématiciens (Bologne, septembre 1928).

(2) *Rend. Circolo Mat. Palermo*, t. 17, 1903, p. 1.

où l'on fera $h=0$. Désignons cette expression par $R_n(x, y, z)$. On a, d'autre part,

$$\log[(x-h)^3+y^3+z^3-3(x-h)yz]=\sum_{n=0}^{\infty} h^n R_n(x, y, z).$$

Supposons alors que le point x, y, z reste sur la courbe C définie par les équations

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3-3xyz=1, \\ x^2-yz=0, \end{cases}$$

on aura

$$\log[(x-h)^3+y^3+z^3-3(x-h)yz]=\log(1+3h^2x-h^3),$$

de sorte que, sur la courbe C, la fonction $R_n(x, y, z)$ se réduira à la fonction $P_n(x)$, définie par le développement

$$\log(1+3h^2x-h^3)=\sum_{0}^{\infty} h^n P_n(x), \tag{7}$$

et qui est visiblement un polynome en x. *Les polynomes* P_n *qui*, comme nous allons le montrer, *se rattachent à l'équation de Clausen*, *jouent donc*, *sur la courbe* C *et pour l'équation* $\Delta_3 U=0$, *exactement le même rôle que les polynomes* $C_n^\nu(x)$ *de Gegenbauer sur le cercle et pour l'équation* $\Delta_2 U=0$ *à deux variables*, rôle joué également dans le cas de trois variables par les polynomes de Legendre sur la sphère, de quatre variables par les polynomes d'Hermite-Didon sur l'hypersphère, etc.

4. Il suffit alors de considérer le développement (7) pour en tirer, par les procédés classiques, des formules de récurrence entre les polynomes P et leurs dérivées, telles que

$$(n+1)P_{n+1}+3x(n-1)P_{n-1}-(n-2)P_{n-2}=0,$$
$$nP_n=P'_{n-1}-2xP'_n,$$

qui permettront d'établir l'équation différentielle du troisième ordre à laquelle satisfait le polynome P_n

$$(4x^3+1)\frac{d^3P_n}{dx^3}+18x^2\frac{d^2P_n}{dx^2}+(10+3n-3n^2)x\frac{dP_n}{dx}+n^2(n-3)P_n=0.$$

C'est une équation du type hypergéométrique de Clausen, et l'on en peut écrire une solution sous la forme

$$ {}_3F_2\left(-\frac{n}{6}, \frac{n}{6}+\frac{1}{2}, \frac{n}{3}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; -4x^3\right). $$

On verra, d'une façon plus précise, que le polynome P_n est représenté, suivant les cas, par l'une des expressions suivantes, où m est entier :

$$ P_{3m} = -\frac{1}{m}\ {}_3F_2\left(-\frac{m}{2}, \frac{1}{2}-\frac{m}{2}, m; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; -4x^3\right), $$

$$ P_{3m+1} = -\frac{9mx^2}{2}\ {}_3F_2\left(-\frac{m}{2}+\frac{1}{2}, -\frac{m}{2}+1, m+1; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; -4x^3\right), $$

$$ P_{3m+2} = 3x\ {}_3F_2\left(-\frac{m}{2}, \frac{1}{2}-\frac{m}{2}, m+1; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -4x^3\right). $$

L'équation différentielle à laquelle satisfait P_n se rencontre aussi dans la théorie des fonctions elliptiques. Si l'on pose en effet

$$ x = \wp u \qquad (g_2 = 0,\ g_3 = -1), $$

elle devient

$$ \frac{d^3y}{du^3} - \frac{dy}{du}(3n^2 - 3n + 2)\wp u + n^2(n-3)y\wp' u = 0. $$

C'est une équation étudiée par Halphen ([1]) et qui se rattache à la division de l'argument par 3. Halphen a montré que, si n est entier, une de ses solutions est un polynome en $\wp u$: c'est précisément notre polynome P_n. Si n n'est pas entier, l'équation est satisfaite par un polynome en $\wp\frac{u}{3}$ et $\wp'\frac{u}{3}$, multiplié par l'expression $\left(\psi_3 \frac{u}{3}\right)^{-n}$.

5. Le polynome P_n est d'ailleurs à peu près identique à certains polynomes déjà connus. On sait que, pour généraliser les fonctions de Legendre, M. Pincherle ([2]) a considéré les polynomes $\Pi_n(x)$ naissant du développement

$$ \sqrt{1 - 3tx + t^3} = \sum t^n \Pi_n(x), $$

et en a indiqué d'intéressantes propriétés. A côté de ces polynomes, j'ai introduit, il y a quelques années ([3]), ceux qui proviennent du

---

([1]) *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, p. 564.

([2]) *Memorie della R. Accad. Bologna*, 5e série, t. I, 1890, p. 337.

([3]) *Proceedings Edinburgh mat. Soc.*, vol. XXXIX, 1920-1921, p. 21.

développement plus général

$$(1-3tx+t^3)^{-\nu}=\sum t^n \Pi_n^\nu(x),$$

où ν est quelconque : on voit que ces polynomes sont à ceux de M. Pincherle ce que les fonctions de Gegenbauer sont à celles de Legendre. Lorsque ν tend vers zéro, on est amené à considérer les polynomes Π_n^0 comme définis par

$$-\log(1-3tx+t^3)=\sum t^n \Pi_n^0(x).$$

Les polynomes Π_n^ν ont été étudiés par M. Bevan Baker (¹), qui en a donné l'expression hypergéométrique, et a montré en particulier que

$$\begin{aligned}\Pi_n^0(x) = {} & \alpha\; {}_3F_2\left(-\frac{n}{3}, \frac{n}{6}+\frac{1}{2}, \frac{n}{6}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}; 4x^3\right)\\ & + \beta x\; {}_3F_2\left(-\frac{n}{3}+\frac{1}{3}, \frac{n}{6}+\frac{1}{3}, \frac{n+5}{6}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; 4x^3\right)\\ & + \gamma x^2\; {}_3F_2\left(-\frac{n}{3}+\frac{2}{3}, \frac{n}{6}+\frac{2}{3}, \frac{n+7}{6}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; 4x^3\right).\end{aligned}$$

Le polynome P_n considéré plus haut est donc, à un facteur constant près, égal à $\Pi_{-n}^0(-x)$. Il est intéressant de constater que ce sont justement ces polynomes qui se rattachent à $\Delta_3 U = 0$, comme les fonctions de Gegenbauer, dont ils sont la généralisation immédiate, se rattachent à $\Delta_2 U = 0$.

6. D'autres polynomes du même type se rencontrent encore dans le même problème. L'équation (4) est satisfaite également par l'expression

$$(u^3+v^3+w^3)^2=(u^6+2u^3v^3)+(v^6+2v^3w^3)+(w^6+2w^3u^3)$$

qui est bien de la forme (6). Or

$$u^3+v^3+w^3=3(x^3+y^3+z^3+6xyz).$$

Donc $(x^3+y^3+z^3+6xyz)^2$ vérifie (5), ainsi que ses dérivées. Un raisonnement identique à celui que nous avons fait plus haut conduit alors à rattacher à l'équation $\Delta_3 U = 0$, sur la courbe

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3+6xyz=1,\\ x^2+2yz=0,\end{cases}$$

(¹) *Proceedings Edinburgh mat. Soc.*, vol. XXXIX, 1920-1921, p. 58.

les polynomes hypergéométriques $Q_n(x)$ naissant du développement

$$(1+3h^2x-h^3)^2=\sum h^n Q_n(x),$$

mais ce résultat est moins intéressant que le précédent, car ces polynomes sont en nombre limité. Ils s'expriment d'ailleurs au moyen des polynomes Π_n^ν par la formule

$$Q_n(x)=(-1)^n \Pi_{6-n}^{-2}(x),$$

et peuvent par conséquent être écrits au moyen de la série de Clausen.

II.

7. Nous pouvons aussi employer une autre méthode pour trouver des solutions de $\Delta_3 U = 0$: celle du changement de variables. On sait tout l'intérêt qui s'attache à la recherche de solutions particulières de l'équation de Laplace, lorsqu'on y remplace les coordonnées cartésiennes par des variables convenablement choisies. Le plus simple de ces résultats s'obtient en faisant, dans l'équation à deux variables $\Delta_2 U = 0$, le changement

$$\left\{\begin{aligned} x &= r\cos r_1, \\ y &= r\sin r_1 \end{aligned}\right. \tag{8}$$

qui conduit à la fonction de Laplace

$$U = r^m \begin{matrix}\cos\\ \cdot\\ \sin\end{matrix}\, m r_1.$$

Cherchons à trouver un résultat analogue pour $\Delta_3 U = 0$. Partons, pour simplifier, de l'équation

$$\frac{\partial^3 U}{\partial u\,\partial v\,\partial w}=0,$$

et faisons le changement de variables

$$\begin{aligned} \rho &= \rho\ (u,\ v,\ w), \\ \rho_1 &= \rho_1(u,\ v,\ w), \\ \rho_2 &= \rho_2(u,\ v,\ w). \end{aligned}$$

On pourra, dans la nouvelle équation, faire disparaître les termes tels que $\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2\,\partial\rho_1}$, si les variables vérifient les six relations

$$
(9)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\rho_1}{\partial w}+\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial w}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}+\frac{\partial\rho}{\partial w}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial w}+\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial w}\frac{\partial\rho_2}{\partial u}+\frac{\partial\rho}{\partial w}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial w}+\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho_1}{\partial w}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\frac{\partial\rho_1}{\partial w}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}=0.\\
&\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial w}+\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial w}\frac{\partial\rho}{\partial u}+\frac{\partial\rho_2}{\partial w}\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial w}+\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho_1}{\partial w}\frac{\partial\rho_2}{\partial u}+\frac{\partial\rho_1}{\partial w}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial v}=0,\\
&\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial\rho_1}{\partial w}+\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial w}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}+\frac{\partial\rho_2}{\partial w}\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}=0,
\end{aligned}
\right.
$$

dans ce cas, l'équation deviendra

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^3 U}{\partial\rho^3}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial w}+\frac{\partial^3 U}{\partial\rho_1^3}\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho_1}{\partial w}+\frac{\partial^3 U}{\partial\rho_2^3}\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial w}\\
&\quad+\frac{\partial^3 U}{\partial\rho\,\partial\rho_1\,\partial\rho_2}\Big[\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial w}+\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial\rho_1}{\partial w}+\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\rho_2}{\partial w}\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial w}+\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial w}+\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\rho_1}{\partial w}\Big]\\
&\quad+\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}\Big[\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial^2\rho}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial\rho}{\partial w}\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}\Big]\\
&\quad+\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_1^2}\Big[\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial\rho_1}{\partial w}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial u\,\partial v}\Big]\\
&\quad+\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_2^2}\Big[\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial\rho_2}{\partial w}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial u\,\partial v}\Big]\\
&\quad+\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\,\partial\rho_1}\Big[\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial^2\rho}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial u\,\partial w}\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial\rho}{\partial w}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\rho_1}{\partial w}\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}\Big]\\
&\quad+\frac{\partial^2 U}{\partial\rho\,\partial\rho_2}\Big[\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\frac{\partial^2\rho}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial u\,\partial w}\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial\rho}{\partial w}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\rho_2}{\partial w}\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}\Big]\\
&\quad+\frac{\partial^2 U}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}\Big[\frac{\partial\rho_1}{\partial u}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\rho_2}{\partial u}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial v\,\partial w}+\frac{\partial\rho_1}{\partial v}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial u\,\partial w}\\
&\qquad\qquad+\frac{\partial\rho_2}{\partial v}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial u\,\partial w}+\frac{\partial\rho_1}{\partial w}\frac{\partial^2\rho_2}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\rho_2}{\partial w}\frac{\partial^2\rho_1}{\partial u\,\partial v}\Big]\\
&\quad+\frac{\partial U}{\partial\rho}\frac{\partial^3\rho}{\partial u\,\partial v\,\partial w}+\frac{\partial U}{\partial\rho_1}\frac{\partial^3\rho_1}{\partial u\,\partial v\,\partial w}+\frac{\partial U}{\partial\rho_2}\frac{\partial^3\rho_2}{\partial u\,\partial v\,\partial w}=0.
\end{aligned}
$$

Considérons alors le changement de variables

$$
(10) \qquad \begin{cases} \rho = uvw, \\ \rho_1 = j^2 \log u + j \log v + \log w, \\ \rho_2 = j \log u + j^2 \log v + \log w. \end{cases}
$$

On constatera, d'une part, que les relations (9) sont vérifiées, d'autre part, que les termes rectangles disparaissent également dans l'équation finale, de sorte qu'il restera

$$
(11) \qquad \rho^3 \frac{\partial^3 U}{\partial \rho^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial \rho_1^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial \rho_2^3} - 3\rho \frac{\partial^3 U}{\partial \rho\, \partial \rho_1\, \partial \rho_2} + 3\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0
$$

Il est nécessaire alors, afin de séparer les variables ρ d'une part, ρ_1 et ρ_2 de l'autre, d'introduire les fonctions connues sous le nom de *sinus d'ordre supérieur* d'Yvon Villarceau, qui généralisent pour le troisième ordre les fonctions circulaires. Ces trois fonctions, solutions indépendantes de l'équation différentielle

$$
\frac{d^3 y}{dx^2} + y = 0,
$$

seront, dans ce qui suit, désignées par les notations $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ et sont définies par les égalités

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= \frac{e^{-x} + e^{-jx} + e^{-j^2 x}}{3}, \\
f_2(x) &= \frac{e^{-x} + j\, e^{-jx} + j^2\, e^{-j^2 x}}{3}, \\
f_3(x) &= \frac{e^{-x} + j^2\, e^{-jx} + j\, e^{-j^2 x}}{3},
\end{aligned}
$$

et l'on a les relations évidentes

$$
\begin{aligned}
f_1'(x) &= -f_2(x), \\
f_2'(x) &= -f_3(x), \\
f_3'(x) &= -f_1(x).
\end{aligned}
$$

D'autre part, comme je l'ai indiqué ailleurs [1], ces trois fonctions s'expriment par des cas particuliers d'une des fonctions hypergéomé-

---

[1] *Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes : Sciences*, 1925, p. 85.

triques confluentes du troisième ordre, de même que les fonctions circulaires s'expriment par des cas particuliers de la fonction de Bessel, confluente du second ordre.

Dans ces conditions, il est facile de voir que la fonction

$$\Phi(\rho_1, \rho_2) = f_1(\rho_1) f_1(\rho_2) + f_2(\rho_1) f_2(\rho_2) + f_3(\rho_1) f_3(\rho_2)$$

satisfait aux relations

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho_1 \, \partial \rho_2} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \rho_1^3} = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \rho_2^3} = - \Phi.$$

Si donc nous posons, dans l'équation (11),

$$\begin{aligned} U &= V(\rho) \Phi(m_1 \rho_1, m_2 \rho_2) \\ &= V(\rho) [f_1(m_1 \rho_1) f_1(m_2 \rho_2) + f_2(m_1 \rho_1) f_2(m_2 \rho_2) + f_3(m_1 \rho_1) f_3(m_2 \rho_2)], \end{aligned}$$

m_1 et m_2 étant des constantes quelconques, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U}{\partial \rho_1^3} &= - m_1^3 \; V(\rho) \; \Phi(m_1 \rho_1, m_2 \rho_2); \\ \frac{\partial^3 U}{\partial \rho_2^3} &= - m_2^3 \; V(\rho) \; \Phi(m_1 \rho_1, m_2 \rho_2); \\ \frac{\partial^3 U}{\partial \rho \, \partial \rho_1 \, \partial \rho_2} &= - m_1 m_2 \frac{dV}{d\rho} \Phi(m_1 \rho_1, m_2 \rho_2); \end{aligned}$$

donc l'équation, après division des deux membres par le facteur Φ, deviendra une équation en ρ seul :

$$\rho^3 \frac{d^3 V}{d\rho^3} + 3 \rho^2 \frac{d^2 V}{d\rho^2} + (1 - 3 m_1 m_2) \rho \frac{dV}{d\rho} - (m_1^3 + m_2^3) V = 0.$$

Elle admet la solution

$$V = \rho^{m_1 + m_2}.$$

Ainsi, avec le changement de variables considéré, l'équation $\Delta_3 U = 0$ est satisfaite par la fonction

$$\rho^{m_1+m_2} [f_1(m_1 \rho_1) f_1(m_2 \rho_2) + f_2(m_1 \rho_1) f_2(m_2 \rho_2) + f_3(m_1 \rho_1) f_3(m_2 \rho_2)]$$

et l'on verrait de même qu'elle est satisfaite également par les deux autres fonctions analogues

$$\begin{aligned} &\rho^{m_1+m_2} [f_1(m_1 \rho_1) f_2(m_2 \rho_2) + f_2(m_1 \rho_1) f_3(m_2 \rho_2) + f_3(m_1 \rho_1) f_1(m_2 \rho_2)], \\ &\rho^{m_1+m_2} [f_2(m_1 \rho_1) f_3(m_2 \rho_2) + f_2(m_1 \rho_1) f_1(m_2 \rho_2) + f_3(m_1 \rho_1) f_2(m_2 \rho_2)]. \end{aligned}$$

Or, si l'on reprend le changement de variables (10), on en tire

$$u^3 = \rho\, e^{j\rho_1 + j^2\rho_2},$$
$$v^3 = \rho\, e^{j^2\rho_1 + j\rho_2},$$
$$w^3 = \rho\, e^{\rho_1 + \rho_2},$$

ce qui nous conduit, pour les variables x, y, z, au changement

$$x = \sqrt[3]{\rho}\left[f_1\left(\frac{\rho_1}{3}\right)f_1\left(\frac{\rho_2}{3}\right) + f_2\left(\frac{\rho_1}{3}\right)f_2\left(\frac{\rho_2}{3}\right) + f_3\left(\frac{\rho_1}{3}\right)f_3\left(\frac{\rho_2}{3}\right)\right],$$
$$y = \sqrt[3]{\rho}\left[f_1\left(\frac{\rho_1}{3}\right)f_2\left(\frac{\rho_2}{3}\right) + f_2\left(\frac{\rho_1}{3}\right)f_3\left(\frac{\rho_2}{3}\right) + f_3\left(\frac{\rho_1}{3}\right)f_1\left(\frac{\rho_2}{3}\right)\right],$$
$$z = \sqrt[3]{\rho}\left[f_1\left(\frac{\rho_1}{3}\right)f_3\left(\frac{\rho_1}{3}\right) + f_2\left(\frac{\rho_1}{3}\right)f_1\left(\frac{\rho_2}{3}\right) + f_3\left(\frac{\rho_3}{3}\right)f_2\left(\frac{\rho_2}{3}\right)\right],$$

où la coordonnée $\rho = \text{const.}$ est la surface du troisième ordre, déjà rencontrée plus haut,

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \rho.$$

Nous arrivons donc au résultat final que nous énoncerons sous la forme suivante, avec un léger changement de notations :

De même que l'équation de Laplace à deux variables $\Delta_2 U = 0$ *où l'on fait le changement de variables*

$$(12) \qquad \begin{cases} x = r\cos r_1, \\ y = r\sin r_1, \end{cases}$$

qui donne $x^2 + y^2 = r^2$, *admet les deux solutions*

$$U_1 = r^m \cos m r_1,$$
$$U_2 = r^m \sin m r_1.$$

l'équation généralisée $\Delta_3 U = 0$, *c'est-à-dire*

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\,\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 0,$$

où l'on fait le changement de variables

$$(13) \qquad \begin{cases} x = r[f_1(r_1)f_1(r_2) + f_2(r_1)f_2(r_2) + f_3(r_1)f_3(r_2)], \\ y = r[f_1(r_1)f_2(r_2) + f_2(r_1)f_3(r_2) + f_3(r_1)f_1(r_2)], \\ z = r[f_1(r_1)f_3(r_2) + f_2(r_1)f_1(r_2) + f_3(r_1)f_2(r_2)], \end{cases}$$

qui donne $x^3+y^3+z^3-3xyz=r^3$, *admet les trois solutions*

$$U_1=r^{m_1+m_2}[f_1(m_1r_1)f_1(m_2r_2)+f_2(m_1r_1)f_2(m_2r_2)+f_3(m_1r_1)f_3(m_1r_2)],$$
$$U_2=r^{m_1+m_2}[f_1(m_1r_1)f_2(m_2r_2)+f_2(m_1r_1)f_3(m_2r_2)+f_3(m_1r_1)f_1(m_2r_2)],$$
$$U_3=r^{m_1+m_2}[f_1(m_1r_1)f_3(m_2r_2)+f_2(m_1r_1)f_1(m_2r_2)+f_3(m_1r_1)f_2(m_2r_2)].$$

III.

8. A côté de l'équation de Laplace, on peut chercher à généraliser l'équation des ondes, qui, réduite à deux variables spatiales, s'écrit

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Il est indiqué d'étudier l'équation

$$(15)\qquad \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 U}{\partial z^3}-3\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z}=\frac{1}{c^3}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}$$

ou

$$\Delta_3 U-\frac{1}{c^3}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3}=0.$$

Si l'on cherche des solutions de la forme

$$U=e^{ct}\,V(x,y,z),$$

on aura pour V l'équation

$$\Delta_3 V-V=0.$$

Or, si l'on fait dans l'équation (14) le changement de variables (12), on est amené à la solution

$$U=e^{ct}\,{\sin \atop \cos}\,mr_1\,J_m(ir),$$

où J est la fonction de Bessel; si nous préférons introduire, à la place de cette fonction, la fonction hypergéométrique confluente ${}_0F_1$ qui lui est équivalente, nous écrirons cette solution sous la forme

$$U=e^{ct}r^m\,{}_0F_1\left(m+1;\frac{r^2}{4}\right){\sin \atop \cos}\,mr_1.$$

Nous généraliserons ce résultat à propos de l'équation (15), en reprenant le changement de variables (13) et en posant dès l'abord

$$U = e^{ct} V(x, y, z).$$

En nous souvenant que

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\frac{\partial^3 U}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = 27\frac{\partial^3 U}{\partial u\, \partial v\, \partial w},$$

nous verrons que l'équation (15) pourra s'écrire

$$\frac{\partial^3 V}{\partial u\, \partial v\, \partial w} = \frac{V}{27},$$

et nous obtiendrons l'équation

$$\rho^3 \frac{\partial^3 V}{\partial \rho^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial \rho_1^3} + \frac{\partial^3 V}{\partial \rho_2^3} - 3\frac{\partial^3 V}{\partial \rho\, \partial \rho_1\, \partial \rho_2} + 3\rho^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\rho}{27} V = 0.$$

Nous poserons encore

$$V = W(\rho)[f_1(m_1\rho_1)f_1(m_2\rho_2) + f_2(m_1\rho_1)f_2(m_2\rho_2) + f_3(m_1\rho_1)f_3(m_2\rho_2)]$$

et, si l'on fait

$$W(\rho) = \rho^{m_1+m_2} R(\rho),$$

on aura pour R l'équation

$$\begin{aligned}\rho^2 \frac{d^3 R}{d\rho^3} &+ 3\rho(m_1 + m_2 + 1)\frac{d^2 R}{d\rho^2} \\ &+ [3(m_1 + m_2)^2 + 3(m_1 + m_2) - 3m_1 m_2 + 1]\frac{dR}{d\rho} - \frac{R}{27} = 0.\end{aligned}$$

C'est là une équation qui se rencontre dans la théorie des fonctions hypergéométriqnes confluentes du troisième ordre : la fonction

$$y = {}_0F_2(b_1, b_2; x),$$

qui doit être considérée comme la généralisation la plus immédiate des fonctions de Bessel, satisfait en effet à

$$x^2 y''' + (b_1 + b_2 + 1)xy'' + b_1 b_2 y' - y = 0,$$

ce qui nous donne

$$R(\rho) = {}_0F_2\left(b_1, b_2; \frac{\rho}{27}\right),$$

les paramètres b_1 et b_2 ayant les valeurs, un peu compliquées,

$$b_1 = m_1(1-j^2) + m_2(1-j) + 1,$$
$$b_2 = m_1(1-j) + m_2(1-j^2) + 1.$$

On pourra simplifier le résultat en prenant $m_1 = m_2 = m$; on aura alors $b_1 = b_2 = 3m+1$; ce qui conduira à l'énoncé suivant, après avoir légèrement changé les notations :

De même que l'équation des ondes (à deux variables spatiales)

$$\Delta_2 U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

où l'on fait le changement de variables

$$x = r\cos r_1,$$
$$y = r\sin r_1,$$

admet les solutions

$$U_1 = e^{ct} r^m {}_0F_1\left(m+1\,;\,\frac{r^2}{4}\right)\cos m r_1,$$
$$U_2 = e^{ct} r^m {}_0F_1\left(m+1\,;\,\frac{r^2}{4}\right)\sin m r_1.$$

l'équation généralisée

$$\Delta_3 U - \frac{1}{c^3}\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} = 0,$$

où l'on fait le changement de variables

$$x = r[f_1(r_1)f_1(r_2) + f_2(r_1)f_2(r_2) + f_3(r_1)f_3(r_2)],$$
$$y = r[f_1(r_1)f_2(r_2) + f_2(r_1)f_3(r_2) + f_3(r_1)f_1(r_2)],$$
$$z = r[f_1(r_1)f_3(r_2) + f_2(r_1)f_1(r_2) + f_3(r_1)f_2(r_2)],$$

admet les solutions

$$U_1 = e^{ct} r^{2m} {}_0F_2\left(m+1,\, m+1\,;\,\frac{r^3}{27}\right)$$
$$\times [f_1(mr_1)f_1(mr_2) + f_2(mr_1)f_2(mr_2) + f_3(mr_1)f_3(mr_2)],$$
$$U_2 = e^{ct} r^{2m} {}_0F_2\left(m+1,\, m+1\,;\,\frac{r^3}{27}\right)$$
$$\times [f_1(mr_1)f_2(mr_2) + f_2(mr_1)f_3(mr_2) + f_3(mr_1)f_2(mr_2)],$$
$$U_3 = e^{ct} r^{2m} {}_0F_2\left(m+1,\, m+1\,;\,\frac{r^3}{27}\right)$$
$$\times [f_1(mr_1)f_3(mr_2) + f_2(mr_1)f_1(mr_2) + f_3(mr_1)f_2(mr_2)].$$

En se bornant à un cas particulier, on peut donner à cet énoncé la forme suivante, qui généralise une propriété connue des fonctions de Bessel :

De même que l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + U = 0$$

est satisfaite par

$${}_0F_1\left(1\,;\, -\frac{x^2+y^2}{4}\right),$$

l'équation

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3\,\frac{\partial^3 U}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + U = 0$$

est satisfaite par

$${}_0F_2\left(1,\ 1\,;\, -\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{27}\right).$$